



Sprawozdanie z ćwiczenia 2.

Wykonał: Kamil Kalinowski

Asystent prowadzący: dr Błażej Nikiel-Wroczyński

Obserwacje radioastronomiczne Kasjopei A i analiza uzyskanych danych doprowadziły do wyznaczenia zdolności rozdzielczej, powierzchni efektywnej, kąta bryłowego, współczynnika wykorzystania powierzchni anteny, czułości teleskopu i efektywności listka głównego użytego radioteleskopu.

I. Wstęp

Dane zostały zebrane za pomocą radioteleskopu RT-15 zlokalizowanego w Obserwatorium Astronomicznym Uniwersytetu Jagiellońskiego 27 października 2021 roku. Zegar w komputerze sterującym spóźniał się o około 10 min. 360° odpowiada 4096 działkom resolwera.

Stała czasowa wynosiła

$$\tau_{tel} = \frac{1}{3} \text{ s},$$

stała próbkowania wynosiła

$$\tau_{pc} = \frac{1}{2} \text{ s},$$

i offset przetwornika wynosił 2332. Tłumienie toru wynosiło 0.

Ponieważ $\tau_{tel} < \tau_{pc}$, dane ze wszystkich punktów pomiarowych są niezależne statystyczne.

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie wielkości wymienionych w pierwszym akapicie.

Dane zostały zebrane pomiędzy 20:54, a 21:54 czasu komputera sterującego.

Proces kalibracji polega na włączeniu i wyłączeniu najpierw źródła szumowego z tłumieniem — jest to kalibracja gorąca, a następnie

źródła szumowego z podwójnym tłumieniem — jest to kalibracja zimna. Poniżej wymieniono rodzaje wykonanych pomiarów i odpowiadające im nazwy plików z danymi:

- kalibracja na początku pomiarów (pomiar A) — g3c2ka1.txt,
- ruch czaszy teleskopu wzdłuż koła godzinowego (pomiar B) — g3c2dec.txt,
- ruch czaszy teleskopu wzdłuż równoleżnika niebieskiego (pomiar C) — g3c2ra.txt,
- kalibracja na końcu pomiarów (pomiar D) — g3c2ka2.txt.

Obserwacje zostały wykonane w paśmie $B = 1420 \text{ MHz}$.

W uwagach z karty pomiarowej zanotowano, że na początku pomiarów teleskop poruszał się w złym kierunku (nie będzie to miało wpływu na analizę), oraz, że podczas pomiarów zarejestrowano „sygnał radaru”, który należy odfiltrować.

II. Dane

Włączenie i wyłączenie kalibracji nie jest natychmiastowe, a przede wszystkim proces ten zajmuje wielokrotność stałej czasowej. Z tego powodu w czasie włączania i wyłączania kalibracji aparatura rejestrowała pośrednie wartości ADU. Przefiltrowano dane usuwając punkty pomiarowe z „przejsiowymi” wartościami ADU.

Wbrew uwadze z karty pomiarowej nie stwierdzono rejestracji periodycznego sygnału, który mógłby pochodzić z urządzeń będących na wyposażeniu pobliskiego portu lotniczego Kraków-Balice lub zmiennego sygnału wybijającego się ponad szum z innego źródła naziemnego, który należałoby odflitować.

Zauważono anomalię dla punktów pomiarowych o numerach od $n = 300$ do $n = 500$ w pomiarze B (wykres 1). Ten fragment nie miał być jednak wykorzystywany w analizie.

Zbiór wykresów 2 zawiera surowy zestaw danych z części B i C.

Zbiór wykresów 3 zawiera surowy zestaw danych z części B i C.

Zbiór wykresów 4 zawiera zestaw danych z części A i D po filtracji.

Pełnemu kątowni odpowiada $q = 4096$ działek resolwera. Zdefiniowano współczynnik χ jako stosunek pełnego kąta do q . Jego sens jest taki, że jedna działka resolwera odpowiada kątowi χ . Wynosi on

$$\chi = \frac{45}{512}^\circ.$$

Przeliczono działki resolwera na deklinację dla wszystkich punktów pomiarowych korzystając ze wzoru

$$\delta = \delta_p + (x_i - x_p)\chi, \quad (1)$$

gdzie x_i jest i -tą wartością z resolwera, a x_p jest wartością z resolwera odpowiadającą kątowi δ_p . δ_p jest wartością deklinacji Kasjopei A i wynosi $\delta_p = 58^\circ 48' 54''$. x_p wyznaczono biorąc największą wartość ADU z pierwszego piksu z pomiaru C (punkt pomiarowy o numerze $n = 475$). Przyjęto takie podejście, ponieważ nie jest znany dokładny czas wykonania pomiarów (zegar w komputerze sterującym nie podaje precyzyjnego czasu).

Kolejnym krokiem było przeliczenie wartości resolwera w osi rektascencji na rektascencję α . Rektascencję wyznaczono ze wzoru

$$\alpha = \alpha_p + (y_i - y_p)\chi - (i - n)\tau_{pc}, \quad (2)$$

gdzie y_i jest i -tą wartością z resolwera, a y_p jest wartością z resolwera odpowiadającą kątowi α_p , tzn. rektascencją Kasjopei A i wynosi $\alpha_p = 23^\circ 23' 26''$. y_p wyznaczono biorąc największą wartość ADU z pierwszego piksu z pomiaru B ($n = 764$).

Następnie dla każdej wartości deklinacji uśredniono przypadające jej wartości ADU z pomiaru B. Podobną operację wykonano dla rektascencji z pomiaru C. Wykresy z uśrednionymi wartościami ADU umieszczono w zbiorze wykresów 6. Do sprawozdania załączono także wykresy $ADU(\alpha)$ dla wszystkich przebiegów w formie plików.

Okazało się jednak, że na każdą wartość rektascencji z pomiaru C przypada tylko jeden pomiar, co dobrze widać na wykresie 7. Przyczyną tego stanu rzeczy jest brak obrotu teleskopu w osi świata z okresem obrotu Ziemi. Z tego powodu zbinowano dane dla tego pomiaru, tzn. uśredniono zbiory po 20 rektascencji i odpowiadające im 20 ADU. Zbinowane dane przedstawia wykres 8b.

