ÍNDICE

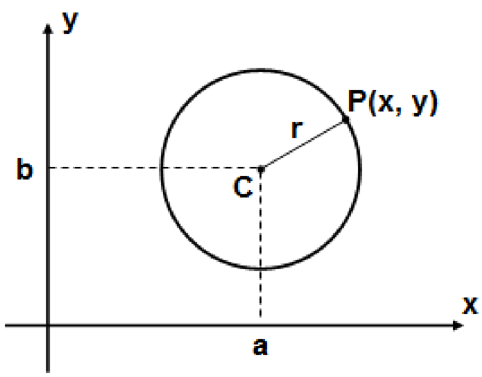
No final das séries de exercícios podem aparecer sugestões de atividades complementares. Estas sugestões referem-se a exercícios do livro “Matemática” de Manoel Paiva fornecido pelo FNDE e adotado pelo IFMG – Campus Ouro Preto durante o triênio 2015-2017.

Todos os exercícios sugeridos nesta apostila se referem ao volume 3.

DEFINIÇÃO

Circunferência é um conjunto de pontos do plano eqüidistantes de um ponto fixo chamado CENTRO. A distância do centro a qualquer ponto da circunferência é denominada RAIO. Uma circunferência está bem determinada quando são conhecidos seu **centro** e **raio**.

Consideremos a circunferência λ de centro no ponto C(a, b) e raio r como na figura abaixo:



Um ponto P(x, y) pertence a λ se, e somente se, a distância PC é igual ao raio r.

$$P \in \lambda \Leftrightarrow D_{PC} = r$$

EQUAÇÃO REDUZIDA

Chama-se equação da circunferência aquela que é satisfeita por todo ponto P(x, y) pertencente à curva. Como foi destacado acima, $P \in \lambda$ se verificar a condição $D_{PC} = r$, assim, temos que:

$$P \in \lambda \Leftrightarrow D_{PC} = r$$

Como $D_{PC} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, desta forma, podemos escrever que:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

ou

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Exemplos

Ex.1: Escrever a equação da circunferência de centro no ponto (5, 3) e raio 7.

Resolução:

Substituindo a, b e r na expressão $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, *temos que a equação procurada é* $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 49$.

Ex.2: Qual a equação da circunferência de centro na origem e raio 4?

Resolução:

A partir do enunciado, temos a = 0, b = 0 e r = 4 e, substituindo na expressão dada, encontramos $x^2 + y^2 = 16$.

Em sentido contrário, quando encontramos uma equação na forma $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ com $r^2 > 0$ já podemos afirmar que descreve uma circunferência de centro em C(a, b) e raio r.

Exemplos

Ex.1: Identificar o centro e o raio da circunferência de equação $(x-2)^2+(y+4)^2=25$.

Resolução:

Comparando a equação dada com aquela apresentada acima, temos que a = 2, b = -4 e r = 5, logo o centro é o ponto C(2, -4) e raio 5.

Ex.2: Qual o centro e o raio da circunferência que é apresentada pela equação $x^2+(y-4)^2=13$?

Resolução:

Podemos reescrever a equação por $(x-0)^2+(y-4)^2=13$*, assim, o centro é o ponto C(0, 4) e o raio é* $\sqrt{13}$.

EQUAÇÃO GERAL DA CIRCUNFERÊNCIA

O desenvolvimento da equação reduzida, nos leva à equação geral da circunferência, acompanhe:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$
$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2-r^2=0$$
$$x^2+y^2-2ax-2by+\underbrace{a^2+b^2-r^2}_{k}=0$$

$$\boxed{x^2+y^2-2ax-2by+k=0}$$

Exemplos

Ex.: Escrever a equação geral da circunferência de centro no ponto C(1, -3) e raio 4.

Resolução:

$$k=a^2+b^2-r^2=1^2+(-3)^2-4^2=\cdots=-6$$

$$x^2+y^2-2ax-2by+k=0$$
$$x^2+y^2-2\cdot1\cdot x-2\cdot(-3)\cdot y+(-6)=0$$
$$x^2+y^2-2x+6y-6=0$$

RECONHECIMENTO

É essencial saber reconhecer quando uma equação do 2º grau, dada em termos de x e y, representa uma circunferência.

Vamos partir da equação $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$ que, a partir de agora, trataremos por E1.

Dividindo todos os termos de E1 por A, obtemos a equação abaixo que denominaremos E2:

$$x^2+\frac{B}{A}y^2+\frac{C}{A}xy+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0$$

Vamos agora comparar E2, termo a termo, com a equação geral apresentada na página anterior:

$$x^2 \quad + \quad y^2 \qquad\qquad -2ax-2by+ \quad k=0$$

$$x^2+\frac{B}{A}y^2+\frac{C}{A}xy+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0$$

Podemos concluir que:

