Лекція ?. Крайова задача. Метод скінченних різниць.

Задачі розв'язання диференціального рівняння 2-го порядку і вище із заданими крайовими умовами.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x); \quad y = y(x),\ a \le x \le b \tag{1}$$

та дві крайові умови на кінцях відрізка. Крайові умови бувають:

1. $y(a) = u_1$ — крайова умова першого роду або умова типу Дирихле.
2. $y'(a) = v_1$ — крайова умова другого роду або типу фон Неймана.
3. $\alpha y'(a) + \beta y(a) = \gamma$ — крайова умова третього роду або змішана.

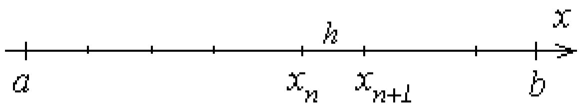
Припускається будь-яка комбінація крайових умов різного виду в обох кінцях відрізка, окрім випадку, коли в обох крайових точках задані одночасно умови другого роду. Такий випадок є некоректним.

Нехай маємо такі крайові умови:

$$y'(a) = v_1; \quad \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = \gamma_2 \tag{2}$$

<u>Метод скінченних різниць (МСР).</u>

На відрізку $[a, b]$ вводиться дискретна сітка $\omega_h = \{x_0, \ldots, x_n, \ldots, x_N\}$,



де вузли сітки $x_n = a + nh$, $n = 0,1,\ldots N$, $x_0 = a$, $x_N = b$, $h = \dfrac{b-a}{N}$.

Розв'язати задачу (1) означає знайти такий вектор $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$, що кожне значення y_n наближає відповідно $y(x_n)$. $y(x)$ — аналітичний розв'язок задачі (1).

<u>Обчислення першої похідної.</u>

Вводяться різницеві похідні наступним чином:

$\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = y_x$ — перша різницева похідна "вперед"

$\dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = y_{\bar{x}}$ — перша різницева похідна "назад"

З'ясуємо точність апроксимації похідної $y'(x)$ такими різницевими похідними.

$$y(x \pm h) = y(x) \pm hy' + \frac{h^2}{2} y'' \pm \frac{h^3}{6} y''' + \frac{h^4}{24} y^{(4)} + O(h^5)$$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

Помилка обчислення похідної:

$$e_{y_x} = \frac{y(x+h)-y(x)}{h} - y'(x) = \frac{h}{2}y'' + O(h^2)$$

Як бачимо, перший порядок точності. Цілком аналогічно $e_{y_{\bar{x}}} = -\frac{h}{2}y'' + O(h^2)$. Помилка апроксимації $\approx O(h)$.

Вводиться перша центральна різницева похідна як середнє арифметичне першої різницевої похідної "вперед" та першої різницевої похідної "назад".

$$\frac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2h} = y_{\overset{0}{x}}\ ,\ e_{y_{\overset{0}{x}}} = \frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h} - y'(x) = \frac{h^2}{6}y''' + O(h^4)$$

Помилка апроксимації $\approx O(h^2)$.

$$y' = \frac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2h} + O(h^2)$$

<u>Обчислення другої похідної.</u>

Зауважимо, що перша різницева похідна "вперед" в n- му вузлі дискретної сітки є одночасно першою різницевою похідною "назад" в (n+1) – му вузлі. А перша різницева похідна "назад" в n- му вузлі дискретної сітки є одночасно першою різницевою похідною "вперед" в (n-1) – му вузлі.

$$(y_x)_n = (y_{\bar{x}})_{n+1}\ ; \quad (y_{\bar{x}})_n = (y_x)_{n-1}$$

$\dfrac{(y_x)_n - (y_x)_{n-1}}{h}$ — різницева похідна "назад"; $\dfrac{(y_x)_{n+1} - (y_x)_n}{h}$ — різницева похідна "вперед".

