

潮汐成因探讨

张凯宁

(中国科学技术大学 物理学院, 安徽 合肥 230026)

摘要: 分析了引潮力的性质, 引入引潮矢量以计算潮高, 解释了全日潮和半日潮产生的原因并粗略分析它们的性质.

关键词: 潮汐; 惯性力; 引潮力; 引潮矢量; 半日潮; 全日潮

中图分类号: O 313.2

文献标识码: A

文章编号: 1000-0712(2014)10-0031-04

潮汐的产生是太阳和月球的引力对地球上海水作用, 使海平面出现高低变化的现象, 是因地球的自转而产生的, 可分为太阳潮和太阴潮. 本文主要讨论的是太阴潮的产生与性质, 太阳潮的性质可模仿太阴潮而推出. 讨论皆遵从以下近似: 地月轨道为正圆, 且把地球看为正球体或有微小形变的正球体, 即不考虑该微小形变所产生的二次影响.

1 引潮力和引潮矢量

取地球质心参考系为参考系, 地球质心在该参考系中保持静止, 与该参考系固连的坐标系相对惯性系空间无转动, 是一个平动坐标系, 如图 1. 假设地球没有自转, 设月球质量为 m_0 , 地月质心距离为 R_0 , 则地球质心加速度大小 $a_e = Gm_0/R_0^2$, 在此参考系中的位置 P 处取质量为 m 的质点, 该质点同时受月球引力 $F_{引}$ 和惯性力 F_1 作用, 其中

$$F_1 = -ma_e = -\frac{Gm_0m}{R_0^2}e_{O'O}$$

$e_{O'O}$ 为月球的质心 O' 点到地球质心 O 点的矢量 $O'O$ 的单位向量.

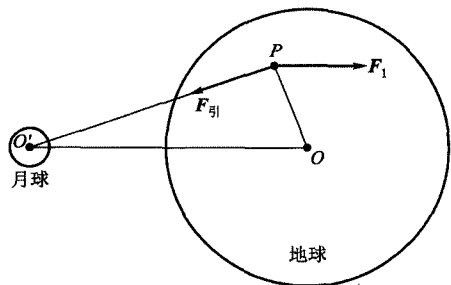


图 1

引潮力 $F_{潮} = F_{引} + F_1$

无论 P 点取在哪里, F_1 的大小方向都不会改变, 而 $F_{引}$ 的分布在空间上则存在不均匀性.

需要说明的是, 由于月球绕地球转一周的时间远大于一天的时间, 所以海平面起伏的变化可认为是准静态的.

引潮力在空间中的分布构成了一个力场, 该力场对地球质心的合作用为零, 对地球表面的作用效果使地球在靠近月球的一面和远离月球的一面都出现隆起.

引潮力场以地月质心的连线为轴线呈现轴对称, 现在将此对称轴标为 N 轴, 将引潮力分解为两部分分别讨论. 一部分是平行于 N 轴拉伸的力, 另一部分是垂直并环绕着 N 轴挤压的力, 这两部分力分别构成了两个力场, 称为引潮力场 A 和引潮力场 B . 图 2 是引潮力场 A 的示意图, 图 3 为引潮力场 B 在两个不同观察角度上所得的示意图, L 面是一个过球心 O 并垂直于 N 轴的平面.

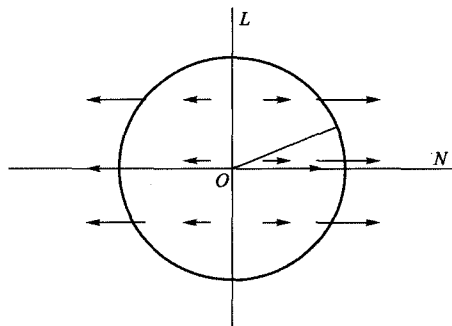


图 2 引潮力场 A

先研究平行于 N 轴的力, 如图 4. 取一质量为 m

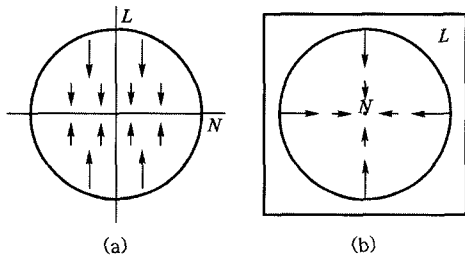


图3 引潮力场 B

的质点 P , 已知其受引潮力为 $F_{\text{潮}} = F_{\text{引}} + F_1$, 其平行于 N 轴的分量 $F_{\text{潮}A} = F_A + F_1$, PG 为 R , P 到平面 L 的距离为 ΔR , 地球半径为 R_e , $R_e \ll R$, 故 $O'O$ 和 $O'P$ 的夹角 $\varphi \ll 1$.