1. $\frac{B}{A}=1 \rightarrow A=B\neq 0$
2. $\frac{C}{A}=0 \rightarrow C=0$
3. $\frac{D}{A}=-2a \rightarrow a=-\frac{D}{2A}$
4. $\frac{E}{A}=-2b \rightarrow b=-\frac{E}{2A}$
5. $\frac{F}{A}=k \rightarrow \frac{F}{A}=a^2+b^2-r^2 \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{F}{A}=\left(-\frac{D}{2A}\right)^2+\left(-\frac{E}{2A}\right)^2-r^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow r^2=\frac{D^2}{4A^2}+\frac{E^2}{4A^2}-\frac{F}{A} \rightarrow$$

$$\rightarrow r^2=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}$$

como r é um número real positivo, então $r^2>0$, então:

$$\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}>0$$

E, resumindo, são três as condições para que E1 represente uma circunferência:

I. $A=B\neq 0$
II. $C=0$
III. $\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}>0$

Satisfeitas estas três condições, temos que a equação $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$ representa uma circunferência de centro $C\left(-\frac{D}{2A},-\frac{E}{2A}\right)$ e raio $\frac{\sqrt{D^2+E^2-4AF}}{2|A|}$.

OBSERVAÇÕES

a. Se uma das três condições citadas acima não for satisfeita, a equação representa um lugar geométrico diferente de uma circunferência ou até mesmo um conjunto vazio.

b. Quando a equação da circunferência apresenta coeficientes unitários para x^2 e y^2, (A = B = 1), o centro e o raio da circunferência podem ser encontrados a partir de:
$a=-\frac{D}{2}$, $b=-\frac{E}{2}$ e $r=\sqrt{a^2+b^2-k}$

c. Se os coeficientes de x^2 e y^2 não forem unitários, podemos dividir todos os coeficientes da equação da circunferência por A, assim obteremos uma equação onde tais coeficientes serão iguais a 1.

d. Outro processo rápido de encontrar o centro e o raio de uma circunferência, consiste em escrever a equação na forma reduzida $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ e, por uma comparação simples, extraímos as informações que caracterizam centro e raio.

Exemplos

Ex.1: Dentre as equações a seguir, destaque aquelas que representam e aquelas que não representam uma circunferência e justifique aquelas que não representam:

A $x^2+3y^2-5x-7y-1=0$

B $x^2+y^2+xy-4x-6y-9=0$

C $3x^2+3y^2+4x-6y+15=0$

D $x^2+y^2-2x-2y+2=0$

E $2x^2+2y^2-4x-6y-3=0$

Resolução:

A não representa uma circunferência pois os coeficientes de x^2 e y^2 são diferentes.

B não representa uma circunferência pois o coeficiente de xy é diferente de zero.

C não representa uma circunferência pois $D^2+E^2-4AF=$ $=4^2+(-6)^2-4\cdot 3\cdot 15=-128<0$

D não representa uma circunferência pois $D^2+E^2-4AF=$ $=(-2)^2+(-2)^2-4\cdot 1\cdot 2=0$. *Desta forma, o raio seria nulo.*

E representa uma circunferência pois $A=B=2\neq 0$, $C=0$ pelo fato de não aparecer o termo xy e, por fim, $D^2+E^2-4AF=(-4)^2+(-6)^2-4\cdot 2\cdot(-3)=$ $=16+36+24=76>0$.

Ex.2: Achar o centro e o raio da circunferência de equação $x^2+y^2-6x+4y-13=0$.

Resolução:

Este problema pode ser resolvido por métodos diferentes. Vamos destacar dois destes métodos:

Método 1

Uma das formas de encontrar as coordenadas do centro e o raio consiste em completar os quadrados e escrever a equação na forma reduzida extraindo, daí, as informações pedidas, acompanhe na próxima página:

$$x^2+y^2-6x+4y-13=0 \qquad 1$$

$$x^2-6x+y^2+4y=13 \qquad 2$$

$$x^2-6x+\quad+y^2+4y+\quad=13+\quad+ \qquad 3$$

$$x^2-6x+9+y^2+4y+4=13+9+4 \qquad 4$$

$$\left(x^2-6x+9\right)+\left(y^2+4y+4\right)=25 \qquad 5$$

$$(x-3)^3+(y+2)=5^2 \qquad 6$$

Na linha 2 isolamos o termo independente.

Na linha 3 criamos os espaços que usaremos para de completar os quadrados.

Na linha 4 foram completados os quadrados dividindo os coeficientes de x e y por 2 e elevando o resultado ao quadrado. Estes valores foram somados em ambos os membros da equação.

Na linha 5 destacamos, entre parênteses os dois trinômios quadrados perfeitos obtidos.

Por fim, na linha 6 fatoramos os dois trinômios com o objetivo de obter uma forma reduzida da equação da circunferência.

Daí, podemos afirmar que a circunferência dada tem centro no ponto C(3, -2) e raio 5.

Método 2

Vamos comparar a equação dada com uma equação geral de circunferência com coeficientes de x^2 e y^2 iguais a 1, acompanhe;

$$x^2+y^2-6x+4y-13=0$$

$$x^2+y^2-2ax-2by+k=0$$

Comparando termo a termo as duas equações, temos que:

$$-2a=-6 \rightarrow a=3$$
$$-2b=4 \rightarrow b=-2$$
$$k=-13$$
$$k=a^2+b^2-r^2$$
$$-13=a^2+b^2-r^2$$
$$-13=3^2+(-2)^2-r^2$$
$$r^2=13+9+4$$
$$r^2=25$$
$$r=5$$

Daí, mais uma vez, concluímos que *a circunferência dada tem centro no ponto C(3, -2) e raio 5.*

OBSERVAÇÃO: Por mais que esta segunda resolução pareça mais fácil e mais rápida, devemos considerar que este método demanda decorar uma fórmula. De qualquer forma, ficam as duas opções.

