23) $V(0, 0)$, $F(-\frac{3}{4}, 0)$, $x = \frac{3}{4}$, $y = 0$

24) $V(-2, -1)$, $F(-2, -3)$, $y = 1$, $x = -2$

25) $V(1, -2)$, $F(1, 3)$, $y = -7$, $x = 1$

26) $V(3, -2)$, $F(-1, -2)$, $x = 7$, $y = -2$

27) $V(-2, -1)$, $F(2, -1)$, $x = -6$, $y = -1$

28) $V(3, -1)$, $F(7, -1)$, $x = -1$, $y = -1$

29) $V(-1, 0)$, $F(2, 0)$, $x = -4$, $y = 0$

30) $V(2, -2)$, $F(2, -\frac{7}{4})$, $y = -\frac{9}{4}$, $x = 2$

31) $V(0, 6)$, $F(0, 9)$, $y = 3$, $x = 0$

32) $V(2, 4)$, $F(2, \frac{15}{4})$, $4y - 17 = 0$, $x - 2 = 0$

33) $V(\frac{1}{8}, 3)$, $F(\frac{17}{8}, 3)$, $8x + 15 = 0$, $y - 3 = 0$

34) $V(4, -\frac{1}{3})$, $F(4, \frac{7}{6})$, $6y + 11 = 0$, $x - 4 = 0$

7.2 A Elipse

Elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante.

Consideremos no plano dois pontos distintos, F_1 e F_2, tal que a distância $d(F_1, F_2) = 2c$. Seja um número real a tal que $2a > 2c$.

Ao conjunto de todos os pontos P do plano tais que:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

ou:

$$|\overrightarrow{PF_1}| + |\overrightarrow{PF_2}| = 2a$$

dá-se o nome de elipse (Fig. 7.2-a).

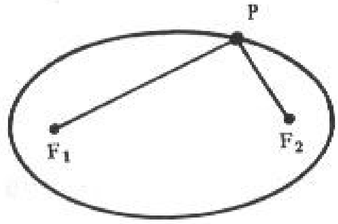


Figura 7.2-a

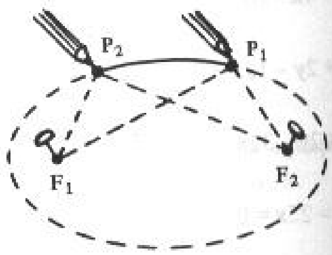


Figura 7.2-b

A Figura 7.2-b sugere como se pode construir uma elipse no papel. Nos pontos F_1 e F_2 fixemos dois percevejos e neles amarremos um fio não esticado. Tomemos um lápis e distendamos com sua ponta o fio, marcando o ponto P_1. Então, a soma das distâncias $d(P_1, F_1)$ e $d(P_1, F_2)$ é o comprimento do fio. Se o lápis deslizar sobre o papel, mantendo o fio sempre esticado, ficará traçada uma elipse de focos F_1 e F_2. A figura mostra outra posição P_2 da ponta do lápis e, também para este ponto, a soma das distâncias $d(P_2, F_1)$ e $d(P_2, F_2)$ é o comprimento do fio. Assim, para as infinitas posições da ponta do lápis, a soma das distâncias a F_1 e F_2 é constante.

A constante $2a$ anteriormente referida é o comprimento do fio.

Se mantivermos constante o comprimento do fio e variarmos as posições de F_1 e F_2, a forma da elipse irá variar. Assim, quanto mais próximos os focos estão entre si, tanto mais a forma da elipse se assemelha à da circunferência, e quando $F_1 = F_2$ obtém-se uma circunferência. Por outro lado, quanto mais afastados os focos estiverem entre si, mais "achatada" será a elipse.

7.2.1 Elementos

Focos: são os pontos F_1 e F_2.

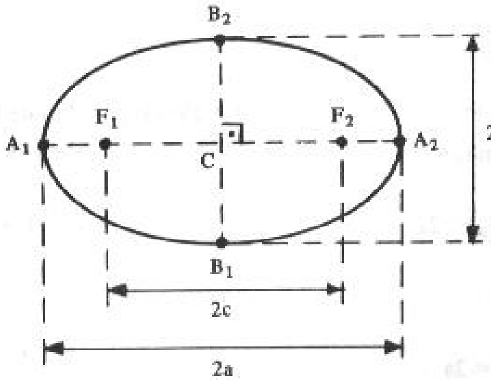
Distância focal: é a distância $2c$ entre os focos.