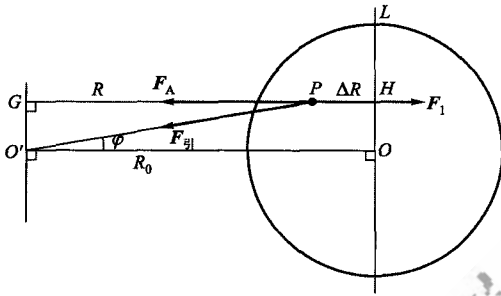


图4

$$F_{\text{潮}A} = F_A + F_1 = \left(\frac{Gm_0m}{R_0^2} - \frac{Gm_0m}{R^2} \cos^3 \varphi \right) e_{O'O} =$$

$$Gm_0m \left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^2} (1 - \cos^3 \varphi) \right) e_{O'O}$$

其中

$$\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{R^2} \sim -\frac{2}{R_0^3} \Delta R$$

$$\frac{1}{R^2} (1 - \cos^3 \varphi) = \frac{1}{R^2} (1 - \cos \varphi) (1 + \cos \varphi + \cos^2 \varphi) \approx$$

$$\frac{3}{2R^2} \tan^2 \varphi = \frac{3(OH)^2}{2R^4}$$

由于 ΔR 与 OH 处于同一个量级且远小于 R (或 R_0), 故在一般情况下有

$$\left| -\frac{2}{R_0^3} \Delta R \right| \gg \left| \frac{3(OH)^2}{2R^4} \right|$$

所以近似地有

$$F_{\text{潮}A} = -\frac{2Gm_0m}{R_0^3} \Delta R e_{O'O} = \frac{2Gm_0m}{R_0^3} \overrightarrow{HP}$$

$$\text{即 } F_{\text{潮}A} = k_1 m \overrightarrow{HP}, \quad k_1 = \frac{2Gm_0}{R_0^3}$$

用 k_1 来衡量引潮力场的大小. 构造一个引潮矢量 k_1 , 令

$$|k_1| = k_1$$

k_1 方向平行于 N 轴指向月球. 则 P 点的 $F_{\text{潮}A}$ 为

$$F_{\text{潮}A} = m(k_1 \cdot \overrightarrow{OP}) e_{k_1}$$

e_{k_1} 为沿 k_1 方向的单位矢量. 引潮矢量直观地反映出了引潮力场的大小与方向.

下面讨论引潮力场 B . 质量为 m 的 P 点在引潮力场 B 里的力为 $F_{\text{潮}B}$, 将其分解为指向球心的力 $F_{\text{潮}O}$ 和平行于 N 轴的力 $F_{\text{潮}L}$ (如图5). 同上面讨论引潮力场 A 的讨论类似, 由于地月距离远大于地球半径, 在忽略高阶小量的情况下可证明 $|F_{\text{潮}B}| \propto |\overrightarrow{DP}|$,

比例系数为 $-\frac{Gm_0m}{R_0^3}$, 令 $k_2 = \frac{Gm_0}{R_0^3}$, 则

$$F_{\text{潮}B} = -k_2 m \overrightarrow{DP}$$

由几何关系知

$$F_{\text{潮}O} = -k_2 m \overrightarrow{OP}, \quad F_{\text{潮}L} = k_2 m \overrightarrow{CP}$$

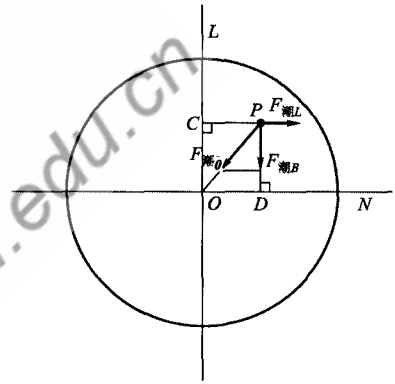


图5

由于 P 点的任意性, 可得出所有的 $F_{\text{潮}O}$ 都是指向地心, 对 O 点成球对称, 容易得出, 这种力是不会使地球表面产生相对起伏的, 自然也不会产生潮汐. 另外, 由于引潮力相对地球的引力十分微弱, 可不考虑 $F_{\text{潮}O}$ 对 g 值的影响. 于是完全可把该力场忽略掉.

接下来分析 $F_{\text{潮}L}$ 所构成的力场, 因 $|F_{\text{潮}L}| \propto |\overrightarrow{CP}|$, 容易发现, 该力场与上文讨论的引潮力场 A 在性质上完全一样, 也就是说引潮力场 B 可以被化简为一种类似于引潮力场 A 的形式. 由于它们的作用效果相同, 故不加以区分, 以后所说的引潮力场 B 都是指这种仅由 $F_{\text{潮}L}$ 构成的简化的力场. 于是可以用一个引潮矢量 k_2 来表示引潮力场 B , k_2 的方向平行于 N 轴指向月球.