Ex.3: Obter centro e raio da circunferência descrita por $4x^2+4y^2-4x-12y+6=0$.

Resolução:

Vamos resolver tal como fizemos no primeiro método do exemplo anterior porém vamos, antes, dividir toda a equação por 4 a fim de tornar os coeficientes de x^2 e y^2 iguais a 1.

$$4x^2+4y^2-4x-12y+6=0$$
$$x^2+y^2-x-3y+\frac{3}{2}=0$$
$$x^2-x+y^2-3y=-\frac{3}{2}$$
$$x^2-x+\quad+y^2-3y+\quad=-\frac{3}{2}+\quad+$$
$$x^2-x+\frac{1}{4}+y^2-3y+\frac{9}{4}=-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}$$
$$\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\left(y^2-3y+\frac{9}{4}\right)=1$$
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=1^2$$

Assim, podemos afirmar que a circunferência tem centro em $C\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ e raio 1.

OBSERVAÇÃO: assim como no exemplo anterior, este também pode ser resolvido de duas maneiras distintas tomando o cuidado, entretanto, para o fato de os coeficientes de x2 e y2 serem diferentes de 1. Neste caso, ainda é recomendável simplificar a equação.

Exercícios

01) Determinar a equação da circunferência de centro e raio indicados em cada item:

a) $C(0,0)$ e $r=3$

b) $C(2,0)$ e $r=4$

c) $C(-1,-2)$ e $r=5$

d) $C(2,4)$ e $r=1$

e) $C(0,-3)$ e $r=2$

f) $C\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ e $r=4$

02) Qual a equação da circunferência que passa pelo ponto P(5, 5) e tem centro no ponto C(1, 2)?

03) Determinar o centro e o raio de cada uma das circunferências apresentadas a seguir:

a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 8y + 6x = 0$

d) $2x^2 + 2y^2 + 8x - 6y = 0$

e) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y + 14 = 0$

04) Achar a equação da reta que passa pelo centro da circunferência $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 8$ e é perpendicular à reta $r: x - y - 16 = 0$.

05) Determinar o centro e o raio da circunferência de equação $4x^2 + 4y^2 - 12x - 12y - 7 = 0$.

06) Dada a circunferência de equação $x^2 + y^2 - mx - ny + p = 0$, determine a relação entre m, n e p a fim de que a circunferência tangencie os eixos.

07) Um quadrado tem vértices consecutivos nos pontos A(5, 0) e B(-1, 0). Escreva a equação da circunferência circunscrita a este quadrado.

08) Qual a equação da circunferência que passa pelos pontos A(2, 4), B(11, 7) e D(7, 9).

09) O ponto P(3, b) pertence à circunferência de centro em C(0, 3) e raio 5. Calcule o valor da coordenada b.

10) Qual o comprimento do lado do triângulo eqüilátero inscrito na circunferência $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 10 = 0$?

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Pág. 90 – Exercícios R1 a R5

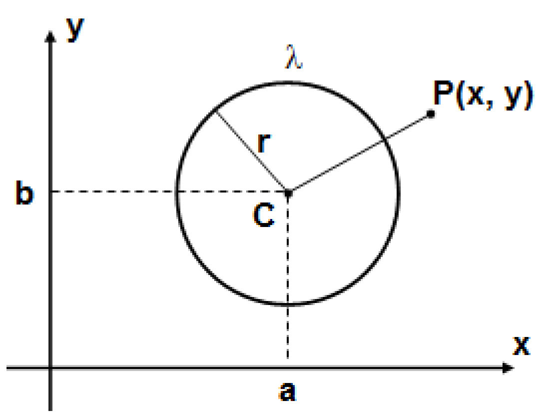
Pág.95 – Exercícios 11 a 17

POSIÇÃO RELATIVA ENTRE PONTO E CIRCUNFERÊNCIA

Dados um ponto P(x_0, y_0) e uma circunferência $\lambda : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, vamos determinar a posição relativa entre P e λ.

Vamos calcular a distância de P até C e comparar com o raio e, assim, temos três casos:

1º caso: P é exterior a λ.



Isso ocorre se, e somente se:

$$D_{PC} > r$$

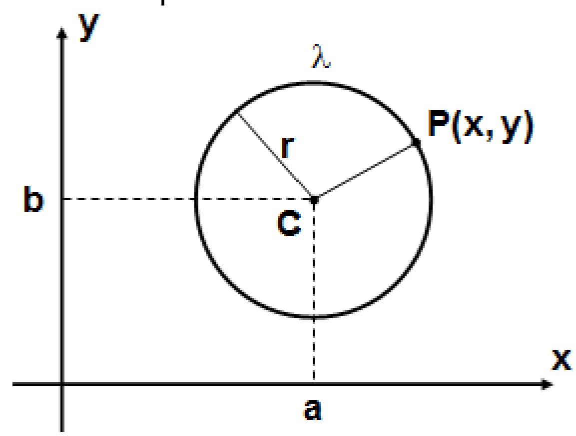
Isto é

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 > r^2$$

Ou, anda melhor:

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 > 0$$

2º caso: P pertence a λ.



