Численные методы алгебры

Калитвин В.А.
kalitvin@gmail.com

2023

Решение СЛАУ

Необходимость решения систем линейных алгебраических уравнений при решении различных прикладных задач.
Существует большое количество методов решения этих систем.
Все эти методы можно разделить на
прямые (точные) и *итерационные*.

Решение СЛАУ

1. Прямые методы дают решение системы за конечное число арифметических действий (операций).
Если все операции выполняются без ошибок округлений, то решение системы получается точным.
К прямым методам относятся: метод Крамера, метод обратной матрицы, метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса и его модификации: метод Гаусса с выбором главного элемента, метод квадратного корня, метод отражений и др.).
Прямые методы обычно применяются на практике для решения систем с числами порядка не выше 10^3.
2. Итерационные методы дают решение системы как предел последовательных приближений. К итерационным методам относятся: метод простых итераций, метод Зейделя, метод релаксации, градиентные методы и их модификации.
На практике итерационные методы применяются для решения систем порядка 10^4.

Вспомогательные сведения

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n & = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n & = b_2, \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n & = b_n, \end{cases}$$

Эту систему можно записать в матричном виде

$$A \cdot X = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}, \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

Вспомогательные сведения

Решением системы называется такая упорядоченная совокупность чисел $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n$, которая обращает все уравнения системы в верные равенства.
СЛАУ называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение и *несовместной*, если она не имеет решений.
Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если более одного решения.
Две системы называются *равносильными (эквивалентными)*, если множества их решений совпадают (каждое решение первой системы является решением второй, и наоборот).

Вспомогательные сведения

Ранг матрицы.
Ранг матрицы - это натуральное число или 0.
Ранг матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда матрица нулевая.
Ранг ненулевой матрицы имеет несколько равносильных определений:
Строчный геометрический ранг: число r называется рангом ненулевой матрицы, если в ней $\exists r$ линейно независимых строк и любые $r+1$ строки линейно зависимы.
Столбцевый геометрический ранг: число r называется рангом ненулевой матрицы, если в ней $\exists r$ линейно независимых столбцов и любые $r+1$ столбца линейно зависимы.

Вспомогательные сведения

Строчный гауссовый ранг: число r называется рангом ненулевой матрицы, если ее с помощью элементарных преобразований строк можно привести к упрощенному виду, который имеет ровно r ненулевых строк.
Столбцевый гауссовый ранг: число r называется рангом ненулевой матрицы, если транспонированную матрицу с помощью элементарных преобразований строк можно привести к упрощенному виду, который имеет ровно r ненулевых строк.
Алгебраический ранг: число r называется рангом ненулевой матрицы, если эта матрица имеет ненулевой минор r-го порядка и все миноры $r+1$ порядка равны нулю.

Вспомогательные сведения

Матрица

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n, \end{pmatrix},$$

полученная из матрицы A добавлением столбца свободнах коэффициентов, называется расширенной.

Известно, что система имеет единственное решение, если ранг r матрицы A равен рангу расширенной матрицы $B.(rangA = rangB)$.

Система имеет единственное решение, если $rangA =$ количеству неизвестных n, и бесконечно много решений, если $r < n$.

Вспомогательные сведения

Если матрица A квадратная и ее определитель $detA \neq 0$, то она называется *неособенной (невырожденной)*.
СЛАУ с n неизвестными, имеющая невырожденную матрицу A, совместна и имеет единственное решение.
Для невырожденной матрицы важным является понятие обратной матрицы.
Обратной по отношению к данной матрице называется матрица A^{-1} такая, что выполняется условие $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E—единичная матрица.

Вспомогательные сведения

Матрица A, полученная перестановкой в матрице A строк со столбцами, называется *транспонированной* матрицей.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn}, \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица A называется *симметричной*, если она равна транспонированной, $A = A^T$, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$.
Матрица называется *ортогональной*, если сумма квадратов элементов каждого столбца равна единице, а сумма произведений соответствующих элементов двух различных столбцов равна нулю, т.е. $A^T \cdot A = E$.

Вспомогательные сведения

Характеристическим уравнением матрицы A называется уравнение $|A - \lambda E| = 0$, т.е.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}, \end{pmatrix} = 0.$$

Корни характеристического уравнения λ_i называются собственными (характеристическими) числами матрицы.

