Численные методы алгебры

Калитвин В.А.
kalitvin@gmail.com

2023

Итерационные методы решения СЛАУ

Теорема Банаха. *Сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет единственную неподвижную точку, т.е. уравнение* $x = Ax$ *имеет единственное решение и оно может быть получено методом итераций:* $x_{n+1} = Ax_n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ *при любом начальном приближении* x_0.

Теорема Банаха не только доказывает существование и единственность решения уравнения $x = Ax$, но и указывает способ приближенного нахождения этого решения.

Действительно, пусть x_* — точное решение уравнения. Переходя в неравенстве

$$\rho(x_n, x_m) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1)$$

к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\rho(x_n, x_*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1). \tag{1}$$

Из последнего неравенства видно, что если x_n считать приближенным решением уравнения $x = Ax$, то получаемая погрешность не превосходит числа

$$\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1).$$

Поэтому решение x_* может быть приближено с любой наперед заданной точностью элементом x_n, который может быть найден из рекуррентных соотношений

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots, x_n = f(x_{n-1}), \ldots \tag{2}$$

при произвольно выбранном x_0.
Из (1) видно, что требуемая точность достигается тем быстрее, чем ближе x_0 к x_*.
Отметим, что элементы последовательности (2) называют последовательными приближениями к элементу x_*, а сам метод построения их — методом последовательных приближений.

Метод простых итераций

Решение систем линейных алгебраических уравнений методом простых итераций

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mm}x_m = b_m. \end{cases} \tag{2}$$

Систему (2) запишем в матричном виде

$$A \cdot X = B.$$

Будем считать, что система (2) имеет единственное решение.

Преобразуем эту систему к равносильной

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1m}x_m + \beta_1, \\ \vdots \\ x_m = \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mm}x_m + \beta_m. \end{cases}$$

Последнюю систему запишем в матричном виде

$$X = C \cdot X + D.$$

Выберем начальное приближение решения

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_m^0 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления следующих приближений будем использовать итерационную формулу

$$X_{n+1} = C \cdot X_n + D, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Эта последовательность будет сходиться к решению системы, если отображение $F(X) = C \cdot X + D$ будет сжимающим, т.е.

$$\rho(F(X_1), F(X_2)) \leq \alpha \cdot \rho(X_1, X_2), \quad 0 \leq \alpha < 1. \tag{3}$$

Выясним условия, при которых будет выполняться неравенство (3). В качестве метрики $\rho(X_1, X_2)$ можно выбрать норму:

$$\rho(X_1, X_2) = ||X_1 - X_2|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_{1i} - x_{2i})^2}.$$

Тогда (3) примет вид

$$||F(X_1) - F(X_2)|| \leq \alpha \cdot ||X_1 - X_2||, \quad 0 \leq \alpha < 1. \tag{4}$$

По свойствам нормы

$$||C \cdot X_1 + D - C \cdot X_2 - D|| = ||C \cdot X_1 - C \cdot X_2|| = \\ = ||C \cdot (X_1 - X_2)|| \leq ||C|| \cdot ||X_1 - X_2||. \tag{5}$$

Следовательно, отображение F будет сжимающим, если

$$||C|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}^2} < 1.$$

Из теоремы Банаха следует, что оценка погрешности n-го приближения ΔX_n может определяться равенством

$$\Delta X_n = \frac{\alpha}{1-\alpha} ||X_{k-1} - X_k||, \quad \alpha = ||C||.$$

Пример

Решить систему линейных алгебраических уравнений методом простых итераций с точностью 0.0001.

$$\begin{cases} 100x_1 + 6x_2 - x_3 = 200, \\ 6x_1 + 200x_2 - 10x_3 = 600, \\ x_1 + 2x_2 - 100x_3 = 500. \end{cases}$$

Преобразуем эту систему к равносильной

$$\begin{cases} x_1 = -0.06x_2 + 0.01x_3 + 2, \\ x_2 = -0.03x_1 + 0.05x_3 + 3, \\ x_3 = -0.01x_1 - 0.02x_2 + 5. \end{cases}$$

Проверим условие сжимаемости отображения F.

$$\alpha = \left\| \begin{pmatrix} 0 & -0.06 & 0.01 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & -0.02 & 0 \end{pmatrix} \right\| =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} (C_{i,j})^2} \approx 0.0076 < 1.$$

Следовательно, F — сжимающее отображение.

Метод Зейделя

Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Зейделя

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mm}x_m = b_m. \end{cases} \tag{6}$$

Систему (6) запишем в матричном виде

$$A \cdot X = B.$$

Будем считать, что система (6) имеет единственное решение.

Преобразуем эту систему к равносильной

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1m}x_m + \beta_1, \\ \vdots \\ x_m = \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mm}x_m + \beta_m. \end{cases}$$

Последнюю систему запишем в матричном виде

$$X = C \cdot X + D.$$

Выберем начальное приближение решения

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_m^0 \end{pmatrix}.$$

В методе итераций вычисление следующих приближений проводится по формулам:

$$\begin{cases} x_1^{i+1} = \alpha_{11}x_1^i + \alpha_{12}x_2^i + \alpha_{13}x_3^i + \dots + \alpha_{1m}x_m^i + \beta_1, \\ x_2^{i+1} = \alpha_{21}x_1^i + \alpha_{22}x_2^i + \alpha_{23}x_3^i + \dots + \alpha_{2m}x_m^i + \beta_2, \\ x_3^{i+1} = \alpha_{31}x_1^i + \alpha_{32}x_2^i + \alpha_{33}x_3^i + \dots + \alpha_{3m}x_m^i + \beta_3, \\ \vdots \\ x_m^{i+1} = \alpha_{m1}x_1^i + \alpha_{m2}x_2^i + \alpha_{m3}x_3^i + \dots + \alpha_{mm}x_m^i + \beta_m. \end{cases}$$

Основная идея метода Зейделя в том, что на каждом шаге итерационного процесса учитываются уже найденные значения x^{i+1}:

$$\begin{cases} x_1^{i+1} = \alpha_{11}x_1^i + \alpha_{12}x_2^i + \alpha_{13}x_3^i + \cdots + \alpha_{1m}x_m^i + \beta_1, \\ x_2^{i+1} = \alpha_{21}x_1^{i+1} + \alpha_{22}x_2^i + \alpha_{23}x_3^i + \cdots + \alpha_{2m}x_m^i + \beta_2, \\ x_3^{i+1} = \alpha_{31}x_1^{i+1} + \alpha_{32}x_2^{i+1} + \alpha_{33}x_3^i + \cdots + \alpha_{3m}x_m^i + \beta_3, \\ \vdots \\ x_m^{i+1} = \alpha_{m1}x_1^{i+1} + \alpha_{m2}x_2^{i+1} + \alpha_{m3}x_3^{i+1} + \cdots + \alpha_{mm}x_m^i + \beta_m. \end{cases}$$

Таким образом, метод Зейделя сходится быстрее метода простых итераций.

Достаточные условия сходимости метода Зейделя такие же, как и в методе простых итераций.