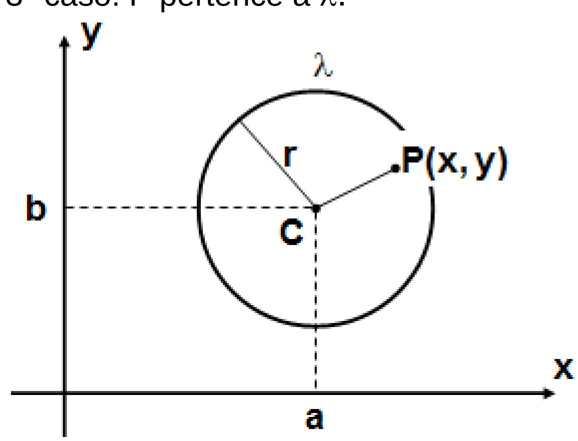
Isso ocorre se, e somente se:

$$D_{PC} = r$$

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2$$

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 = 0$$

3º caso: P pertence a λ.



Isso ocorre se, e somente se:

$$D_{PC} < r$$

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 < r^2$$

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 < 0$$

Podemos resumir esta teoria com a seguinte ideia: dada a circunferência $\lambda : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + k = 0$ onde $k = a^2 + b^2 - r^2$, seja f(x, y) o polinômio do primeiro membro, isto é:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2$$

Quando é dado $P(x_0, y_0)$, cuja posição em relação a λ queremos determinar, substituímos (x_0, y_0) em f, ou seja, calculamos

$$f(x_0,y_0) = {x_0}^2 + {y_0}^2 - 2ax_0 - 2by_0 + a^2 + b^2 - r^2$$

então, conforme acabamos de estudar,

$f(x_0,y_0) > 0 \Leftrightarrow$ P é exterior a λ.
$f(x_0,y_0) = 0 \Leftrightarrow$ P pertence a λ.
$f(x_0,y_0) < 0 \Leftrightarrow$ P é interior a λ.

Exemplos

Ex.1: Qual a posição do ponto P(2, 3) em relação à circunferência $\lambda : x^2 + y^2 - 4x = 0$?

Resolução:
Temos

$$P(x,y) = x^2 + y^2 - 4x$$

então,

$$P(2,3) = 2^2 + 3^2 - 4 \cdot 2 = 4 + 9 - 8 = 5$$

Como $P(2,3) > 0$, P é exterior a λ.

Ex.2: Qual a posição do ponto P(0, 0) em relação à circunferência $\lambda : x^2 + y^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{2}y = 0$?

Resolução:
Sendo
$P(x,y) = x^2 + y^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{2}y$, *vamos fazer* $P(0,0)$.

$$P(0,0) = 0^2 + 0^2 - \sqrt{3} \cdot 0 + \sqrt{2} \cdot 0 = 0$$

Como $P(0,0) = 0$, *P pertence a* λ.

Ex.3: Qual a posição do ponto P(0, 1) em relação à circunferência $\lambda : 2x^2 + 2y^2 + 5x + y - 11 = 0$?

Resolução:
A partir de
$P(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 5x + y - 11$, *vamos fazer* $P(0,1)$.

$$P(0,1) = 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 0 + 1 - 11 =$$
$$= 0 + 2 + 0 + 1 - 11 = -8$$

Como $P(0,1) = -8$, *P é interior a* λ.

OBSERVAÇÃO:
Note que substituir P(x0, y0) na função f(x, y) é muito mais simples do que calcular a distância PC e comparar com o raio uma vez que obter C e r é uma operação trabalhosa principalmente se a equação da circunferência apresentar coeficientes fracionários ou irracionais.

Exercícios

11) Determinar a posição do ponto P em relação à circunferência l em cada item abaixo:

a) P(2, 1) e $\lambda: 2x^2 + 2y^2 - 9 = 0$

b) P(-4, -5) e $\lambda: x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$

c) P(0, 0) e $\lambda: x^2 + y^2 - \sqrt{3}x + \pi y - 1 = 0$

12) Determinar P de modo que o ponto A(7, 9) seja exterior à circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 2y - p = 0$. (A resolução desta questão pode ser encontrada na seção RESPOSTAS)

13) Interprete graficamente a solução de cada uma das inequações do 2º grau a seguir:

a) $x^2 + y^2 \leq 9$

b) $x^2 + y^2 \geq 4$

c) $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 7 \leq 0$

d) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 > 0$

14) Resolver o sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$

(A resolução desta questão pode ser encontrada na secção RESPOSTAS)

15) Resolva o sistema de inequações $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x + y = 3 \end{cases}$. (A resolução desta questão pode ser encontrada na seção RESPOSTAS)

16) Resolver os seguintes sistemas de inequações do segundo grau:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ (x-1)^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 25 \\ x^2 + y^2 - 12x + 20 \ge 0 \end{cases}$

