

# Obserwacyjne wyznaczenie wielkości pola widzenia teleskopu

Kamil Kalinowski

10 grudnia 2020

Przeprowadzenie ćwiczenia nr 2 doprowadziło do wyznaczenia pola widzenia teleskopu robotycznego poprzez identyfikację gwiazd uchwyconych przez kamerę CCD. Wyznaczono także kąt pomiędzy osią  $y$  zdjęcia, a pobliskim kołem godzinnym.

## 1 Podstawy teoretyczne

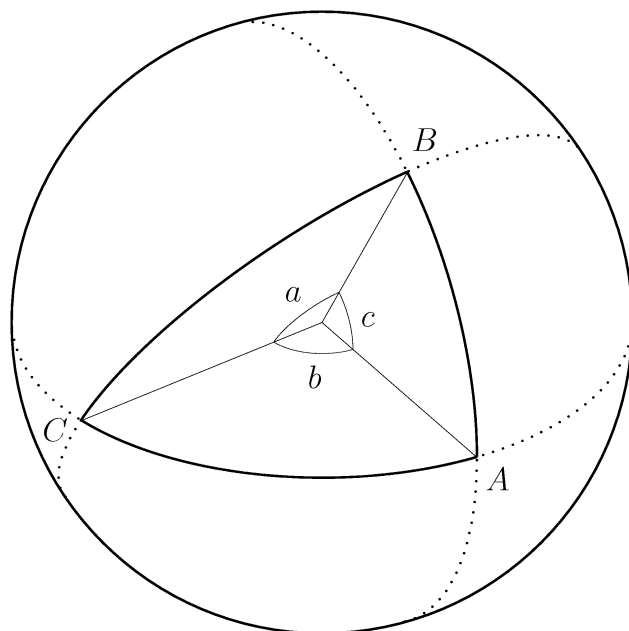
Aby obliczyć odległość kątową  $a$  pomiędzy dwoma obiektami o znanych współrzędnych równikowych równonocnych, deklinacji  $\delta_i$  i rektascencji  $\alpha_i$ , można posłużyć się wzorem cosinusowym dla boków trójkąta sferycznego (rys. 1) o wierzchołkach w biegunie oraz w tych obiektach

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \quad (1)$$

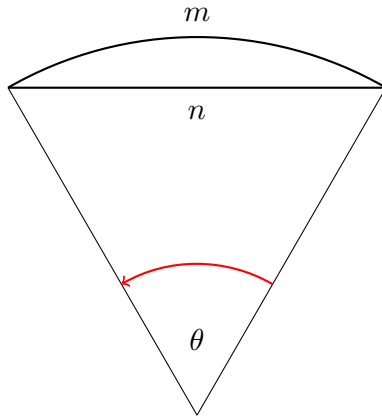
gdzie  $b = \frac{\pi}{2} - \delta_2$ ,  $c = \frac{\pi}{2} - \delta_1$ ,  $A = \alpha_2 - \alpha_1$ . Po przekształceniu z wykorzystaniem wzorów redukcyjnych równanie (1) przyjmuje postać

$$\cos a = \sin \delta_2 \sin \delta_1 + \cos \delta_2 \cos \delta_1 \cos (\alpha_2 - \alpha_1). \quad (2)$$

W ćwiczeniu wszystkie trójkąty sferyczne, których boki odpowiadają odległościom kątowym pomiędzy



**Rysunek 1:** Rozpatrywany trójkąt sferyczny. Obrazek został zaczerpnięty z [3].



**Rysunek 2:** Ilustracja obrazująca różnicę między łukiem, a odcinkiem pomiędzy jego końcami. Obrazek wykonany osobiście.