III. Wielkości wyznaczane

Wzór wynikający z prawa propagacji niepewności ma postać

$$u_f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} u_{x_i} \right)^2}, \quad (3)$$

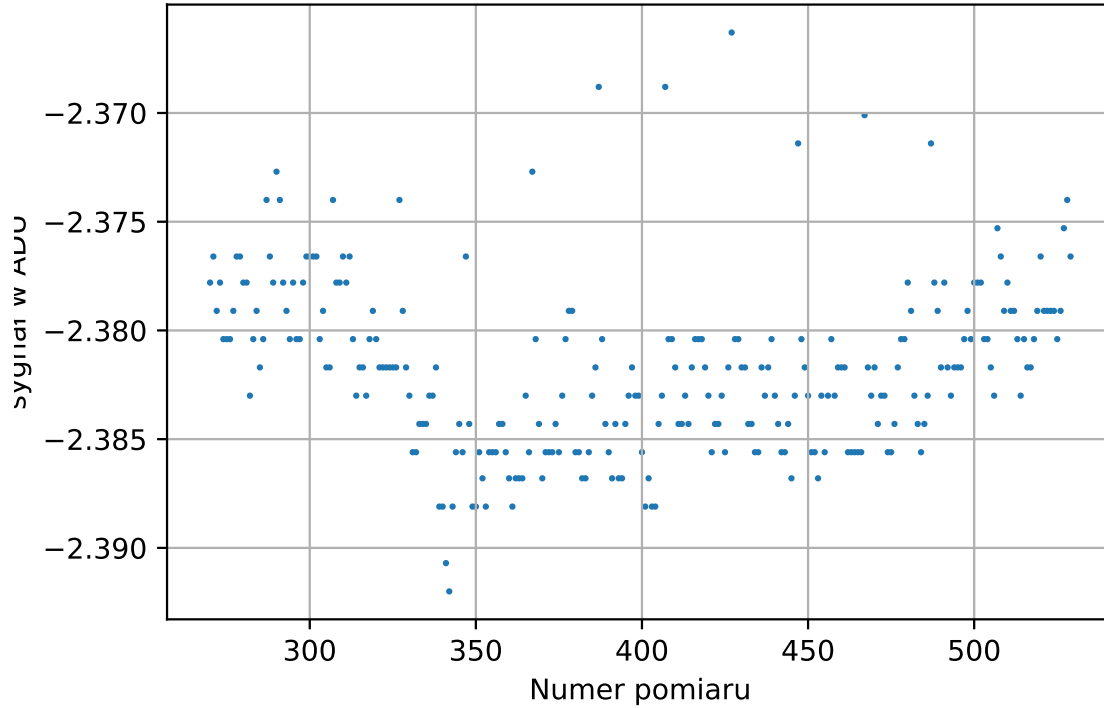
gdzie u_f jest wyznaczaną niepewnością standardową wartości danej funkcją f zależnej od N argumentów x_i o niepewnościach u_{x_i} .

Wzór na średnią wartość wielkości a ma postać

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{N}, \quad (4)$$

gdzie a_i jest i -tą wartością, a N liczbą wartości.

Wzór na odchylenie standardowe wartości średniej u_a ma postać



Rysunek 1: Pomiar B, dane surowe – zawężona dziedzina

$$u_a = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (a_i - \bar{a})^2}. \quad (5)$$

I. Dopasowanie funkcji Gaussa do przebiegów

Ponieważ splot sygnału od źródła punktowego i jednorodnej funkcji przenoszenia daje rozkład Gaussa, do uśrednionych danych z pomiaru B oraz zbinowanych danych z pomiaru C dopasowano rozkład Gaussa w postaci

$$f_{\mu, \sigma}(x) = R + \frac{A}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}, \quad (6)$$

gdzie A jest przesunięciem wzdłuż osi rzędnych wszystkich wartości funkcji (wartość parametru wynika z arbitralnego przedziału wartości podawanych przez przetwornik AC, jest niefizyczna), A jest współczynnikiem dopasowu-

jącym znormalizowanego rozkład do rozrzutu wartości podawanych przez przetwornik, σ jest odchyleniem standardowym współrzędnej i μ to wartość oczekiwana współrzędnej. Samą konwersję jednostek własnych resolwera na współrzędne astronomiczne przeprowadzono bazując na tych samych danych i wartości tablicowej, więc powyższej analizy nie należy traktować jako wyznaczania współrzędnych obiektu, a jedynie jako dopasowanie rozkładu Gaussa do danych. Użyteczne okazały się jednak wyznaczone odchylenia standardowe.

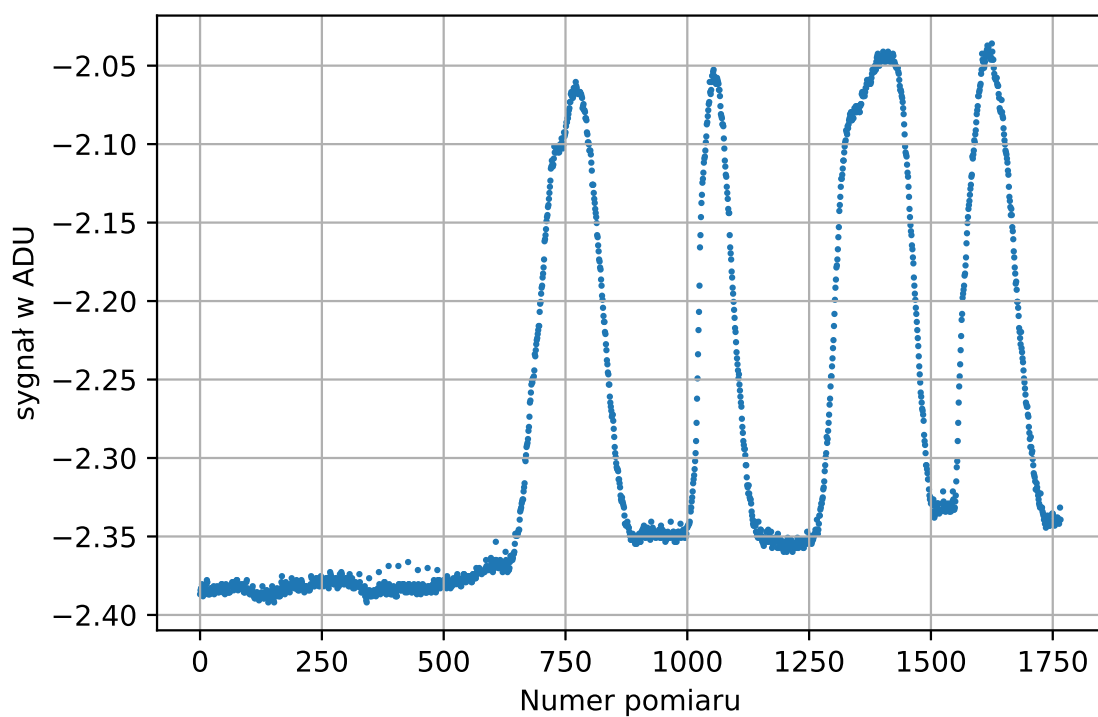
Dopasowując funkcję wykorzystano algorytm Levenberga-Marquardta. Dopasowane parametry dla pomiaru B wynoszą