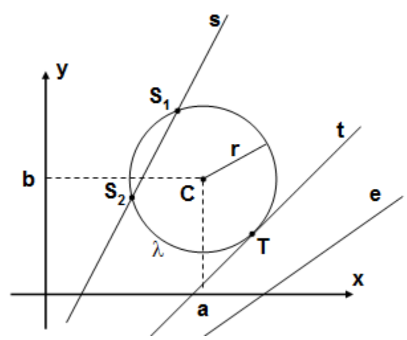
d) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \\ x + y \ge 1 \end{cases}$

POSIÇÃO RELATIVA ENTRE RETA E CIRCUNFERÊNCIA

Seja λ uma circunferência de centro no ponto C(a, b) e raio r. Existem, no plano, retas que cortam a circunferência em dois pontos, retas que tocam a circunferência em um único ponto e retas que não interceptam λ em ponto algum.

Estas retas são chamadas, respectivamente, de SECANTES, TANGENTES e EXTERNAS À CIRCUNFERÊNCIA.

Observe a figura:



$$e \cap \lambda = \phi$$

e é exterior à circunferência λ

$$t \cap \lambda = T$$

t é tangente à circunferência λ

$$s \cap \lambda = \{S_1,\ S_2\}$$

s é secante à circunferência λ

Considerando a circunferência $\lambda : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + k = 0$ e a reta dada por $r : Ax + By + C = 0$, a solução do sistema a seguir determina a posição da reta r em relação à circunferência λ.

$$S:\begin{cases}\lambda: x^2+y^2-2ax-2by+k=0\\ Ax+By+C=0\end{cases}$$

- Se S tem **duas** soluções distintas, r é **secante** à λ.
- Se S tem **solução única**, r é **tangente** à λ.
- Se S **não admite soluções reais**, então r é **exterior** à circunferência λ.

Exemplos

Ex.: Qual a posição relativa entre a circunferência $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ e a reta $3x-y=0$?

Resolução:

Devemos resolver o sistema $\begin{cases}(x-3)^2+(y-4)^2=25\\ 3x-y=0\end{cases}$.

Resolvendo-o, encontramos como solução os pares ordenados (0, 0) e (3, 9). Como o sistema admite duas soluções distintas, concluímos que a reta é secante à circunferência.

OBSERVAÇÃO

Existe um método alternativo de determinar a posição relativa entre uma circunferência e uma reta. Este método consiste em encontrar a distância entre o centro da circunferência e a reta e, em seguida comparar esta distância com o raio, assim:

$$d_{Cs}<r \Leftrightarrow s \text{ é secante a } \lambda$$
$$d_{Ct}=r \Leftrightarrow t \text{ é tangente a } \lambda$$
$$d_{Ce}>r \Leftrightarrow e \text{ é exterior a } \lambda$$

Utilize a figura da segunda coluna da página anterior para interpretar estas informações.

Na apostila anterior, aprendemos a calcular a distância entre ponto e reta.

Exercícios

17) Calcular a distância do centro da circunferência $x^2+y^2+5x-7y-1=0$ e a reta $4x+3y=0$.

18) Qual a posição relativa entre a reta $r: 4x + 3y = 0$ e a circunferência $x^2 + y^2 + 5x - 7y - 1 = 0$?

19) Qual a posição do eixo das abscissas em relação à circunferência $x^2 + y^2 - 5x + 4y + 4 = 0$.

20) Determinar os pontos P e Q onde a circunferência $x^2 + y^2 + 4x + 6y = 0$ encontra a reta 3x + 2y + 12 = 0.

21) Quais as equações das retas paralelas ao eixo das abscissas tangentes à circunferência $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$?

22) Qual o comprimento da corda que a reta 7x – 24y – 4 = 0 determina na circunferência $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$?

23) Escrever a equação da circunferência de centro no ponto (5, 4) e tangente à reta 3x – 3y + 14 = 0.

PROBLEMAS DE TANGENCIA

Vamos ver, por meio de exemplos, dois problemas clássicos de tangencia entre reta e circunferência.

1º problema: Determinar duas retas com inclinação dada e tangentes à uma circunferência.

Exemplos

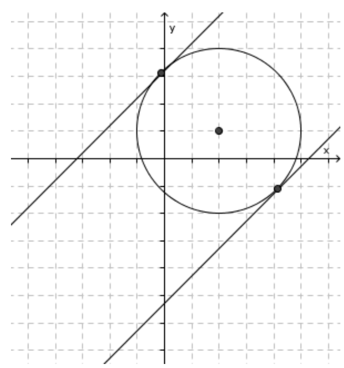
Ex.: Determinar as retas tangentes à circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ que formam um ângulo de 45º com o eixo Ox.

Resolução

Em princípio, vamos determinar o centro e o raio da circunferência:

$$a = \frac{-(-4)}{2} = 2 \quad e \quad b = \frac{-(-2)}{2} = 1$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - k} = \sqrt{2^2 + 1^2 - (-4)} = 3$$



Como as tangentes formam 45 com o eixo horizontal, podemos afirmar que possuem m = 1.

