Geometria Analítica

Cônicas

Prof° Marcelo Maraschin de Souza

Elipse

É o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante.

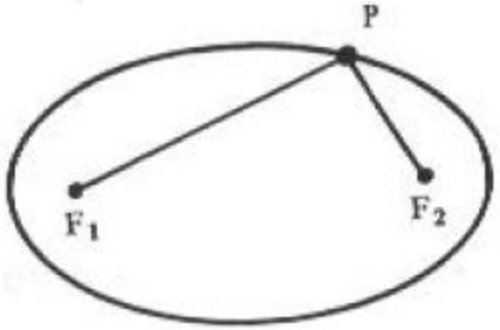


Figura 7.2-a

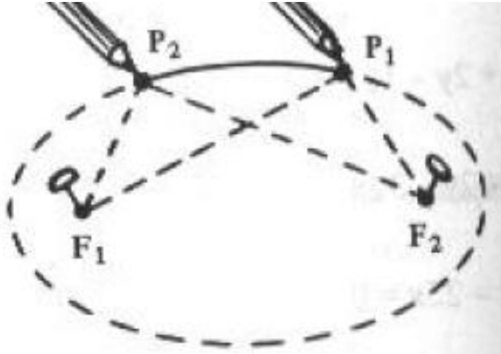


Figura 7.2-b

Elipse

Considere dois pontos distintos no plano, F_1 e F_2, tal que a distância

$$d(F_1, F_2) = 2c$$

e um número real positivo a tal que $2a > 2c$. Onde $2a$ é a soma das distâncias,

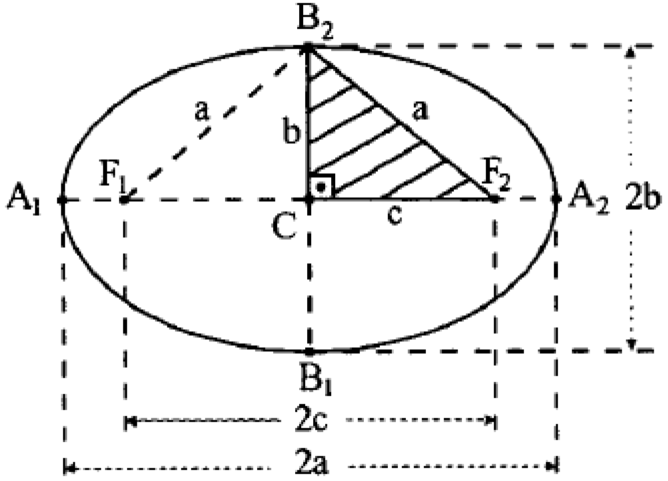
$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Obs: quando $F_1 = F_2$ tem-se uma circunferência de raio a.

Elipse

Notação:

- $F_1\ e\ F_2$: focos;
- 2c: distância focal;
- C: centro (ponto médio focos)
- $2a$: eixo maior, segmento A_1A_2, de comprimento 2a.
- $2b$: eixo menor, segmento B_1B_2, perpendicular a A_1A_2 no seu ponto médio.
- Vértices: A_1, A_2, B_1, B_2



Obs: $B_2F_1 + B_2F_2 = 2a,$ assim, $B_2F_2 = a = B_2F_1$. Logo, do triângulo retângulo

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Elipse

- Excentricidade:

$$e = \frac{c}{a} \quad (0 < e < 1)$$

A excentricidade é responsável pela forma da elipse: quando a excentricidade estiver próxima de 0, são quase circulares, quando a excentricidade estiver próxima de 1, são elipses “achatadas”.

Quando fixamos uma determinada excentricidade, todas as infinitas elipses têm a mesma forma, diferem apenas pelo tamanho.