$$R_B = (-2.2967 \pm 0.0034) \text{ ADU},$$

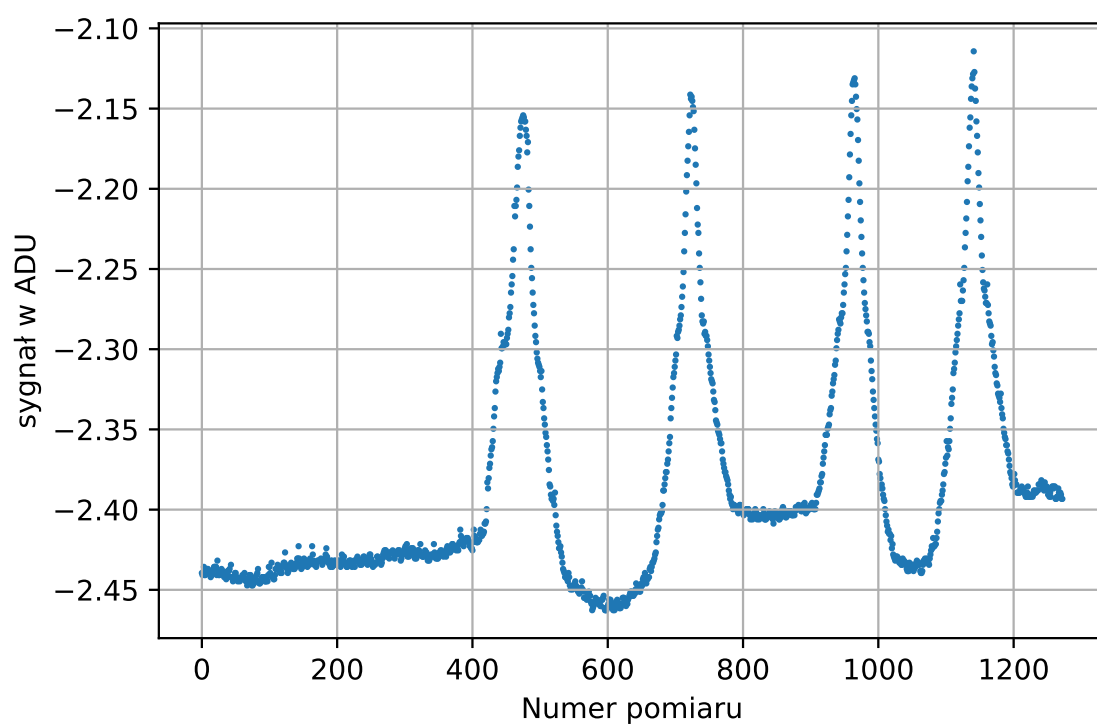
$$A_B = (0.1442 \pm 0.0065) \text{ ADU}^2,$$

$$\sigma_B = (0.372 \pm 0.011)^\circ,$$

$$\mu_B = (58.8398 \pm 0.0054)^\circ.$$

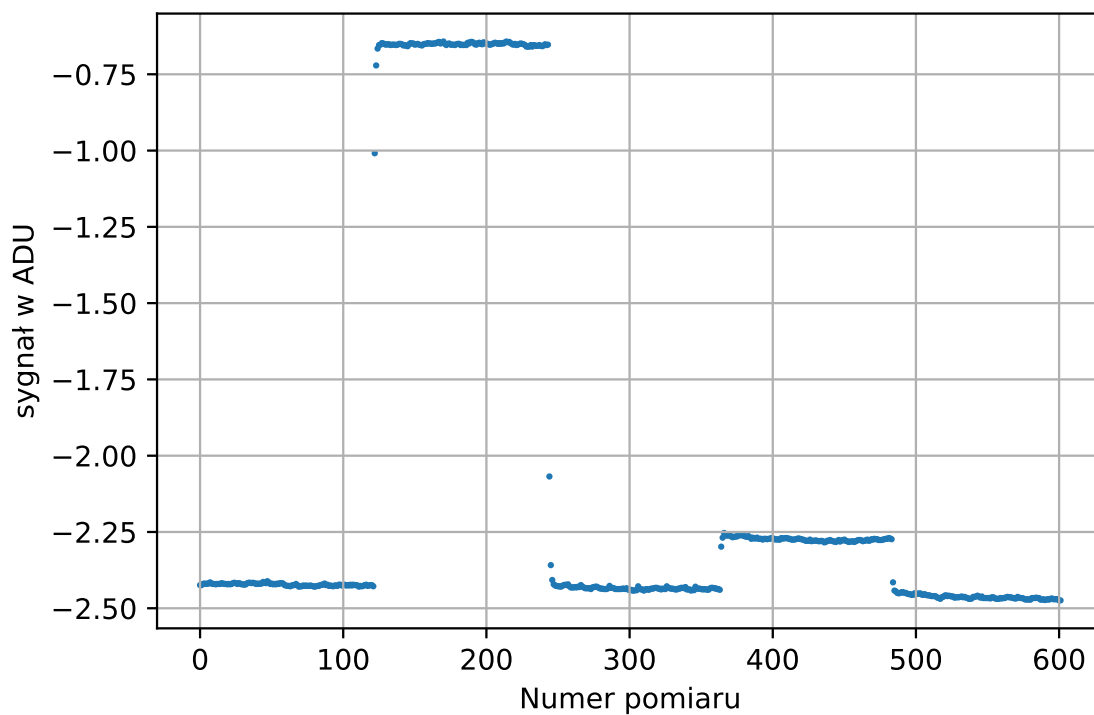


(a) Pomiar B

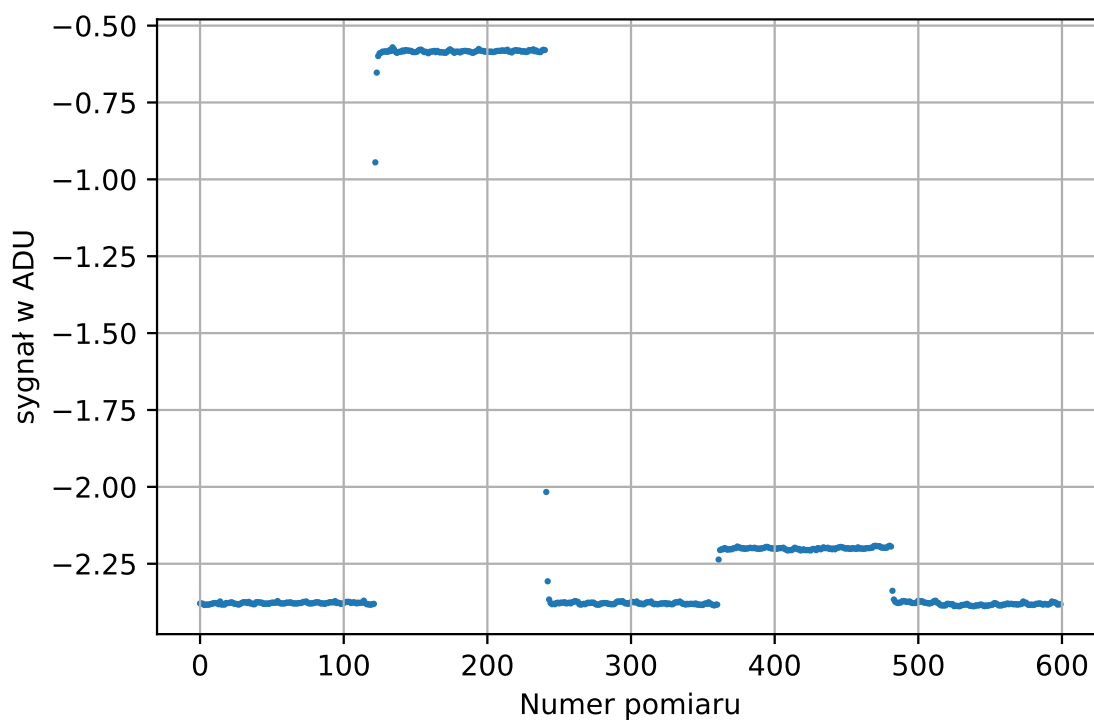


(b) Pomiar C

Rysunek 2: Wykresy zawierające wykres sygnału w ADU w zależności od numeru pomiaru, gdzie piki pochodzą od badanego radioźródła, dane surowe