Além disso, distam 3 unidades do centro C(2, 1). Temos então, que as retas tangentes possuem equação $t: y = x + n$ ou $t: x - y + n = 0$. Daí,

$$D_{Ct} = 3$$

$$\frac{|1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + n|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3$$

$$|n+1| = 3\sqrt{2}$$

$$n + 1 = \pm 3\sqrt{2}$$

$$n = -1 \pm 3\sqrt{2}$$

Assim, as retas tangentes são:

$$t_1 : x - y - 1 + 3\sqrt{2} = 0$$

$$t_2 : x - y - 1 - 3\sqrt{2} = 0$$

2º problema: Determinar as equações das duas retas que passam por um ponto dado tangentes à uma circunferência.

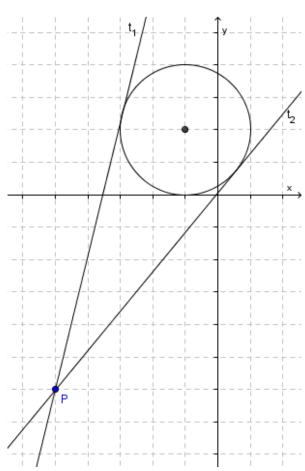
Exemplos

Ex.: Determinar as equações das retas tangentes à circunferência $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ traçadas a partir do ponto P(-5, -6).

Resolução:

Como a equação da circunferência foi apresentada na forma reduzida, podemos afirmar, sem maiores dificuldades, que seu centro é o ponto C(-1, 2) e o raio é 2.

Observe a ilustração:



Antes de tudo, devemos nos certificar que o problema tem solução, e isso acontece somente se P não for interior à circunferência. A ilustração acima nos mostra isso mas a solução gráfica não é suficiente, vamos, então, calcular a distância PC:

$$D_{PC} = \sqrt{(-5+1)^2 + (-6-2)^2} = \ldots = 4\sqrt{5} > 2$$

logo P é externo e o problema tem duas soluções que são as retas t da ilustração.

De t, podemos dizer que:

$$m = \frac{y-(-6)}{x-(-5)} \to \ldots \to mx - y + 5m - 6 = 0$$

Mas também sabemos que t dista 2 unidades de C(-1, 2), assim:

$$2 = \frac{|m \cdot (-1) - 2 + 5m - 6|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}}$$

$$2\sqrt{m^2+1} = |4m - 8|$$

$$(4m-8)^2 = \left(2\sqrt{m^2+1}\right)^2$$

$$16m^2 - 64m + 64 = 4m^2 + 4$$

$$12m^2 - 64m + 60 = 0$$

$$3m^2 - 16m + 15 = 0$$

$$m = \frac{16 \pm \sqrt{19}}{3}$$

logo, as equações procuradas serão encontradas substituindo $m = \frac{16 \pm \sqrt{19}}{3}$ em $mx - y + 5m - 6 = 0$ e, assim,

$$t_1 = \frac{16+\sqrt{19}}{3} \cdot x - y + 5 \cdot \frac{16+\sqrt{19}}{3} - 6 = 0$$

$$t_2 = \frac{16-\sqrt{19}}{3} \cdot x - y + 5 \cdot \frac{16-\sqrt{19}}{3} - 6 = 0$$

Exercícios

24) Obter as equações das tangentes à circunferência $x^2+(y-3)^2=36$ que sejam paralelas à reta $3x-y+1=0$.

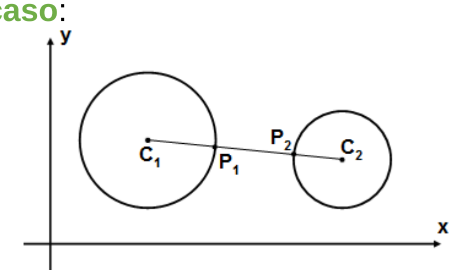
25) Determine as equações das retas tangentes à circunferência $x^2+y^2=1$ que passam pelo ponto $P\left(\sqrt{2},0\right)$.

POSIÇÃO RELATIVA ENTRE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

A posição relativa entre duas circunferências será determinada comparando a distância entre seus centros com a soma ou subtração do comprimento de seus raios.

Veja os 6 casos:

1º caso:



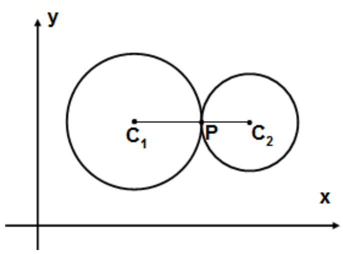
$$d > r_1 + r_2$$

pois

$$d = \underbrace{C_1P_1}_{r_1} + P_1P_2 + \underbrace{P_2C_2}_{r_2} > r_1 + r_2$$

Circunferências exteriores

2º caso:



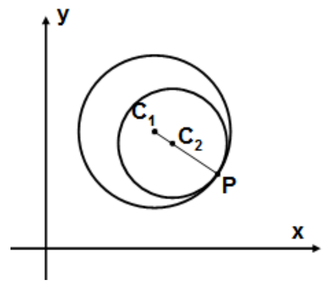
$$d = r_1 + r_2$$

pois

$$d = \underbrace{C_1P_1}_{r_1} + \underbrace{P_2C_2}_{r_2} = r_1 + r_2$$

Circunferências tangentes exteriormente

3º caso:



