МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ
"КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО"
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

Практична робота №1
з курсу "Системний аналіз"

Виконав:

студент 4-го курсу

групи КА-43

Куриленко О. М.

варіант 7

Перевірила:

Панкратова Н.Д.

КИЇВ-2017

Завдання 1

При заданих цільових функціях $f_1(x)$, $f_2(x)$ та порогових обмеженнях f_1^*, f_2^* визначити область Парето на заданому інтервалі $[x_1, \quad x_2]$ при виконанні умов $f_1(x) \leqslant f_1^*$, $f_2(x) \geqslant f_2^*$.Звузити область Парето, використовуючи прийоми технічних обмежень.

При виконанні обчислень всі розрахунки провести з точністю до 0.0001, при звуженні інтервалів значення границь округлити до 0.001 і крок сітки брати рівним не більше 0.001.

$$f_1(x) = 9 - 6 \cdot x + x^2$$

$$f_2(x) = 18 - 9 \cdot x - 0.1 \cdot x^2$$
$$f_1^* = 45$$
$$f_2^* = 10$$
$$x_{min} = -5$$
$$x_{max} = 4$$

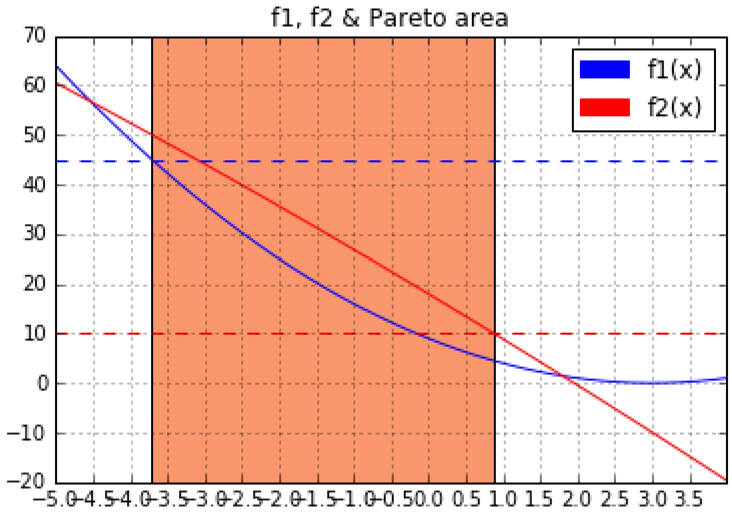
Розв'яжемо нерівність $f_1 \leqslant f_1^*$:

$$\left[\left[-3\sqrt{5} + 3, 3 + 3\sqrt{5}\right]\right].$$

Розв'яжемо нерівність $f_2 \geqslant f_2^*$:

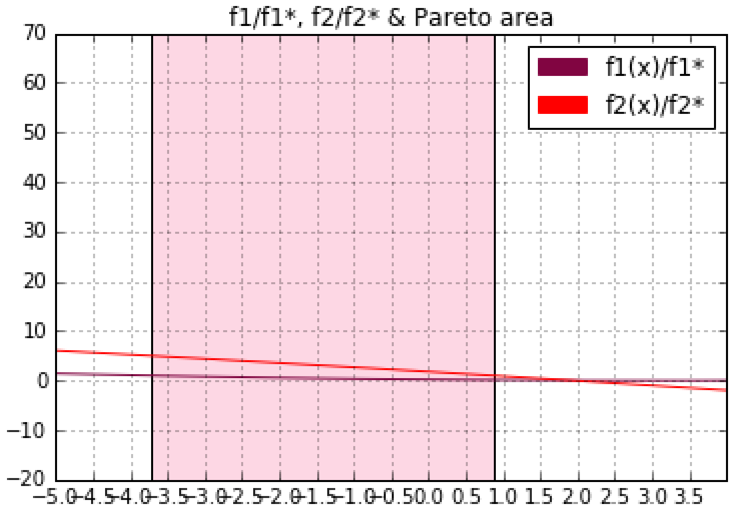
$$\left[\left[-\sqrt{2105} - 45, -45 + \sqrt{2105}\right]\right].$$

Будуємо графіки і зображуємо область Парето:



Ліва границя області Парето дорівнює -3.708, права границя дорівнює 0.88.

Застосовуємо метод технічних обмежень. Для цього зображуємо графіки $\frac{f_1}{f_1^*}$ та $\frac{f_2}{f_2^*}$:



Точки перетину $\dfrac{f_1}{f_1^*}$ та $\dfrac{f_2}{f_2^*}$: $[-25.7234499785868, \quad 1.93034653031098]$.
Жодна з них не входить до області Парето.