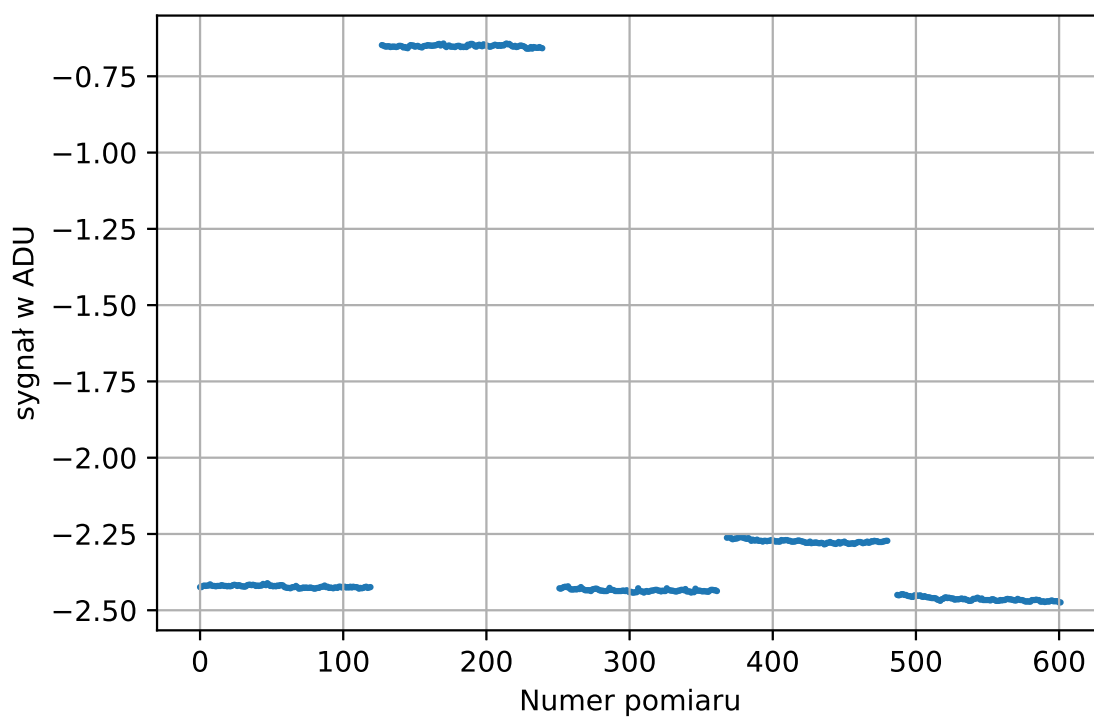


(a) Pomiar A

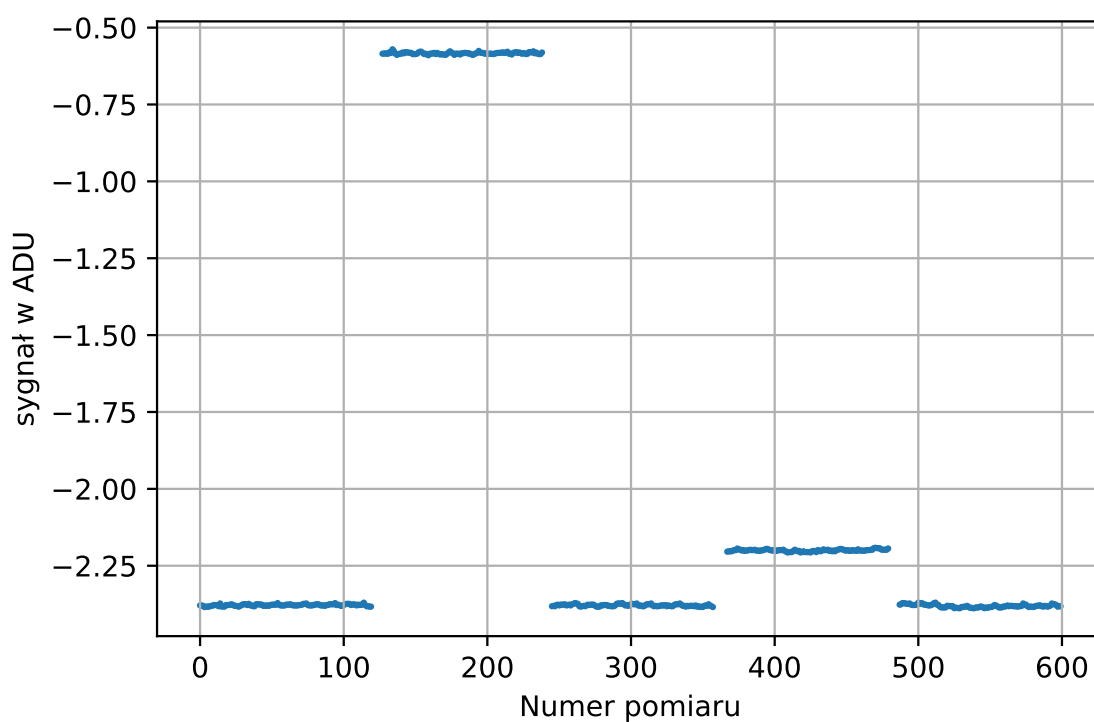


(b) Pomiar D

Rysunek 3: Wykresy zawierające wykres sygnału w ADU w zależności od numeru pomiaru dla kalibracji, dane surowe

