Теорема Банаха и ее применение

Калитвин В.А.
kalitvin@gmail.com

2023

Метод простых итераций

Рассмотрим уравнение

$$F(x) = 0 \tag{1}$$

Заменим это уравнение равносильным ему уравнением

$$x = \varphi(x) \tag{2}$$

Пусть x^* — корень уравнения (2),
x_0 — начальное приближение для значения корня x^*.
Построим последовательность:

$$x_1 = f(x_0)$$

$$x_2 = f(x_1)$$

$$\vdots$$

$$x_n = f(x_{n-1})$$

$$\vdots$$

Метод простых итераций

Числовая последовательность

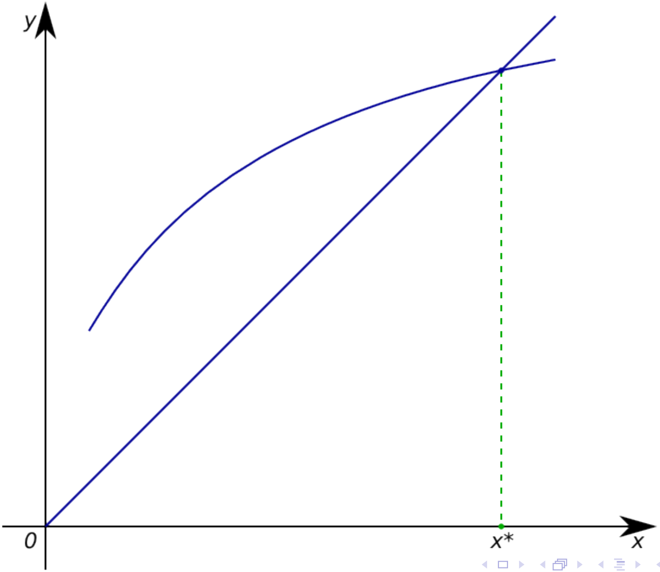
$$x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots \tag{3}$$

называется *последовательностью приближений* или *итерационной последовательностью.*

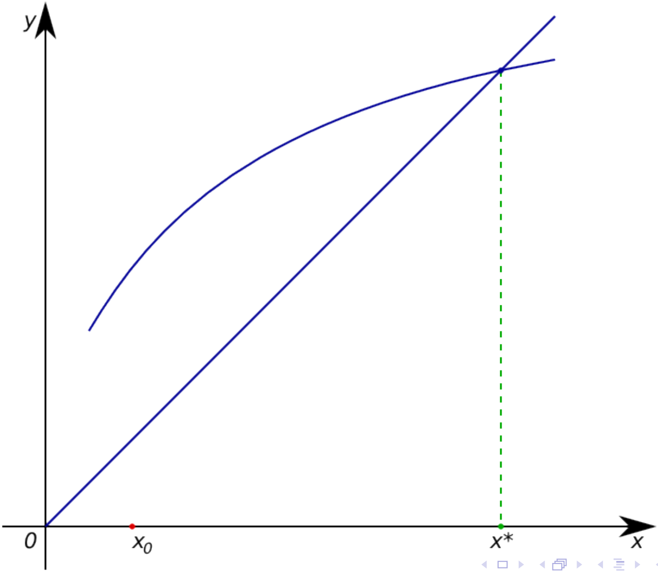
Процесс построения итерационной последовательности имеет простую графическую иллюстрацию.

Возможны различные варианты взаимного расположения графиков функций $y = x$ и $y = \varphi(x)$.