Скористаємося табличним методом:

	f1/f1*	f2/f2*	max(f_i/f_i*)	min(max(f_i/f_i*))	min(f_i/f_i*)
-3.708	0.999939	4.999707	4.999707		0.999939
-3.707	0.999641	4.998882	4.998882		0.999641
-3.706	0.999343	4.998056	4.998056		0.999343
-3.705	0.999045	4.997230	4.997230		0.999045
-3.704	0.998747	4.996404	4.996404		0.998747

	max(min(f_i/f_i*))
-3.708	0.999939
-3.707	
-3.706	
-3.705	
-3.704	

...

	f1/f1*	f2/f2*	max(f_i/f_i*)	min(max(f_i/f_i*))	min(f_i/f_i*)
0.876	0.100253	1.003926	1.003926		0.100253
0.877	0.100158	1.003009	1.003009		0.100158
0.878	0.100064	1.002091	1.002091		0.100064
0.879	0.099970	1.001174	1.001174		0.099970
0.880	0.099876	1.000256	1.000256	1.00026	0.099876

	max(min(f_i/f_i*))
0.876	
0.877	
0.878	
0.879	
0.880	

Згідно з теорією, область Парето має лежати між двома точками, в яких досягаються $\max\min\frac{f_i}{f_i^*}$ та $\min\max\frac{f_i}{f_i^*}$.
Можемо бачити, що метод технічних обмежень не звужує множину Парето внаслідок використання принципів максиміна/мінімакса.

Отже, множина Парето після звуження не змінилася:
$[-3\sqrt{5}+3, \quad \sqrt{2105}-45]$.

Завдання 2

Розглядається задача розкриття невизначеності протидії двої суб'єктів. Кожна сторона має свою цільову функцію: суб'єкт 1 - $f_1(x_1, x_2)$, суб'єкт 2 - $f_2(x_1, x_2)$. Суб'єкти діють незалежно – кожен не знає ані цільової функції, ані параметрів протилежної сторони.
Необхідно:
1. Визначити гарантований результат f_{12}^*, f_{21}^* кожного суб'єкта табличним, графічним та класичним методами.
2. Знайти область Парето з умови: $f_{12}(x_1, x_2) \geqslant f_{12}^*$, $f_{21}(x_1, x_2) \geqslant f_{21}^*$.
3. Визначити оптимальні значення x_1^*, x_2^*, при яких $\Delta_i = \mid f_i(x_1^*, x_2^*) - f_i^* \mid$, i = 1, 2 набуває мінімального значення $\Delta \longrightarrow 0$.

$f_1(x_1, x_2) = \frac{6}{5} \cdot (3 \cdot x_1^2 + 5 \cdot x_1 \cdot x_2 + 4 \cdot x_1)$;
$f_2(x_1, x_2) = -4 \cdot x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + 0.25 \cdot x_2^3 + 3$.
$x_{1\,\min} = 1$
$x_{1\,\max} = 5$
$x_{2\,\min} = 1$
$x_{2\,\max} = 5$
Крок сітки: 0.02.

Табличний метод

	x1	x2	f1(x1,x2)	f2(x1,x2)	min_x2(f1(x1,x2))
0	1.0	1.00	14.40	1.250000	14.4
1	1.0	1.02	14.52	1.305302	14.4
2	1.0	1.04	14.64	1.361216	14.4
3	1.0	1.06	14.76	1.417754	14.4
4	1.0	1.08	14.88	1.474928	14.4

	max_x1_min_x2(f1(x1,x2))	min_x1(f2(x1,x2))	max_x2_min_x1(f2(x1,x2))
0	144.0	-86.750000	-15.75
1	144.0	-86.534698	-15.75
2	144.0	-86.318784	-15.75
3	144.0	-86.102246	-15.75
4	144.0	-85.885072	-15.75

...

	x1	x2	f1(x1,x2)	f2(x1,x2)	min_x2(f1(x1,x2))
40396	5.0	4.92	261.6	-18.026128	144.0
40397	5.0	4.94	262.2	-17.461554	144.0
40398	5.0	4.96	262.8	-16.894016	144.0
40399	5.0	4.98	263.4	-16.323502	144.0
40400	5.0	5.00	264.0	-15.750000	144.0

	max_x1_min_x2(f1(x1,x2))	min_x1(f2(x1,x2))	max_x2_min_x1(f2(x1,x2))
40396	144.0	-18.026128	-15.75
40397	144.0	-17.461554	-15.75
40398	144.0	-16.894016	-15.75
40399	144.0	-16.323502	-15.75
40400	144.0	-15.750000	-15.75

З таблиці визначили, що $\max\limits_{x_1}\min\limits_{x_2}(f_1(x_1,x_2))$ = 144, $\max\limits_{x_2}\min\limits_{x_1}(f_2(x_1,x_2))$ = -15.75.

Виведемо відповідні рядки, де $f_1(x_1,x_2) = 144$ і $f_2(x_1,x_2) = -15.75$:

1) для f_1

	x1	x2	f1(x1,x2)	f2(x1,x2)	min_x2(f1(x1,x2))
30240	4.0	2.8	144.0	-33.112	100.8
40200	5.0	1.0	144.0	-86.750	144.0

	max_x1_min_x2(f1(x1,x2))	min_x1(f2(x1,x2))	max_x2_min_x1(f2(x1,x2))
30240	144.0	-63.512	-15.75
40200	144.0	-86.750	-15.75

$x_2 = 2.8$ не є точкою мінімуму при $x_1 = 4$, тож єдиним розв'язком є $x_1 = 5$, $x_2 = 1$.