gwiazdami ze zdjęcia, będą *bardzo małe*, co nasuwa myśl, że warto sprawdzić, czy przybliżenie ich za pomocą trójkątów euklidesowych da wystarczająco dokładne rezultaty. W tym celu zbadano, jak zmienia się różnica  $s$  pomiędzy długością łuku okręgu  $m$ , a odległością  $n$  pomiędzy jego końcami w zależności od kąta  $\theta$  tego łuku (rys. 2). Z twierdzenia cosinusów wynika  $n = \sqrt{2(1 - \cos \theta)}$ , natomiast  $m = \theta$ . Zatem

$$s = \theta - \sqrt{2(1 - \cos \theta)}. \quad (3)$$

W ćwiczeniu obliczone odległości katowe  $a$  pomiędzy gwiazdami o znanych współrzędnych, zostaną porównane z ilością pikseli  $p$ , które oddzielają je na zdjęciu. W ten sposób zostanie umożliwione obliczenie wartości  $k$ , której wartość będzie oznaczała, jakiemu kątowi na zdjęciu odpowiada piksel. Obliczyć pole widzenia teleskopu  $FOV$  będzie można, przemnażając  $k$  przez liczbę pikseli  $P$  w jednej osi, za pomocą wzoru

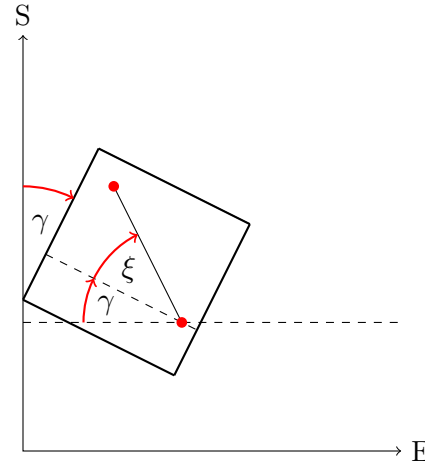
$$FOV = kP = P \frac{a}{p}. \quad (4)$$

Wartość spowodowanego refrakcją przesunięcia  $\Delta h$  wysokości punktu na sferze niebieskiej można wyrazić wzorem

$$\Delta h = \chi \operatorname{tg} z, \quad (5)$$

gdzie  $\chi$  jest współczynnikiem zależnym od ciśnienia i temperatury, natomiast  $z$  jest odległością zenitalną [2]. Wzór ten jest w przybliżeniu słuszny, gdy  $z < 45^\circ$ .

Przy założeniu, że wcześniej omówione sprawdzenie, czy geometria euklidesowa jest wystarczającym przybliżeniem dla analizowanego przypadku da pozytywny wynik, kąt  $\xi$  pomiędzy odcinkiem łączącym



**Rysunek 3:** Schemat ilustrujący orientację zdjęcia względem pobliskiego koła godzinowego (oś pionowa) i równoleżnika niebieskiego (oś pozioma). Czerwone punkty to para gwiazd. Obrazek wykonany osobiście.

parę gwiazd, a osią  $x$  zdjęcia (rys. 3) można wyrazić wzorem

$$\xi = -\arctan \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad (6)$$

gdzie  $x_i$  i  $y_i$  są współrzędnymi gwiazd na zdjęciu. Kąt  $\gamma$  jest rozpięty pomiędzy osią  $y$  zdjęcia, a pobliskim kołem godzinowym (od strony południowego bieguna niebieskiego). Kąt  $\beta$  zdefiniowano jako sumę  $\beta = \gamma + \xi$ . Zatem

$$\gamma = \beta - \xi. \quad (7)$$

Kąt  $\beta$  można obliczyć z twierdzenia sinusów dla trójkąta sferycznego, którego bokami są gwiazdy z pary i biegun południowy. Po wykorzystaniu wzorów redukcyjnych i przekształceniu przyjmuje ono postać

$$\cos \beta = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1) \cos \delta_1}{\sin a}, \quad (8)$$

gdzie gwiazda z indeksem 1 ma mniejszą rektascencję. Ze względu na nieujemny obraz funkcji arcus cosinus, należy przemnożyć wartość kąta  $\beta$  przez  $-1$ , jeżeli jest on pod równoleżnikiem.

