Справочник формул по математике

Калитвин В.А.
kalitvin@gmail.com

25 ноября 2016 г.

1 Признаки делимости

на 2 — последняя цифра числа чётная
на 3 — сумма цифр числа делится на 3
на 4 — две последние цифры числа нули или образуют число, делящиеся на 4
на 5 — последняя цифра числа 0 или 5
на 6 — число должно делится на 2 и на 3
на 8 — три последние цифры числа нули или образуют число, делящееся на 8
на 9 — сумма цифр числа делится на 9
на 11 — сумма цифр, стоящих на четных местах, отличается от суммы цифр, стоящих на нечётных местах, на число, кратное 11
на 25 — две последние цифры цисла 00, 25, 50 или 75

2 Формулы сокращенного умножения

Квадрат суммы

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

Квадрат разности

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Куб суммы

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Куб разности

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Разность квадратов

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Сумма кубов

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Разность кубов

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Для $n \in N$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Если n - четное

$$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Если n - нечетное

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$$

$$= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n,$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний из n по k.

3 Свойства степени

$$\begin{array}{ll}
a^0 = 1 & a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\
a^m : a^n = a^{m-n} & a^{-n} = \frac{1}{a^n} \\
(a^m)^n = a^{mn} & (\frac{a}{b})^{-m} = (\frac{b}{a})^m \\
(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m & a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \\
(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m} & a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}
\end{array}$$

4 Свойста квадратного (арифметического) корня

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} & \sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k} \\
\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, b \neq 0 & \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \\
(\sqrt{a})^m = \sqrt{a^m} & \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, b \neq 0 \\
\sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|} & (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \\
\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{|b|}, b \neq 0 & \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} \\
\sqrt{a^m} = (\sqrt{|a|})^m &
\end{array}$$

5 Модуль числа

$$|a| = \begin{cases} a, a \geq 0, \\ -a, a < 0, \end{cases} , |a| = \sqrt{a^2}$$

Свойства

$\lvert a\rvert \geq 0;$	$\lvert a \cdot b\rvert = \lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert$	$\lvert a + b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$
$\lvert a\rvert = 0 \Leftrightarrow a = 0$	$\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}, b \neq 0$	$\lvert a - b\rvert \geq \lvert\lvert a\rvert - \lvert b\rvert\rvert$

6 Прогрессии

Арифметическая прогрессия

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

где d — разность прогрессии
Формулы n-го члена

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = a_k + (n-k)d$$

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

Формулы суммы первых n членов

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Формула для разности

$$d = a_{n+1} - a_n$$

Если $n + m = k + p$, то

$$a_n + a_m = a_k + a_p$$

Сумма последовательных натуральных чисел от 1 до n :

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

Геометрическая прогрессия

$$b_{n+1} = b_n \cdot q,$$

где $q \neq 0$ — знаменатель прогрессии
Формулы n-го члена

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$b_n = b_k \cdot q^{n-k}$$

$$b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$$

Формулы суммы первых n членов

$$S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q} = b_1 \frac{q_n - 1}{q-1}, q \neq 1$$

$$S_n = b_1 \cdot n, q = 1$$

Формула для знаменателя

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Если $n + m = k + p$, то

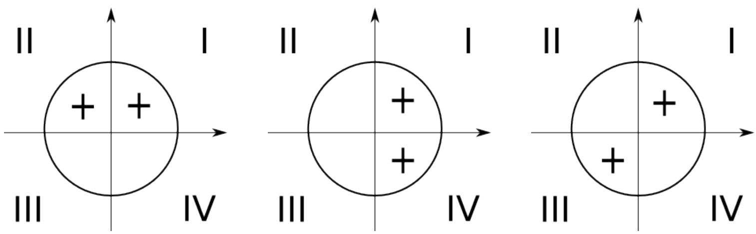
$$b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_p$$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$S = \frac{b_1}{1-q}, |q| < 1$$

7 Тригонометрия

Знаки тригонометрических функций по четвертям



$\sin x$ $\cos x$ $\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$

Тригонометрические тождества

$$\sin^{\alpha} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

$$|\cos\alpha| = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

$$|\sin\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = sec^2\alpha$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = cosec^2\alpha$$

Формулы сложения тригонометрических функций

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}$$

Тригонометрические функции двойного аргумента

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$$

$$c\operatorname{tg}2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{2}$$

Тригонометрические функции тройного аргумента

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}$$

Тригонометрические функции половинного аргумента

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

Формулы преобразования суммы в произведение

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$$

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x\sin y}$$

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = -\frac{\sin(x-y)}{\sin x\sin y}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} y = -\frac{cos(x+y)}{\cos x\sin y}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x\cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = -2\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = 2\operatorname{ctg} 2x$$