Elipse

Aplicação:

A 1º lei do astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) é expressa por: "*qualquer planeta gira em torno do Sol, descrevendo uma órbita elíptica, da qual o Sol ocupa um dos focos*". A maioria dos planetas tem órbitas aproximadamente circulares, o que significa dizer que suas excentricidades estão perto de zero. Por exemplo, a órbita da Terra tem excentricidade 0,02, a de Júpiter 0,05, a de Marte 0,09, para citar apenas algumas. Mercúrio e Plutão, cujas órbitas elípticas têm excentricidades bem maiores, 0,21 e 0,25, respectivamente, constituem uma exceção à maioria dos planetas. O "campeão" de excentricidade no sistema solar parece ser o Cometa de Halley com e = 0,967 (quase 1) e ele leva aproximadamente 76 anos (período de revolução) para dar uma volta em torno do Sol. A Figura 8.25 dá uma idéia das trajetórias da Terra e de Halley com o Sol num dos focos.

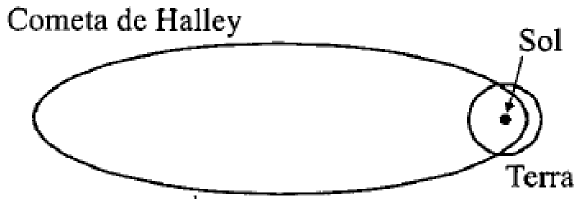


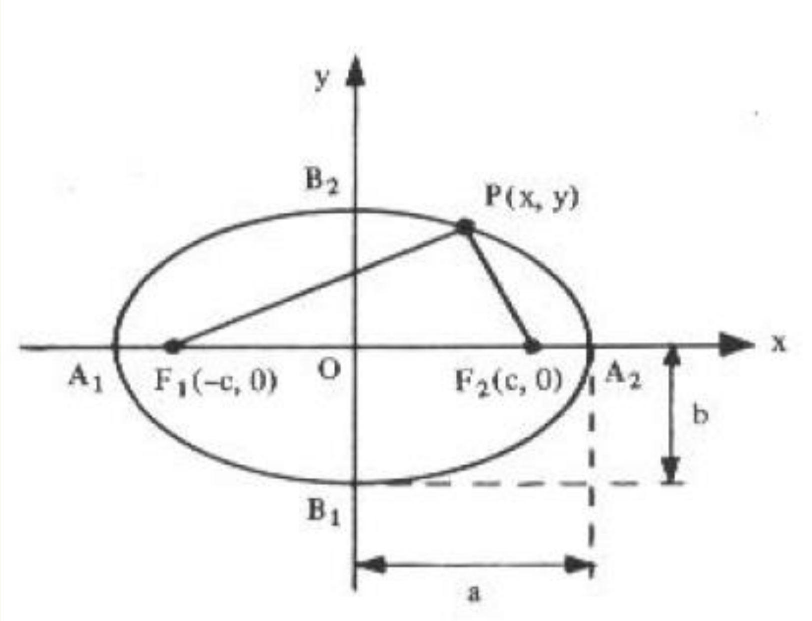
Figura 8.25

Com a finalidade de obtermos uma equação de elipse, teremos que referi-la ao sistema de eixos cartesianos. Iniciemos pelos casos mais simples.

Elipse

Seja a elipse de centro C(0,0). Temos dois casos:

Caso 1) O eixo maior está sobre o eixo x.



Elipse

Seja P(x,y) um ponto qualquer de uma elipse de focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$. Da definição temos,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

Fazendo as contas, temos

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Mas, $a^2-c^2=b^2$, daí temos a **equação reduzida** da elipse

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

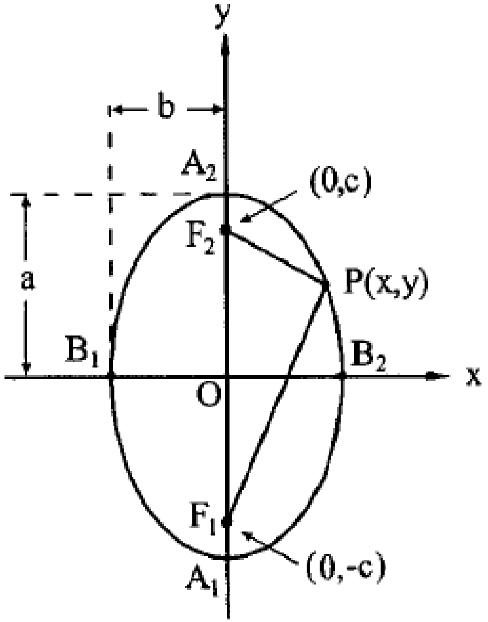
Elipse

Seja a elipse de centro C(0,0). Temos dois casos:

Caso 2) O eixo maior está sobre o eixo y.