2) для f_2

	x1	x2	f1(x1,x2)	f2(x1,x2)	min_x2(f1(x1,x2))
40400	5.0	5.0	264.0	-15.75	144.0

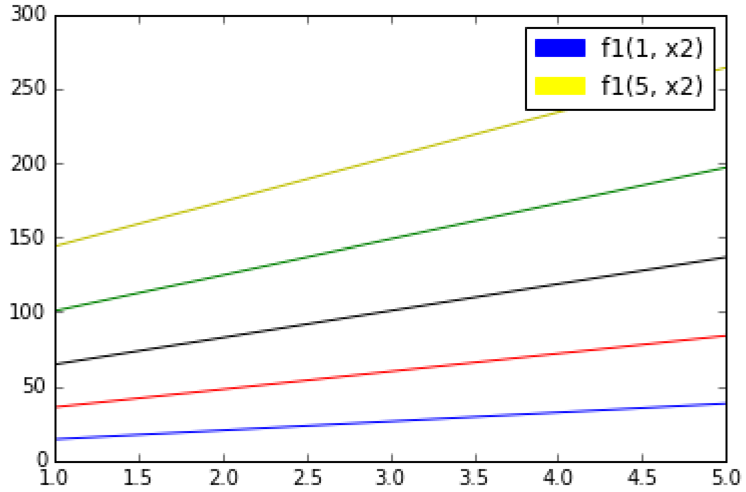
	max_x1_min_x2(f1(x1,x2))	min_x1(f2(x1,x2))	max_x2_min_x1(f2(x1,x2))
40400	144.0	-15.75	-15.75

$x_1 = 5, x_2 = 5.$

Тобто:
$f_{12}^* = f_1(5,1) = 144$, $f_{21}^* = f_2(5,5) = -15.75.$

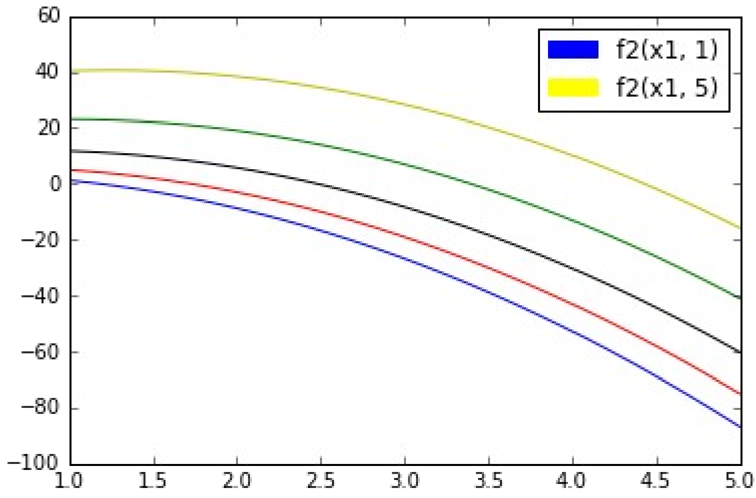
Графічний метод

1) для f_1



Як бачимо, максимальний мінімум функції f_1 досягається при $x_1 = 5$ і $x_2 = 1$, і дорівнює 144.

2) для f_2



Як бачимо, максимальний мінімум функції f_2 досягається при $x_1 = 5$ і $x_2 = 5$, і дорівнює -15.75.

Тобто:
$f_{12}^* = f_1(5, 1) = 144$, $f_{21}^* = f_2(5, 5) = -15.75$.

Класичний метод

1) Знайдемо x, при яких f_1 досягає $\max_1 min_2 f_1(x_1, x_2)$.

$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1.2 \cdot 5 \cdot x_1 = 0.$
$=> x_1 = 0 \notin [1, 5].$
Отже, $\max_1 min_2 f_1(x_1, x_2)$ досягається в граничних точках [1,5].
$f_1(1, x_2) = 1.2 \cdot (7 + 5 \cdot x_2).$
$f_1(5, x_2) = 1.2 \cdot (95 + 25 \cdot x_2).$
Оскільки в даному випадку $x_2 \in [1, 5]$, то max по x_1 досягається в точці $x_1 = 5$.

$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 6 \cdot x_2 + 1.2 \cdot (4 + 6 \cdot x_1) = 0.$
При $x_1 = 5$:
$x_2 \leqslant 0 => \notin [1, 5].$
Шукаємо в граничних точках:
$f_1(5, 1) = 144.$
$f_1(5, 5) = 264.$
Мінімум по x_2 досягається в точці $x_2 = 1$.
$max_1 min_2 f_1(x_1, x_2) = f_1(5, 1) = 144.$

2) Знайдемо x, при яких f_2 досягає $\max_2 min_1 f_2(x_1, x_2)$.