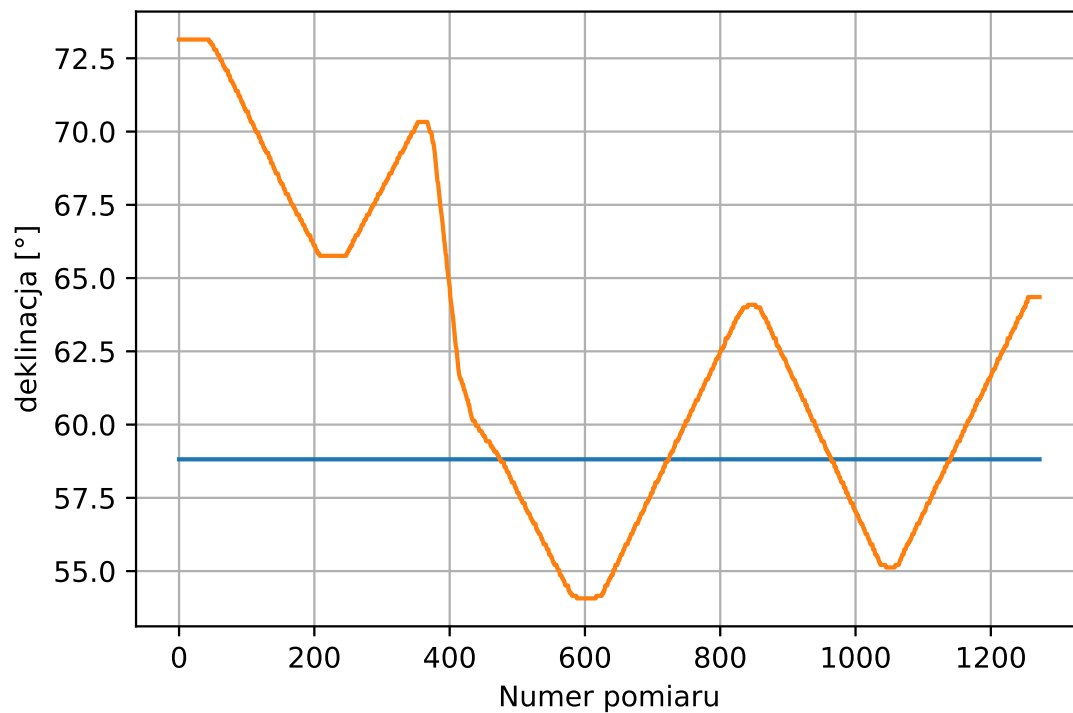


(a) Pomiar A

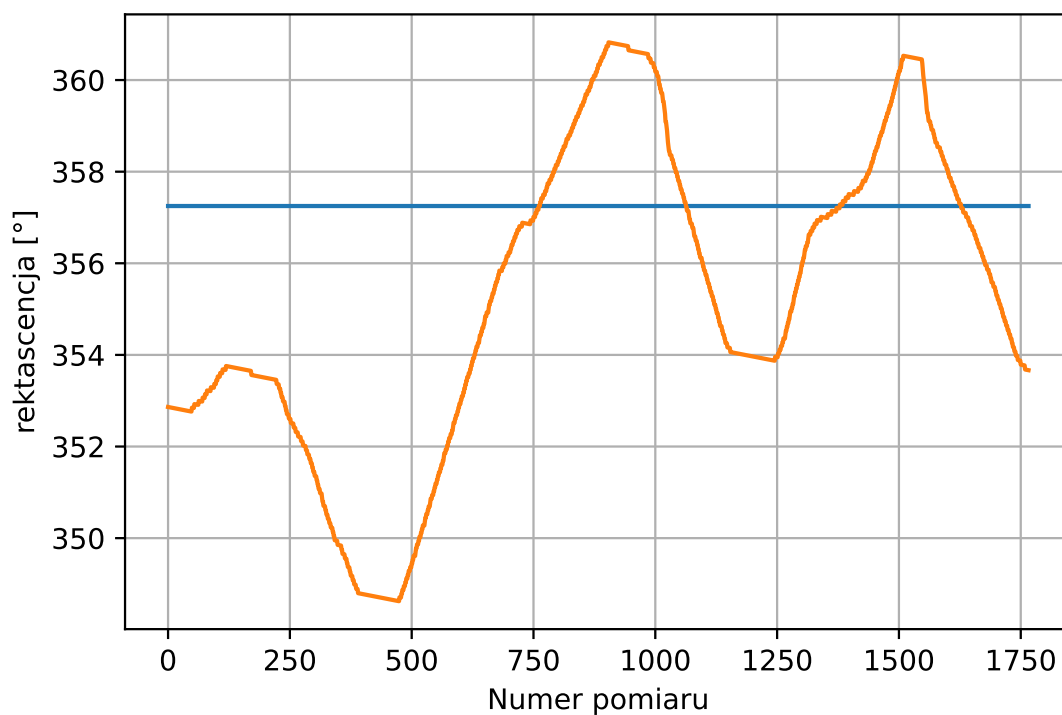


(b) Pomiar D

Rysunek 4: Wykresy zawierające wykres sygnału w ADU w zależności od numeru pomiaru dla kalibracji, dane po filtracji