De maneira análoga, obtemos

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$$



Elipse

Observação:

- Em toda elipse $a > b$, logo, para saber se a elipse tem eixo maior sobre o eixo x ou eixo y, basta verificar onde está o **maior** denominador na equação reduzida.

- Se for denominador de x^2, o eixo maior está sobre o eixo x

- Se for denominador de y^2, o eixo maior está sobre o eixo y.

Elipse

Exemplo:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

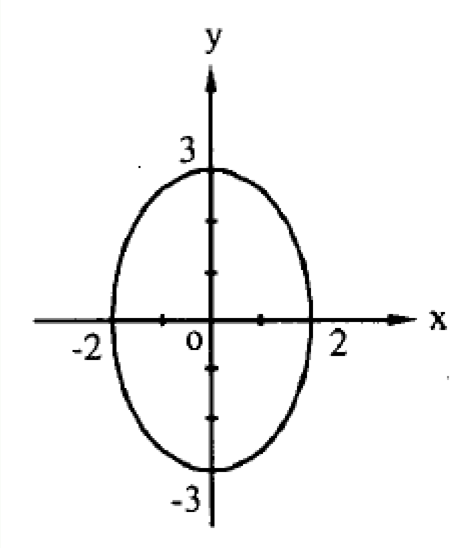
Temos,

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

Portanto, o eixo maior da elipse está sobre o eixo y. O centro é C(0,0), e as interseções com os eixos os quatro pontos $(0, \mp 3)$ e $(\mp 2, 0)$.

Elipse

Exemplo:



INSTITUTO FEDERAL
SANTA CATARINA

Elipse

Exemplos

Nos problemas de 1 a 3, para cada uma das elipses, determinar

a) a medida dos semi-eixos;
b) um esboço do gráfico;
c) os focos;
d) a excentricidade.

1) $9x^2 + 25y^2 = 225$

2) $4x^2 + y^2 - 16 = 0$

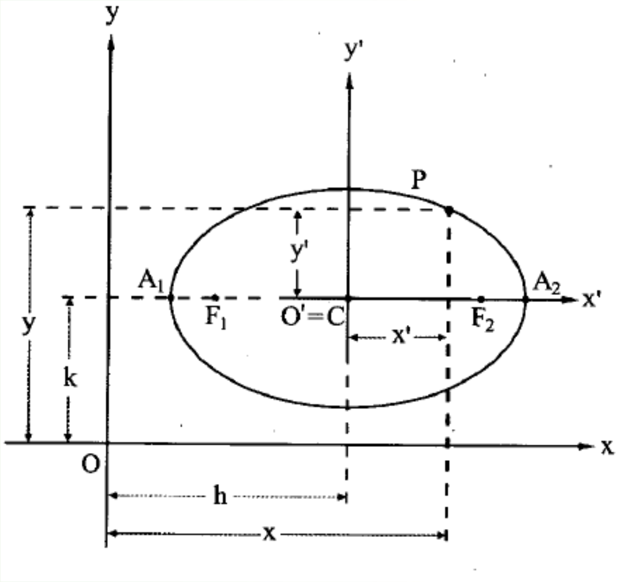
3) $x^2 + y^2 - 9 = 0$

4) Uma elipse de centro na origem tem um foco no ponto (3, 0) e a medida do eixo maior é 8. Determinar sua equação.

Elipse

Seja a elipse de centro C(h,k). Temos dois casos:

Caso 1) O eixo maior é paralelo ao eixo x.



Elipse

Logo, a sua equação reduzida é

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Para expressar em relação ao plano cartesiano usual, utilizamos as fórmulas de translação,

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Elipse

Seja a elipse de centro C(h,k). Temos dois casos:

Caso 2) O eixo maior é paralelo ao eixo y.

Analogamente ao caso 1, temos

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Equação Geral da Elipse

Se eliminarmos os denominadores, desenvolvermos os quadrados e ordenarmos os termos, obtemos a **equação geral da elipse,**

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma x + \xi y + \lambda = 0$$

INSTITUTO FEDERAL
SANTA CATARINA

Elipse

Exercícios:

1) Uma elipse, cujo eixo maior é paralelo ao eixo dos y, tem centro C(4, -2), excentricidade $e = \frac{1}{2}$ e eixo menor de medida 6. Obter uma equação desta elipse.