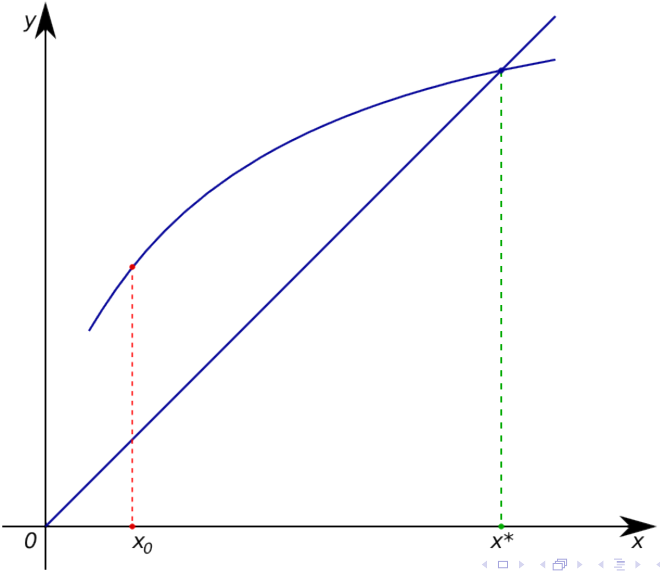
Метод простых итераций



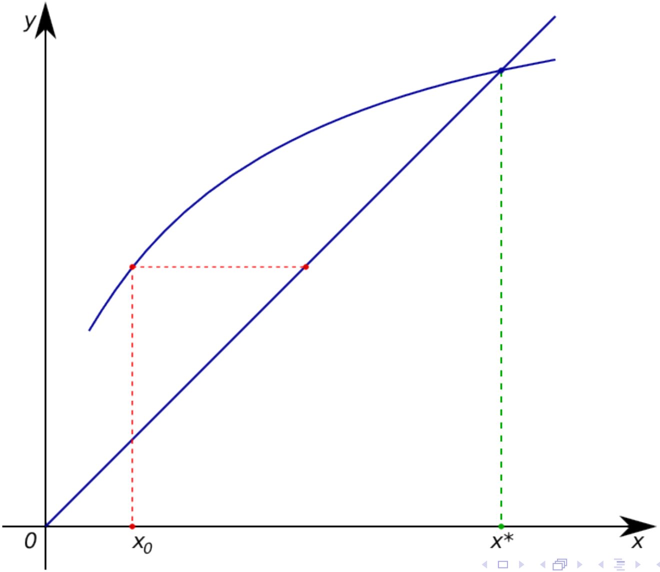
Метод простых итераций



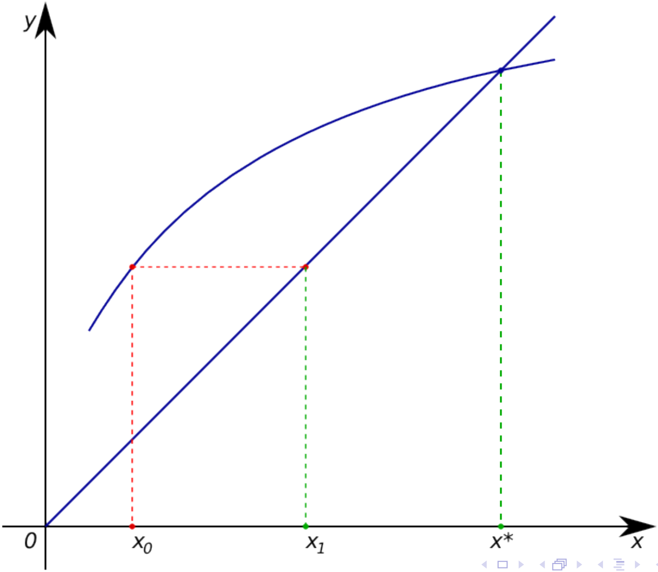
Метод простых итераций



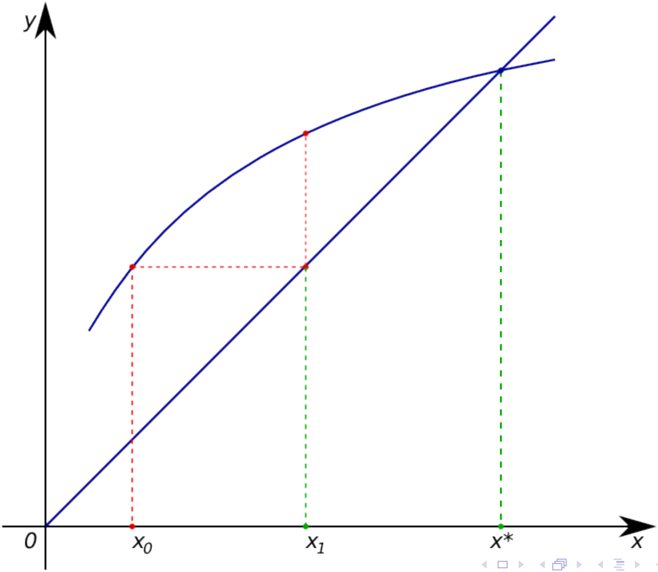
Метод простых итераций



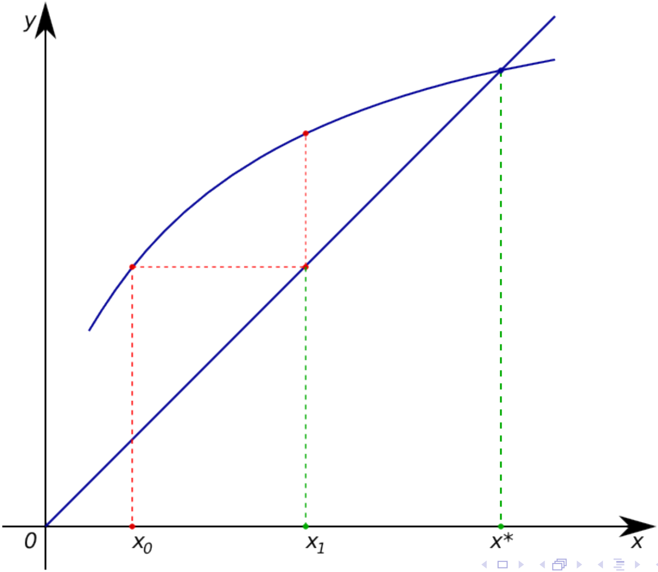
Метод простых итераций



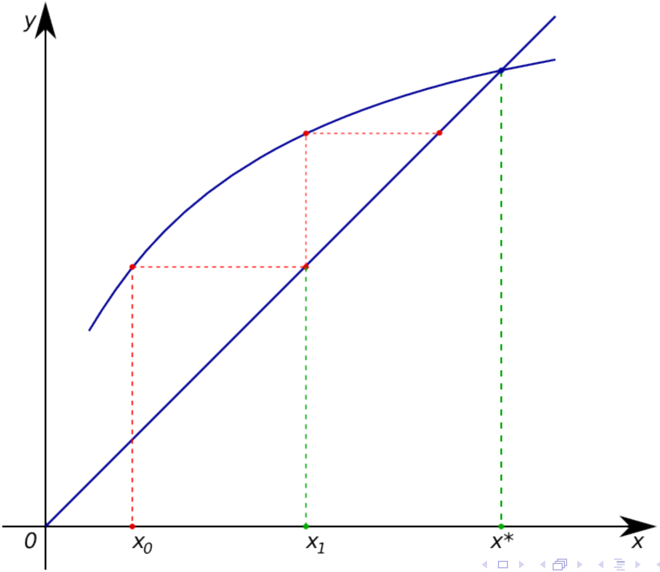
Метод простых итераций



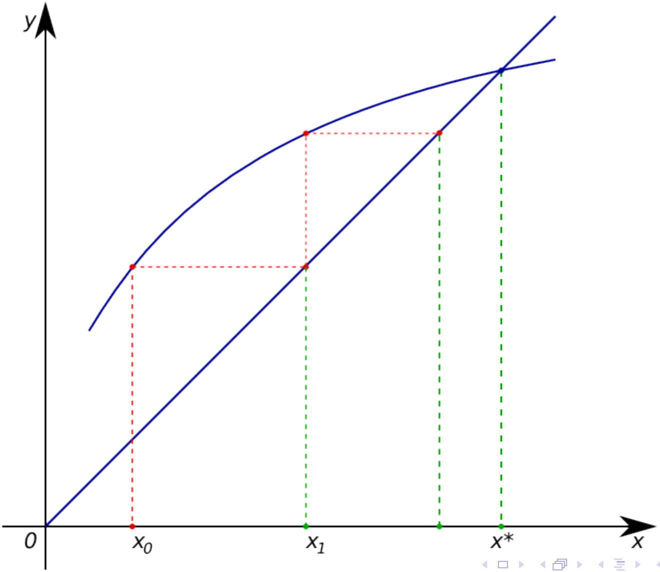
Метод простых итераций



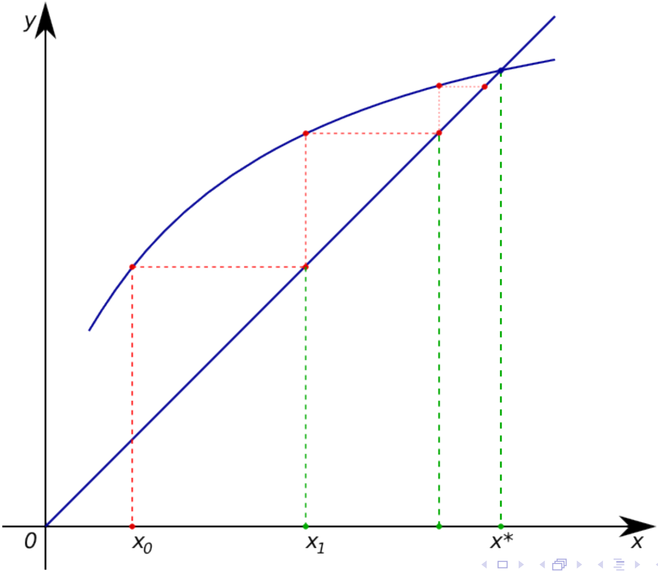
Метод простых итераций



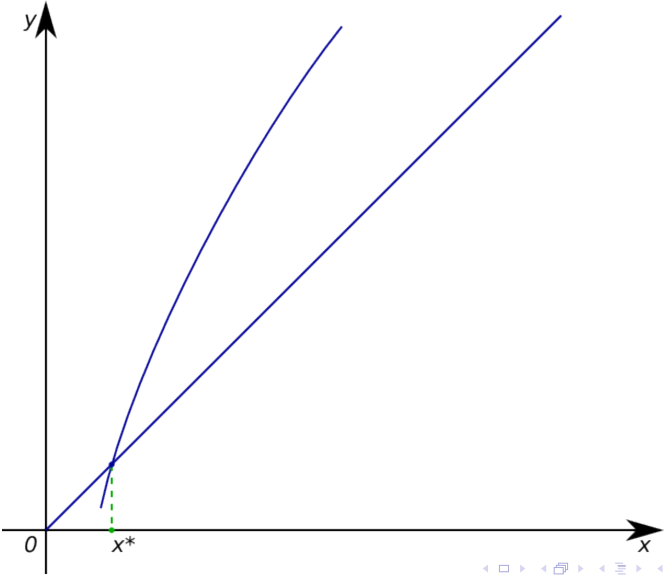
Метод простых итераций



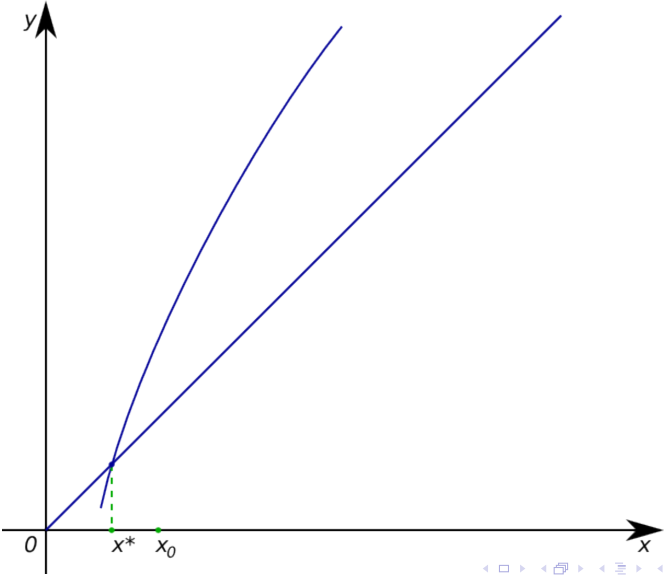
Метод простых итераций



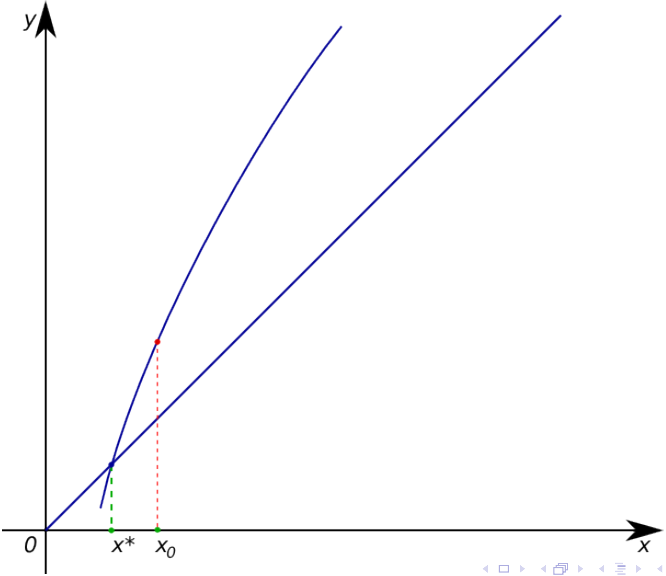
Метод простых итераций



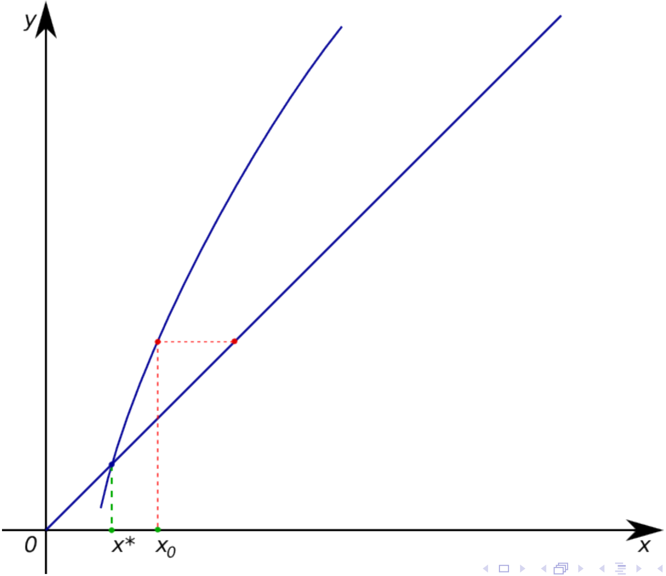
Метод простых итераций



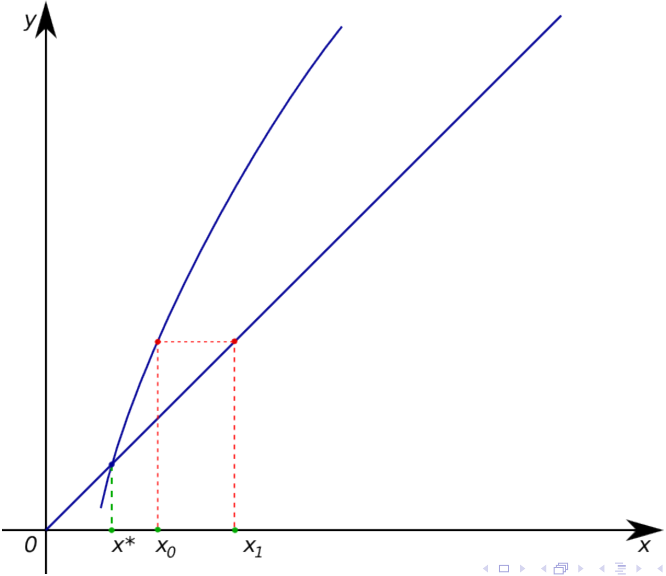
Метод простых итераций



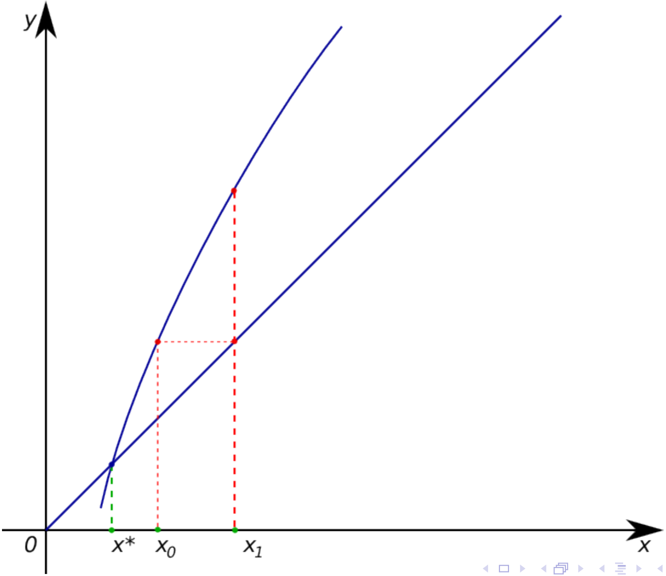
Метод простых итераций



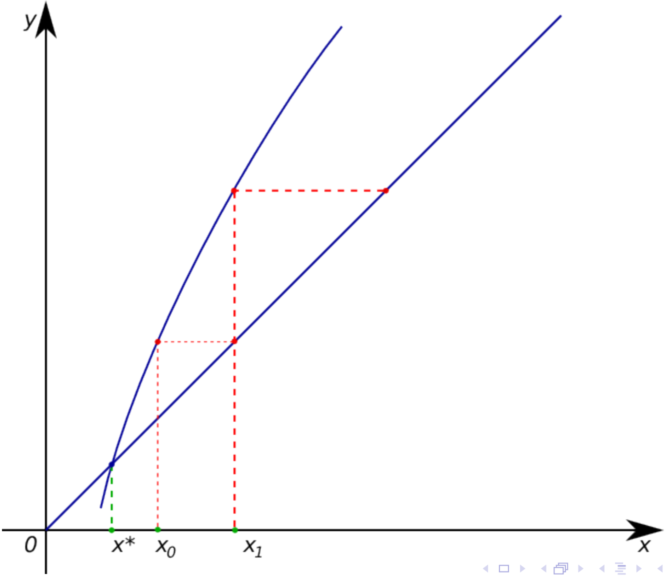
Метод простых итераций



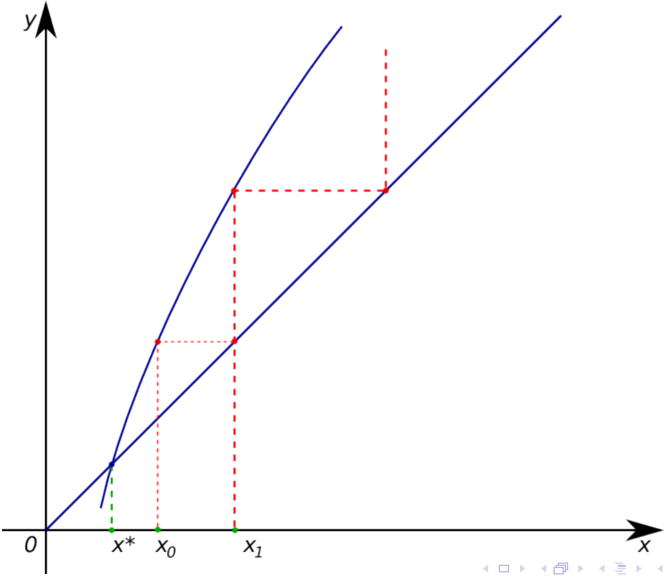
Метод простых итераций



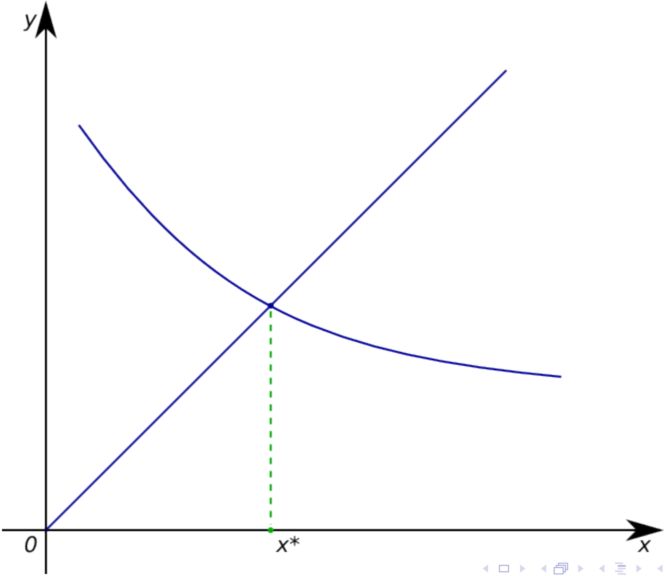
Метод простых итераций



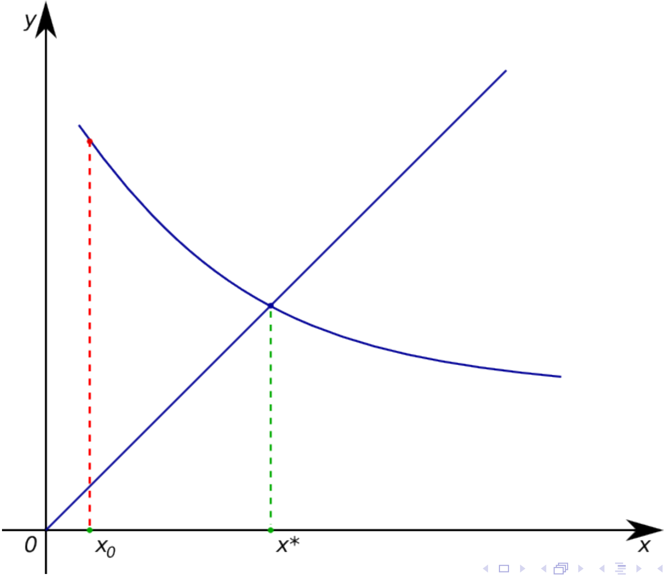
Метод простых итераций



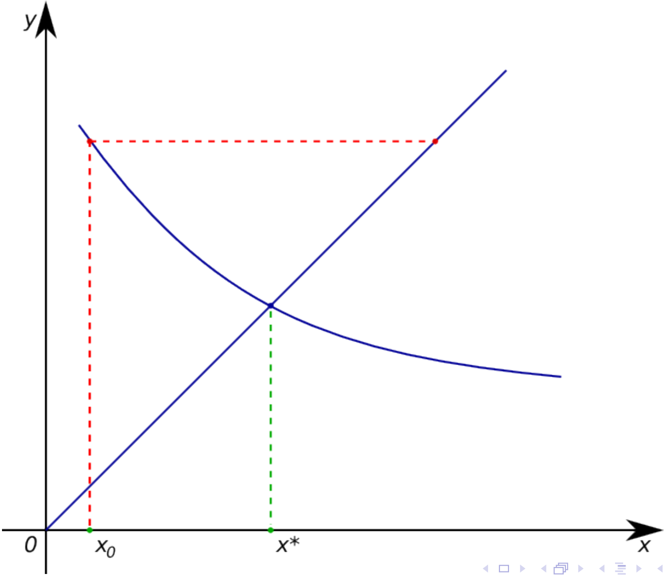
Метод простых итераций



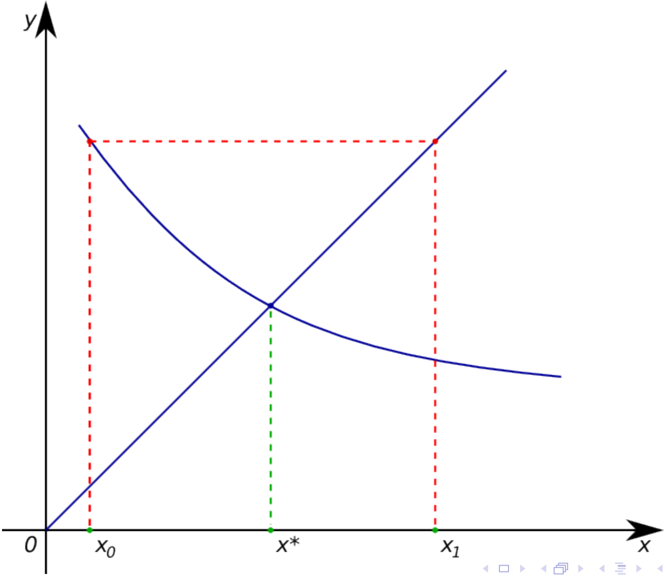
Метод простых итераций



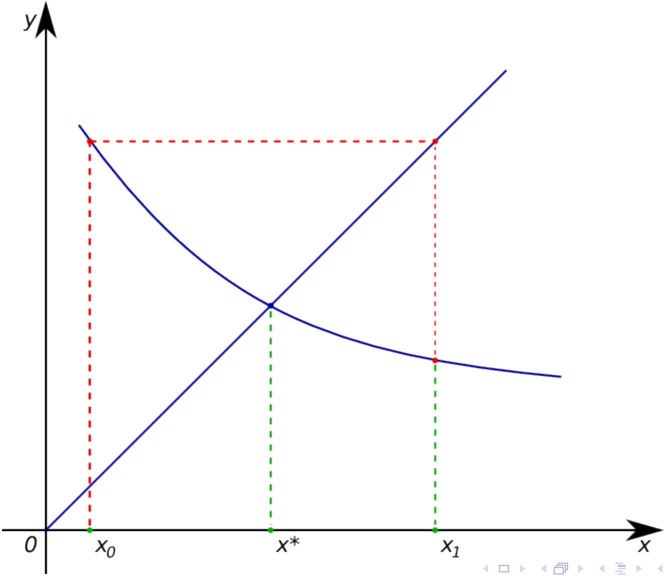
Метод простых итераций



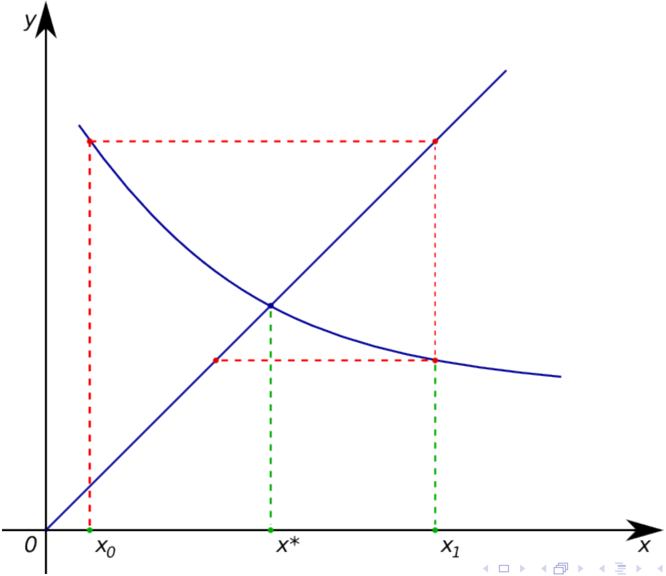
Метод простых итераций



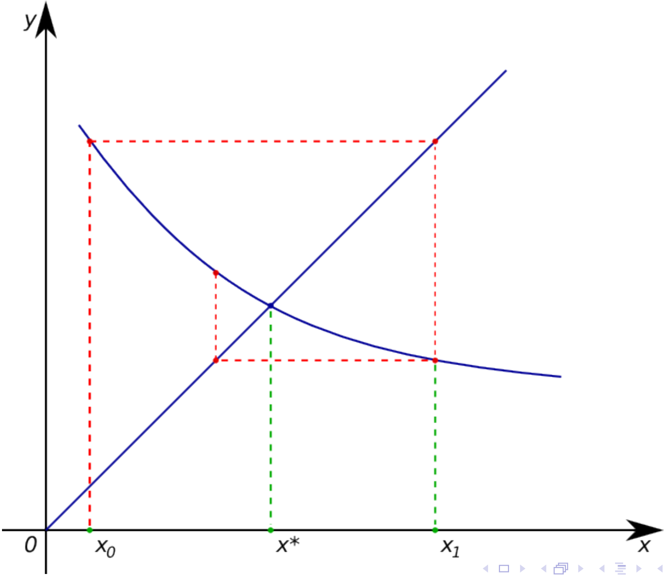
Метод простых итераций



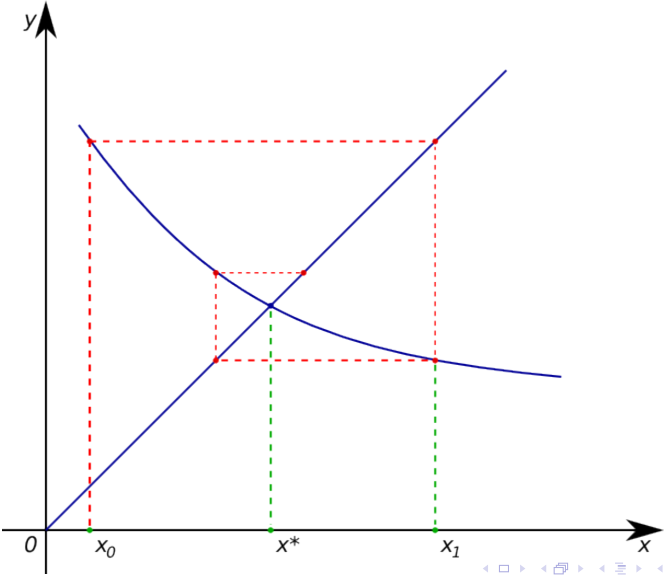
Метод простых итераций



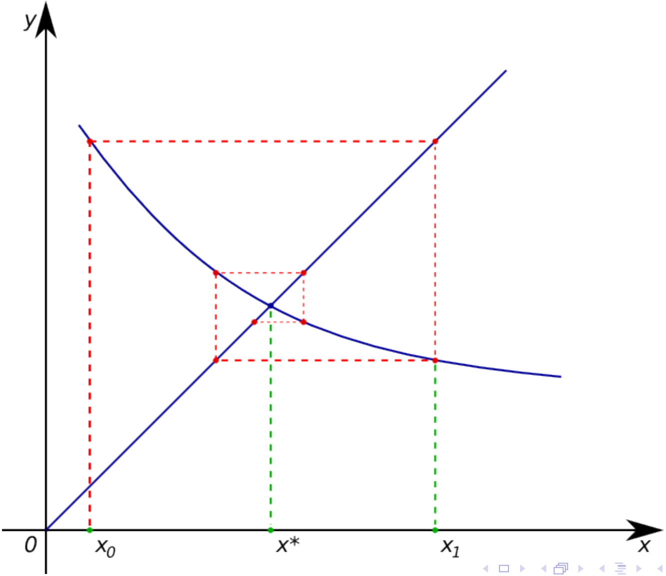
Метод простых итераций



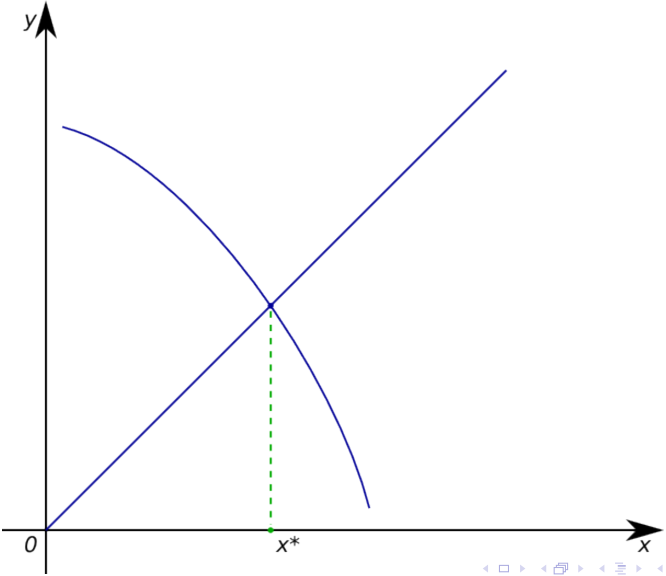
Метод простых итераций



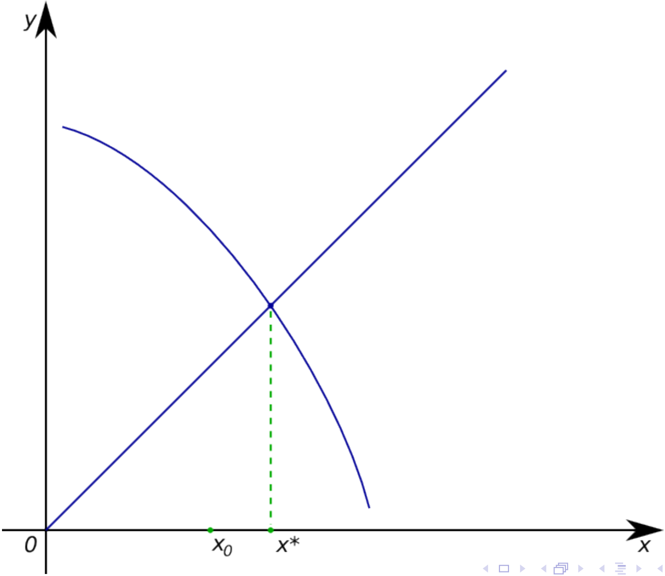
Метод простых итераций



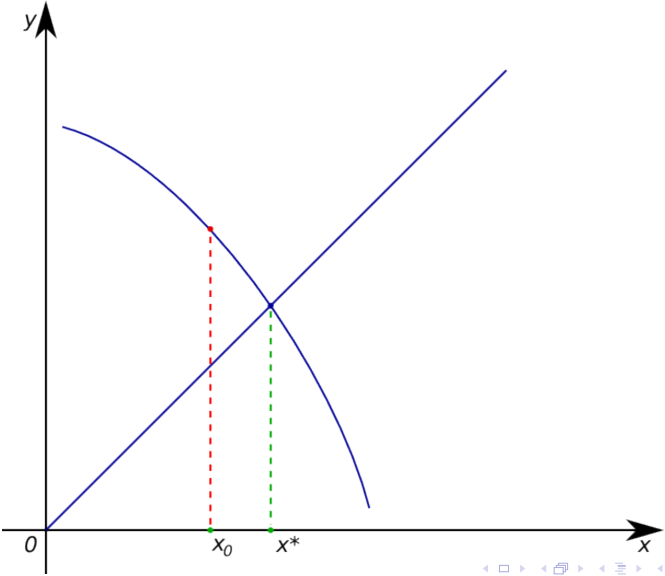
Метод простых итераций



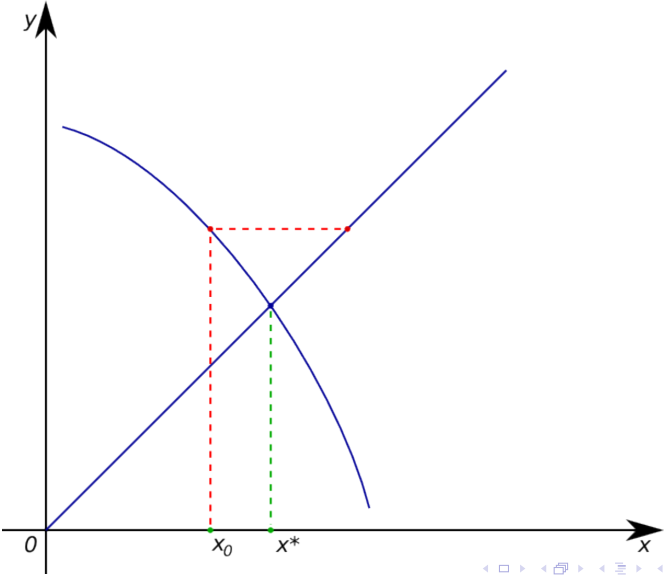
Метод простых итераций



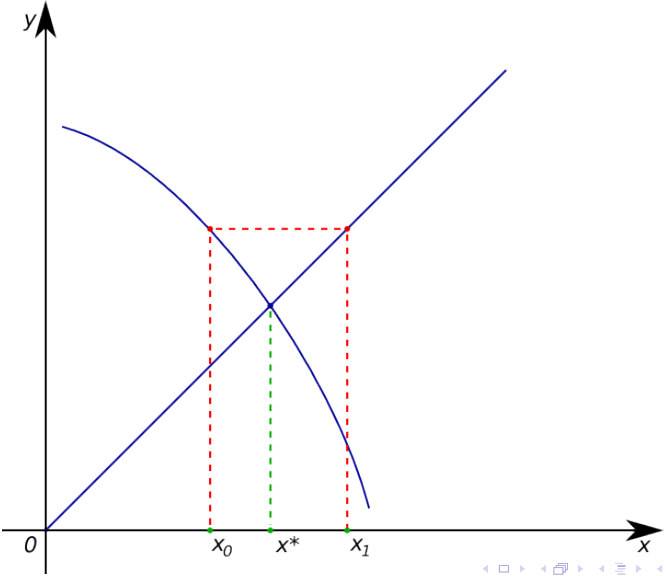
Метод простых итераций



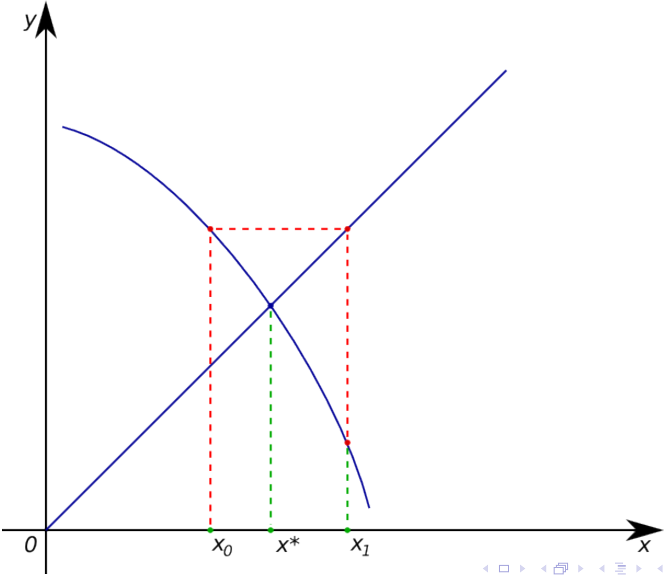
Метод простых итераций



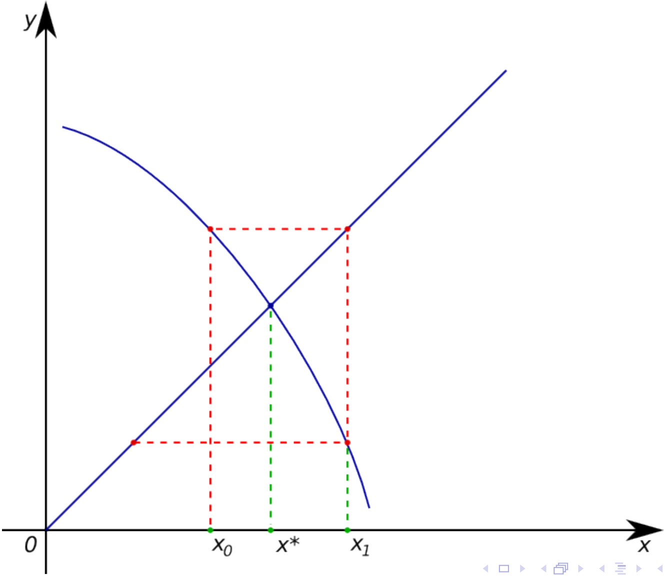
Метод простых итераций



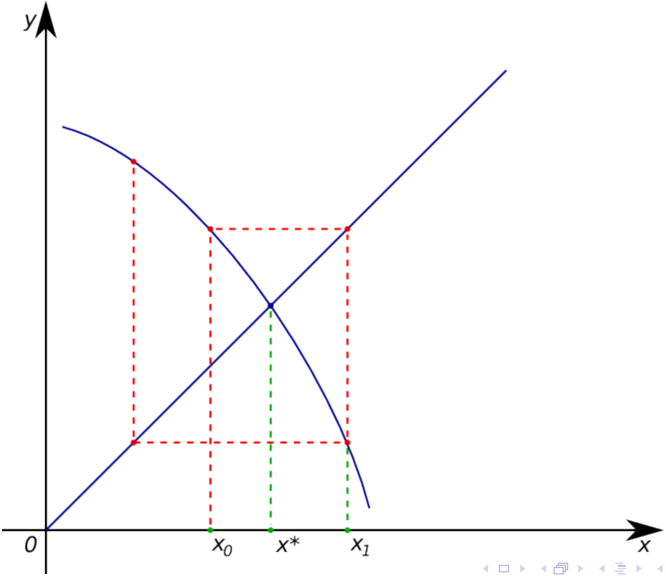
Метод простых итераций



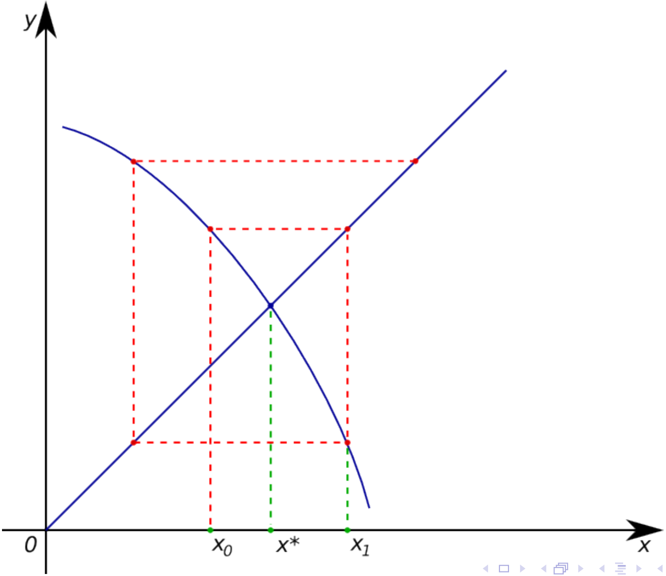
Метод простых итераций



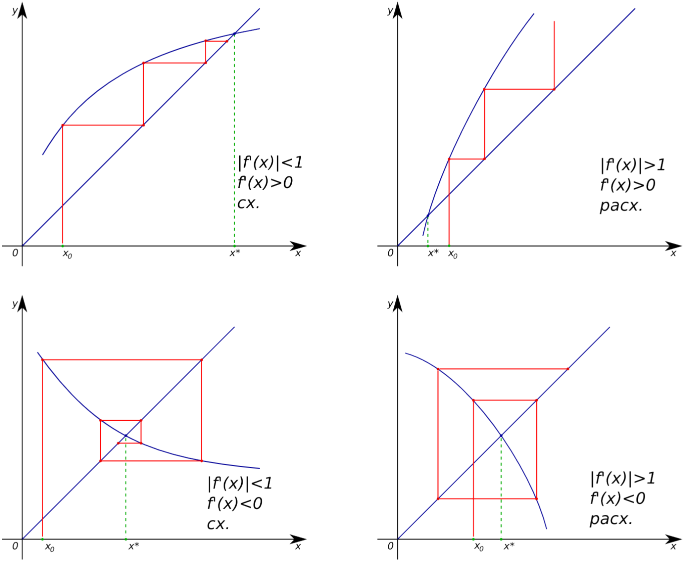
Метод простых итераций



Метод простых итераций



Метод простых итераций



Теорема Банаха
о сжимающем отображении

Вспомогательные сведения

Множество X называется *метрическим пространством*, если каждой паре его элементов x, y поставлено в соответствие неотрицательное действительное число $\rho(x, y)$, называемое расстоянием между элементами x и y и удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам метрики):