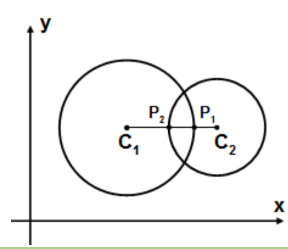
$$d = |r_1 - r_2|$$

pois

$$d = \underbrace{C_1P}_{r_1} - \underbrace{PC_2}_{r_2}$$

Circunferências tangentes interiormente

4º caso:



$$|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$$

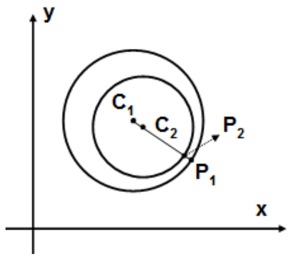
pois

$$d = \underbrace{C_1P_1}_{r_1} + \underbrace{P_2C_2}_{r_2} - \underbrace{P_1P_2}_{>0} < r_1 + r_2$$

$$d = \underbrace{C_1P_1}_{r_1} + \underbrace{P_1C_2}_{>0} > r_1 - r_2$$

Circunferências secantes

5º caso:



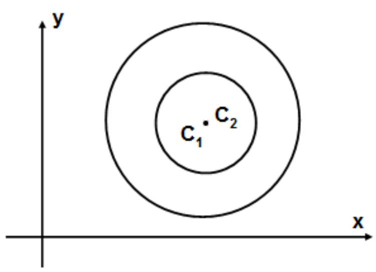
$$0 \le d < |r_1 - r_2|$$

pois

$$d = \underbrace{C_1P_1}_{r_1} - \underbrace{C_2P_2}_{r_2} - \underbrace{P_1P_2}_{>0} < r_1 - r_2$$

Circunferência de menor raio é interior à outra

6º caso:



$$d = 0$$

Circunferências concêntrias

Exemplos

Ex.: Qual a posição relativa entre as circunferências $\lambda_1 : x^2 + y^2 = 49$ e $\lambda_2 : x^2 + y^2 - 6x - 8y - 11 = 0$?

Resolução:

Temos:

$\lambda_1 \rightarrow$ *centro* $C_1(0,0)$ *e raio* $r_1 = 7$

$\lambda_2 \rightarrow$ *centro* $C_2(3,4)$ *e raio* $r_2 = 6$

$$d_{C_1C_2} = \sqrt{(0-3)^2 + (0-4)^2} = 5$$

Comparando a soma dos raios: $C_1C_2 = 5$ *e* $r_1 + r_2 = 13$ *e daí concluímos que* λ_1 *e* λ_2 *não podem ser exteriores nem tangente exteriormente.*

Comparando a diferença dos raios: $C_1C_2 = 5$ *e* $r_1 - r_2 = 1$ *e, consequentemente* λ_1 *e* λ_2 *não podem ser concêntricas, uma interior a outra nem tangentes interiormente.*

Por exclusão, λ_1 *e* λ_2 *são secantes.*

Você deve ter atenção pois este é o caso que exige mais cuidados pois são necessárias duas comparações: $C_1C_2 < r_1 + r_2$ *e* $C_1C_2 > r_1 - r_2$*. Nos demais casos, ao comparar* C_1C_2 *com* $r_1 + r_2$ *ou com* $r_1 - r_2$*, já podemos tirar conclusões.*

Exercícios

26) Qual a posição relativa entre λ_1 e λ_2 em cada caso a seguir?

a) $\lambda_1 : x^2 + y^2 = 36$ e

$\lambda_2 : x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$

b) $\lambda_1 : 2x^2 + 2y^2 - 4x = 0$ e

$\lambda_2 : x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

c) $\lambda_1 : x^2 + y^2 - 8 = 0$ e
$\lambda_2 : x^2 + y^2 + 6x + 6y + 17 = 0$

d) $\lambda_1 : x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$ e
$\lambda_2 : x^2 + y^2 - 2x = 0$

e) $\lambda_1 : x^2 + y^2 = 49$ e
$\lambda_2 : x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$

27) Obter a intersecção entre as circunferências $\lambda_1 : x^2 + y^2 = 100$ e $\lambda_2 : x^2 + y^2 - 12x - 12y + 68 = 0$.

RESPOSTAS

01) a) $x^2+y^2=9$

b) $(x-2)^2+y^2=16$

c) $(x+1)^2+(y+2)^2=25$

d) $(x-2)^2+(y-4)^2=1$

e) $x^2+(y+3)^2=4$

f) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=1$

02) $(x-1)^2+(y-2)^2=25$

03) a) $C(3,-2)\ e\ r=5$

b) $C(4,0)\ e\ r=3$

c) $C(-3,-4)\ e\ r=5$

d) $C\left(2,\frac{3}{2}\right)\ e\ r=\frac{5}{2}$

e) $C(1,-2)\ e\ r=\frac{\sqrt{3}}{3}$

04) x + y – 5 = 0

05) $C\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)\ e\ r=\frac{5}{2}$

06) $|m|=|n|\neq 0\ e\ m^2=4p$

07) $(x-2)^2+(y\pm 3)^2=18$

08) $x^2+y^2-14x-8y+40=0$

09) 7 ou -1

10) $4\sqrt{3}$

11) a) exterior
b) exterior
c) interior

12) *Resolução*

Fazendo $f(x,y)=x^2+y^2-2x-2y-p$,

devemos ter $f(7,9)>0$, *assim,*

$f(7,9)=7^2+9^2-2\cdot 7-2\cdot 9-p$

$f(7,9)=98-p$

$98-p>0$

Portanto $p<98$.