Обусловленность СЛАУ

Прежде чем говорить о каком-либо методе решения задачи

$$A \cdot X = B,$$

следует убедиться в том, что задача поставлена корректно, т.е. решение задачи
1. существует
2. единственно
3. устойчиво (непрерывно зависит от входных данных)
Первые два требования будут выполняться, если $detA \neq 0$.

Рассмотрим выполнение 3-го требования
Входными данными в задаче $A \cdot X = B$ являются коэффициенты a_{ij} матрицы A и компоненты вектора B.
Они могут задаваться с некоторой погрешностью $\delta a_{ij}, \delta b_i$. Тогда вместо задачи $A \cdot X = B$ будем иметь задачу

$$(A + \delta a) \cdot (X + \delta x) = B + \delta b$$

Чтобы дать количественную оценку погрешности решения, используют понятие нормы.
Справедлива оценка

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\|$$

Из последнего неравенства следует, что наибольших изменений в решении задачи следует ожидать, когда достаточно «велика» матрица A^{-1}, т.е. когда матрица A близка к вырожденной.
Зависимость погрешности решения от погрешности коэффициентов матрицы задается неравенством

$$\frac{\|\delta x\|}{\|X + \delta x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta a\|}{\|A\|}$$

Число $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ называется числом обусловленности матрицы A и обозначаеется $cond(A)$.
Матрицы A, для которых $cond(A)$ относительно велико, называются плохо обусловленными. Это же название применяют и к СЛАУ с матрицей A..
Относительная малость $cond(A)$ говорит о хорошей обусловленности матрицы A и соответствующей системы линейных алгебраических уравнений.
Если $\|\delta b\| \to 0$ или $\|\delta A\| \to 0$, то и $\|\delta x\| \to 0$.
Это доказывает непрерывную зависимость решения задачи (1) от входных данных.
Условия $detA \neq 0$, $det|A + \delta A| \neq 0$ обеспечивают непрерывную постановку задачи (1).

Метод Крамера

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Δ — определитель матрицы A. Δ_i — определитель матрицы, получающейся заменой в основной матрице i-го столбца на столбец свободных коэффициентов.

Метод обратной матрицы

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Метод Гаусса

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n & = a_{1n+1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n & = a_{2n+1}, \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots a_{nn}x_n & = a_{nn+1}, \end{cases} \tag{1}$$

Метод Гаусса

Прямой ход метода Гаусса

Прямой ход метода Гаусса заключается в преобразовании системы к треугольному виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n & = a_{1n+1}, : a_{11} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n & = a_{2n+1}, \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n & = a_{nn+1}. \end{cases}$$

Метод Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n & = \frac{a_{1n+1}}{a_{11}}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n & = a_{2n+1}, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots a_{nn}x_n & = a_{nn+1}, \end{cases}$$

$$1 - \text{я стр.} * (-a_{21}) + 2 - \text{я стр.},\ \dots\ , 1 - \text{я стр.} * (-a_{n1}) + n - \text{я стр.}$$

Система после первого шага прямого хода метода Гаусса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n & = a_{1n+1}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots a_{2n}^{(1)}x_n & = a_{2n+1}^{(1)}, \\ \vdots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots a_{nn}^{(1)}x_n & = a_{nn+1}^{(1)}, \end{cases}$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1} \cdot \frac{a_{1j}}{a_{11}}, (i = 2, \dots, n, j = n+1, \dots, 1)$$

Метод Гаусса

После успешного проведения всех $(n-1)$ шагов прямого хода метода Гаусса получим систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots a_{1n}x_n & = a_{1n+1}, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots a_{2n}^{(1)}x_n & = a_{2n+1}^{(1)}, \\ \qquad\qquad \ldots & \\ \qquad\qquad a_{kk}^{(k-1)}x_k + \ldots a_{kn}^{(k-1)}x_n & = a_{kn+1}^{(k-1)}, \\ \qquad\qquad \ldots & \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n & = a_{nn+1}^{(n-1)}, \end{cases} \tag{2}$$