$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -8 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 0.$
$x_2 = 2 \cdot x_1$
$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 2 \cdot x_1 + 0.75 \cdot x_2^2 = 0.$
Отримуємо: $3 \cdot x_1^2 + x_1 = 0.$
Корені даного рівняння не належать проміжку [1,5]. Тож шукаємо в граничних точках.
$f_2(1, x_2) = -4 + 2 \cdot x_2 + 0.25 \cdot x_2^3 + 3.$
$f_2(5, x_2) = -100 + 10 \cdot x_2 + 0.25 \cdot x_2^3 + 3.$
На відрізку [1,5] мінімум по x_1 досягається в точці $x_1 = 5$.
Тоді $x_2 = 2 \cdot x_1 = 2 \cdot 5 = 10 \notin [1, 5].$
Отже, шукаємо в граничних точках.
$f_2(5, 1) = -86.75.$
$f_2(5, 5) = -15.75.$
Максимум по x_2 досягається при $x_2 = 5$.
$max_2 min_1 f_2(x_1, x_2) = f_2(5, 5) = -15.75.$

Тобто:
$f_{12}^* = f_1(5, 1) = 144$, $f_{21}^* = f_2(5, 5) = -15.75.$

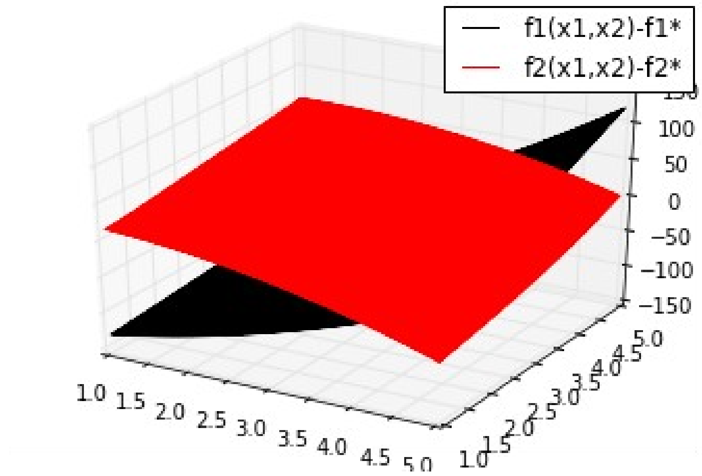
Знаходження області Парето

Множину Парето знаходимо виходячи з нерівностей $f_1(x_1, x_2) \geqslant f_1^*$ та $f_2(x_1, x_2) \geqslant f_2^*$.

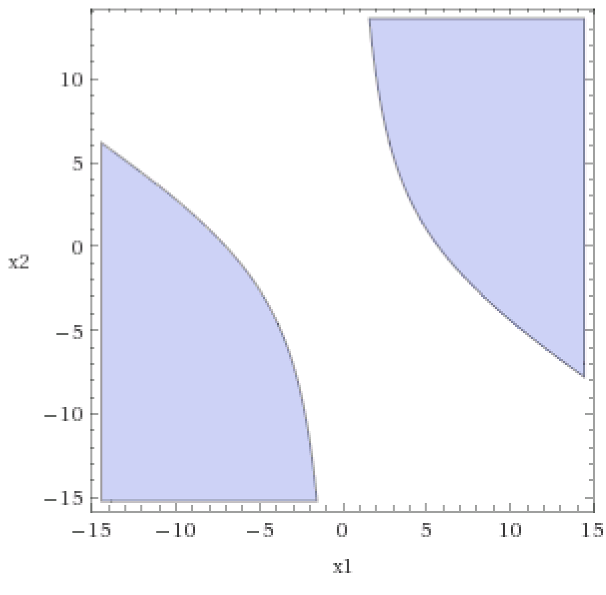
$\frac{18x_1^2}{5} + 6x_1x_2 + \frac{24x_1}{5} \geq 144,$

$-4x_1^2 + 2x_1x_2 + \frac{x_2^3}{4} + 3 \geq -\frac{63}{4},$

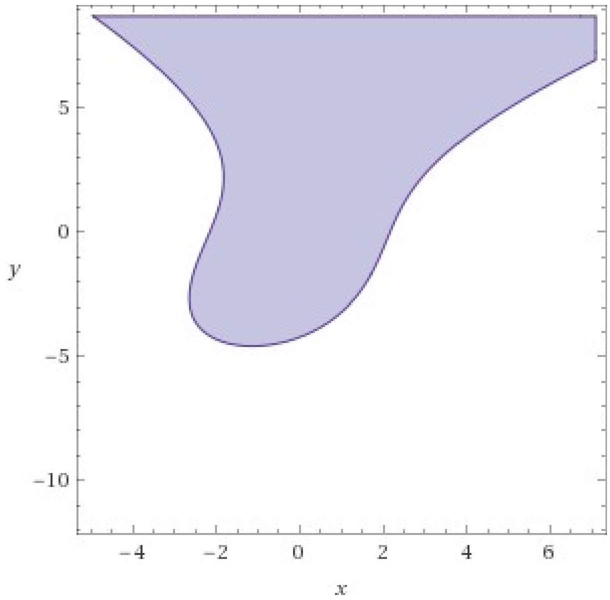
$x_1 \leq 5, x_1 \geq 1, x_2 \leq 5, x_2 \geq 1.$