1. $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Элементы метрического пространства называются точками.

Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства X называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ при $n, m > N$.

Вспомогательные сведения

Точка $x_0 \in X$ называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если $\rho(x_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$. Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся.*

Запись $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ означает, что x_0 является пределом последовательности (x_n), или, что последовательность (x_n) сходится к x_0.

Если в метрическом пространстве X каждая фундаментальная последовательность сходится, то *пространство X называется полным.*

Вспомогательные сведения

Множество E называется линейным (векторным) пространством над полем R, если для любых $x, y \in E$ определена сумма $x+y \in E$ и для любых $x \in E, \alpha \in R$ определено произведение $\alpha x \in E$, причем выполнены следующие условия:
$\forall x, y, z \in E, \forall \alpha, \beta \in R$
1) $x+y=y+x$; 2) $x+(y+z)=(x+y)+z$;
3) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$; 4) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;
5) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$; 6) $1\cdot x=x$;
7) существует элемент $\theta \in E$ такой, что $x+\theta=x$. θ называется нулем векторного пространства.

Вспомогательные сведения

Линейное пространство E называется нормированным пространством, если каждому элементу $x \in E$ поставлено в соответствие действительное число $\|x\|$, называемое нормой этого элемента и удовлетворяющее условиям:
$\forall x, y \in E, \forall \alpha \in R$
$\|x\| \geq 0,$
$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta;$
$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$
$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$
Нормированное пространство является метрическим пространством с расстоянием $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Линейное нормированное пространство, полное в метрике, порожденной нормой, называется *банаховым пространством.*

Вспомогательные сведения

Примером банахового пространства является пространство $C(\Omega)$ непрерывных на отрезке или на прямоугольнике Ω функций $x(\omega)$ с нормой $\|x\| = \max\limits_{\omega\in\Omega} |x(\omega)|$. Используемые в дальнейшем пространства также банаховы.

Отображение A, переводящее элементы метрического пространства X в элементы этого же пространства, называется непрерывным в точке x_0, если для любой последовательности точек $x_n \in X$ $(n = 1, 2, \dots)$, сходящейся к точке x_0, последовательность (Ax_n) сходится к Ax_0, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax_0.$$