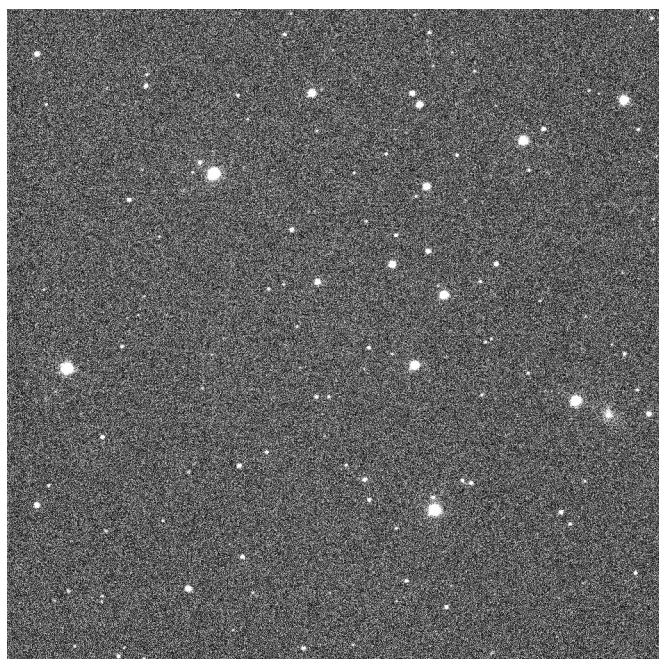
Ujemna wartość kąta  $\gamma$  oznaczałaby, że kamera przechylona jest w kierunku zachodnim.

## 2 Układ pomiarowy

Parametry teleskopu wykorzystanego w ćwiczeniu zostały zebrane w tabeli 1. Obserwacja została zlecona poprzez system Skynet.

Model teleskopu	CDK20
Producent	PW Instruments
Typ teleskopu	Dall-Kirkham
Apertura	20"
Ogniskowa	3454 mm
Światłosiła	F/6,8
Montaż	L-500
Filtry	U, B, V, R, I
Długość geo.	19° 49' 24.5"
Szerokość geo.	50° 3' 12.7"
Model kamery CCD	Apogee Alta F47
Rozdzielczość	1024 x 1024
Rozmiar piksela	13 x 13 $\mu\text{m}$

Tabela 1: Dane wykorzystanego teleskopu



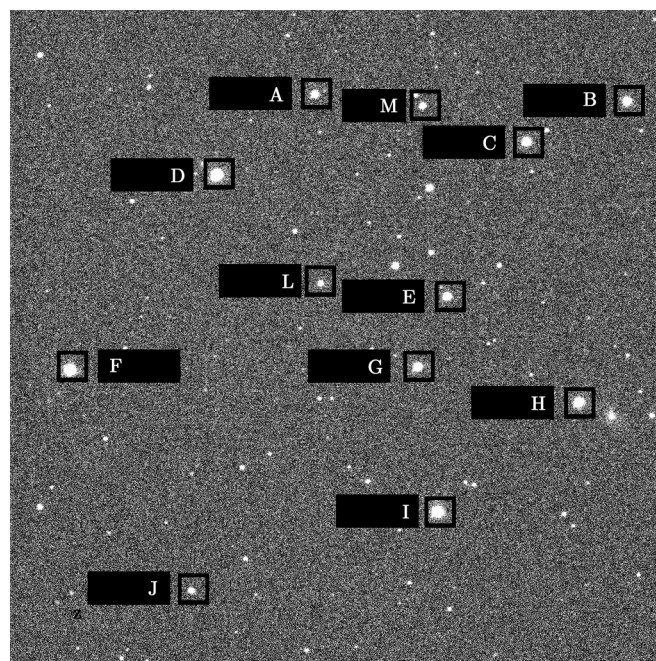
Rysunek 4: Analizowane zdjęcie

### 3 Przebieg doświadczenia

Do obserwacji wybrano asteryzm o jasności 8 mag, znany wśród miłośników astronomii jako Muchomor. Następnie wprowadzono obserwację do systemu Sky-net. Redukcja zdjęcia została wykonana automatycznie. Parametry zdjęcia 4 zostały zebrane w tabeli 2.

Data wykonania zdjęcia	27-10-2020
Moment otwarcia migawki	17:02:34
Czas ekspozycji	2 s
Wykorzystany filtr	R
Deklinacja obiektu	16° 18' 16"
Rektascencja obiektu	21 <sup>h</sup> 7 <sup>m</sup> 26 <sup>s</sup>
Odległość zenitalna	33° 58' 43"