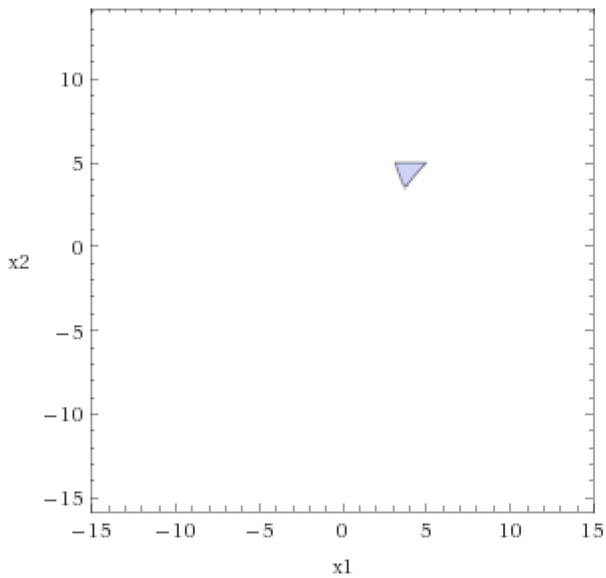
1) Для 1-го суб'єкта з умови $\frac{18x_1^2}{5} + 6x_1x_2 + \frac{24x_1}{5} \geq 144$:



2) Для 2-го суб'єкта з умови $-4x_1^2 + 2x_1x_2 + \frac{x_2^3}{4} + 3 \geq -\frac{63}{4}$:



Зображуємо множину Парето, де лежать раціональні розв'язки для протидіючих суб'єктів, у вигляді перетину областей для 1-го і 2-го суб'єктів з врахуванням обмежень на x_1 та x_2 :



Знаходження мінімального Δ

$\Delta = \min\limits_{x_1 x_2} \max\limits_{i} \Delta_i$, де $\Delta_i = | f_i(x_1, x_2) - f_i^* |$, $i = 1, 2.$

Знаходимо максимум з-поміж Δ_i для кожної пари (x_1, x_2):

	x1	x2	|f1-f1*|	|f2-f2*|	max(delta_i)
0	1.0	1.00	129.60	17.000000	129.60
1	1.0	1.02	129.48	17.055302	129.48
2	1.0	1.04	129.36	17.111216	129.36
3	1.0	1.06	129.24	17.167754	129.24

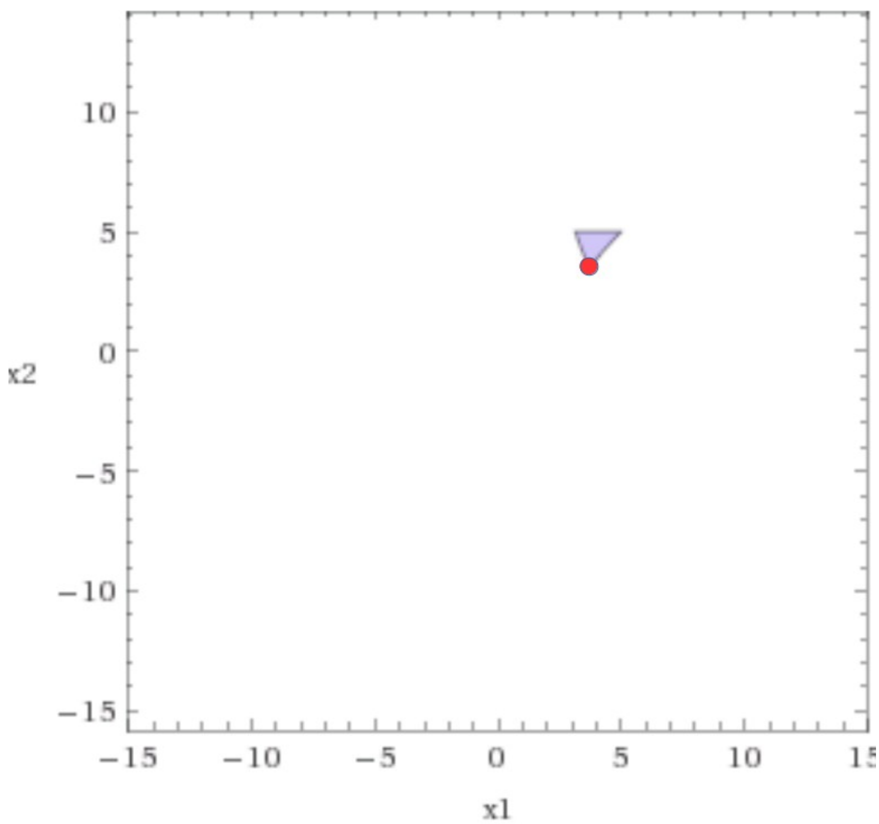
```
4  1.0  1.08    129.12  17.224928        129.12
…
       x1    x2    |f1-f1*| |f2-f2*|   max(delta_i)
40396  5.0  4.92     117.6  2.276128         117.6
40397  5.0  4.94     118.2  1.711554         118.2
40398  5.0  4.96     118.8  1.144016         118.8
40399  5.0  4.98     119.4  0.573502         119.4
40400  5.0  5.00     120.0  0.000000         120.0
```

$\Delta = \min\limits_{x_1 x_2} \max\limits_i \Delta_i = 0.144$, що відповідає рядку з таблиці:

```
       x1    x2     |f1-f1*| |f2-f2*|   max(delta_i)
27258  3.7  3.46     0.144  0.050566         0.144
```

Тобто оптимальні значення $(x_1^*, x_2^*) \approx (3.7, 3.46)$.