Теорема Банаха

Пусть X — метрическое пространство, x и y — элементы этого пространства и A — отображение, переводящее элементы пространства X снова в элементы этого пространства, т.е.

$$A : X \to X.$$

Точка $x \in X$ называется *неподвижной точкой отображения* A, заданного в метрическом пространстве, если выполняется условие $Ax = x$.

Отображение A называется сжимающим, если существует такое число $0 \leq \alpha < 1$, что для любых элементов x, y выполняется условие

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha\rho(x, y).$$

Теорема Банаха

Теорема Банаха. *Сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет единственную неподвижную точку, т.е. уравнение $x = Ax$ имеет единственное решение и оно может быть получено методом итераций:*

$$x_{n+1} = Ax_n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$$

при любом начальном приближении x_0.

Теорема Банаха

Доказательство.
Пусть x_0 — произвольная точка полного метрического пространства. Определим последовательность $x_n = Ax_{n-1}$ $(n = 1, 2, \dots)$. Покажем, что она фундаментальная. Пусть, для определенности, $m \geq n$. Тогда

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(A^n x_0, A^m x_0) \leq \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \leq$$

$$\leq \alpha^n \left(\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \dots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\right) \leq$$

$$\leq \alpha^n \rho(x_0, x_1) \left(1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-n-1}\right) = \alpha^n \rho(x_0, x_1) \frac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha} \leq$$

$$\leq \alpha^n \rho(x_0, x_1) \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Теорема Банаха

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n \rho(x_0, x_1) \frac{1}{1-\alpha} = 0,$$

то (x_n) — фундаментальная последовательность и, следовательно, в силу полноты пространства, имеет предел. Обозначим его через x. Проверим, что x - неподвижная точка. Так как сжимающее отображение непрерывно, то

$$Ax = A \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Теорема Банаха

Докажем, что неподвижная точка является единственной. Пусть

$$Ax = x, Ay = y.$$

Так как A — сжимающее отображение, то

$$0 \le \rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y).$$

Так как $0 \le \alpha < 1$, то отсюда следует неравенство

$$0 \le (1 - \alpha)\rho(x, y) \le 0.$$

Тогда $\rho(x, y) = 0$, что означает $x = y$.
Теорема доказана.

Теорема Банаха

