Численное решение систем нелинейных уравнений

Калитвин В.А.
kalitvin@gmail.com

2023

Решение систем нелинейных уравнений

Теорема Банаха. *Сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет единственную неподвижную точку, т.е. уравнение* $x = Ax$ *имеет единственное решение и оно может быть получено методом итераций:* $x_{n+1} = Ax_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *при любом начальном приближении* x_0*.*

Теорема Банаха не только доказывает существование и единственность решения уравнения $x = Ax$, но и указывает способ приближенного нахождения этого решения.

Действительно, пусть x_* — точное решение уравнения. Переходя в неравенстве

$$\rho(x_n, x_m) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1)$$

к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\rho(x_n, x_*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1). \tag{1}$$

Из последнего неравенства видно, что если x_n считать приближенным решением уравнения $x = Ax$, то получаемая погрешность не превосходит числа

$$\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1).$$

Поэтому решение x_* может быть приближено с любой наперед заданной точностью элементом x_n, который может быть найден из рекуррентных соотношений

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots, x_n = f(x_{n-1}), \ldots \tag{2}$$

при произвольно выбранном x_0.
Из (1) видно, что требуемая точность достигается тем быстрее, чем ближе x_0 к x_*.
Отметим, что элементы последовательности (2) называют последовательными приближениями к элементу x_*, а сам метод построения их — методом последовательных приближений.

Метод простых итераций

Решение систем нелинейных уравнений методом простых итераций

Рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \\ \vdots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad F(X) = 0. \tag{3}$$

Преобразуем эту систему к равносильной

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \\ \vdots \\ x_m = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m). \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(X) = 0. \tag{4}$$

Выберем начальное приближение решения

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_m^0 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления следующих приближений будем использовать итерационную формулу

$$X_{n+1} = \varphi(X_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Эта последовательность будет сходиться к решению системы, если отображение $F = \varphi(X)$ будет сжимающим, т.е.

$$\rho(\varphi(X_1), \varphi(X_2)) \leq \alpha \cdot \rho(X_1, X_2), \qquad 0 \leq \alpha < 1. \tag{5}$$

Выясним условия, при которых будет выполняться неравенство (5).

В качестве метрики $\rho(X_1, X_2)$ можно выбрать норму:

$$\rho(X_1, X_2) = ||X_1 - X_2||.$$

Тогда

$$||\varphi(X_1) - \varphi(X_2)|| \leq \alpha \cdot ||X_1 - X_2||, \quad 0 \leq \alpha < 1. \tag{6}$$

По теореме о конечных приращениях,

$$||\varphi(X_1) - \varphi(X_2)|| \leq \sup_{X \in L} ||\varphi'(X)|| \cdot ||X_1 - X_2||,$$

где L - отрезок, соединяющий точки X_1 и X_2, функция $\varphi(X)$ дифференцируема в некоторой области $G \supset L$ и $\varphi'(X)$ -матрица Якоби системы (4).

$$\varphi'(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_m} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial \varphi_m(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_m(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_m(X)}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, отображение φ будет сжимающим, если

$$\sup_{X \in L} ||\varphi'(X)|| < 1.$$

Из теоремы Банаха следует, что оценка погрешности n-го приближения ΔX_n может определяться равенством

$$\Delta X_n = \frac{\alpha}{1-\alpha}||X_{k-1} - X_k||, \quad \alpha = \sup_{X \in L} ||\varphi'(X)||.$$

Пример

Пример

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3cos(x_1) + 3x_0 = 4.5, \\ 4x_1 - 2sin(x_0 - 0.5) = 2. \end{cases}$$

в области $G : \{x_0 \in [0; \frac{\pi}{3}], x_1 \in [0; \frac{\pi}{3}]\}$ *с точностью 0.0001.*

Преобразуем эту систему к равносильной

$$\begin{cases} x_0 = \frac{4.5 - 3cos(x_1)}{3}, \\ x_1 = \frac{2 + 2sin(x_0 - 0.5)}{4}. \end{cases}$$

Пример

Проверим условие сжимаемости отображения φ.

$$\varphi'(X) = \left(\begin{array}{cc} 0 & sin(x_1) \\ \frac{1}{2}cos(x_0 - 0.5) & 0 \end{array} \right),$$

$$\alpha = \sup_{X \in L} ||\varphi'(X)|| \approx 0.866 < 1.$$

Следовательное, φ — сжимающее отображение.

Пример

Реализовать итерационный процесс в Python можно следующим образом:

Листинг 1: Код на Python

```
from numpy import sin, cos, array, zeros, linalg
i=1; e=0.0001; alpha=0.866
x0=0; x1=0
X=array([[x0],[x1]], float)
x0=(4.5-3*cos(x1))/3.0
x1=(2+2*sin(x0-0.5))/4.0
X1=array([[x0],[x1]], float)
while linalg.norm(X1-X)>e*(1-alpha)/alpha:
    X=X1
    x0=(4.5-3*cos(x1))/3.0
    x1=(2+2*sin(x0-0.5))/4.0
    X1=array([[x0],[x1]],float)
    i=i+1
print "X=\n", X1
```

Пример

Листинг 2: Результат

```
Result:
X=
[[ 0.66459002]
 [ 0.58192395]]
```

Метод Ньютона

Итерационная формула

$$X_{i+1} = X_i - \left(F'(X_i)\right)^{-1} \cdot F(X_i)$$

Модифицированный метод Ньютона

Итерационная формула

$$X_{i+1} = X_i - \left(F'(X_0)\right)^{-1} \cdot F(X_i)$$