Centro: é o ponto médio C do segmento F_1F_2.

Eixo maior: é o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$ (o segmento A_1A_2 contém os focos e os seus extremos pertencem à elipse).

Eixo menor: é o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$ ($B_1B_2 \perp A_1A_2$ no seu ponto médio).

Vértices: são os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2.



Excentricidade: é o número e dado por

$$e = \frac{c}{a}$$

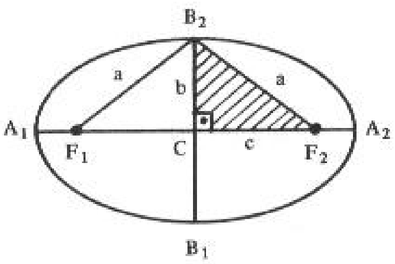
Tendo em vista que $c < a$, tem-se: $0 < e < 1$.

Observação

Em toda elipse vale a relação:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Na verdade, esta igualdade é a relação de Pitágoras no triângulo retângulo B_2CF_2.



7.2.2 Equação da Elipse de Centro na Origem do Sistema

1º caso: *o eixo maior está sobre o eixo dos* x

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer de uma elipse (Fig. 7.2-c) de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

Por definição, tem-se:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

ou:

$$|\overrightarrow{F_1P}| + |\overrightarrow{F_2P}| = 2a$$

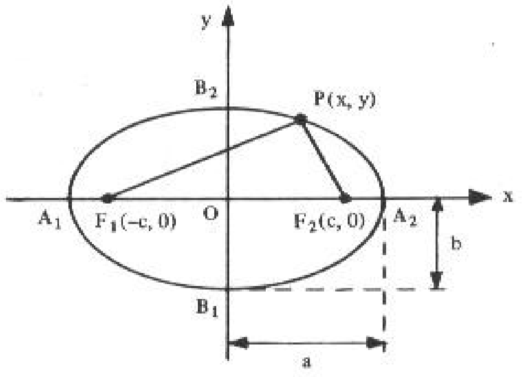


Figura 7.2-c

ou em coordenadas:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\sqrt{x^2+y^2+2cx+c^2}=2a-\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2}$$

$$(\sqrt{x^2+y^2+2cx+c^2})^2=(2a-\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2})^2$$

$$x^2+y^2+2cx+c^2=4a^2-4a\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2}+x^2+y^2-2cx+c^2$$

$$4a\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2}=4a^2-4cx$$

$$a\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2}=a^2-cx$$

$$a^2(x^2+y^2-2cx+c^2)=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$a^2x^2+a^2y^2-2a^2cx+a^2c^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

mas:

$$a^2-c^2=b^2$$

logo:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo ambos os membros da equação por a^2b^2, obtemos

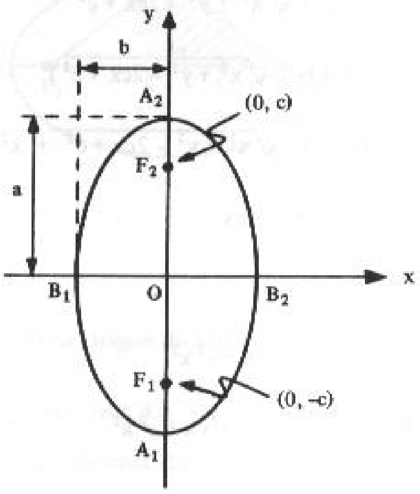
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que é a *equação reduzida* da elipse de centro na origem e eixo maior sobre o eixo dos x.

2º caso: *O eixo maior está sobre o eixo dos* y

Com procedimento análogo ao 1º caso, obteremos a equação reduzida

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



Observação

Tendo em vista que $a^2 = b^2 + c^2$, segue-se que:

$a^2 > b^2$ e daí: $a > b$

Então, sempre o maior dos denominadores na equação reduzida representa o número a^2, onde a é medida do semi-eixo maior.

Ainda mais: se na equação da elipse o número a^2 é denominador de x^2, a elipse tem seu eixo maior sobre o eixo dos x.