Теорема Банаха не только доказывает существование и единственность решения уравнения $x = Ax$, но и указывает способ приближенного нахождения этого решения.
Действительно, пусть x_* — точное решение уравнения. Переходя в неравенстве

$$\rho(x_n, x_m) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1)$$

к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\rho(x_n, x_*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1). \quad (1)$$

Теорема Банаха

Из последнего неравенства видно, что если x_n считать приближенным решением уравнения $x = Ax$, то получаемая погрешность не превосходит числа

$$\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1).$$

Поэтому решение x_* может быть приближено с любой наперед заданной точностью элементом x_n, который может быть найден из рекуррентных соотношений

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots, x_n = f(x_{n-1}), \ldots \tag{2}$$

при произвольно выбранном x_0. Из (1) видно, что требуемая точность достигается тем быстрее, чем ближе x_0 к x_*.

Теорема Банаха

Отметим, что элементы последовательности (2) называют последовательными приближениями к элементу x_*, а сам метод построения их — методом последовательных приближений.

Решение нелинейных уравнений методом итераций

Рассмотрим уравнение

$$F(x) = 0. \tag{1}$$

Преобразуем это уравнение к равносильному

$$x = \varphi(x). \tag{2}$$

Будем считать, что на отрезке $[a, b]$ существует единственный корень уравнения (1) и функция φ отображает отрезок $[a, b]$ в себя.

Выберем начальное приближение корня $x_0 \in [a, b]$. Для вычисления следующих приближений будем использовать итерационную формулу

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Эта последовательность будет сходиться к корню уравнения (1), если $y = \varphi(x)$ — сжимающее отображение, т.е.

$$\rho(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leq \alpha \cdot \rho(x_1, x_2), \qquad 0 \leq \alpha < 1. \tag{4}$$

Выясним условия, при которых будет выполняться неравенство (4).
Пусть функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[a, b]$.

В качестве метрики $\rho(x_1, x_2)$ можно выбрать функцию $|x_1 - x_2|$. Тогда неравенство (4) запишется в виде

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq \alpha \cdot |x_1 - x_2|, \qquad 0 \leq \alpha < 1. \tag{5}$$

По теореме Лагранжа

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = \varphi'(c)(x_1 - x_2), \qquad c \in [a, b]. \tag{6}$$

Переходя в последнем равенстве к модулям, получим

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| = |\varphi'(c)(x_1 - x_2)| = |\varphi'(c)| \cdot |x_1 - x_2|. \tag{7}$$

Следовательно, отображение $y = \varphi(x)$ будет сжимающим, если $\alpha = \sup\limits_{[a,b]} |\varphi'(x)| < 1$.