Зобразимо (x_1^*, x_2^*):



Лістинг програми

```
# coding: utf-8

# ### Завдання 1

# In[307]:

import numpy as np

import pandas as pd

import sympy as sp
from sympy.abc import x
from sympy import init_printing;
init_printing()

import matplotlib.patches as mpatches
import matplotlib.pyplot as plt
get_ipython().magic(u'matplotlib inline')


# In[308]:

f1 = lambda x: 9-6*x+x**2
f2 = lambda x: 18 - 9*x - 0.1*x**2
f1_star = 45
f2_star = 10
x_min = -5
x_max = 4
x_0_01 = np.linspace(x_min,x_max, 901)

# Розв'яжемо нерівність f1<=f1\*:

# In[309]:

#f1<=f1_star
sp.solve_poly_inequality(sp.Poly(9-6*x+x**2 - 45, x, domain='RR'), '<=')
#take left here


# Розв'яжемо нерівність f2<=f2\*:

# In[310]:
```

```
#f2>=f2_star
sp.solve_poly_inequality(sp.Poly(18 - 9*x - 0.1*x**2 - 10, x, domain='RR'), '>=')
#take right here


# Будуємо графіки і зображуємо область Парето:

# In[311]:

plt.figure(1)
fig1, ax1 = plt.subplots()
plt.plot(x_0_01,f1(x_0_01), 'b', x_0_01, f2(x_0_01), 'r')
plt.xticks(np.arange(-5,4,0.5))
plt.plot((-5, 4), (45, 45), 'b--')
plt.plot((-5, 4), (10, 10), 'r--')
plt.grid(True)
plt.plot()
ax1.fill_between(np.linspace(float(sp.solve(9-6*x+x**2 - 45, x)[1]),float(sp.solve(18
- 9*x - 0.1*x**2 - 10, x)[1]), 100), -20,70, facecolor='#F9966B')
plt.title('f1, f2 & Pareto area')
blue_patch = mpatches.Patch(color='blue', label="f1(x)")
red_patch = mpatches.Patch(color='red', label='f2(x)')
plt.legend(handles=[blue_patch, red_patch])


# Застосовуємо метод технічних обмежень.

# In[312]:

print"Pareto_left = %f. \nPareto right = %f.\nPareto_right - Pareto_left = %f."%
(round(float(-3*np.sqrt(5)+3),3), round(float(np.sqrt(2105)-45),3),
round(round(float(np.sqrt(2105)-45),3)-round(float(-3*np.sqrt(5)+3),3),3))
num_intervals_1 = int(round(round(float(np.sqrt(2105)-45),3)-round(float(-
3*np.sqrt(5)+3),3),3)/0.001)+1
print"Number of intervals (by 0.001): %i."%(num_intervals_1)

x_Pareto_0_001=np.linspace(round(float(-
3*np.sqrt(5)+3),3),round(float(np.sqrt(2105)-45),3), num_intervals_1)


# In[313]:

def max_df_1(x, y):
   returnvec=np.zeros(x.shape)
```

```
    for i in range(0, x.shape[0]):
        if x.iloc[i]<y.iloc[i]:
            returnvec[i]=y.iloc[i]
        else:
            returnvec[i]=x.iloc[i]
    return returnvec
def min_df_1(x, y):
    returnvec=np.zeros(x.shape)
    for i in range(0, x.shape[0]):
        if x.iloc[i]>y.iloc[i]:
            returnvec[i]=y.iloc[i]
        else:
            returnvec[i]=x.iloc[i]
    return returnvec


# In[315]:

df_1 = pd.DataFrame(index=x_Pareto_0_001)
df_1['f1/f1*'] = f1(x_Pareto_0_001)/f1_star
df_1['f2/f2*'] = f2(x_Pareto_0_001)/f2_star
df_1['max(f_i/f_i*)'] = max_df_1(df_1['f1/f1*'], df_1['f2/f2*'])
df_1['min(max(f_i/f_i*))']=''
for i in range(0,df_1.shape[0]):
    if df_1['max(f_i/f_i*)'].iloc[i]==min(df_1['max(f_i/f_i*)']):
        df_1['min(max(f_i/f_i*))'].iloc[i] = min(df_1['max(f_i/f_i*)'])
df_1['min(f_i/f_i*)'] = min_df_1(df_1['f1/f1*'], df_1['f2/f2*'])
df_1['max(min(f_i/f_i*))']=''
for i in range(0,df_1.shape[0]):
    if df_1['min(f_i/f_i*)'].iloc[i]==max(df_1['min(f_i/f_i*)']):
        df_1['max(min(f_i/f_i*))'].iloc[i] = max(df_1['min(f_i/f_i*)'])
df_1


# In[11]:

plt.figure(2)
fig2, ax2 = plt.subplots()
plt.plot(x_0_01,f1(x_0_01)/45, '#810541', x_0_01, f2(x_0_01)/10, 'r')