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos(45^\circ - x) = \sqrt{2}\sin(45^\circ + x)$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin(45^\circ - x) = \sqrt{2}\cos(45^\circ + x)$$

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi),\ \text{где}\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Формулы преобразования произведения в сумму

$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y)+\cos(x+y)\right)$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y)+\sin(x+y)\right)$$

Значения тригонометрических функций некоторых углов

Угол в градсах	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Угол в радианах	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Свойства обратных тригонометрических функций

$$arcsin(-a) = -arcsina, |a| \le 1$$
$$arccos(-a) = \pi - arccosa, |a| \le 1$$
$$arctg(-a) = -arctga, a \in R$$
$$arcctg(-a) = \pi - arcctga, a \in R$$
$$arcsina + arccosa = \frac{\pi}{2}, |a| \le 1$$
$$arctga + arcctga = \frac{\pi}{2}, a \in R$$

8 Некоторые пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = lna, a > 0$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x} = 1$$

9 Производные элементарных функций

Функция	Производная
$f(x) = c$	$c' = 0$, где c — const
$f(x) = x^n$	$(x^n)' = nx^{n-1}$
$f(x) = e^x$	$(e^x)' = e^x$
$f(x) = a^x$	$(a^x)' = a^x lna$
$f(x) = lnx$	$(lnx)' = \frac{1}{x}$
$f(x) = log_a x$	$(log_a x)' = \frac{1}{xlna}$
$f(x) = \sin x$	$(\sin x)' = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$f(x) = arcsinx$	$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = arccosx$	$(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = arctgx$	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = arcctgx$	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

10 Логарифмы

Определение логарифма. Логарифмом положительного числа b по основанию a $(a > 0, a \neq 1)$ называется показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить b.

$$log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Свойства логарифма

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{log_a b} = b,$$

где $a > 0; a \neq 1; b > 0.$

$$log_a a = 1$$

$$log_a 1 = 0$$

$$log_a a^m = m$$

Логарифм произведения

$$log_c(ab) = log_c a + log_c b,\ a > 0, b > 0.$$

Логарифм частного

$$log_c(\frac{a}{b}) = log_c a - log_c b,\ a > 0, b > 0$$

Логарифм степени

$$log_c a^n = n log_c a, a > 0, c > 0, c \neq 1.$$

$$log_{c^n} a = \frac{1}{n} log_c a, a > 0, c > 0, c \neq 1.$$

Логарифм корня

$$log_c \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} log_c a$$

Переход к новому основанию

$$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}, a > 0, a \neq 1, c > 0, c \neq 1, b > 0$$

Формулы, следующие из свойств логарифмов

$$log_a b = \frac{1}{log_b a}$$

$$\frac{log_n b}{log_n c} = \frac{log_m b}{log_m c} = log_c b$$

$$log_n b \cdot log_m c = log_m b \cdot log_n c$$

$$a^{log_n b} = b^{log_n a}$$

Десятичный логарифм - это логарифм по основанию 10:

$$log_{10} b = lg b$$

Натуральный логарифм — это логарифм по основанию e.

$$log_e b = ln b.$$

11 Основные формулы комбинаторики

Число перестановок из n элементов

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

Число размещений из n элементов по k элементов:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

Число сочетаний из n элементов по k элементов

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$$

12 Текстовые задачи

12.1 Задачи на движение

$$S = v \cdot t,$$

где v — скорость движения, t — время, S — расстояние, пройденное за время t со скоростью v.

12.2 Задачи на работу

$$A = N \cdot t,$$

где N — работа, произведенная в единицу времени, t — время, в течение которого производится работа, A — работа, произведенная за время t.

12.3 Задачи на сложные проценты

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

где A_0 — начальный капитал, $p\%$ — процент годовыхм, n — годы, на которые положен вклад, A_n — наращенный капитал за n лет.

12.4 Задачи на десятичную форму числа

Стандартным видом числа x называют его запись в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \le a < 10$ и n –целое число.

Число n называют порядком числа x.

12.5 Задачи на концентрацию смеси и сплавы

Процентными содержаниями веществ A, B, C в данной смеси называются величины $p_A\%, p_B\%, p_c\%$, соответственно вычисляемые по формулам:

$$p_A\% = C_A \cdot 100\%,\ p_B\% = C_B \cdot 100\%,\ p_C\% = C_C \cdot 100\%,$$

где C_A, C_B, C_C — масса соответствующих веществ.

13 Таблица квадратов двузначных чисел

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	5661	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

 Калитвин В.А. (kalitvin@gmail.com)