Лекція 4. Метод Крилова. Степеневий метод.

(основна гілка алгоритму)

Нехай c_0 – деякий ненульовий вектор .Обчислімо послідовність

$$c_0, c_1 = Ac_0; c_2 = Ac_1 = A^2c_0; \dots c_n = Ac_{n-1} = A^n c_0.$$

Серед них не більше n лінійно незалежних .

Згідно теореми Гамільтона-Келі (Hamilton-Cayley) будь-яка матриця A вдовольняє власному характеристичному поліному

$$A^n + p_n A^{n-1} + p_{n-1} A^{n-2} + \dots + p_2 A + p_1 I = 0.$$

Помноживши це рівняння справа на c_0, одержуємо

$$c_n + p_n c_{n-1} + p_{n-1} c_{n-2} + \dots + p_2 c_1 + p_1 c_0 = 0,$$

або

$$\begin{bmatrix} c_{01} & c_{11} & \cdots & c_{n-11} \\ c_{02} & c_{12} & \cdots & c_{\text{n-1}2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{0n} & c_{1n} & \cdots & c_{\text{n-1n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} c_{n1} \\ c_{n2} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{bmatrix},$$

де c_{ij} – j-а координата i-го вектора (c_i) .Це СЛАР відносно невідомих коефіцієнтів характеристичного поліному .

Власні вектори шукаймо у вигляді

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i c_i.$$

Це представлення підставимо у ріняння $Av = \lambda v$

$$\sum \gamma_i A c_i = \lambda \sum \gamma_i c_i;$$

$$\gamma_0 c_1 + \gamma_1 c_2 + \dots + \gamma_{n-2} c_{n-1} + \gamma_{n-1} c_n =$$

$$= \lambda(\gamma_0 c_0 + \gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_{n-1} c_{n-1}).$$

Підставимо сюди значення c_n з (1) та перегрупируймо члени.Матимемо

$$(\lambda\gamma_0 + p_1\gamma_{n-1})c_0 + (\lambda\gamma_1 + \gamma_{n-1}p_2 - \gamma_0)c_1 + (\lambda\gamma_2 + \gamma_{n-1}p_3 - \gamma_1)c_2 + \dots$$

$$\dots + (\lambda\gamma_{n-1} + \gamma_{n-1}p_n - \gamma_{n-2})c_{n-1} = 0.$$

Але вектори c_i є лінійно незалежними .Тому всі коефіцієнти при них дорівнюють нулю .Починаючи з останньої дужки ,одержуємо

$$\gamma_{n-2} = (\lambda + p_n)\gamma_{n-1}; \quad \gamma_{\text{n-1}} \text{ – довільне ненульове}$$

$$\gamma_{n-3} = \lambda\gamma_{n-2} + p_{n-1}\gamma_{n-1};$$

$$\ldots$$

$$\gamma_1 = \lambda\gamma_2 + p_3\gamma_{n-1};$$

$$\gamma_0 = \lambda\gamma_1 + p_2\gamma_{n-1};$$

Остання рівність - для перевірки :

$$\lambda\gamma_0 + p_1\gamma_{n-1} = 0?$$

Степеневий метод пошуку власних пар .

1.Пошук верхньої межі спектру .

Нехай x_0- довільний ненульовий вектор .Ітераційний процес

$$\xi := Ax_i; \quad |\lambda| := \frac{\|\xi\|}{\|x_i\|}; \quad x_{i+1} := \frac{\xi}{\|\xi\|}$$

збігається до власної пари $(\pm\lambda_1, v_1)$ з точністю до знаку λ_1–найбільше за модулем власне число .

Знак λ_1 визначається від факту , чи міняється знак координати v_1 після множення на А.Тоді або $Av_1 = |\lambda| v_1$ $(\lambda_1 > 0)$,або $Av_1 + |\lambda| v_1 = 0$ $(\lambda_1 < 0)$.

Обгрунтування. Нехай

$$x_0 = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma_n v_n. \qquad (2)$$

Тоді при $k >> 1$

$$x_k = const(\gamma_1\lambda_1^k v_1 + \gamma_2\lambda_2^k v_2 + \ldots + \gamma_n\lambda_n^k v_n).$$

Якщо $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, то і якщо $\gamma_1 \neq 0$, то $\|\gamma_1\lambda_1^k v_1\| >> \left\|\sum_{i=2}^{n}\gamma_i\lambda_i^k v_i\right\|$

та $x_k \sim v_1$.

2. Пошук нижньої межі спектру .

Якщо (λ, v)-власна пара для А то для $B = A - \lambda_1 E$:

$$Bv = (A - \lambda_1 E)v = Av - \lambda_1 v = (\lambda - \lambda_1)v,$$

тобто власною парою для В буде $(\lambda - \lambda_1, v)$.

Якщо спектр А повністю дійсний та впорядкований :

$$\lambda_n < \lambda_{n-1} < \ldots < \lambda_2 < \lambda_1,$$

то найбільшим за модулем власним числом буде

$$\lambda_1(B) = \lambda_n^{(A)} - \lambda_1(A).$$

Для знаходження $\lambda_1(B)$ використовується той самий степеневий метод з п.1

Тоді $$\lambda_n(A) = \lambda_1(B) + \lambda_1(A). \qquad (3)$$

Зауваження. Якщо $A \geq 0$ або $A \leq 0,$ то $|\lambda_n| << |\lambda_1|$ і точність у формулі (3) буде дуже малою.Разом із числом $\lambda_1(B)$ буде знайдено $v_n(B) = v_n(A).$ Тому

$$|\lambda_n(A)| = \frac{\|Av_n\|}{\|v_n\|}.$$

та залишиться врахувати знак .

3. Обчислення другої та подальших пар.

Якби у формулі (2) $\gamma_1 = 0,$ то степеневий метод би збігався саме до $(|\lambda_2|, v_2)$! Тому треба штучно зробити γ_1 рівним нулю шляхом ортогоналізації . нехай $\|v_1\| = 1.$ Тоді $\|\mathrm{Pr}_{v_1}(x_0)\| = (x_0, v_1) = \gamma_1$!

Новий вектор $x_0 := x_0 - (x_0, v_1)v_1$

буде ортогональним до v_1 ,і може використовуватися як початковий для v_2 .

i+1). Якщо знайдено власні пари №1,…,i-1, то за початковий треба брати

$$x_0 := x_0 - \sum_{j=1}^{i-1}(x_0, v_j)v_j. \qquad (4)$$

Зауваження 2. Внаслідок скінчнності представлення чисел у ЕОМ помилка накопичуватиметься і $x_к$ все одно буде “збочуватися”у напрямку v_1 . Тому процедуру (4) треба застосовувати якщо не щоітерації ,то , принаймі , час від часу .

Зауваження 3. Для матриць великкої розмірності та з великим числом обумовленості $\delta(A) = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|}$ точність обчислення пар (λ_i, v_i) з i>>1 може виявитися незадовільною.