Друга різницева похідна:

$$\frac{y_x - y_{\bar{x}}}{h} = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} = y_{x\bar{x}} = y_{\bar{x}x}$$

Помилка апроксимації другої похідної $\approx O(h^2)$. Перевірити самостійно.

$$y'' = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + O(h^2)$$

Нехай $p_n = p(x_n)$, $q_n = q(x_n)$, $f_n = f(x_n)$.

Враховуючи все, зазначене вище, задачу (1) запишемо наступним чином:

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + p_n\frac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2h} + q_n y_n = f_n\ , \quad n = 1,\ldots,N-1 \quad (3)$$

це система $(N-1)$ рівнянь з $(N+1)$ невідомими, тобто недовизначена на 2 рівняння. Додаємо до системи 2 рівняння – рівняння крайових умов.

Далі є два варіанти розв'язання.

<u>Варіант1.</u> Цей варіант є більш простим, але менш точним.

Маємо такі крайові умови:

$y'(a) = v_1$; $\quad \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = \gamma_2$

$y'(a) = v_1$ — цю умову не можемо наблизити першою центральною різницевою похідною, так як невідомо чи існує взагалі y_{-1} (чи існує взагалі розв'язок задачі (1) за межами відрізка $[a,b]$). Тому наближаємо її першою різницевою похідною "вперед".

$\dfrac{y_1 - y_0}{h} = v_1$ (помилка наближення $\approx O(h)$).

Друга крайова умова $\alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = \gamma_2$ також не може бути наближена першою центральною похідною. Її наближаємо першою різницевою похідною "назад".

$\alpha_2 \dfrac{y_N - y_{N-1}}{h} + \beta_2 y_N = \gamma_2$ (помилка наближення $\approx O(h)$).

Зауваження. Якщо хоча б одне з рівнянь системи вносить в розв'язок помилку $\approx O(h)$, тоді загальна помилка розв'язку всієї системи $\approx O(h)$.

Отже, результат збігатиметься до точного розв'язку зі швидкістю $O(h)$.

<u>Варіант2.</u> Більш точний.

Наближаємо крайові умови центральними похідними:

$\dfrac{y_0 - y_{-1}}{h} = v_1$ (*), $\alpha_2 \dfrac{y_{N+1} - y_{N-1}}{2h} + \beta_2 y_N = \gamma_2$ (**), де y_{-1}, y_{N+1} — фіктивні змінні. Тепер розглядаємо систему (3) як систему з $(N+1)$ ($n = 0, \ldots, N$) рівнянь з $(N+3)$ невідомими:

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + p_n \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + q_n y_n = f_n, \quad n = 0, \ldots, N \qquad (3^*)$$

Розглянемо рівняння системи (3*) при $n = 0$:

$$\frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} + p_0 \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} + q_0 y_0 = f_0 \qquad (4)$$

Далі виражаємо з крайової умови (*) змінну y_{-1}: $y_{-1} = y_1 - 2hv_1$ і підставляємо його в (4).

Розглянемо рівняння системи (3*) при $n = N$:

$$\frac{y_{N+1} - 2y_N + y_{N-1}}{h^2} + p_N \frac{y_{N+1} - y_{N-1}}{2h} + q_n y_N = f_N \qquad (5)$$

Далі виражаємо з крайової умови (**) змінну y_{N+1}: $y_{N+1} = \dfrac{(\gamma_2 - \beta_2 y_N)2h}{\alpha_2} + y_{N-1}$

і підставимо в рівняння (5). Отримали систему з $(N+1)$ ($n = 0, \ldots, N$) рівнянь з $(N+1)$ невідомими.

Результат розв'язку такої системи збігається до точного розв'язку зі швидкістю $O(h^2)$.

Отримали систему

$$A\bar{y} = \overline{f}, \qquad (6)$$

причому матриця A є тридіагональною. Розмірність матриці ймовірно є значною $((N+1)\times(N+1))$ і розв'язувати її слід методом прогонки. Цей метод вимагає зберігати в пам'яті не всю матрицю системи, а лише три вектори значень.

$$A = \begin{bmatrix} x & x & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & & \cdots & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & & & \ldots & 0 & x & x \end{bmatrix}$$