plt.xticks(np.arange(-5,4,0.5))
plt.grid(True)
plt.title('f1/f1*, f2/f2* & Pareto area')
ax2.fill_between(np.linspace(float(sp.solve(9-6*x+x**2 - 45, x)[1]),float(sp.solve(18
- 9*x - 0.1*x**2 - 10, x)[1]), 100), -20,70, facecolor='#FDD7E4')
maroon_patch = mpatches.Patch(color='#810541', label="f1(x)/f1*")
```

```
red_patch = mpatches.Patch(color='r', label='f2(x)/f2*')
plt.legend(handles=[maroon_patch, red_patch])

print("Точки перетину f1/f1* та f2/f2*:")
sp.solve((18 - 9*x - 0.1*x**2)/10 - (9-6*x+x**2)/45, x)

# Отже, множина Парето: $[-3\sqrt{5}+3, \sqrt{2105}-45]$.

# ### Завдання 2

# In[320]:

f1 = lambda x, y: 6*(3*x**2 + 5*x*y + 4*x)/5
f2 = lambda x, y: -4*x**2 + 2*x*y + 0.25*y**3 + 3
x_min = 1
x_max = 5
num_0_02 = int((x_max - x_min)/0.02)+1
x_0_02 = np.linspace(x_min,x_max, num_0_02)


# #### Табличний метод

# In[321]:

df_2 = pd.DataFrame(index=range(len(x_0_02)*len(x_0_02)))


# In[322]:

def fill_table_with_x(df):
    for i in range(len(x_0_02)):
        df.iloc[i*len(x_0_02):(i+1)*len(x_0_02), 0] = x_0_02[i]
        df.iloc[i*len(x_0_02):(i+1)*len(x_0_02), 1] = x_0_02[0:len(x_0_02)]
    return 0


# In[323]:

df_2['x1']=0
df_2['x2']=0
fill_table_with_x(df_2)


# In[324]:
```

```
df_2['f1(x1,x2)'] = f1(df_2['x1'], df_2['x2'])
df_2['f2(x1,x2)'] = f2(df_2['x1'], df_2['x2'])
df_2.head(10)

# In[325]:

df_2['min_x2(f1(x1,x2))'] = 0
for i in range(len(x_0_02)):
    min_x2 = min( df_2.iloc[ np.where(df_2['x1']==x_0_02[i])[0], 2] )
    df_2.iloc[np.where(df_2['x1']==x_0_02[i])[0], 4]= min_x2


# In[326]:

max_x1_min_x2 = max(pd.to_numeric(df_2['min_x2(f1(x1,x2))'], errors='coerce'))
df_2['max_x1_min_x2(f1(x1,x2))']=max_x1_min_x2


# In[327]:

df_2['min_x1(f2(x1,x2))'] = 0
for i in range(len(x_0_02)):
    min_x1 = min( df_2.iloc[ np.where(df_2['x2']==x_0_02[i])[0], 3] )
    df_2.iloc[np.where(df_2['x2']==x_0_02[i])[0], 6]= min_x1


# In[328]:

max_x2_min_x1 = max(pd.to_numeric(df_2['min_x1(f2(x1,x2))'], errors='coerce'))
df_2['max_x2_min_x1(f2(x1,x2))']=max_x2_min_x1


# In[329]:

df_2.iloc[np.where(df_2['max_x1_min_x2(f1(x1,x2))']==df_2['f1(x1,x2)'])]


# In[330]:

df_2.iloc[np.where(df_2['max_x2_min_x1(f2(x1,x2))']==df_2['f2(x1,x2)'])]


# In[335]:

print df_2.iloc[np.where(df_2['max_x2_min_x1(f2(x1,x2))']==df_2['f2(x1,x2)'])]
```

```
# #### Графічний метод

# In[180]:

x2_12345 = df_2.iloc[np.where(df_2['x1']==1.)[0], 1]
y1_1 = df_2.iloc[np.where(df_2['x1']==1.)[0], 2]
y1_2 = df_2.iloc[np.where(df_2['x1']==2.)[0], 2]
y1_3 = df_2.iloc[np.where(df_2['x1']==3.)[0], 2]
y1_4 = df_2.iloc[np.where(df_2['x1']==4.)[0], 2]
y1_5 = df_2.iloc[np.where(df_2['x1']==5.)[0], 2]


# In[181]:

plt.figure(1)
fig1, ax1 = plt.subplots()
plt.plot(x2_12345,y1_1,'b', x2_12345,y1_2,'r', x2_12345,y1_3,'k', x2_12345,y1_4,'g',
x2_12345,y1_5,'y')
blue_patch = mpatches.Patch(color='blue', label="f1(1, x2)")
yellow_patch = mpatches.Patch(color='yellow', label='f1(5, x2)')
plt.legend(handles=[blue_patch, yellow_patch])


# In[182]:

x1_12345 = df_2.iloc[np.where(df_2['x1']==1.)[0], 1]
y2_1 = df_2.iloc[np.where(df_2['x2']==1.)[0], 3]
y2_2 = df_2.iloc[np.where(df_2['x2']==2.)[0], 3]
y2_3 = df_2.iloc[np.where(df_2['x2']==3.)[0], 3]
y2_4 = df_2.iloc[np.where(df_2['x2']==4.)[0], 3]
y2_5 = df_2.iloc[np.where(df_2['x2']==5.)[0], 3]