把引潮力场 A 与简化过的引潮力场 B 重新叠加起来, 叠加后的引潮力场示意图类似于图2且等效于原引潮力场, 引潮力场 A 与引潮力场 B 的引潮矢量分别为 k_1 和 k_2 , 叠加后的引潮力场对 P 点的作用力为

$$F'_{\text{潮}} = m(k_1 \cdot \overrightarrow{OP}) e_{k_1} + m(k_2 \cdot \overrightarrow{OP}) e_{k_2}$$

e_{k_2} 为 k_2 的单位矢量, 由于 k_1, k_2 同方向 (平行于 N 轴指向月球), 故将上式化简为

$$F'_{\text{潮}} = m((k_1 + k_2) \cdot \overrightarrow{OP})e_{k_1}$$

于是叠加后的合引潮力场的引潮矢量 k_0 的方向与 N 轴平行, 大小等于 $|k_1| + |k_2|$. 就月球对地球产生的潮汐而言,

$$|k_1| = \frac{2Gm_0}{R^3}, \quad |k_2| = \frac{Gm_0}{R^3}$$

$$\text{故} \quad |k_0| = \frac{3Gm_0}{R^3}$$

代入数据 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ 和 $m_0 = 7.35 \times 10^{22} \text{ kg}$ 及地月质心距离 $R = 3.9 \times 10^8 \text{ m}$, 计算得 $|k_0| = 2.48 \times 10^{-13} \text{ s}^{-2}$.

2 潮汐高度的计算及其性质的研究

由于引潮力产生的形变十分微小, 且认为地球保持正球形或忽略形变后产生的二级影响, 故可近似地认为地球表面的重力加速度 g 保持不变. 假设地球表面的水保持静力学平衡, 可用等势面的方法计算引潮力产生的海平面高度差.

如图6, A 点为海水最低点, D 点为海水最高点, 则引潮力在 A, D 两点产生的势能差为

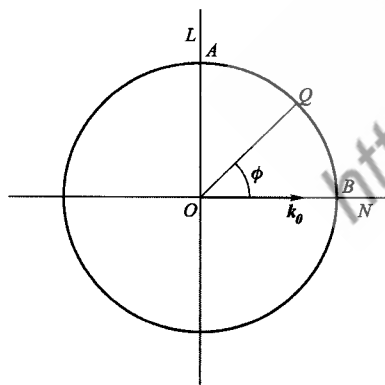


图6

$$\Delta E_p = \frac{1}{2} m |k_0| R_e^2$$

该势能差应与两点间的重力势能差 $mg\Delta h$ 相等, 即得出高度差 $\Delta h = \frac{|k_0| R_e^2}{2g}$.

代入数据 $|k_0| = 2.48 \times 10^{-13} \text{ s}^{-2}$, $R_e = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 得 $\Delta h = 0.51 \text{ m}$

而对于任意一点 Q , 其到 O 点连线与 k_0 夹角为 ϕ , 它与 A 点的水平高度差

$$\Delta h = \frac{|k_0| R_e^2 \cos^2 \phi}{2g} = \frac{(r_{OQ} \cdot k_0)^2}{2g |k_0|} \quad (1)$$

将 A 点的高度设为零点, 如此每一点的相对高度都可以计算出来了. 现在让地球转起来, 设角速度为 ω . 由于之前说过的准静态假设, 在地球自转一周的过程中可以认为地月的相对位置近似不变.

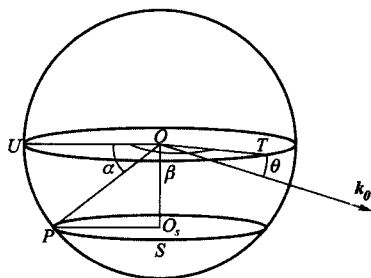


图7

如图7, O 为地球球心, 平面 OUT 为赤道平面, k_0 为引潮矢量, OT 为 k_0 在赤道平面上投影, k_0 与赤道平面夹角为 θ , 圆 S 是一条纬线, 纬度为 α , P 点是 S 上任意一点, S 的圆心为 O_s , OP 在赤道平面上投影 OU 与 OT 的夹角是经度差 β . 则 P 点高度为

$$\Delta h = \frac{(k_0 \cdot \overrightarrow{OP})^2}{2g |k_0|} = \frac{(k_0 \cdot \overrightarrow{OO_s} + k_0 \cdot \overrightarrow{O_sP})^2}{2g |k_0|} \quad (2)$$