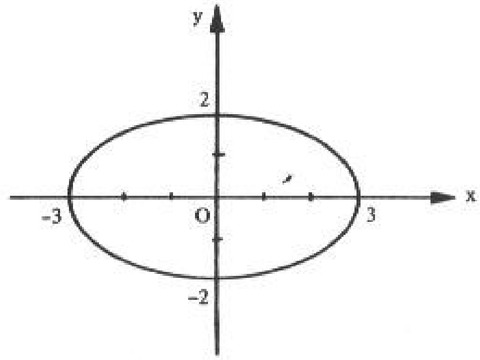
Exemplos

A equação reduzida da elipse ao lado é:

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

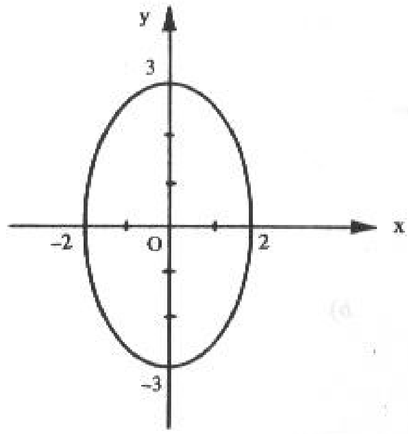
ou:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$



A elipse ao lado tem equação reduzida:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$



7.2.2.1 *Problemas resolvidos*

Nos problemas de 7 a 9, para cada uma das elipses, determinar:

a) a medida dos semi-eixos

b) um esboço do gráfico

c) os focos

d) a excentricidade

7) $9x^2 + 25y^2 = 225$

Solução

Dividindo cada termo da equação por 225, temos:

$$\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = \frac{225}{225}$$

ou:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

a) Mas:

$25 > 9,$

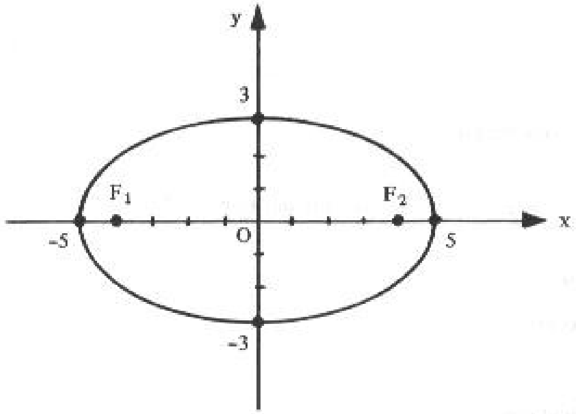
logo:

$a^2 = 25 \therefore a = 5$

e:

$b^2 = 9 \therefore b = 3$

b)



c) $a^2 = b^2 + c^2$

$25 = 9 + c^2$

$c^2 = 16 \therefore c = 4$

Logo, os focos são $F_1(-4, 0)$ e $F_2(4, 0)$.

d) $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$

8) $4x^2 + y^2 - 16 = 0$

Solução

Conduzindo a equação para a forma reduzida, vem:

$4x^2 + y^2 = 16$

ou:

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

a) Mas:

$16 > 4,$

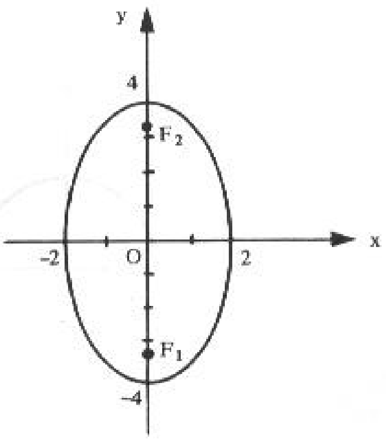
logo:

$a^2 = 16 \therefore a = 4$

e:

$b^2 = 4 \therefore b = 2$

b)



c) $a^2 = b^2 + c^2$

$16 = 4 + c^2$

$c^2 = 12$ e $c = \sqrt{12}$

Logo, os focos são $F_1(0, -\sqrt{12})$ e $F_2(0, \sqrt{12})$.

d) $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

9) $x^2 + y^2 - 9 = 0$

Solução

A forma reduzida desta equação é:

$x^2 + y^2 = 9$

ou:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$$

a) Neste caso, tem-se

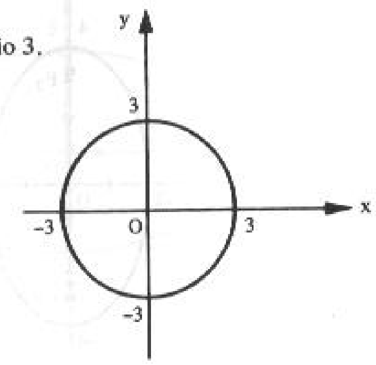
$a^2 = b^2 = 9$

e, portanto,

$a = b = 3$

Trata-se de uma circunferência de raio 3.

b)



c) $a^2 = b^2 + c^2$

$9 = 9 + c^2$

$c = 0$

Portanto, os dois focos coincidem com o centro da circunferência.

d) $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{0}{3} = 0$

A circunferência é uma elipse de excentricidade nula.