Расчетные формулы для преобразования системы (1) к виду (2) имеют вид

Для каждого $k = 1, 2, \ldots, n-1$, выполнить преобразования

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \cdot \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}},$$

$$(i = k+1, k+2, \ldots, n,\ \ j = n+1, n, \ldots, k)$$

Метод Гаусса

Обратный ход метода Гаусса

Из системы (2)

$$a_{nn}^{(n-1)}x_n = a_{nn+1}^{(n-1)}, \Rightarrow x_n = \frac{a_{nn+1}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

$$a_{n-1n-1}^{(n-2)}x_{n-1} + a_{n-1n}^{(n-2)}x_n = a_{n-1n+1}^{(n-2)}, \Rightarrow x_{n-1} = \frac{a_{n-1n+1}^{(n-2)} - a_{n-1n}^{(n-2)}x_n}{a_{n-1n-1}^{(n-2)}x_{n-1}}$$

$$a_{n-2n-2}^{(n-3)}x_{n-2} + a_{n-2n-1}^{(n-3)}x_{n-1} + a_{n-2n}^{(n-3)}x_n = a_{n-2n+1}^{(n-3)},$$

$$\Rightarrow x_{n-2} = \frac{a_{n-2n+1}^{(n-3)} - a_{n-2n-1}^{(n-3)}x_{n-1} - a_{n-2n}^{(n-3)}x_n}{a_{n-2n}^{(n-3)}}$$

Метод Гаусса

Расчетные формулы для нахождения x_i имеют вид
При $i = n$

$$x_n = \frac{a_{nn+1}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

При $i = n-1, n-2, \ldots, 1$

$$x_i = \frac{a_{in+1}^{(i-1)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j}{a_{ii}^{i-1}} \tag{3}$$

Метод Гаусса

Важной характеристикой численного метода является его трудоемкость.
Для алгоритма метода Гаусса можно получить следующие оценки. При достаточно больших значениях n для прямого хода требуется порядка $\frac{2}{3}n^3$ операций сложения и умножения, а для обратного хода — $\frac{1}{2}n^2$.
Видно, что трудоемкость алгоритма определяется, в основном, прямым ходом.

Метод Гаусса с выбором главного элемента

Из выражений (2) и (3) хорошо видно, что алгоритм может быть реализован, если ни на одном из шагов прямого хода элемент $a_{kk}^{(k-1)}$ не окажется равным нулю. Однако, проблемы могут возникнуть и в случае, когда модуль элемента $a_{kk}^{(k-1)}$ оказывается малым в сравнении с машинным эпсилоном.

Решающая роль элемента $a_{kk}^{(k-1)}$ для реализации алгоритма Гаусса закреплена в его специальном названии - ведущий элемент k-го шага прямого хода. Приведенный выше пример показывает, что следует избегать малых значений ведущего элемента. Это привело к модификации прямого хода алгоритма включением в него процедуры выбора ведущего элемента.

Метод Гаусса с выбором главного элемента

Существуют две стратегии такого выбора - так называемые частичный и полный выбор ведущего элемента.
Первый из них предполагает на каждом k-м шаге поиск максимального по модулю элемента в k-м столбце (строке) и перестановке соответствующих строк (столбцов) матрицы таким образом, чтобы этот элемент оказался на месте ведущего.
Стратегия полного выбора ведущего элемента базируется на поиске максимального по модулю элемента во всей неприведенной части матрицы и последующей перестановке соответствующих строк и столбцов матрицы таким образом, чтобы этот элемент оказался на месте ведущего.

Треугольное разложение матрицы системы уравнений

Возможность разложения квадратной матрицы на треугольные сомножители доказывается следующей теоремой.

Теорема

Какова бы ни была квадратная матрица A порядка n с отличными от нуля главными минорами до $n-1$ порядка включительно, ее всегда можно представить в виде произведения матриц B и C, являющихся соответственно, нижней и верхней треугольными матрицами.

Треугольное разложение матрицы системы уравнений

Отметим, что разложение квадратной неособенной матрицы на треугольные сомножители не является единственным. Действительно

$$BC = BD^{-1}DC = (BD^{-1})(DC)$$

Если D - диагональная матрица, то матрицы BD^{-1} и DC остаются треугольными, но $BD^{-1} \neq B$ и $DC \neq C$
Вместе с тем, если зафиксировать значения b_{ii} или c_{ii} (например, положить $b_{ii} = 1$), то разложение будет единственным. Именно такое разложение (при $b_{ii} = 1$) получило название LU - разложения квадратной матрицы.

