

Справочник формул по математике

Калитвин В.А.
kalitvin@gmail.com

10 января 2017 г.

1 Признаки делимости

на 2 — последняя цифра числа чётная

на 3 — сумма цифр числа делится на 3

на 4 — две последние цифры числа нули или образуют число, делящееся на 4

на 5 — последняя цифра числа 0 или 5

на 6 — число должно делиться на 2 и на 3

на 8 — три последние цифры числа нули или образуют число, делящееся на 8

на 9 — сумма цифр числа делится на 9

на 11 — сумма цифр, стоящих на чётных местах, отличается от суммы цифр, стоящих на нечётных местах, на число, кратное 11

на 25 — две последние цифры числа 00, 25, 50 или 75

2 Формулы сокращенного умножения

Квадрат суммы

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

Квадрат разности

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Куб суммы

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Куб разности

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Разность квадратов

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Сумма кубов

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Разность кубов

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Для $n \in \mathbb{N}$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Если n - четное

$$a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Если n - нечетное

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Бином Ньютона

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k =$$

$$= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n,$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний из n по k .

3 Свойства степени

$$\begin{array}{ll} a^0 = 1 & a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\ a^m : a^n = a^{m-n} & a^{-n} = \frac{1}{a^n} \\ (a^m)^n = a^{mn} & \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m \\ (a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m & a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \\ \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} & a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \end{array}$$

4 Свойства квадратного (арифметического) корня

$$\begin{array}{ll} \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} & \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^k} \\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, b \neq 0 & \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \\ (\sqrt{a})^m = \sqrt{a^m} & \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, b \neq 0 \\ \sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|} & (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \\ \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}, b \neq 0 & \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} \\ \sqrt{a^m} = (\sqrt{|a|})^m & \end{array}$$

5 Модуль числа

$$|a| = \begin{cases} a, a \geq 0, \\ -a, a < 0, \end{cases} \quad , |a| = \sqrt{a^2}$$

Свойства

$$\begin{array}{lll} |a| \geq 0; & |a \cdot b| = |a| \cdot |b| & |a + b| \leq |a| + |b| \\ |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0 & \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0 & |a - b| \geq ||a| - |b|| \end{array}$$

6 Прогрессии

Арифметическая прогрессия

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

где d — разность прогрессии

Формулы n -го члена

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_n = a_k + (n - k)d$$

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

Формулы суммы первых n членов

$$S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Формула для разности

$$d = a_{n+1} - a_n$$

Если $n + m = k + p$, то

$$a_n + a_m = a_k + a_p$$

Сумма последовательных натуральных чисел от 1 до n :

$$S = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Геометрическая прогрессия

$$b_{n+1} = b_n \cdot q,$$

где $q \neq 0$ — знаменатель прогрессии

Формулы n -го члена

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$b_n = b_k \cdot q^{n-k}$$

$$b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$$

Формулы суммы первых n членов

$$S_n = b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = b_1 \frac{q_n - 1}{q - 1}, q \neq 1$$

$$S_n = b_1 \cdot n, q = 1$$

Формула для знаменателя

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Если $n + m = k + p$, то

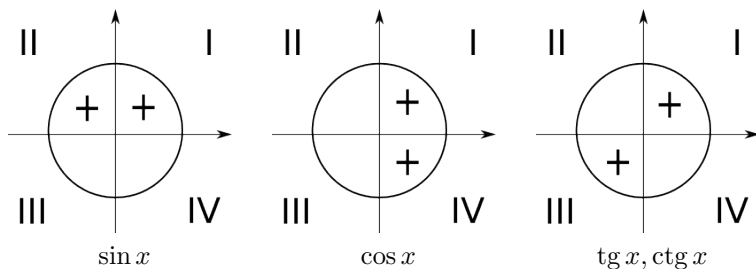
$$b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_p$$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$S = \frac{b_1}{1 - q}, |q| < 1$$