В силу теоремы Банаха, погрешность n-го приближения Δx_n допускает оценку

$$\Delta x_n \leq \alpha^n |x_0 - x_1| \frac{1}{1-\alpha}.$$

Так как $0 \leq \alpha < 1$, то можно принять в качестве оценки погрешности величину

$$\widetilde{\Delta} x_n = \frac{\alpha}{1-\alpha} |x_0 - x_1|.$$

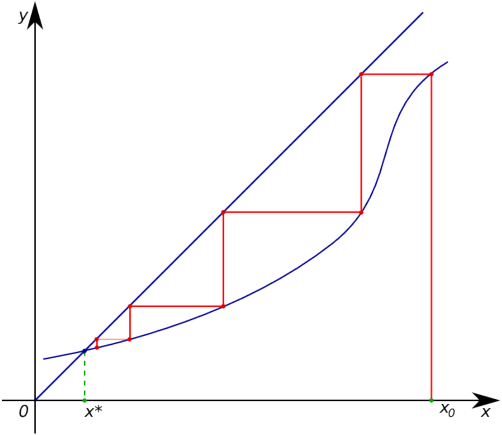
Приняв $x_0 = x_{k-1}$, получим

$$\widetilde{\Delta} x_n = \frac{q}{1-q} |x_{k-1} - x_k|.$$

Отсюда следует, что для получения результата с точностью ϵ, нужно продолжать итерации до тех пор, пока не начнет выполняться неравенство

$$|x_{k-1} - x_k| < \frac{\epsilon(1-\alpha)}{\alpha}.$$

Заметим, что условия теоремы не являются необходимыми, т.е. итерационная последовательность может оказаться сходящейся и при невыполнении этих условий.



Заметим, что скорость сходимости метода итераций зависит от величины α: чем меньше α, тем быстрее сходится итерационная последовательность.
Исходное уравнение $F(x) = 0$ может быть преобразовано к виду $x = \varphi(x)$ многими способами, поэтому нужно выбирать то уравнение $x = \varphi(x)$, для которого α имеет наименьшее значение.

Пример.

$$x^2 - a = 0,\ a \geq 0.$$

Преобразуем это уравнение к итерационному виду 3-мя способами.

$$1.\ \varphi(x) = \frac{a}{x}$$

$$\varphi'(x) = -\frac{a}{x^2}$$

$$|\varphi'(x)| \to 1 \text{ при } x \to \pm\sqrt{a}$$

Итерационная последовательность расходится

$$2.\ \varphi(x) = x^2 + x - a$$

$$\varphi'(x) = 2x + 1$$

$$|\varphi'(x)| < 1 \text{ при } x \in (-1;0) \text{ и } |\varphi'(x)| \geq 1 \text{ при } x \notin (-1;0)$$

Итерационная последовательность сходится в ограниченном интервале

$$3.\ \varphi(x) = \frac{x + \frac{a}{x}}{2}$$

$$\varphi'(x) = \frac{1 - \frac{a}{x^2}}{2}$$

$$|\varphi'(x)| \to 0 \text{ при } x \to \pm\sqrt{a}$$

Итерационная последовательность сходится очень быстро

Пример

Найти корень уравнения $sin(x+2)-x=0$ *на отрезке* $[0;1]$ *с точностью* $0,001$.

Решение. Пусть

$$F(x)=sin(x+2)-x.$$

Преобразуем уравнение $F(x)=0$ к виду $x=\varphi(x)$ таким образом, чтобы отображение $y=\varphi(x)$ было сжимающим.
Уравнение $F(x)=0$ преобразуем к виду

$$x=x-m\cdot F(x),$$

где $m=const\neq 0$. В этом случае

$$\varphi(x)=x-m\cdot F(x).$$

Метод простых итераций

Тогда

$$\varphi'(x) = 1 - m \cdot F'(x).$$

Следовательно, для того, чтобы было

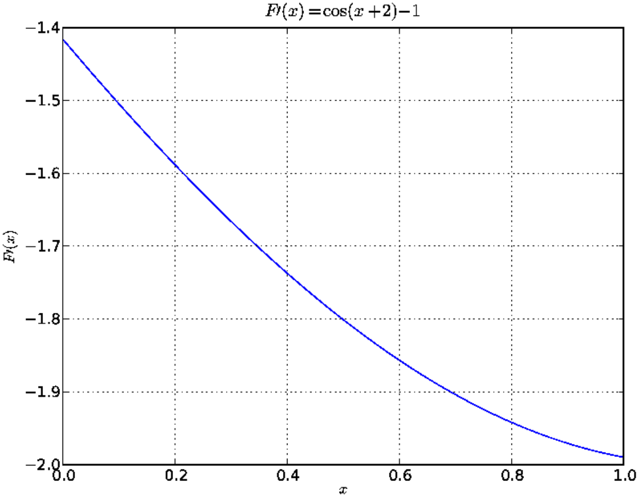
$$|\varphi'(x)| = |1 - m \cdot F'(x)| \leq q < 1$$

достаточно подобрать m так (если это возможно), чтобы для всех x из отрезка $[0; 1]$ выполнялось неравенство

$$0 < p \leq m \cdot F'(x) < 1.$$

В силу непрерывности функции $F'(x)$, это условие будет выполняться, если для всех $x \in [0; 1]$ $m \cdot F'(x) > 0$ и $|m| = \frac{1}{max|F'(x)|}$.

Найдем $max|F'(x)|$ на отрезке $[0; 1]$. Обозначим $F'(x)$ через $dF(x)$.



Метод простых итераций

Из графика видно, что на отрезке $[0;1]$

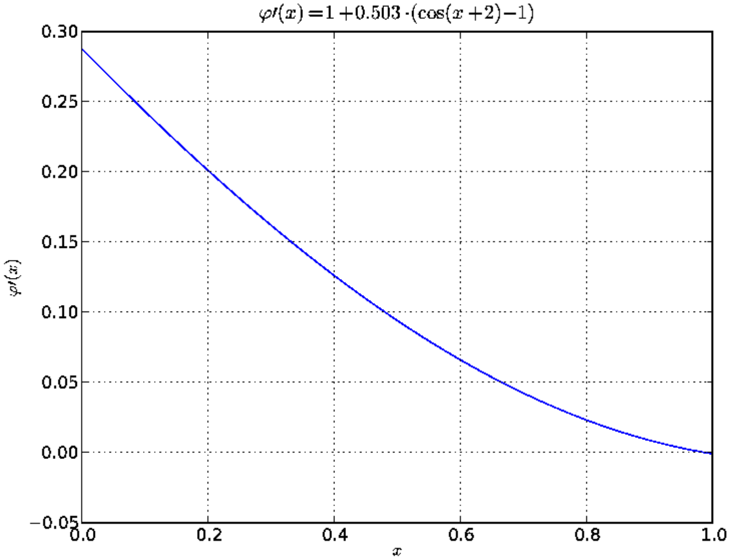
$$max|F'(x)| = |F'(1)| \text{ и } F'(x) < 0.$$

Таким образом, для выполнения условия

$$0 < p \leq m \cdot F'(x) < 1,$$

следовательно, и условия $|\varphi'(x)| \leq \alpha < 1$, достаточно принять $m = \frac{1}{F'(1)} \approx -0.503$.
Найдем значение α.

$$\varphi'(x) = 1 + 0.503 \cdot (cos(x+2) - 1).$$


$\varphi\prime(x) = 1 + 0.503 \cdot (\cos(x+2) - 1)$
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
−0.05
$\varphi\prime(x)$
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
x

Из графика видно, что $\max\limits_{[0;1]} |\varphi'(x)| = \varphi'(0)$.
Так как $\varphi'(0) \approx 0,288$, то можно принять $\alpha = 0,288$.
Тогда уравнение приобретает вид

$$x = x + 0.503 \cdot (sin(x+2) - x) \equiv \varphi(x), \quad \alpha = 0,288,$$

причем $\varphi(x)$ — сжимающее отображение отрезка $[0;1]$ в себя. По теореме Банаха, уравнение имеет единственное решение на отрезке $[0;1]$ и его можно найти методом итераций.

Пример. Реализуя итерационный процесс на языке программирования C++

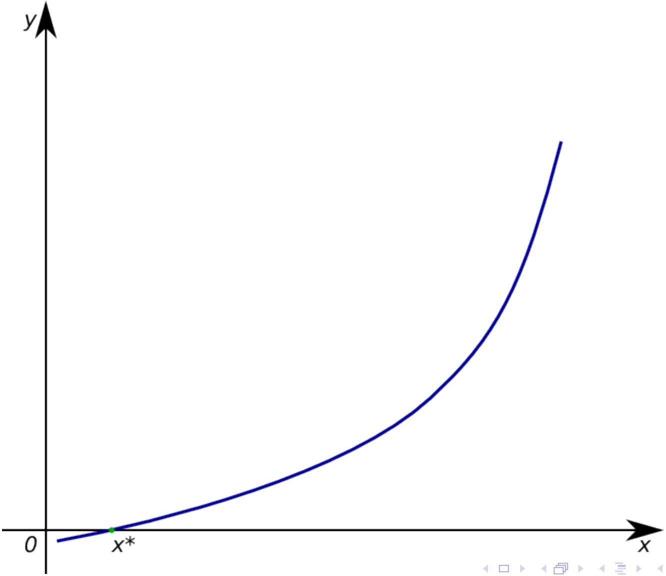
```cpp
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;

int main() {
            double e=0.001;
            double alpha=0.288;
            double x0=0;
            double x1=x0+0.503*(sin(x0+2)-x0);
            while (abs(x1-x0)>e*(1-alpha)/alpha){
                x0=x1; x1=x0+0.503*(sin(x0+2)-x0);
            }
        cout << x1 << endl;
        return 0;
}
```

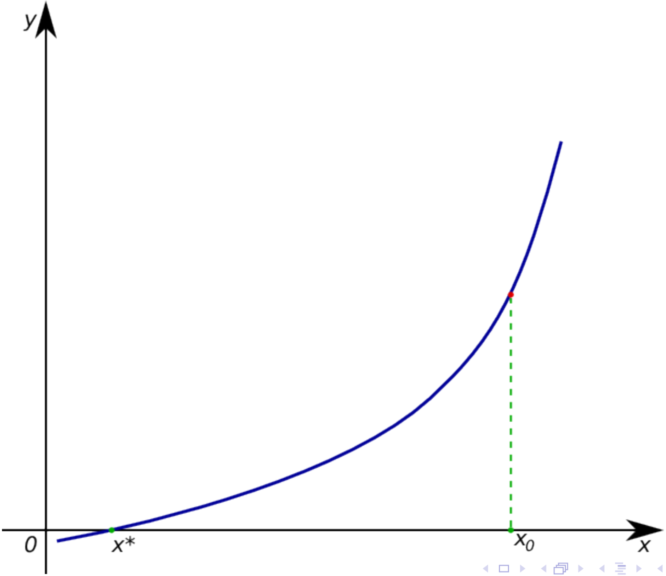
Листинг 1: *Код на C++*

, получим результат: $ans = 0.5541401$.