Tabela 2: Parametry zdjęcia, czas jest podany w formacie UT



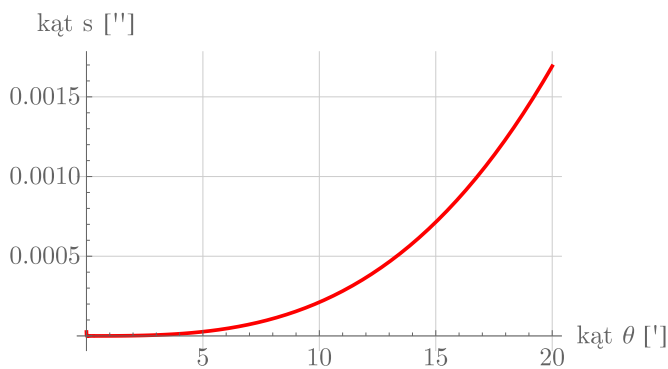
Rysunek 5: Analizowane zdjęcie z oznaczeniami przypisanymi do zidentyfikowanych obiektów

Ozn.	Nr w katalogu	Rektascencja	Deklinacja
A	1649-2352-1	21 <sup>h</sup> 7 <sup>m</sup> 16 <sup>s</sup> .3	16°15'18".7
B	1649-728-1	21 <sup>h</sup> 7 <sup>m</sup> 42 <sup>s</sup> .1	16°13'54".0
C	1649-735-1	21 <sup>h</sup> 7 <sup>m</sup> 34 <sup>s</sup> .6	16°15'11".8
D	1649-2308-1	21 <sup>h</sup> 7 <sup>m</sup> 9 <sup>s</sup> .9	16°17'22".9
E	1649-538-1	21 <sup>h</sup> 7 <sup>m</sup> 31 <sup>s</sup> .3	16°18'37".5
F	1649-368-1	21 <sup>h</sup> 7 <sup>m</sup> 1 <sup>s</sup> .9	16°21'57".8
G	1649-487-1	21 <sup>h</sup> 7 <sup>m</sup> 30 <sup>s</sup> .5	16°20'9".0
H	1649-2401-1	21 <sup>h</sup> 7 <sup>m</sup> 44 <sup>s</sup> .4	16°20'2".2
I	1649-2443-1	21 <sup>h</sup> 7 <sup>m</sup> 35 <sup>s</sup> .1	16°22'54".5
J	1649-380-1	21 <sup>h</sup> 7 <sup>m</sup> 16 <sup>s</sup> .5	16°25'41".5
L	1649-525-1	21 <sup>h</sup> 7 <sup>m</sup> 20 <sup>s</sup> .5	16°18'58".9
M	1649-2526-1	21 <sup>h</sup> 7 <sup>m</sup> 25 <sup>s</sup> .4	16°14'59".9

Tabela 3: Zidentyfikowane obiekty wraz z ich numerami w katalogu Tycho-2 oraz ich współrzędnymi równocnymi z epoki J2000 w układzie odniesienia ICRS [1]

Oznaczenie	$x$ [px]	$y$ [px]
A	477	893
B	964	882
C	807	818
D	324	768
E	683	578
F	94	464
G	637	468
H	889	412
I	669	242
J	284	120
L	486	598
M	645	875

**Tabela 4:** Zidentyfikowane obiekty wraz z ich współrzędnymi na zdjęciu



**Rysunek 6:** Zależność  $s(\theta)$

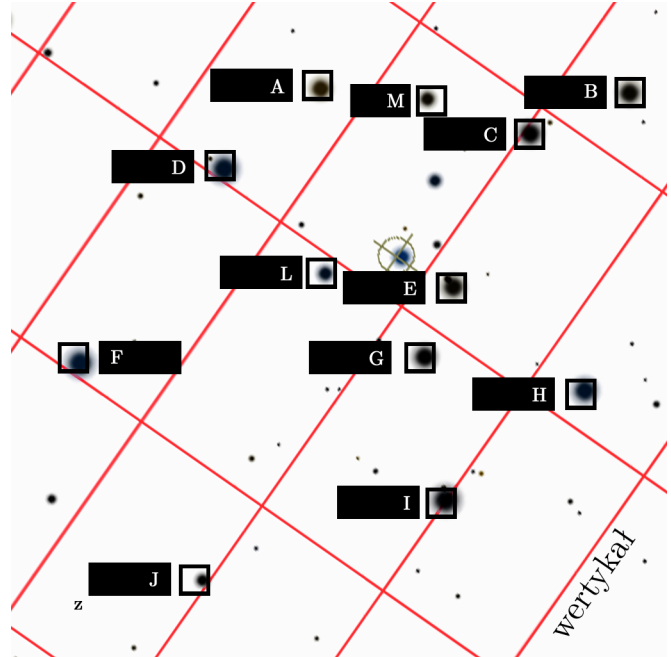
## 4 Analiza danych uzyskanych z pomiarów w trakcie doświadczenia