10) **Uma elipse de centro na origem tem um foco no ponto** $(3, 0)$ **e a medida do eixo maior é 8. Determinar sua equação.**

Solução

Tendo em vista que o foco dado é do eixo dos x, a equação desta elipse é da forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Precisamos determinar *a* e *b*. Como o eixo maior mede 8, isto é:

$2a = 8$

tem-se:

$a = 4$

Tendo em vista que o centro da elipse é $(0, 0)$ e um dos focos é $(3, 0)$, conclui-se que $c = 3$

Mas:

$a^2 = b^2 + c^2$

ou:

$16 = b^2 + 9$

e:

$$b^2 = 7$$

Portanto, a equação procurada é:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

7.2.3 Equação da Elipse de Centro Fora da Origem do Sistema

1º caso: *O eixo maior é paralelo ao eixo dos* x

Consideremos uma elipse de centro $C(h, k)$ e seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mesma (Fig. 7.2-d).

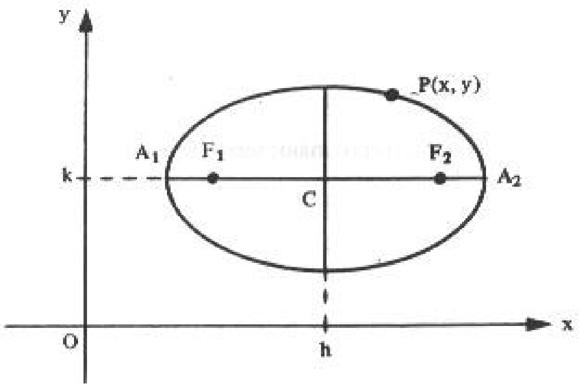


Figura 7.2-d

Em 7.1.4 estudamos o caso da equação da parábola com vértice em (h, k) quando ocorre uma translação de eixos. O caso presente da elipse é perfeitamente análogo àquele.

Assim:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

é a equação de uma elipse de centro $C(0, 0)$ e eixo maior sobre o eixo dos x; quando o eixo maior for paralelo ao eixo dos x e o centro for $C(h, k)$, a equação passa a ser

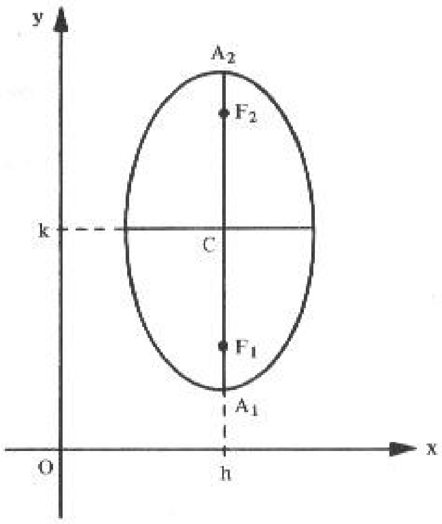
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Este mesmo detalhe irá se repetir também no estudo da hipérbole a ser feito logo a seguir.

2º caso: *O eixo maior é paralelo ao eixo dos y*

De forma análoga, temos:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$



7.2.3.1 *Problemas resolvidos*

11) Uma elipse, cujo eixo maior é paralelo ao eixo dos y, tem centro $C(4, -2)$, excentricidade $e = \frac{1}{2}$ e eixo menor de medida 6. Qual a equação desta elipse?

Solução

A equação da elipse é da forma

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

com $h = 4$ e $k = -2$.