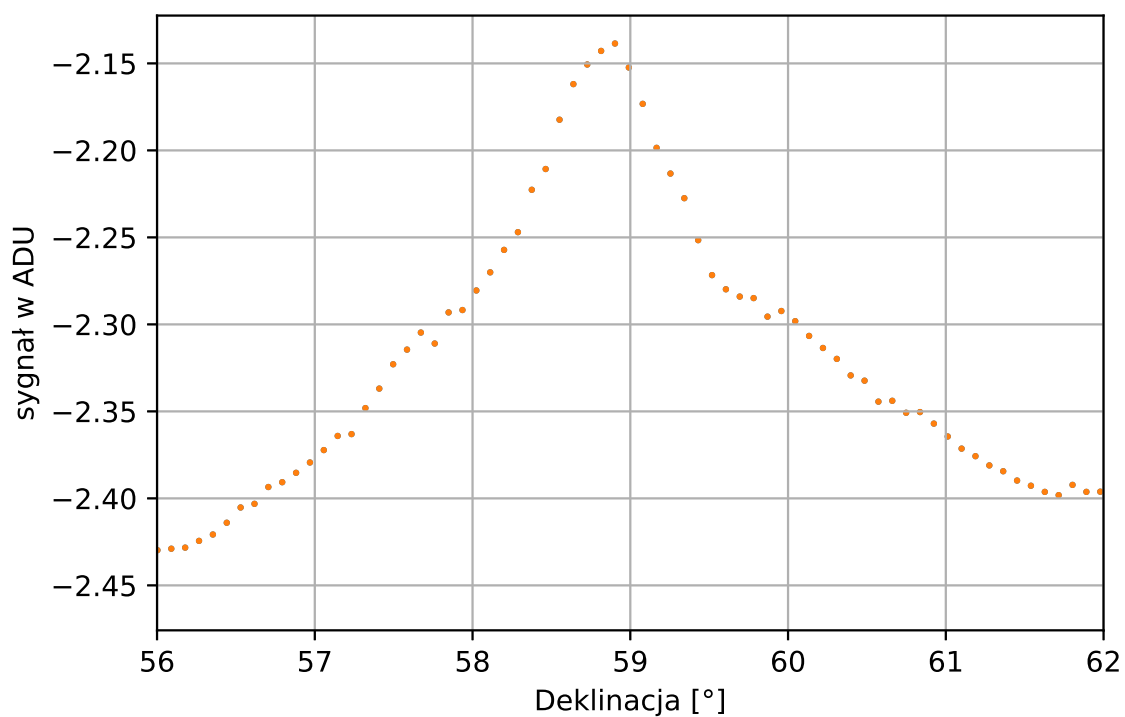


(a) Pomiar C

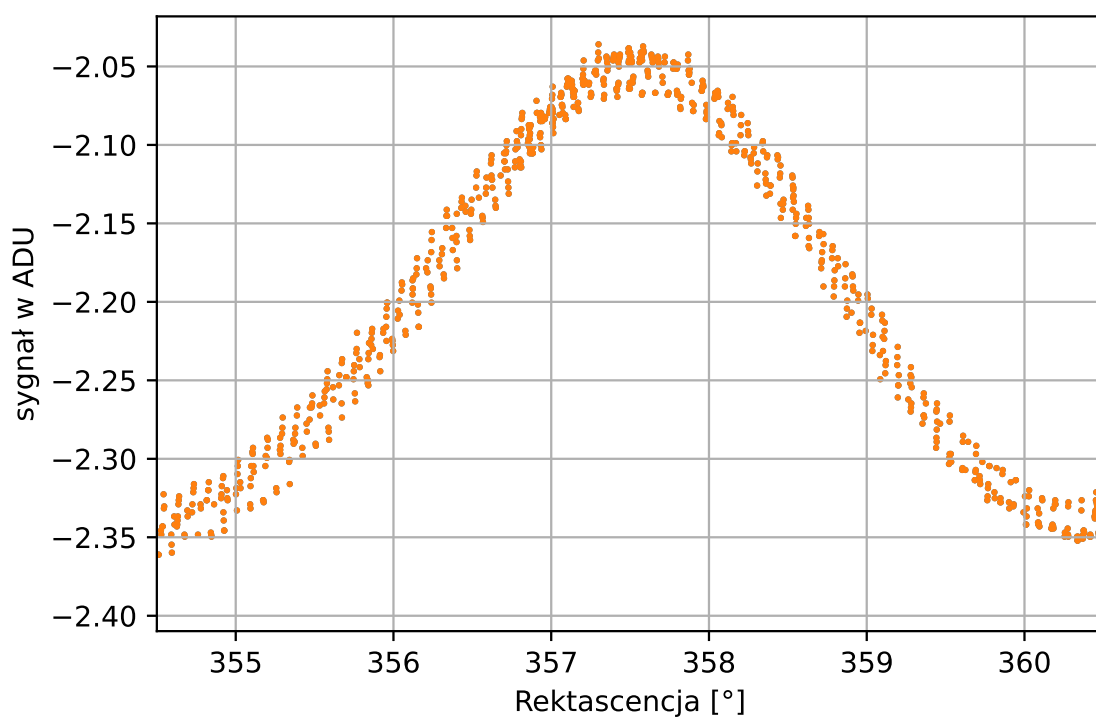


(b) Pomiar B

Rysunek 5: Wykresy zawierające zależność współrzędnych czaszy (kolor pomarańczowy) od numeru pomiaru, na niebiesko zaznaczono współrzędne obiektu

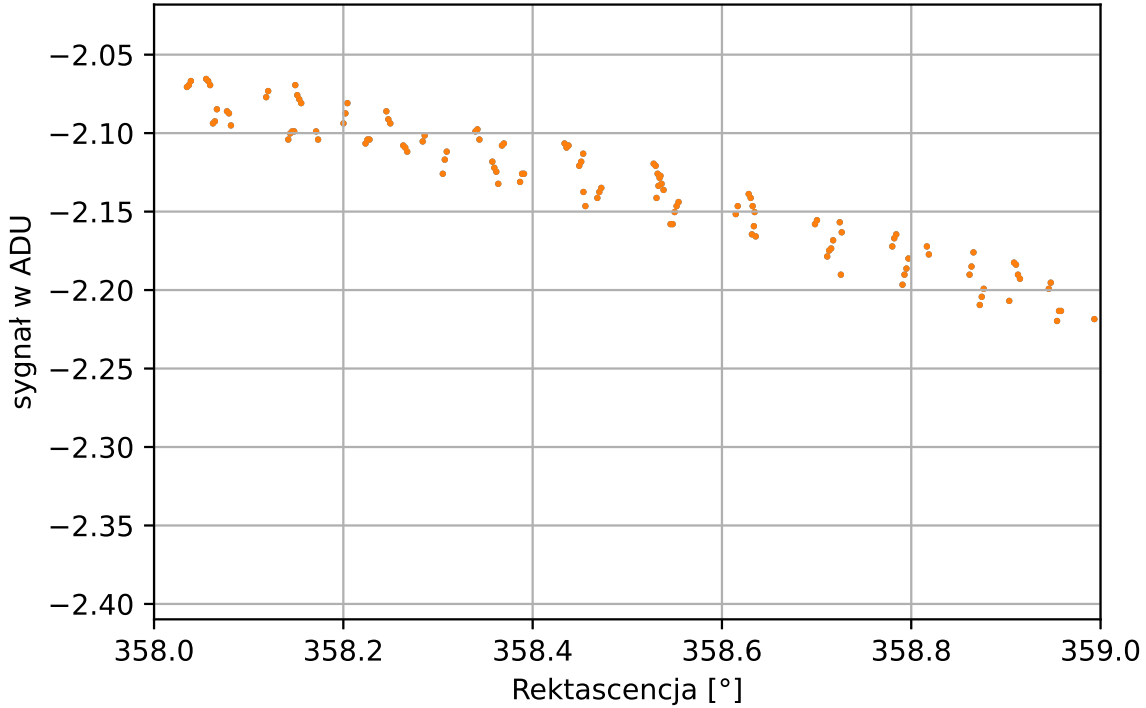


(a) Pomiar B



(b) Pomiar C

Rysunek 6: Wykresy zawierające uśrednione wartości ADU dla danych wartości deklinacji (wykres 6a) i rektascencji (6b i 7)



Rysunek 7: Pomiar C, uśrednione wartości ADU dla danych deklinacji – zawężona dziedzina

Dla pomiaru C dopasowane parametry wynoszą

$$R_C = (-2.3617 \pm 0.0028 \text{ ADU}),$$

$$A_C = (0.958 \pm 0.018) \text{ ADU}^2,$$

$$\sigma_C = (1.232 \pm 0.015)^\circ,$$

$$\mu_C = (357.5036 \pm 0.0068)^\circ.$$

II. Wyznaczenie zdolności rozdzielczej radioteleskopu

Zdolność rozdzielcza Z jest zdefiniowana jako szerokość połówkowa rozkładu sygnału punktowego od kąta. Szerokość połówkowa funkcji gaussa wynosi

$$FWHM = 2\sqrt{2\ln 2}\sigma, \quad (7)$$

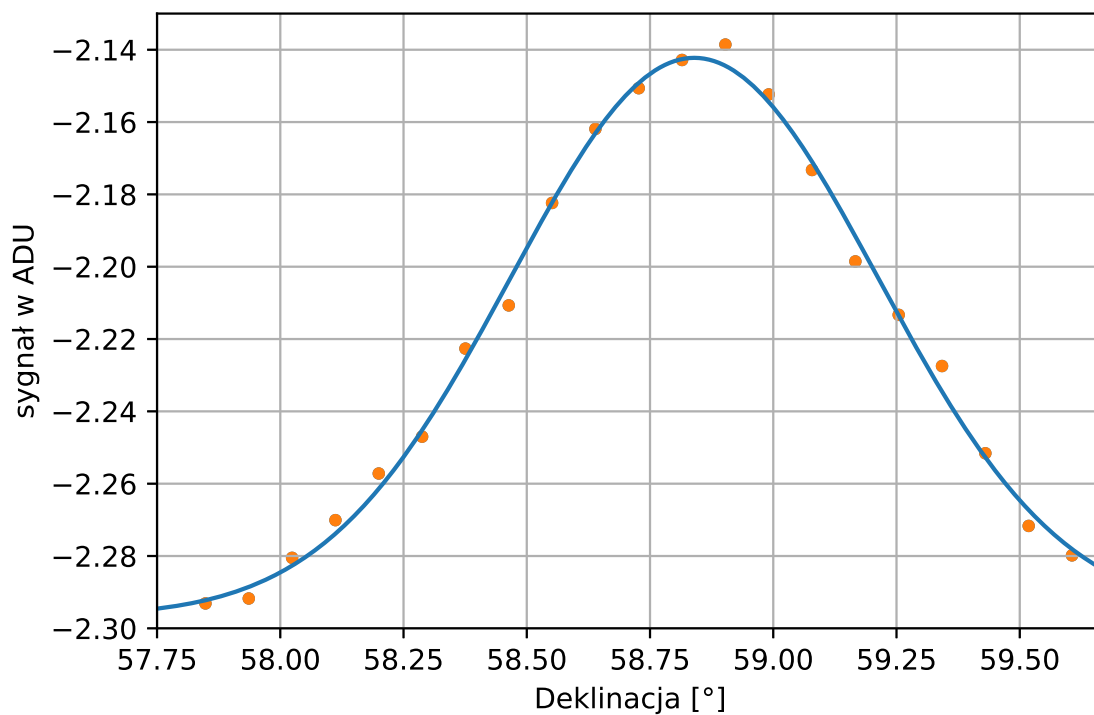
Różnica deklinacji pomiędzy dwoma punktami na sferze niebieskiej o tej samej rektascencji odpowiada odległości kątowej pomiędzy ni-

