Справочник формул по математике

Калитвин В.А.
kalitvin@gmail.com

7 ноября 2016 г.

1 Признаки делимости

на 2 — последняя цифра числа чётная
на 3 — сумма цифр числа делится на 3
на 4 — две последние цифры числа нули или образуют число, делящиеся на 4
на 5 — последняя цифра числа 0 или 5
на 6 — число должно делится на 2 и на 3
на 8 — три последние цифры числа нули или образуют число, делящееся на 8
на 9 — сумма цифр числа делится на 9
на 11 — сумма цифр, стоящих на четных местах, отличается от суммы цифр, стоящих на нечётных местах, на число, кратное 11
на 25 — две последние цифры цисла 00, 25, 50 или 75

2 Формулы сокращенного умножения

Квадрат суммы

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

Квадрат разности

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Куб суммы

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Куб разности

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Разность квадратов

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Сумма кубов

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Разность кубов

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Для $n \in N$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Если n - четное

$$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Если n - нечетное

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$$

$$= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n,$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний из n по k.

3 Свойства степени

$a^0 = 1$	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$a^m : a^n = a^{m-n}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(\frac{a}{b})^{-m} = (\frac{b}{a})^m$
$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
$(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m}$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

4 Свойста квадратного (арифметического) корня

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, b \neq 0$	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
$(\sqrt{a})^m = \sqrt{a^m}$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, b \neq 0$
$\sqrt{ab} = \sqrt{\lvert a\rvert} \cdot \sqrt{\lvert b\rvert}$	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{\lvert a\rvert}}{\lvert b\rvert}, b \neq 0$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
$\sqrt{a^m} = (\sqrt{\lvert a\rvert})^m$	

5 Модуль числа

$$|a| = \begin{cases} a, a \geq 0, \\ -a, a < 0, \end{cases} \quad , |a| = \sqrt{a^2}$$

Свойства

$\lvert a\rvert \geq 0;$	$\lvert a \cdot b\rvert = \lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert$	$\lvert a+b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$
$\lvert a\rvert = 0 \Leftrightarrow a = 0$	$\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}, b \neq 0$	$\lvert a-b\rvert \geq \lvert\lvert a\rvert - \lvert b\rvert\rvert$

6 Прогрессии

Арифметическая прогрессия

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

где d — разность прогрессии
Формулы n-го члена

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = a_k + (n-k)d$$

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

Формулы суммы первых n членов

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Формула для разности

$$d = a_{n+1} - a_n$$

Если $n + m = k + p$, то

$$a_n + a_m = a_k + a_p$$

Сумма последовательных натуральных чисел от 1 до n :

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

Геометрическая прогрессия

$$b_{n+1} = b_n \cdot q,$$

где $q \neq 0$ — знаменатель прогрессии
Формулы n-го члена

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$b_n = b_k \cdot q^{n-k}$$

$$b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$$

Формулы суммы первых n членов

$$S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q} = b_1 \frac{q_n - 1}{q-1}, q \neq 1$$

$$S_n = b_1 \cdot n, q = 1$$

Формула для знаменателя

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Если $n + m = k + p$, то

$$b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_p$$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$S = \frac{b_1}{1-q}, |q| < 1$$

7 Тригонометрия

Тригонометрические тождества

$$\sin^{\alpha} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$|\cos \alpha| = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$|\sin \alpha| = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = sec^2\alpha$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = cosec^2\alpha$$

Формулы сложения тригонометрических функций

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}y = \frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}$$

$$\operatorname{tg}x - \operatorname{ctg}y = -\frac{cos(x+y)}{\cos x\sin y}$$

$$\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x = \frac{1}{\sin x\cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\operatorname{tg}x - \operatorname{ctg}x = -2\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = 2\operatorname{ctg}2x$$

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos(45^\circ - x) = \sqrt{2}\sin(45^\circ + x)$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin(45^\circ - x) = \sqrt{2}\cos(45^\circ + x)$$

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi),\ \text{где}\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Тригонометрические функции двойного аргумента

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$$

$$c\operatorname{tg}2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{2}$$

Тригонометрические функции тройного аргумента

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}$$

Тригонометрические функции половиннго аргумента

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

Формулы преобразования frпроизведения в сумму

$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$$

$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$$

8 Логарифмы

Определение логарифма. Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a > 0, a \neq 1$) называется показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить b.

$$log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Свойства логарифма

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{log_a b} = b,$$

где $a > 0; a \neq 1; b > 0$.

$$log_a a = 1$$

$$log_a 1 = 0$$

$$log_a a^m = m$$

Логарифм произведения

$$log_c(ab) = log_c a + log_c b,\ \ x > 0, y > 0.$$

Логарифм частного

$$log_c(\frac{a}{b}) = log_c a - log_c b,\ \ x > 0, y > 0$$

Логарифм степени

$$log_c a^n = n log_c a, x > 0.$$

$$log_{c^n} a = \frac{1}{n} log_c a, x > 0.$$

Логарифм корня

$$log_c \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} log_c a$$

Переход к новому основанию

$$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}, a > 0, a \neq 1, c > 0, c \neq 1, b > 0$$

Формулы, следующие из свойств логарифмов

$$log_a b = \frac{1}{log_b a}$$

$$\frac{log_n b}{log_n c} = \frac{log_m b}{log_m c} = log_c b$$

$$log_n b \cdot log_m c = log_m b \cdot log_n c$$

$$a^{log_n b} = b^{log_n a}$$

Десятичный логарифм - это логарифм по основанию 10:

$$log_{10} b = lg b$$

Натуральный логарифм — это логарифм по основанию e.

$$log_e b = ln b.$$

9 Текстовые задачи

9.1 Задачи на движение

$$S = v \cdot t,$$

где v — скорость движения, t — время, S — расстояние, пройденное за время t со скоростью v.

9.2 Задачи на работу

$$A = N \cdot t,$$

где N — работа, произведенная в единицу времени, t — время, в течение которого производится работа, A — работа, произведенная за время t.

9.3 Задачи на сложные проценты

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

где A_0 — начальный капитал, $p\%$ — процент годовыхм, n — годы, на которые положен вклад, A_n — наращенный капитал за n лет.

9.4 Задачи на десятичную форму числа

Стандартным видом числа x называют его запись в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leq a < 10$ и n –целое число.

Число n называют порядком числа x.

9.5 Задачи на концентрацию смеси и сплавы

Процентными содержаниями веществ A, B, C в данной смеси называются величины $p_A\%, p_B\%, p_c\%$, соответственно вычисляемые по формулам:

$$p_A\% = C_A \cdot 100\%,\ p_B\% = C_B \cdot 100\%,\ p_C\% = C_C \cdot 100\%,$$

где C_A, C_B, C_C — масса соответствующих веществ.