Precisamos determinar *a* e *b*.
Mas:

$$2b = 6$$

logo:

$$b = 3$$

Sendo:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

vem:

$$c = \frac{a}{2}$$

mas:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

e:

$$a^2 = 3^2 + (\frac{a}{2})^2$$

$$a^2 = 9 + \frac{a^2}{4}$$

$$4a^2 = 36 + a^2$$

$$3a^2 = 36$$

$$a^2 = 12$$

Logo, a equação da elipse é:

$$\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{12} = 1$$

Eliminando os denominadores e desenvolvendo os quadrados, encontramos:

$$4(x^2 - 8x + 16) + 3(y^2 + 4y + 4) = 36$$

ou:

$$4x^2 - 32x + 64 + 3y^2 + 12y + 12 - 36 = 0$$

ou:

$$4x^2 + 3y^2 - 32x + 12y + 40 = 0$$

12) Determinar o centro, os vértices, os focos e a excentricidade da elipse de equação:

$$4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$$

Solução

Para que a equação possa ser analisada devemos colocá-la na forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

Primeiramente, vamos agrupar os termos de mesma variável:

$$(4x^2 - 8x) + (9y^2 - 36y) = -4$$

ou:

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) = -4$$

onde colocamos em evidência os números 4 e 9 para facilitar a construção de trinômios quadrados nestes dois parênteses:

$$4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 - 4y + 4) = -4 + 4(1) + 9(4)$$

ou:

$$4(x - 1)^2 + 9(y - 2)^2 = 36$$

Dividindo ambos os membros da equação por 36, obtemos:

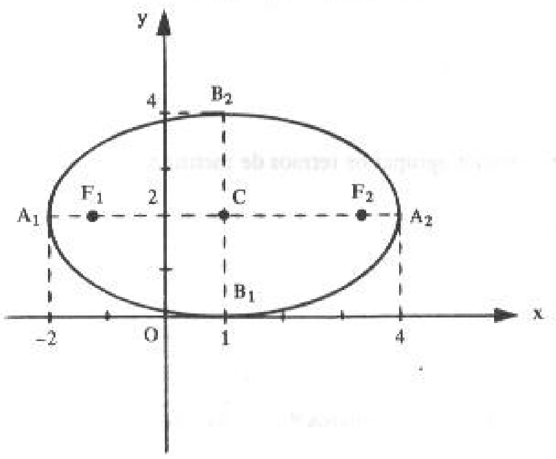
$$\frac{(x - 1)^2}{9} + \frac{(y - 2)^2}{4} = 1$$

que, comparada com a equação (1), informa:

o centro é $C(1, 2)$
$a^2 = 9 \therefore a = 3$
$b^2 = 4 \therefore b = 2$

Para atender as demais solicitações do problema, o gráfico auxilia. Assim, os vértices são:

$A_1(-2, 2)$, $A_2(4, 2)$, $B_1(1, 0)$ e $B_2(1, 4)$.



Para determinar os focos precisamos do valor de c:

$a^2 = b^2 + c^2$

$9 = 4 + c^2$

$c^2 = 5$

$c = \sqrt{5}$

Portanto, os focos são:

$F_1(1 - \sqrt{5}, 2)$ e $F_2(1 + \sqrt{5}, 2)$

Excentricidade: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

7.2.4 Problemas Propostos

Em cada um dos problemas 1 a 8, determinar os vértices A_1 e A_2, os focos e a excentricidade das elipses dadas. Esboçar o gráfico.

1) $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

2) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{100} = 1$

3) $x^2 + 25y^2 = 25$

4) $9x^2 + 5y^2 - 45 = 0$

5) $4x^2 + 9y^2 = 25$

6) $4x^2 + y^2 = 1$

7) $4x^2 + 25y^2 = 1$

8) $9x^2 + 25y^2 = 25$

Em cada um dos problemas 9 a 22, determinar a equação da elipse que satisfaz as condições dadas.

9) eixo maior mede 10 e focos $(\pm 4,0)$.

10) centro $C(0,0)$, um foco $F(\frac{3}{4}, 0)$ e um vértice $A(1,0)$.

11) centro $C(0,0)$, um foco $F(0, -\sqrt{5})$ e eixo menor mede 4.

12) centro $C(0,0)$, eixo menor mede 6, focos no eixo dos x e passa pelo ponto $P(-2\sqrt{5}, 2)$.

13) centro $C(0,0)$, focos no eixo dos x, excentricidade $e = \frac{2}{3}$ e passa pelo ponto $P(2, -\frac{5}{3})$.

14) vértices $A(0, \pm 6)$ e passando por $P(3,2)$.

15) centro $C(2,4)$, um foco $F(5,4)$ e excentricidade $\frac{3}{4}$.

16) eixo maior mede 10 e focos $F_1(2,-1)$ e $F_2(2,5)$.