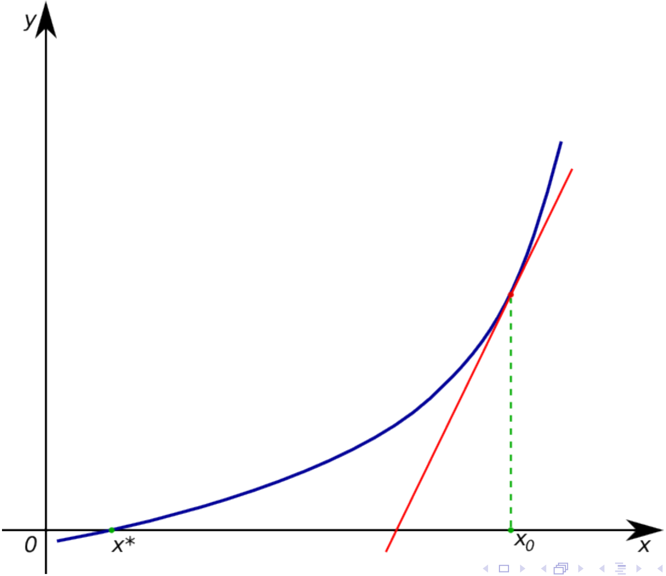
Метод Ньютона



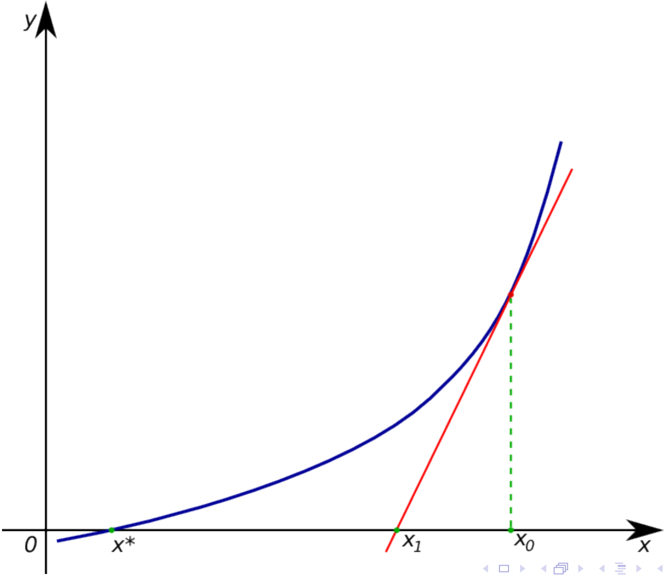
Метод Ньютона



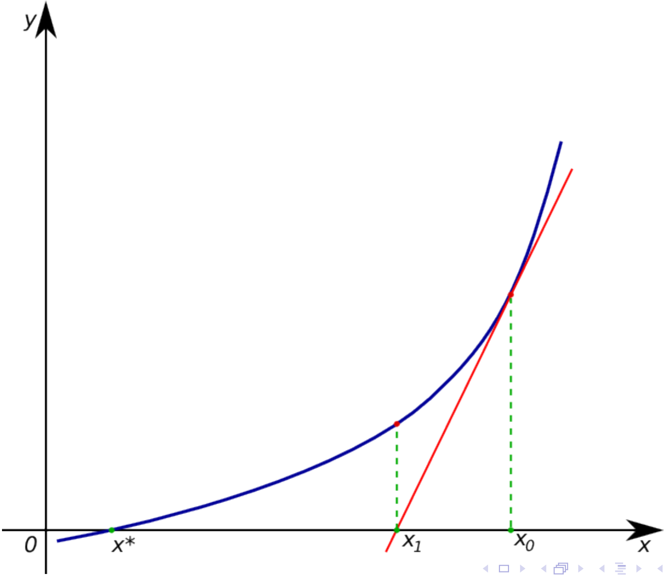
Метод Ньютона



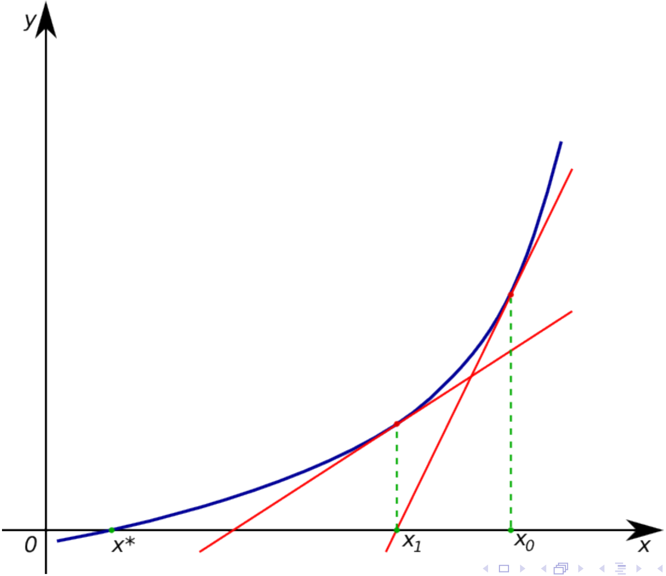
Метод Ньютона



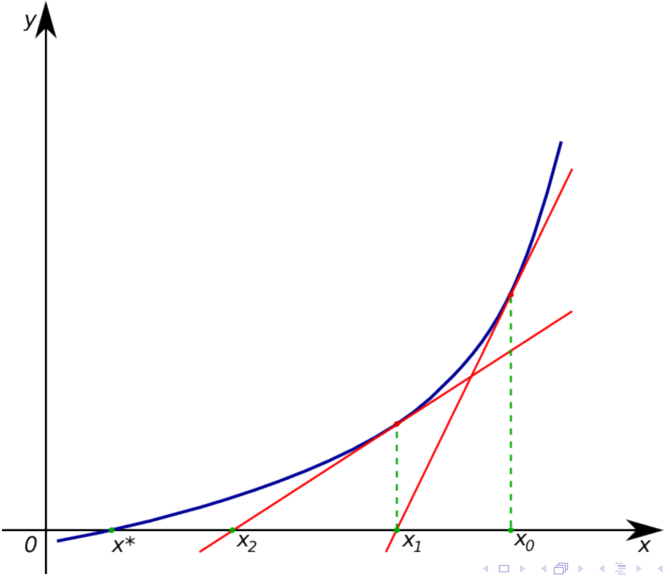
Метод Ньютона



Метод Ньютона



Метод Ньютона



Метод Ньютона

Рассмотрим уравнение

$$F(x) = 0$$

Уравнение касательной в точке x_0 :

$$y = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$$

Точка пересечения с осью абсцисс

$$F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) = 0$$

$$x = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}$$

Повторяя процесс, получим итерационную формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

Метод Ньютона

Рассмотрим уравнение

$$F(x) = 0$$

Уравнение касательной в точке x_0 :

$$y = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$$

Точка пересечения с осью абсцисс

$$F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) = 0$$

$$x = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}$$

Повторяя процесс, получим итерационную формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

Метод Ньютона

Рассмотрим уравнение

$$F(x) = 0$$

Уравнение касательной в точке x_0 :

$$y = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$$

Точка пересечения с осью абсцисс

$$F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) = 0$$

$$x = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}$$

Повторяя процесс, получим итерационную формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

Метод Ньютона

Рассмотрим уравнение

$$F(x) = 0$$

Уравнение касательной в точке x_0 :

$$y = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$$

Точка пересечения с осью абсцисс

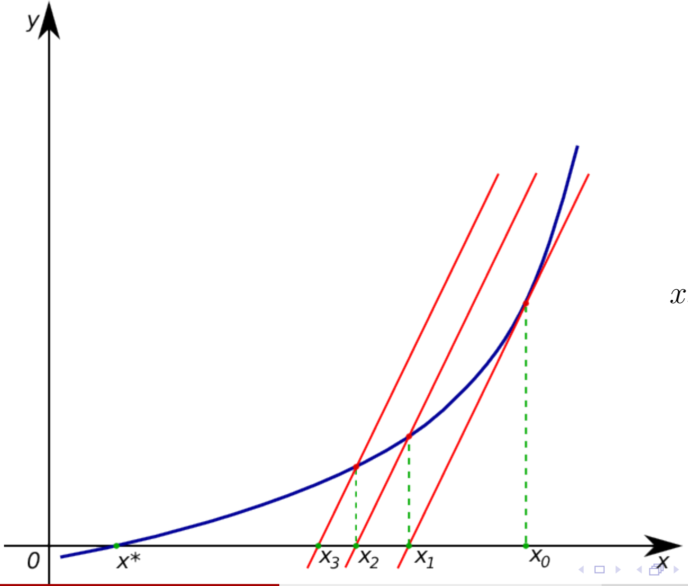
$$F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) = 0$$

$$x = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}$$

Повторяя процесс, получим итерационную формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

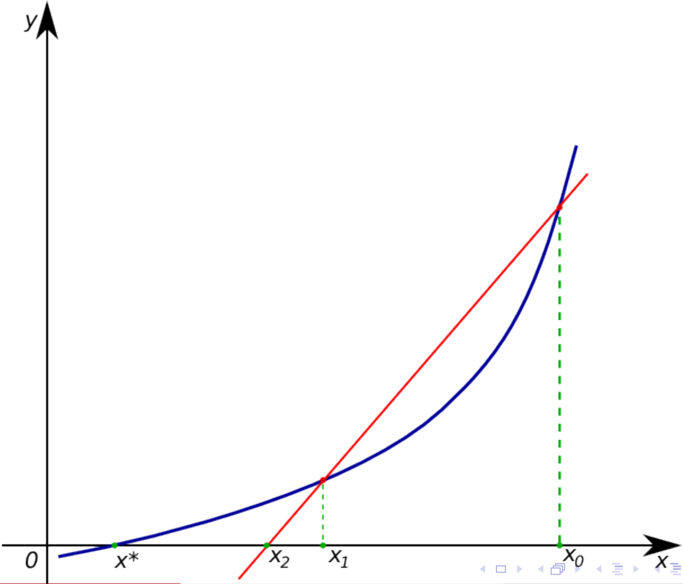
Модифицированный метод Ньютона



$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_0)}$$

Достаточные условия сходимости метода Ньютона получаются на основе достаточных условий сходимости метода итераций.
Достоинствами метода Ньютона являются быстрая сходимость и то, что он является одношаговым.
Недостатком метода Ньютона является то, что он расходится в тех областях, где $f'(x) \cong 0$;

Метод хорд



Метод хорд

Выберем две точки $(x_0, F(x_0))$ и $(x_1, F(x_1))$.