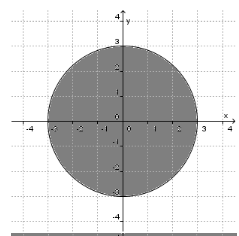
Por outro lado, uma condição para a existência da circunferência é que $D^2+E^2-4AF>0$, *e, assim,*

$4+4+4p>0 \Leftrightarrow p>-2$

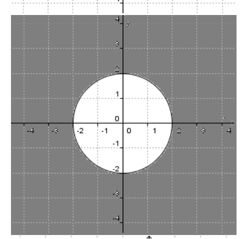
Fazendo a intersecção entre as duas condições, temos a solução. Portanto:

$-2<p<98$

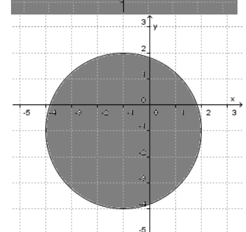
13) a)



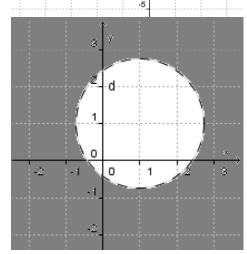
b)



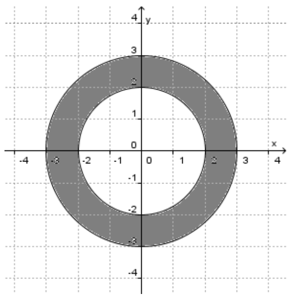
c)



d)

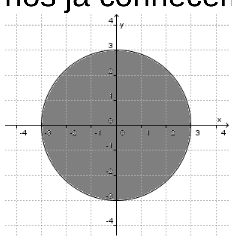


14) *Resolução:*
Note que as duas inequações que formam o sistema são as mesmas dos itens a) e b) da questão anterior e a solução é a intersecção dos dois conjuntos, assim, a solução está apresentada abaixo:

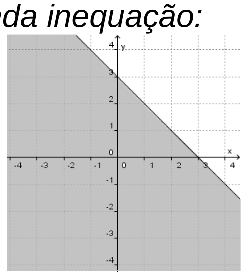


Em outras palavras, a solução é uma coroa circular com uma unidade de largura.

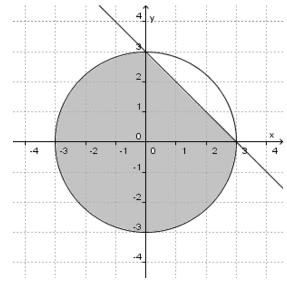
15) A solução da primeira inequação, nós já conhecemos:



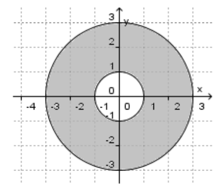
Vamos agora destacar a solução da segunda inequação:



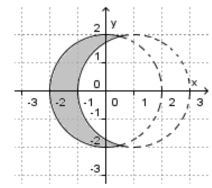
Agora, fazendo a intersecção entre as duas soluções, encontramos o conjunto de pontos procurado, portando, a solução do sistema de inequações é



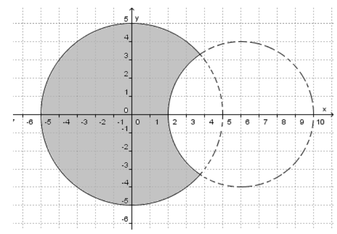
16) a)



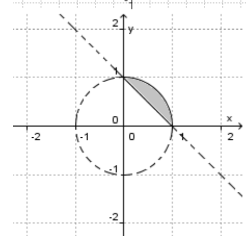
b)



c)



d)



17) $\dfrac{1}{10}$

18) r é secante à circunferência.

19) O eixo Ox é secante à circunferência.

20) P(-4, 0) e Q(0, -6)

21) y = 5 ou y = -1

22) 8

23) $(x-5)^2+(y-4)^2=16$

24) $3x-y+3\pm 6\sqrt{10}=0$

25) $x-y-\sqrt{2}=0$ e $x+y-\sqrt{2}=0$

26) a) secantes
b) concêntricas
c) exteriores
d) secantes
e) Tangentes interiormente

27) (1, 2) e (3, 4)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

DANTE, Luiz Roberto; Matemática, Volume dois. São Paulo, Atica, 2005.

IEZZI, Gelson e outros; Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 4. São Paulo, Atual, 5ª edição, 1977.

Links para os vídeos sugeridos:

Pág. 06
http://vidigal.ouropreto.ifmg.edu.br/equacao-geral-da-circunferencia/

Pág. 13
http://vidigal.ouropreto.ifmg.edu.br/posicao-relativa-entre-ponto-e-circunferencia/