Справочник формул по математике

Калитвин В.А.
kalitvin@gmail.com

5 ноября 2016 г.

1 Формулы сокращенного умножения

Квадрат суммы

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

Квадрат разности

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Куб суммы

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Куб разности

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Разность квадратов

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Сумма кубов

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Разность кубов

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Для $n \in N$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Если n - четное

$$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Если n - нечетное

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$$

$$= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n,$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний из n по k.

2 Свойства степени

$$\begin{array}{ll}
a^0 = 1 & a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\
a^m : a^n = a^{m-n} & a^{-n} = \frac{1}{a^n} \\
(a^m)^n = a^{mn} & (\frac{a}{b})^{-m} = (\frac{b}{a})^m \\
(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m & a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \\
(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m} & a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}
\end{array}$$

3 Свойста квадратного (арифметического) корня

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab} \qquad \sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}$$
$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}, b\neq 0 \qquad \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$$
$$(\sqrt{a})^m=\sqrt{a^m} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}, b\neq 0$$
$$\sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\cdot\sqrt{|b|} \qquad (\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{|a|}}{|b|}, b\neq 0 \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$$
$$\sqrt{a^m}=(\sqrt{|a|})^m$$

4 Тригонометрия

Тригонометрические тождества

$$\sin^{\alpha}+\cos^2\alpha=1$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$$

$$|\cos\alpha|=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

$$|\sin\alpha|=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}=sec^2\alpha$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}=cosec^2\alpha$$

Формулы сложения тригонометрических функций

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\mp 1}{\operatorname{ctg}\beta\pm\operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\cos(x-y)}{\cos x \sin y}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} y = -\frac{cos(x+y)}{\cos x \sin y}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = -2\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = 2\operatorname{ctg} 2x$$

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos(45^\circ - x) = \sqrt{2}\sin(45^\circ + x)$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin(45^\circ - x) = \sqrt{2}\cos(45^\circ + x)$$

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi), \text{ где } \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \ \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Тригонометрические функции двойного аргумента

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$$

$$c\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{2}$$

Тригонометрические функции тройного аргумента

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}$$

Тригонометрические функции половиннго аргумента

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

Формулы преобразования frпроизведения в сумму

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\cos(x+y)\right)$$

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left(\cos(x-y)+\cos(x+y)\right)$$

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left(\sin(x-y)+\sin(x+y)\right)$$

5 Логарифмы

Определение логарифма. Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a>0, a\neq 1$) называется показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить b.

$$log_a b=c\Leftrightarrow a^c=b$$

Свойства логарифма

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{log_a b}=b,$$

где $a>0; a\neq 1; b>0.$

$$log_a a=1$$

$$log_a 1=0$$

$$log_a a^m=m$$

Логарифм произведения

$$log_c(ab)=log_c a+log_c b,\ x>0, y>0.$$

Логарифм частного

$$log_c(\frac{a}{b})=log_c a-log_c b,\ x>0, y>0$$

Логарифм степени

$$log_c a^n = nlog_c a, x > 0.$$

$$log_{c^n} a = \frac{1}{n} log_c a, x > 0.$$

Логарифм корня

$$log_c \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} log_c a$$

Переход к новому основанию

$$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}, a > 0, a \neq 1, c > 0, c \neq 1, b > 0$$

Формулы, следующие из свойств логарифмов

$$log_a b = \frac{1}{log_b a}$$

$$\frac{log_n b}{log_n c} = \frac{log_m b}{log_m c} = log_c b$$

$$log_n b \cdot log_m c = log_m b \cdot log_n c$$

$$a^{log_n b} = b^{log_n a}$$

Десятичный логарифм - это логарифм по основанию 10:

$$log_{10} b = lgb$$

Натуральный логарифм — это логарифм по основанию e.

$$log_e b = lnb.$$

6 Текстовые задачи

6.1 Задачи на движение

$$S = v \cdot t,$$

где v — скорость движения, t — время, S — расстояние, пройденное за время t со скоростью v.

6.2 Задачи на работу

$$A = N \cdot t,$$

где N — работа, произведенная в единицу времени, t — время, в течение которого производится работа, A — работа, произведенная за время t.

6.3 Задачи на сложные проценты

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

где A_0 — начальный капитал, $p\%$ — процент годовыхм, n — годы, на которые положен вклад, A_n — наращенный капитал за n лет.

6.4 Задачи на десятичную форму числа

Стандартным видом числа x называют его запись в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leq a < 10$ и n –целое число.

Число n называют порядком числа x.

6.5 Задачи на концентрацию смеси и сплавы

Процентными содержаниями веществ A, B, C в данной смеси называются величины $p_A\%, p_B\%, p_c\%$, соответственно вычисляемые по формулам:

$$p_A\% = C_A \cdot 100\%,\ p_B\% = C_B \cdot 100\%,\ p_C\% = C_C \cdot 100\%,$$

где C_A, C_B, C_C — масса соответствующих веществ.

 Калитвин В.А. (kalitvin@gmail.com)