由于地球自转, P 点沿 S 移动, 于是 P 点高度不断变化, 此时 $\beta = \omega t$ 随时间而变化, α 与 θ 为常量. 其中

$$k_0 \cdot \overrightarrow{OO_s} = |k_0| R_e \sin \alpha \sin \theta \quad (3)$$

式(3)中不含 β , 故 $k_0 \cdot \overrightarrow{OO_s} = \text{常量}$

由几何关系知 $|\overrightarrow{O_sP}| = |\overrightarrow{OU}|$

$$\cos \langle \overrightarrow{OU}, k_0 \rangle = \cos \theta \cos \beta$$

$$\text{得} \quad k_0 \cdot \overrightarrow{O_sP} = |k_0| R_e \cos \alpha \cos \theta \cos \beta \quad (4)$$

将式(2)中的平方项展开, 并将式(3)和式(4)代入, 最终整理得

$$\Delta h = \frac{|k_0| R_e^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \theta}{4g} \cos 2\beta + \frac{|k_0| R_e^2 \sin 2\alpha \sin 2\theta}{4g} \cos \beta + C \quad (5)$$

其中 C 为常数项, 取决于选择以何点作为高度的零点, 若依原来的假设, 则

$$C = \frac{(k_0 \cdot \overrightarrow{OO_s})^2}{2g |k_0|} + \frac{|k_0| R_e^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \theta}{4g}$$

而若以当地的平均海平面高度作为零点, 则 $C = 0$.

式(5)分为两项, 其中含 $\cos 2\beta$ 项所代表的分潮一天之内涨落两次, 而含 $\cos \beta$ 项所代表的分潮一天之内仅涨落一次, 这便是半日潮和全日潮. 可令

$$\Delta h = A \cos 2\beta + B \cos \beta + C$$

其中

$$A = \frac{|k_0| R_e^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \theta}{4g}$$

$$B = \frac{|k_0| R_e^2 \sin 2\alpha \sin 2\theta}{4g}$$

现在讨论其系数:首先 θ 角不变,而 α 角变化,即研究潮汐随纬度的变化,可以看出半日潮高度随纬度的增加而降低,而全日潮高度则在纬度为 45° 的地方达到最大.在赤道与两极没有全日潮. $\frac{B}{A} =$

$4 \tan \alpha \tan \theta$,也就是说在低纬度半日潮占主导而在高纬度全日潮占主导.然后研究 θ 的变化对潮汐的影响.由于 θ 和 α 在公式中的形式是一样的,所以结果也是类似的,但一般在地球上 θ 不会超过 45° ,所以在地球上潮汐是以半日潮为主.对于太阳潮来说在春分秋分的时候全球半日潮达到最大,全日潮为零,而在冬至夏至时全球全日潮达到最大,半日潮最小.

本文通过将引潮力分解、等效,简化了引潮力的形式,然后用等势的方法求出了潮高,并在一定程度上解释了潮汐现象中全日与半日的周期性变化.但由于我们的讨论比较粗略,并没有考虑诸如水流、地

形等方面的影响,所以在定量计算潮高时与实际相差比较大,而且在实际情况中一些低纬度地区也会出现明显的全日潮的现象,这与我们的结论不完全一致.

致谢: 本文的撰写得到了蒋一老师和高晟助教的帮助与鼓励,在此对他们的工作表示感谢!

参考文献:

- [1] 赵凯华,罗蔚茵.新概念物理教程:力学[M].北京:高等教育出版社,1998.
- [2] 陈宗镛.潮汐学[M].北京:科学出版社,1980.
- [3] 杨维纶.力学与理论力学 上册[M].北京:科学出版社,2008.
- [4] 田晓岑.潮汐现象的成因[J].大学物理,1996,15(10):24-27.
- [5] 赵凯华.定性与半定量物理学[M].2版.北京:高等教育出版社,2008.
- [6] 郑永令,贾起民,方晓敏.力学[M].北京:高等教育出版社,2002.

Discussion on the cause of tide

ZHANG Kai-ning

(College of Physics, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230026, China)

Abstract: The properties of the tidal force are analyzed. The vector of the tide is applied to calculate the high of the tide. Finally, the article explains how semi-diurnal and diurnal tide are generated, and analyzes their properties roughly.

Key words: tide; inertial force; tidal force; vector of tide; semi-diurnal tide; diurnal tide

(上接19页)

Abstract: Aiming at the electromagnetic field in inhomogeneous medium, the establishing process of definite equations is investigated, combining with the first-order partial differential field equation and state relation, from the steady field to the time-varying field, the various forms of inhomogeneous partial differential equation with variable coefficients are given conceptually, which provides a theoretical basis for solving electromagnetic field problems.

Key words: inhomogeneous medium; electromagnetic field; partial differential equation