2) Dada a elipse de equação $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$, determinar:

a) sua equação reduzida;
b) o centro;
c) o gráfico;
d) os vértices;
e) os focos;
f) a excentricidade.

$$9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$$

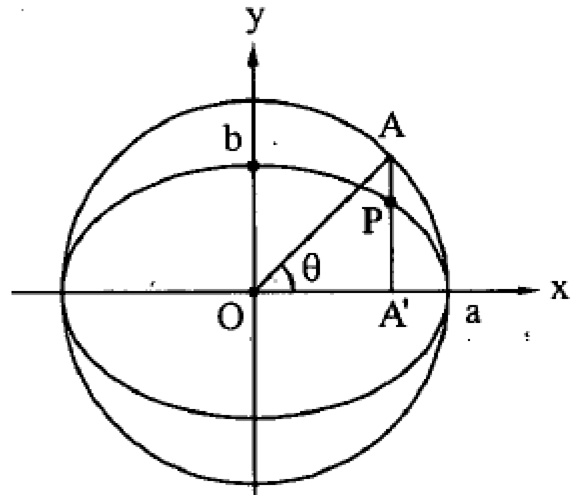
$$25x^2 + 16y^2 + 50x + 64y - 311 = 0$$

Equação Paramétrica da Elipse

Considere a elipse de equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tracemos a circunferência de centro O e raio igual ao semi eixo maior “a” da elipse.



Equação Paramétrica da Elipse

Seja P(x,y) um ponto qualquer da elipse. A reta que passa por P e é paralela ao eixo dos y, intercepta a circunferência em A e o raio AO determina com o eixo dos x um ângulo θ.

Do triângulo A’AO vem,

$$\cos(\theta) = \frac{OA'}{OA}$$

Ou

$$x = \mathrm{a}\cos(\theta)$$

Equação Paramétrica da Elipse

Substituindo x na equação da elipse, temos

$$\frac{(a\cos(\theta))^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Donde,

$$y=b\,sen(\theta)$$

Para cada valor de θ corresponde somente um ponto P da elipse e, quando θ varia de 0 a 2π, o ponto P parte de (a,0) e descreve a elipse no sentido anti-horário.

Equação Paramétrica da Elipse

Então, θ é o parâmetro e o sistema

$$\begin{cases} x = a\cos(\theta) \\ y = b\,sen(\theta) \end{cases}, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

Constitui as **equações paramétricas** dessa elipse.

Obs:

1) Para o eixo maior da elipse sobre o eixo y, temos

$$\begin{cases} x = b\cos(\theta) \\ y = a\,sen(\theta) \end{cases}, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

Equação Paramétrica da Elipse

Obs:

2) Quando o centro da elipse for C(h,k), pela translação de eixos obtemos

$$\begin{cases} x - h = a\cos(\theta) \\ y - k = b\,sen(\theta) \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} x = h + a\cos(\theta) \\ y = k + b\,sen(\theta) \end{cases}, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Para o eixo maior paralelo ao eixo dos x.

Equação Paramétrica da Elipse

Obs:

3)

$$\begin{cases} x = h + b\cos(\theta) \\ y = k + a\,sen(\theta) \end{cases}, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Para o eixo maior paralelo ao eixo dos y.

4) Quando as equações são dadas na forma paramétrica e se deseja escrever a elipse na forma padrão, lembre que

$$\cos^2(\theta) + sen^2(\theta) = 1$$

Equação Paramétrica da Elipse

Exercícios:

Obter equações paramétricas da elipse de equação:

1) $16x^2 + 25y^2 = 400$

2) $9x^2 + 4y^2 - 54x + 16y + 61 = 0$

3) Obtenha uma equação geral da elipse dada pela equação paramétricas

$$a)\ \begin{cases} x = 5\cos(\theta) \\ y = 5sen(\theta) \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} x = 2 + 4\cos(\theta) \\ y = 3 + 2sen(\theta) \end{cases}$$