### 4.1 Wyznaczenie pola widzenia

W programie Stellarium wyświetlono sfotografowany fragment nieba. Kolejno kojarzono sfotografowane gwiazdy (do ok. 12 mag) z wpisem na ich temat w bazie SIMBAD, skąd spisywano ich numer katalogowy z bazy [1], a następnie spisywano z niej ich współrzędne. Za niepewności tych współrzędnych przyjęto 0, ponieważ są one podawane ze znacznie wyższą liczbą cyfr znaczących od liczby spisanych. Oznaczenia naniesione na zdjęcia przedstawia obrazek 5. Pozyskane dane zawarto w tabeli 3.

Plik wyświetlono w programie SAOImageDS9, a następnie wyznaczano współrzędne gwiazd na zdjęciu, odczytując je po najejaniu kursorem na subiektywny środek tarczy gwiazdy. Odczytane współrzędne są zawarte w tabeli 4.

Maksymalna różnica deklinacji gwiazd na zdjęciu



**Rysunek 7:** Obszar ze zdjęcia 1 z siatką azymutalną w miejscu i czasie obserwacji. Źródło: Stellarium

wynosi około  $10'$ , dlatego uznano, że wyznaczana wartość  $FOV$  wyniesie kilkanaście minut. Z wykresu 6 zależności (3) dla kątów o takich wartościach odczytano, że w przypadku przybliżenia takich łuków przez odcinki pomiędzy ich końcami wynik będzie odbiegał od dokładnego dopiero w zakresie tysięcznych części  $''$ , a więc w tym przypadku przybliżenie trójkątów sferycznych trójkątami euklidesowymi da wystarczająco dokładne rezultaty. Będzie można też użyć przybliżenia przez geometrię euklidesową przy wyznaczaniu kąta  $\gamma$ .

Wyświetlono w programie Stellarium sfotografowany fragment nieba wraz z siatką azymutalną. Jest on przedstawiony na obrazku 7. Gwiazdy sparowano zwracając uwagę, aby miały w parze podobną wysokość, w celu zredukowania wpływu refrakcji na rezultat. Drugą grupę stanowią pary gwiazd o podobnym azymucie, w celu porównania. W danej grupie par gwiazdy każda gwiazda występuje tylko jednokrotnie. Następnie obliczono odległości  $a$  pomiędzy gwiazdami ze wzoru (2) oraz odległości  $p$  między nimi na zdjęciu z twierdzenia Pitagorasa (jego użycie uzasadniono w poprzednim akapicie). Wyniki zawarto w tabeli 5.

Przekształcony względem  $p$  wzór (4) przyjmuje postać

$$p(a) = \zeta a,$$

gdzie  $\zeta = \frac{P}{FOV}$ , i do takiej funkcji, nie stwierdzając odchylenia punktów pomiarowych od liniowości, do-

Para	$p$ [px]	$a$ [']
<i>Pary o podobnej wysokości</i>		
D-L	234,8276	2,984564944
A-C	338,4154252	4,393638669
D-G	433,5539	5,644209
E-H	264,5600	3,445473971
F-I	615,4348056	8,019638364
<i>Pary o podobnym azymucie</i>		
F-A	575,0913	7,495496047
J-E	607,4248	7,908250127
G-C	389,1015	5,050091876
H-I	278,8207	3,639021859
L-M	319,3900	4,153263384

**Tabela 5:** Pary gwiazd wraz z odpowiadającymi im odległościami między nimi na zdjęciu i w rzeczywistości

pasowano dane metodą najmniejszych kwadratów w programie Mathematica.