17) centro $C(-3, 0)$, um foco $F(-1, 0)$ e tangente ao eixo dos y.

18) centro $C(-3,4)$, semi-eixos de comprimento 4 e 3 e eixo maior paralelo ao eixo dos x.

19) mesmos dados do problema anterior mas com eixo paralelo ao eixo dos y.

20) vértices $A_1(-1,2)$, $A_2(-7,2)$ e a medida do eixo menor igual a 2.

21) centro $C(2,-1)$, tangente aos eixos coordenados e eixos de simetria paralelos aos eixos coordenados.

22) vértices $A_1(1,-4)$ e $A_2(1,8)$, excentricidade $e = \frac{2}{3}$.

Em cada um dos problemas 23 a 28, determinar o centro, os vértices A_1 e A_2, os focos e a excentricidade das elipses dadas. Esboçar o gráfico.

23) $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$

24) $25x^2 + 16y^2 + 50x + 64y - 311 = 0$

25) $4x^2 + 9y^2 - 24x + 18y + 9 = 0$

26) $16x^2 + y^2 + 64x - 4y + 52 = 0$

27) $16x^2 + 9y^2 - 96x + 72y + 144 = 0$

28) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$

7.2.5.1 *Respostas de problemas propostos*

1) $C(0, 0)$, $A(\pm 10, 0)$, $F(\pm 8, 0)$, $e = \frac{4}{5}$

2) $C(0, 0)$, $A(0, \pm 10)$, $F(0, \pm 8)$, $e = \frac{4}{5}$

3) $C(0, 0)$, $A(\pm 5, 0)$, $F(\pm 2\sqrt{6}, 0)$, $e = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

4) $C(0, 0)$, $A(0, \pm 3)$, $F(0, \pm 2)$, $e = \frac{2}{3}$

5) $C(0, 0)$, $A(\pm \frac{5}{2}, 0)$, $F(\pm \frac{5\sqrt{5}}{6}, 0)$, $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

6) $C(0, 0)$, $A(0, \pm 1)$, $F(0, \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

7) $C(0, 0)$, $A(\pm \frac{1}{2}, 0)$, $F(\pm \frac{\sqrt{21}}{10}, 0)$, $e = \frac{\sqrt{21}}{5}$

8) $C(0, 0)$, $A(\pm \frac{5}{3}, 0)$, $F(\pm \frac{4}{3}, 0)$, $e = \frac{4}{5}$

9) $9x^2 + 25y^2 = 225$

10) $7x^2 + 16y^2 = 7$

11) $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

12) $x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

13) $5x^2 + 9y^2 - 45 = 0$

14) $\frac{8x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$

15) $7x^2 + 16y^2 - 28x - 128y + 172 = 0$

16) $25x^2 + 16y^2 - 100x - 64y - 236 = 0$

17) $5x^2 + 9y^2 + 30x = 0$

18) $9x^2 + 16y^2 + 54x - 128y + 193 = 0$

19) $16x^2 + 9y^2 + 96x - 72y + 144 = 0$

20) $x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 43 = 0$

21) $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$

22) $9x^2 + 5y^2 - 18x - 20y - 151 = 0$

23) $C(2, -3)$, $A_1(-2, -3)$, $A_2(6, -3)$, $F(2 \pm \sqrt{7}, -3)$, $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$

24) $C(-1, -2)$, $A_1(-1, -7)$, $A_2(-1, 3)$, $F_1(-1, -5)$, $F_2(-1, 1)$ $e = \frac{3}{5}$

25) $C(3, -1)$, $A_1(6, -1)$, $A_2(0, -1)$, $F(3 \pm \sqrt{5}, -1)$, $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

26) $C(-2, 2)$, $A_1(-2, -2)$, $A_2(-2, 6)$, $F(-2, 2 \pm \sqrt{15})$, $e = \frac{\sqrt{15}}{4}$

27) $C(3, -4)$, $A_1(3, -8)$, $A_2(3, 0)$, $F(3, -4 \pm \sqrt{7})$, $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$

28) $C(1, 2)$, $A_1(-2, 2)$, $A_2(4, 2)$, $F(1 \pm \sqrt{5}, 2)$, $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

7.3 A Hipérbole

Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença das distâncias, em valor absoluto, a dois pontos fixos desse plano é constante.

Consideremos no plano dois pontos distintos F_1 e F_2 tal que a distância $d(F_1, F_2) = 2c$. Seja um número real a tal que $2a < 2c$.