Составим уравнение прямой, проходящей через эти точки

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{F(x) - F(x_0)}{F(x_1) - F(x_0)}$$

Найдем абсциссу точки пересечения этой прямой с осью x $(F(x) = 0)$

$$x = x_0 - \frac{F(x_0) \cdot (x_1 - x_0)}{F(x_1) - F(x_0)}$$

Повторяя процесс, получим итерационную формулу

$$x_{n+2} = x_n - \frac{F(x_n) \cdot (x_{n+1} - x_n)}{F(x_{n+1}) - F(x_n)}$$

Метод хорд

Выберем две точки $(x_0, F(x_0))$ и $(x_1, F(x_1))$.
Составим уравнение прямой, проходящей через эти точки

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{F(x) - F(x_0)}{F(x_1) - F(x_0)}$$

Найдем абсциссу точки пересечения этой прямой с осью x $(F(x) = 0)$

$$x = x_0 - \frac{F(x_0) \cdot (x_1 - x_0)}{F(x_1) - F(x_0)}$$

Повторяя процесс, получим итерационную формулу

$$x_{n+2} = x_n - \frac{F(x_n) \cdot (x_{n+1} - x_n)}{F(x_{n+1}) - F(x_n)}$$

Метод хорд

Выберем две точки $(x_0, F(x_0))$ и $(x_1, F(x_1))$.
Составим уравнение прямой, проходящей через эти точки

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{F(x) - F(x_0)}{F(x_1) - F(x_0)}$$

Найдем абсциссу точки пересечения этой прямой с осью x $(F(x) = 0)$

$$x = x_0 - \frac{F(x_0) \cdot (x_1 - x_0)}{F(x_1) - F(x_0)}$$

Повторяя процесс, получим итерационную формулу

$$x_{n+2} = x_n - \frac{F(x_n) \cdot (x_{n+1} - x_n)}{F(x_{n+1}) - F(x_n)}$$

Метод хорд

Выберем две точки $(x_0, F(x_0))$ и $(x_1, F(x_1))$.
Составим уравнение прямой, проходящей через эти точки

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{F(x) - F(x_0)}{F(x_1) - F(x_0)}$$

Найдем абсциссу точки пересечения этой прямой с осью x $(F(x) = 0)$

$$x = x_0 - \frac{F(x_0) \cdot (x_1 - x_0)}{F(x_1) - F(x_0)}$$

Повторяя процесс, получим итерационную формулу

$$x_{n+2} = x_n - \frac{F(x_n) \cdot (x_{n+1} - x_n)}{F(x_{n+1}) - F(x_n)}$$

Метод хорд

Особенности метода:

- не требуется непосредственное вычисление производной на каждой итерации, что приводит к уменьшению объема вычислений;
- метод является двухшаговым;
- в знаменателе для вычисления x_{n+2} стоит разность двух величин $F(x_n + 1) - F(x_n)$, которые имеют вблизи корня близкие и малые значения, что может привести к заметным погрешностям вычислений.

Решение СЛАУ методом простых итераций

Решение СЛАУ методом простых итераций

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mm}x_m = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Систему (1) запишем в матричном виде

$$A \cdot X = B.$$

Будем считать, что система (1) имеет единственное решение.

Преобразуем эту систему к равносильной

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1m}x_m + \beta_1, \\ \vdots \\ x_m = \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mm}x_m + \beta_m. \end{cases}$$

Последнюю систему запишем в матричном виде

$$X = C \cdot X + D.$$

Выберем начальное приближение решения

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_m^0 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления следующих приближений будем использовать итерационную формулу

$$X_{n+1} = C \cdot X_n + D, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Эта последовательность будет сходиться к решению системы, если отображение $F(X) = C \cdot X + D$ будет сжимающим, т.е.

$$\rho(F(X_1), F(X_2)) \le \alpha \cdot \rho(X_1, X_2), \quad 0 \le \alpha < 1. \tag{2}$$

Выясним условия, при которых будет выполняться неравенство (2). В качестве метрики $\rho(X_1, X_2)$ можно выбрать норму:

$$\rho(X_1, X_2) = ||X_1 - X_2|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_{1i} - x_{2i})^2}.$$

Тогда (2) примет вид

$$||F(X_1) - F(X_2)|| \le \alpha \cdot ||X_1 - X_2||, \quad 0 \le \alpha < 1. \tag{3}$$

По свойствам нормы

$$\begin{gathered} ||C \cdot X_1 + D - C \cdot X_2 - D|| = ||C \cdot X_1 - C \cdot X_2|| = \\ = ||C \cdot (X_1 - X_2)|| \leq ||C|| \cdot ||X_1 - X_2||. \end{gathered} \tag{4}$$

Следовательно, отображение F будет сжимающим, если

$$||C|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}^2} < 1.$$

Из теоремы Банаха следует, что оценка погрешности n-го приближения ΔX_n может определяться равенством

$$\Delta X_n = \frac{\alpha}{1-\alpha} ||X_{k-1} - X_k||, \quad \alpha = ||C||.$$

Пример

Решить систему линейных алгебраических уравнений методом простых итераций с точностью 0.0001.

$$\begin{cases} 100x_1 + 6x_2 - x_3 = 200, \\ 6x_1 + 200x_2 - 10x_3 = 600, \\ x_1 + 2x_2 - 100x_3 = 500. \end{cases}$$

Преобразуем эту систему к равносильной

$$\begin{cases} x_1 = -0.06x_2 + 0.01x_3 + 2, \\ x_2 = -0.03x_1 + 0.05x_3 + 3, \\ x_3 = -0.01x_1 - 0.02x_2 + 5. \end{cases}$$

Проверим условие сжимаемости отображения F.

$$\alpha = \left\| \begin{pmatrix} 0 & -0.06 & 0.01 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & -0.02 & 0 \end{pmatrix} \right\| =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} (C_{i,j})^2} \approx 0.0076 < 1.$$

Следовательно, F — сжимающее отображение.

```
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;
const int n=3;

double normX(double X[n],double X1[n]);

int main() {
    double X[n]={2,3,-5}; // X0
    double X1[n];
    X1[0]=-0.06*X[1]+0.01*X[2]+2;
    X1[1]=-0.03*X[0]+0.05*X[2]+3;
    X1[2]= 0.01*X[0]+0.02*X[1]-5;
```

```
// alpha
double alpha=pow(0.06,2)+pow(0.01,2)+
             pow(0.03,2)+pow(0.05,2)+
             pow(0.01,2)+pow(0.02,2);
cout << "alpha=" << alpha << endl;
// epsilon
double eps=0.000001;
while ( normX(X,X1) > eps*(1-alpha)/alpha ){
    // X=X1
    X[0]=X1[0]; X[1]=X1[1]; X[2]=X1[2];
    //recalculate X1
    X1[0]=-0.06*X[1]+0.01*X[2]+2;
    X1[1]=-0.03*X[0]+0.05*X[2]+3;
    X1[2]= 0.01*X[0]+0.02*X[1]-5;
}
```

```
    //print X1
    cout << "x1=" << X1[0] << endl;
    cout << "x2=" << X1[1] << endl;
    cout << "x3=" << X1[2] << endl;
    return 0;
}

// ||X-X1||
double normX(double X[n], double X1[n]){
    double norm=0;
    for (int i=0; i<n; i++){
        norm=norm+pow(X[i]-X1[i],2);
    }
    return norm;
}
```

Листинг 2: *Решение СЛАУ методом итераций*

Результат:

```
alpha=0.0076
x1=1.78866
x2=2.69989
x3=-4.92809
```

Решение систем нелинейных уравнений методом простых итераций

Рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \\ \vdots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad F(X) = 0. \tag{1}$$

Преобразуем эту систему к равносильной

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \\ \vdots \\ x_m = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m). \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(X) = 0. \tag{2}$$

Решение систем нелинейных уравнений методом простых итераций

Рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \\ \vdots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad F(X) = 0. \qquad (1)$$

Преобразуем эту систему к равносильной

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \\ \vdots \\ x_m = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m). \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(X) = 0. \qquad (2)$$

Выберем начальное приближение решения

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_m^0 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления следующих приближений будем использовать итерационную формулу

$$X_{n+1} = \varphi(X_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Эта последовательность будет сходиться к решению системы, если отображение $F = \varphi(X)$ будет сжимающим, т.е.

$$\rho(\varphi(X_1), \varphi(X_2)) \leq \alpha \cdot \rho(X_1, X_2), \qquad 0 \leq \alpha < 1. \tag{3}$$

Выясним условия, при которых будет выполняться неравенство (3).

В качестве метрики $\rho(X_1, X_2)$ можно выбрать норму:

$$\rho(X_1, X_2) = ||X_1 - X_2||.$$

Тогда

$$||\varphi(X_1) - \varphi(X_2)|| \leq \alpha \cdot ||X_1 - X_2||, \quad 0 \leq \alpha < 1. \tag{4}$$

По теореме о конечных приращениях,

$$||\varphi(X_1) - \varphi(X_2)|| \leq \sup_{X \in L} ||\varphi'(X)|| \cdot ||X_1 - X_2||,$$

где L - отрезок, соединяющий точки X_1 и X_2, функция $\varphi(X)$ дифференцируема в некоторой области $G \supset L$ и $\varphi'(X)$ -матрица Якоби системы (2).

$$\varphi'(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_m} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial \varphi_m(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_m(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_m(X)}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, отображение φ будет сжимающим, если

$$\sup_{X \in L} ||\varphi'(X)|| < 1.$$

Из теоремы Банаха следует, что оценка погрешности n-го приближения ΔX_n может определяться равенством

$$\Delta X_n = \frac{\alpha}{1-\alpha} ||X_{k-1} - X_k||, \quad \alpha = \sup_{X \in L} ||\varphi'(X)||.$$

Пример

Пример

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3cos(x_1) + 3x_0 = 4.5, \\ 4x_1 - 2sin(x_0 - 0.5) = 2. \end{cases}$$

в области $G : \{x_0 \in [0; \frac{\pi}{3}], x_1 \in [0; \frac{\pi}{3}]\}$ *с точностью 0.0001.*

Преобразуем эту систему к равносильной

$$\begin{cases} x_0 = \frac{4.5 - 3cos(x_1)}{3}, \\ x_1 = \frac{2 + 2sin(x_0 - 0.5)}{4}. \end{cases}$$

Пример

Проверим условие сжимаемости отображения φ.

$$\varphi'(X) = \begin{pmatrix} 0 & sin(x_1) \\ \frac{1}{2}cos(x_0 - 0.5) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \sup_{X \in L} ||\varphi'(X)|| \approx 0.866 < 1.$$

Следовательное, φ — сжимающее отображение.

Пример

Реализовать итерационный процесс в Python можно следующим образом:

```
from numpy import sin, cos, array, zeros, linalg
i=1; e=0.0001; alpha=0.866
x0=0; x1=0
X=array([[x0],[x1]], float)
x0=(4.5-3*cos(x1))/3.0
x1=(2+2*sin(x0-0.5))/4.0
X1=array([[x0],[x1]], float)
while linalg.norm(X1-X)>e*(1-alpha)/alpha:
    X=X1
    x0=(4.5-3*cos(x1))/3.0
    x1=(2+2*sin(x0-0.5))/4.0
    X1=array([[x0],[x1]],float)
    i=i+1
print "X=\n", X1
```

Листинг 3: *Код на Python*