# In[183]:

plt.figure(2)
fig1, ax1 = plt.subplots()
plt.plot(x2_12345,y2_1,'b', x2_12345,y2_2,'r', x2_12345,y2_3,'k', x2_12345,y2_4,'g',
x2_12345,y2_5,'y')
blue_patch = mpatches.Patch(color='blue', label="f2(x1, 1)")
yellow_patch = mpatches.Patch(color='yellow', label='f2(x1, 5)')
plt.legend(handles=[blue_patch, yellow_patch])
```

```
# #### Класичний метод

# Знайдемо x, при яких $f_1$ досягає $max_1 min_2 f_1(x_1, x_2)$.

# $$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1.2 \cdot 5 \cdot x_1 = 0.$$
# $$=>x_1=0 \not\in [1, 5]. $$
# Отже, $max_1 min_2 f_1(x_1, x_2)$ досягається в граничних точках [1,5].
# $$f_1(1, x_2) = 1.2 \cdot (7 + 5 \cdot x_2).$$
# $$f_1(5, x_2) = 1.2 \cdot (95 + 25 \cdot x_2).$$
# Оскільки в даному випадку $x_2 \in [1,5]$, то max по $x_1$ досягається в точці $x_1=5.$
# $$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 6 \cdot x_2 + 1.2 \cdot (4 + 6 \cdot x_1) = 0.$$
# При $x_1 = 5$:
# $$x_2 \leqslant 0 => \not\in [1,5].$$
# Шукаємо в граничних точках:
# $$f_1(5,1) = 144.$$
# $$f_1(5, 5) = 264. $$
# min по $x_2$ досягається в точці $x_2=1.$
# $$max_1 min_2 f_1(x_1, x_2) = f_1(5, 1) = 144.$$

# Знайдемо x, при яких $f_2$ досягає $max_2 min_1 f_2(x_1, x_2)$.

# $$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -8 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 0.$$
# $$x_2 = 2 \cdot x_1$$
# $$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} =  2 \cdot x_1 + 0.75 \cdot x_2^2 = 0.$$
# Отримуємо: $3 \cdot x_1^2 + x_1 = 0.$
# Корені даного рівняння не належать проміжку [1,5]. Тож шукаємо в граничних точках.
# $$f_2(1, x_2) = -4 + 2 \cdot x_2 + 0.25 \cdot x_2^3 + 3.$$
# $$f_2(5, x_2) = -100 + 10 \cdot x_2 + 0.25 \cdot x_2^3 + 3.$$
# На відрізку [1,5] мінімум по $x_1$ досягається в точці $x_1=5.$
# Тоді $x_2 = 2 \cdot x_1 = 2 \cdot 5 = 10 \not\in [1,5].$
# Отже, шукаємо в граничних точках.
# $$f_2(5, 1) = -86.75.$$
# $$f_2(5, 5) = -15.75.$$
# Максимум по $x_2$ досягається при $x_2 = 5$.
# $$max_2 min_1 f_2(x_1, x_2) = f_2(5, 5) = -15.75.$$

# #### Знаходження області Парето

# In[187]:

f1_star = max_x1_min_x2
f2_star = max_x2_min_x1
```

```
print f1_star
print f2_star

# In[204]:

from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot(df_2['x1'], df_2['x2'], df_2['f1(x1,x2)']-f1_star, 'k', label='f1(x1,x2)-f1*')
ax.plot(df_2['x1'], df_2['x2'], df_2['f2(x1,x2)']-f2_star, 'r', label='f2(x1,x2)-f2*')
ax.legend()


# #### Знаходження мінімального delta

# In[298]:

df_delta = pd.DataFrame()


# In[299]:

df_delta['x1'] = df_2['x1']
df_delta['x2'] = df_2['x2']
df_delta['|f1-f1*|'] = abs(df_2['f1(x1,x2)'] - f1_star)
df_delta['|f2-f2*|'] = abs(df_2['f2(x1,x2)'] - f2_star)


# In[303]:

def max_df_delta(x, y):
    returnvec=np.zeros(x.shape)
    for i in range(0, x.shape[0]):
        if x.iloc[i]<y.iloc[i]:
            returnvec[i]=y.iloc[i]
        else:
            returnvec[i]=x.iloc[i]
    return returnvec


# Знаходимо максимум з-поміж $\Delta_i$ для кожної пари $(x_1,x_2)$.

# In[304]:

df_delta['max(delta_i)'] = max_df_delta(df_delta['|f1-f1*|'], df_delta['|f2-f2*|'])
```

In[339]:

```
print df_delta.iloc[np.where(df_delta['max(delta_i)']==min(df_delta['max(delta_i)']))]
```

In[306]:

```
df_delta.iloc[np.where(df_delta['max(delta_i)']==min(df_delta['max(delta_i)']))]
```