mi. Zatem wyrażenie na zdolność rozdzielczą wzdłuż kół godzinnych ma postać

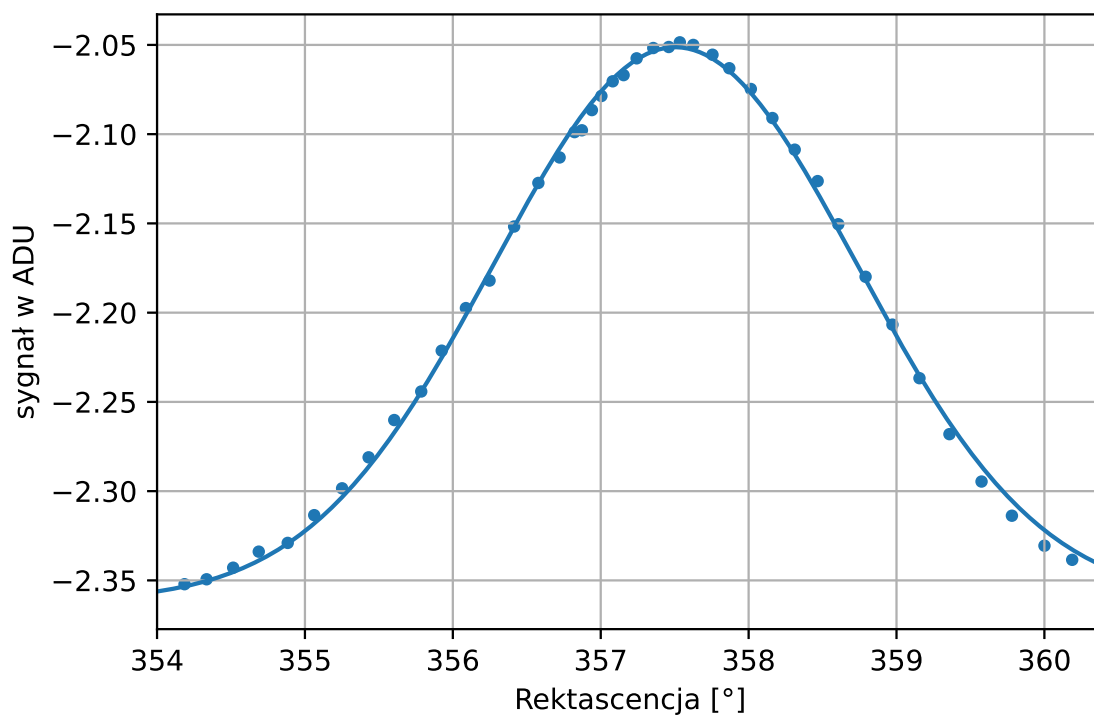
$$Z_\delta = FWHM_\delta \quad (8)$$

Aby wyznaczyć zdolność rozdzielczą w rektascencji należy wziąć pod uwagę, że w ogólnym przypadku różnica rektascencji pomiędzy dwoma punktami o tej samej deklinacji na sferze niebieskiej nie odpowiada odległości kątowej pomiędzy nimi. Co więcej, ściśle odległość kątowa pomiędzy dwoma punktami na sferze niebieskiej jest odcinkiem koła wielkiego, który przez nie przebiega, natomiast rozważany kąt jest mały, więc posłużono się przybliżeniem, że odcinek ten jest odcinkiem łączącego je równoleżnika niebieskiego. Uwzględniając to wzór na zdolność rozdzielczą wzdłuż równoleżników niebieskich ma postać

$$Z_\alpha = FWHM_\alpha \cos \delta_p. \quad (9)$$



(a) Pomiar B – uśrednione dane



(b) Pomiar C – zbinowane dane

Rysunek 8: Wykresy zawierające dane wykorzystane do dopasowania oraz dopasowane do nich rozkłady Gaussa

Niepewności standardowe wynikające ze wzoru (3) wynoszą odpowiednio

$$u_{Z_\alpha} = 2\sqrt{2\ln 2}u_{\sigma_\alpha} \cos \delta_p, \quad (10)$$

$$u_{Z_\delta} = 2\sqrt{2\ln 2}u_{\sigma_\delta}. \quad (11)$$

Do powyższego wzorów podstawiono wyznaczone odchylenia standardowe z pomiaru B i C wyznaczając odpowiednio zdolność rozdzielczą w deklinacji i rektascencji

$$Z_\alpha = (0.876 \pm 0.026)^\circ,$$

$$Z_\delta = (1.502 \pm 0.019)^\circ.$$

III. Wyznaczenie przelicznika z ADU na temperaturę

Obliczono średni poziom sygnału dla kalibracji gorąca S_H i kalibracji zimna S_C z pomiaru A wraz z odchyleniami standardowymi u_{S_H} i u_{S_C} obliczonymi ze wzoru (5):

$$S_H = (-0,65107 \pm 0,00035) \text{ ADU},$$

$$S_C = (-2,27405 \pm 0,00054) \text{ ADU}.$$

Zdefiniowano przelicznik ξ z S na temperaturę jako stosunek różnicy temperatur kalibracji gorąca i zimna oraz różnicy odpowiadającym im wartości S :

$$\xi \equiv \frac{T_H - T_C}{S_H - S_C}. \quad (12)$$

Przy założeniu, że liczba zliczeń ADU jest liniowo zależna od temperatury, może on posłużyć do przeliczania jednych jednostek na drugie.

Wzór na błąd tego przelicznika wyznaczono podstawiając powyższy wzór do wzoru (3) i, uwzględniając że $u_{T_C}, u_{T_H} = 0$, otrzymano

$$u_\xi = \frac{T_C - T_H}{(S_C - S_H)^2} \sqrt{u_{S_C}^2 + u_{S_H}^2}. \quad (13)$$

Źródło szumowe to HP 346B i posiada ono temperaturę $T_{\text{HP346B}} = 8670 \text{ K}$. Sygnał kalibracji gorąca został zrealizowany poprzez tłumienie 20 dB, miał zatem temperaturę $T_H =$

$10^{-2} \cdot T_{\text{HP346B}} = 86,70 \text{ K}$, natomiast sygnał kalibracji zimna powstał w wyniku przyłączenia dodatkowego tłumienia i miał temperaturę $T_C = 9.81 \text{ K}$.