Метод Гаусса и LU-разложение матрицы

При реализации прямого хода алгоритма Гаусса на каждом его шаге для пересчета элементов i-й строки $(i = k, ..., n)$ используются коэффициенты $m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$. Легко убедиться, что первый шаг прямого хода описывается матричным соотношением

$$A_2 = M_1 A_1,$$

где A_1 — исходная матрица задачи, и M_1 — матрица преобразования, имеющая вид

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & \dots & & & \\ -m_{21} & 1 & ... & & \\ ... & & & & \\ -m_{n-1,1} & 0 & ... & 1 & \\ -m_{n,1} & 0 & ... & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Метод Гаусса и LU-разложение матрицы

Аналогично, k-й шаг преобразования описывается выражениями:

$$A_{k+1} = M_k A_k, A_k = M_{k-1} M_{k-2} \dots M_1 A_1$$

$$M_k = \begin{bmatrix} 1 & & \dots & & & \\ 0 & 1 & \dots & & & \\ \dots & \dots & \dots & 1 & & \\ 0 & 0 & \dots & -m_{k+1,k} & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & \\ 0 & 0 & \dots & -m_{n,k} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Полная реализация прямого хода, обеспечивающая трансформацию исходной матрицы задачи к треугольному виду, описывается матричным преобразованием

$$M_{n-1} M_{n-2} \cdot \dots \cdot M_1 A_1 = U,$$

где U — верхняя треугольная матрица.

Метод Гаусса и LU-разложение матрицы

Поскольку каждая матрица M_i является нижней треугольной, то и их произведение $M_{n-1}M_{n-2}\dots M_1 = M$ – нижняя треугольная матрица.
Тогда, $MA_1 = U$ и $A_1 = M^{-1}U$. Очевидно, что и матрица $M^{-1} = L$ — является нижней треугольной. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что матрица L будет иметь вид:

$$M_k = \begin{bmatrix} 1 & & \dots & & & \\ m_{21} & 1 & \dots & & & \\ \dots & \dots & \dots & 1 & & \\ m_{k1} & m_{k2} & \dots & m_{k-1,k} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{n,k} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Метод Гаусса и LU-разложение матрицы

Полная реализация прямого хода, обеспечивающая трансформацию исходной матрицы задачи к треугольному виду, описывается матричным преобразованием

$$M_{n-1}M_{n-2}\cdot\cdots\cdot M_1A_1=U,$$

где U — верхняя треугольная матрица.
Следовательно, не проводя дополнительных вычислений при реализации прямого хода алгоритма Гаусса, получаем LU – разложение матрицы задачи. Заметим, что элементы матрицы L могут записываться в ячейки памяти, в которых хранились обнуляемые элементы исходной матрицы, т.е. дополнительной памяти для хранения матрицы L не требуется.

Применение LU-разложения

Пусть известно LU - разложение для матрицы задачи $AX = B$. Тогда будут справедливы уравнения:

$$LUX = B$$

и

$$\begin{cases} UX = Y, \\ LY = B \end{cases}$$

Так как обе подсистемы в последней системе являются треугольными, то трудоемкость решения каждой из них составляет примерно $0,5n^2$ операций, а решение всей задачи потребует лишь n^2 операций, что существенно меньше трудоемкости алгоритма Гаусса, которая составляет $\frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2$ операций. Естественно, эта экономия в вычислениях достигается лишь при наличии LU - разложения матрицы задачи.

Применение LU-разложения

Трудоемкость получения разложения равна трудоемкости прямого хода алгоритма, т.е. $\frac{2}{3}n^3$ операций, и при решении одной системы уравнений никакого выигрыша не получается. Все преимущества LU - разложения проявляются при решении серии задач с неизменной левой частью (матрицей A) и с изменяющейся правой частью (вектором B).

Применение метода Гаусса к вычислению определителей

Пусть D определитель матрицы
после первого шага прямого хода метода Гаусса определитель преобразованной системы будет равен D/a_{11}.
после 2-го шага $= D/(a_{11} \cdot a_{22}^{(1)})$
после n-го шага $= D/(a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(n-1)})$
Так как полученная матрица треугольная, с единицами на главной диагонали, то ее определитель=1.
Следовательно, $D/(a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(n-1)}) = 1$.
Следовательно, $D = (a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(n-1)})$.