Dla par o podobnej wysokości wyznaczona wartość wynosi

$$\zeta_h = (76,93 \pm 0,24) \text{ px } (')^{-1},$$

natomiast dla par o podobnym azymucie

$$\zeta_A = (76,812 \pm 0,060) \text{ px } (')^{-1}.$$

Z nachylenia prostych wyznaczono wartości pola widzenia. Dla par o zbliżonej wysokości

$$FOV_h = (13,311 \pm 0,042)',$$

natomiast dla par o zbliżonym azymucie

$$FOV_A = (13,331 \pm 0,011)'.$$

## 4.2 Wyznaczenie kąta $\gamma$

Po podstawieniu danych grupy par o podobnych rektascencjach do wzoru (7) wyznaczono średnią wartość kąta  $\gamma$  i jego odchylenie standardowe

$$\gamma = (-14,29 \pm 0,52)^\circ. \quad (9)$$

## 5 Dyskusja wyniku

Podstawiając do wzoru (5) stałą refrakcji o wartości  $60''/3$  za współczynnik  $\chi$  oraz skrajne wysokości z analizowanego zdjęcia można wywnioskować, że ze względu na wpływ refrakcji odległość między gwiazdami na zdjęciu może być mniejsza niż w rzeczywistości o nie więcej niż  $\sim 0''/3 = 0'005$ . Jest to

wartość o rzędzie wielkości ostatniej cyfry znaczącej uzyskanych wartości kątów pola widzenia, a zatem nie można wykluczyć drobnego wpływu refrakcji na wyniki analizy w przypadku kątów  $FOV_A$  i  $FOV_h$ . Wcale nie powinna jednak ona wpływać na uzyskaną wartość kąta  $FOV_h$ , ponieważ został on obliczony wyłącznie z wykorzystaniem par gwiazd o zbliżonej wysokości nad horyzontem. Warto również zauważyć, że niepewności standardowe uzyskanych wyników są wielokrotnie większe od ewentualnego wpływu refrakcji.

Tezę o nikłym wpływie refrakcji na wyniki analizy potwierdza porównanie ze sobą uzyskanych wartości kątów  $FOV_A$ , oraz  $FOV_h$ , ponieważ są one ze sobą zgodne w zakresie niepewności standardowych.

Seeing powoduje rozmycie obrazu gwiazdy w krążek, jednak nie zmienia jej pozycji, a zatem nie powinien mieć on wpływu na wyniki ćwiczenia, jeśli środki krążka zostały zlokalizowane precyzyjnie.

Istnieją działania, których wykonanie mogłoby subtelnie udoskonalić rezultat analizy kosztem niewspółmiernego do oczekiwanych efektów zwiększenia nakładów pracy. Zaliczają się do nich

- wyznaczenie środka tarczy każdej gwiazdy poprzez analizę rozkładu liczby zliczeń ADU,
- obliczenie przesunięcia ze względu na refrakcję ze wzoru (5) dla każdej gwiazdy i analiza współrzędnych zmienionych o  $\Delta h$ ,
- zwiększenie liczby analizowanych par gwiazd,
- wzięcie do analizy średniej z wielu zdjęć tego obszaru, aby zupełnie wykluczyć wpływ seeingu na wyniki.

Z wartości kąta  $\gamma$  wynika, że pole widzenia kamery jest przechylone z południa na zachód.

## Inne informacje

Wszystkie współrzędne w dokumencie są na epokę J2000.

Wszystkie podane niepewności są niepewnościami standardowymi.

Autorem szablonu graficznego dokumentu jest ND Physics, i szablon ten został udostępniony z licencją Creative Commons CC BY 4.0.

## Załączniki

1. `zdjecie.fits` – Zdjęcie analizowane w sprawozdaniu

2. `dane.xlsx` – Plik zawierający surowe dane z ćwiczenia i obliczenia
3. `regresja.nb` – Plik zawierający dane dopasowań danych do funkcji

## Literatura

- [1] E. HØG, C. FABRICIUS, V. MAKAROV, S. URBAN, T. CORBIN, G. WYCOFF, U. BASTIAN, P. SCHWEKENDIEK, AND A. WICENEC, *The tycho-2 catalogue of the 2.5 million brightest stars*, *Astronomy and Astrophysics*, 355 (2000), pp. L27–L30.
- [2] E. RYBKA, *Astronomia Ogólna*, PWN, 1983.
- [3] P. WESOM, *Spherical geometry #2 – spherical triangles and angles*. <http://astrophileawesome.blogspot.com/2017/12/spherical-geometry-2-spherical.html>, 2020. [Online; dostęp 21-Listopad-2020].