Po podstawieniu danych do wzorów (12) i (13) otrzymano wynik

$$\xi = (47,376 \pm 0,019) \frac{\text{K}}{\text{ADU}}.$$

Podana niepewność dla wszystkich poniższych wielkości została wyznaczona ze wzoru (3).

IV. Wyznaczenie temperatury antenowej

Podczas pomiaru C maksymalna zarejestrowana wartość ADU była zauważalnie większa, niż podczas pomiaru B. Zinterpretowano ten fakt w taki sposób, że podczas tego pomiaru czasza radioteleskopu znalazła się bliżej centrum rozkładu, zatem z lepszym przybliżeniem można potraktować maksymalną wartość z pomiaru C jako maksimum globalne.

Przeliczono maksymalną wartość funkcji Gaussa dopasowanej do zbinowanych danych z pomiaru C na temperaturę antenową i jej niepewność standardową (wykorzystując wzór (3))

$$T_A = \left((R_C + \frac{A_C}{\sqrt{2\pi}\sigma_C}) - S_H \right) \xi + T_H, \quad (14)$$

$$u_{T_A} = \left(u_{T_H}^2 + u_{R_C}^2 \xi^2 + u_{S_H}^2 \xi^2 + u_\xi^2 \left(R_C - S_H + \frac{A_C}{\sqrt{2\pi}\sigma_C} \right)^2 + \frac{u_{\sigma_C}^2 A_C^2 \xi^2}{2\pi\sigma_C^4} + \frac{u_{A_C}^2 \xi^2}{2\pi\sigma_C^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

V. Wyznaczenie powierzchni efektywnej antenowej

Wzór na powierzchnię efektywną anteny ma postać

$$A_{eff} = 2 \frac{k_B}{S_V} (T_a \pm u_{T_A}), \quad (16)$$

gdzie k_B jest stałą Boltzmanna, S_{CasA} jest wartością strumienia obiektu i wynosi $S_{CasA} = 2369 \text{ Jy}$ w paśmie 1415 MHz [1] (przyjęto założenie, że wartość strumienia nie zmieniła się od czasu pomiaru z publikacji).

VI. Wyznaczenie współczynnika wykorzystania powierzchni

Współczynnik wykorzystania powierzchni anteny ma postać

$$\eta = \frac{1}{A_g} (A_{eff} \pm u_{A_{eff}}), \quad (17)$$

gdzie A_g jest polem przekroju anteny o największej powierzchni, tzn. polem powierzchni koła o średnicy 15 m .

VII. Wyznaczenie zysku teleskopu

Wyrażenie na zysk radioteleskopu ma postać

$$G = \frac{4\pi}{\lambda^2} (A_{eff} \pm u_{A_{eff}}), \quad (18)$$

gdzie λ jest długością fali dla pasma, w którym wykonano obserwacje.

VIII. Wyznaczenie czułości

Wyrażenie na czułość radioteleskopu ma postać

$$\Gamma = \frac{1}{2k_B} (A_{eff} \pm u_{A_{eff}}). \quad (19)$$

IX. Wyznaczenie kąta bryłowego

Wyrażenie na kąt bryłowy anteny ma postać

$$\Omega_A = \frac{\lambda^2}{A_{eff}} \pm u_{A_{eff}} \left(\frac{\lambda}{A_{eff}} \right)^2. \quad (20)$$

X. Wyznaczenie efektywności listka głównego

Wyrażenie na efektywność listka głównego anteny ma postać

$$\epsilon = \frac{\Omega_M}{\Omega_A} \pm \frac{4}{3} \sqrt{\frac{(u_{\Omega_A} Z_\alpha Z_\delta)^2 + \Omega_A^2 (u_{Z_\delta}^2 Z_\alpha^2 + u_{Z_\alpha}^2 Z_\delta^2)}{\Omega_A^4}},$$

gdzie Ω_M jest kątem bryłowym listka głównego i wynosi $\frac{4}{3} Z_\alpha Z_\delta$.

XI. Wyznaczone wartości

Po podstawieniu danych do wzorów 12-17 otrzymano wartości zestawione w tabeli 1.

IV. Dyskusja

Jakość danych w obu przypadkach była dobra w takim sensie, że nie zarejestrowano sygnału, który wymagałby użycia filtra do jego usunięcia.

Niepewności standardowe średnich z pomiaru A z sygnału z włączoną i z wyłączoną kalibracją są niemal identyczne. Oznacza to, że sygnał ze źródła szumowego jest bliski niezmiennemu, co może oznaczać, że jest to urządzenie dobrej jakości.

Wartość zdolności rozdzielczej w deklinacji jest niemal 2 razy tak duża, jak w rektascencji. Rozbieżność ta może wynikać z faktu, że do dopasowania funkcji Gaussa do danych z pomiaru B wzięto zbyt wąską dziedzinę danych.

	wartość	niepewność	jednostka
T_A	20.4	1.4	K
A_{eff}	23.7	1.7	m ²
η	0.1343	0.0091	brak
G	6760	460	brak
Γ	$8.60 \cdot 10^{23}$	$5.9 \cdot 10^{22}$	$\frac{\text{m}^2\text{K}}{\text{J}}$
Ω_A	0.00186	0.00013	sr
ϵ	0.287	0.023	brak

Tabela 1: Wartości wyznaczone ze wzorów 12-17

Pik zdaje się być szerszy, lecz poza dziedziną dopasowania nie przypomina już rozkładu Gaussa i z tego powodu wzięto węższą dziedzinę.

Wartość współczynnika wykorzystania powierzchni η znacznie odbiega od wartości typowych dla radioteleskopów wykorzystywanych do celów naukowych, tj. wynoszących od około 0,7 do ok. 0,8.

Oznacza to, że wykorzystując współczesną technologię produkcji można wykonać radioteleskop o takiej samej powierzchni efektywnej, ale o średnicy tylko 6m.

W świetle powyższych wniosków należy stwierdzić, że możliwości wykorzystania teleskopu w celach naukowych są ograniczone.

Tak jak napisałem w sekcji III.IV, maksymalne temperatury antenowe nie były takie same w pomiarach B i C. Zinterpretowano ten fakt w taki sposób, że podczas jednego z pomiarów czasza radioteleskopu znalazła się bliżej centrum rozkładu, zatem z lepszym przy-

bliżeniem można potraktować jego maksimum jako maksimum globalne rozkładu trójwymiarowego.

Literatura

- [1] J. W. M. Baars, R. Genzel, I. I. K. Pauliny-Toth, and A. Witzel, Reprint of 1977A&A....61...99B. The absolute spectrum of Cas A; an accurate flux density scale and a set of secondary calibrators., , 500 (1977), pp. 135–142.

Załączniki

1. Karta_pomiarów_2.pdf – Wypełniona i podpisana przez asystenta karta pomiarów
2. B[1-4].eps – wykresy $ADU(\delta)$ pojedynczych przebiegów z pomiaru B.

Data złożenia sprawozdania	Proponowana ocena	Data złożenia poprawy	Końcowa ocena