Обращение матриц с использованием метода Гаусса

Пусть дана матрица A
Для нахождения A^{-1}, будем исходить из того, что она является решением уравнения $A \cdot A^{-1} = E$
E — единичная матрица.

$$A \cdot X = E \tag{1}$$

Представим матрицу X как набор вектор-столбцов

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \; x_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \; x_1 = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix},$$

а единичную матрицу как набор вектор-столбцов

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда заменим матричное уравнение (1) эквивалентной системой не сязанных между собой векторно-матричных уравнений

$$Ax_1 = e_1, \ Ax_2 = e_2, \ \ldots, \ Ax_n = e_n. \tag{2}$$

Каждое из этих уравнений является СЛАУ и может быть решено методом Гаусса.
При этом все системы (2) имеют одну и туже матрицу коэффициентов, а это значит, что наиболее трудоемкая часть метода Гаусса — приведение системы к треугольному виду — общая для всех систем (2).

Метод прогонки решения систем с трехдиагональными матрицами коэффициентов

Часто возникает необходимость в решении СЛАУ, матрицы которых, являясь слабо заполненными, т.е. содержащими мало ненулевых элементов, имеют определенную структуру.
Будем рассматривать системы с матрицами ленточной структуры, в которых ненулевые элементы располагаются на главной диагонали и на нескольких побочных диагоналях.
Для решения систем с ленточными матрицами коэффициентов метод Гаусса можно преобразовать в более эффективные методы.
Рассмотрим случай ленточных систем, к которым, сводится решение задач сплайн-интерполяции функций, дискретизации краевых задач для дифференциальных уравнений методами конечных разностей, конечных элементов и др.

Будем искать решение такой системы, каждое уравнение которой связывает 3 соседних неизвестных.

$$
\begin{pmatrix}
c_1 & d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
b_2 & c_2 & d_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & b_3 & c_3 & d_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & c_{n-1} & d_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n-1} & c_{n-1}
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_{n-1} \\ r_n
\end{pmatrix}
$$

$$
b_i x_{i-1} + c_i x_i + d_i x_{i+1} = r_i, \; i = 1, 2, \dots, n, b_1 = 0, d_n = 0 \tag{1}
$$

Пусть существуют такие δ_i и λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ такие, что

$$x_i = \delta_i x_{i+1} + \lambda_i \tag{2}$$

Уменьшим индекс на единицу

$$x_{i-1} = \delta_{i-1} x_i + \lambda_{i-1} \tag{3}$$

Подставим (3) в (1)

$$b_i \delta_{i-1} x_i + b_i \lambda_{i-1} + c_i x_i + d_i x_{i+1} = r_i$$

Откуда

$$x_i = -\frac{d_i}{c_i + b_i \delta_{i-1}} x_{i+1} + \frac{r_i - b_i \lambda_{i-1}}{c_i + b_i \delta_{i-1}} \tag{4}$$

(4) совпадает с (2), если

$$\delta_i = -\frac{d_i}{c_i + b_i\delta_{i-1}} \ \lambda_i = \frac{r_i - b_i\lambda_{i-1}}{c_i + b_i\delta_{i-1}} \tag{5}$$

т.к. $b_1 = 0$, то процесс вычислений δ_i, λ_i может быть начата со значений

$$\delta_1 = -\frac{d_1}{c_1}, \ \lambda_1 = \frac{r_1}{c_1}$$

и продолжен по формулам (5) при $i = 1, 2, \ldots, n$. Причем, при $i = n$, в силу $d_n = 0$, получим $\delta_n = 0$.
Следовательно, при $i = n$ из (2) будем иметь

$$x_n = \lambda_n = \frac{r_n - b_n\lambda_{n-1}}{c_n + b_n\delta_{n-1}}$$

Далее по формулам (2) последовательно находятся $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1$ при $i = n-1, n-2, \ldots, 1$.
Таким образом решение сводится к нахождению δ_i, λ_i (прогоночные коэффициенты) при $i = 1, 2, \ldots, n$ (прямая прогонка) и затем получение x_i по формуле (2) при $i = n, n-1, \ldots, 1$ (обратная прогонка).