7 Тригонометрия

Знаки тригонометрических функций по четвертям



Тригонометрические тождества

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$|\cos \alpha| = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$|\sin \alpha| = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

Формулы сложения тригонометрических функций

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}$$

Тригонометрические функции двойного аргумента

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{2}$$

Тригонометрические функции тройного аргумента

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}$$

Тригонометрические функции половинного аргумента

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

Формулы преобразования суммы в произведение

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$$

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y}$$

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = -\frac{\sin(x-y)}{\sin x \sin y}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\cos(x-y)}{\cos x \sin y}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} y = -\frac{\cos(x+y)}{\cos x \sin y}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = -2 \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = 2 \operatorname{ctg} 2x$$

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos(45^\circ - x) = \sqrt{2} \sin(45^\circ + x)$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin(45^\circ - x) = \sqrt{2} \cos(45^\circ + x)$$

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi), \text{ где } \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Формулы преобразования произведения в сумму

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y))$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x - y) + \sin(x + y))$$

Значения тригонометрических функций некоторых углов

Угол в градсах	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Угол в радианах	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Свойства обратных тригонометрических функций

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a, |a| \leq 1$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a, |a| \leq 1$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a, a \in R$$

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a, a \in R$$

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}, |a| \leq 1$$

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}, a \in R$$

8 Некоторые пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

9 Производные элементарных функций

Функция	Производная
$f(x) = c$	$c' = 0$, где c — const
$f(x) = x^n$	$(x^n)' = nx^{n-1}$
$f(x) = e^x$	$(e^x)' = e^x$
$f(x) = a^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$
$f(x) = \ln x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a x$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
$f(x) = \sin x$	$(\sin x)' = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$f(x) = \arcsin x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \operatorname{arcctg} x$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

10 Логарифмы

Определение логарифма. Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a > 0, a \neq 1$) называется показатель степени, в которую нужно возвести a , чтобы получить b .

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Свойства логарифма

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b,$$

где $a > 0; a \neq 1; b > 0$.

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a^m = m$$

Логарифм произведения

$$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b, \quad a > 0, b > 0.$$

Логарифм частного

$$\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b, \quad a > 0, b > 0$$

Логарифм степени

$$\log_c a^n = n \log_c a, \quad a > 0, c > 0, c \neq 1.$$

$$\log_{c^n} a = \frac{1}{n} \log_c a, \quad a > 0, c > 0, c \neq 1.$$

Логарифм корня

$$\log_c \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log_c a$$

Переход к новому основанию

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad a > 0, a \neq 1, c > 0, c \neq 1, b > 0$$

Формулы, следующие из свойств логарифмов

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\frac{\log_n b}{\log_n c} = \frac{\log_m b}{\log_m c} = \log_c b$$

$$\log_n b \cdot \log_m c = \log_m b \cdot \log_n c$$

$$a^{\log_n b} = b^{\log_n a}$$

Десятичный логарифм - это логарифм по основанию 10:

$$\log_{10} b = \lg b$$

Натуральный логарифм — это логарифм по основанию e .

$$\log_e b = \ln b.$$

11 Основные формулы комбинаторики

Число перестановок из n элементов

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

Число размещений из n элементов по k элементов:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

Число сочетаний из n элементов по k элементов

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$$

12 Текстовые задачи

12.1 Задачи на движение

$$S = v \cdot t,$$

где v — скорость движения, t — время, S — расстояние, пройденное за время t со скоростью v .

12.2 Задачи на работу

$$A = N \cdot t,$$

где N — работа, произведенная в единицу времени, t — время, в течение которого производится работа, A — работа, произведенная за время t .

12.3 Задачи на сложные проценты

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

где A_0 — начальный капитал, $p\%$ — процент годовых, n — годы, на которые положен вклад, A_n — наращенный капитал за n лет.

12.4 Задачи на десятичную форму числа

Стандартным видом числа x называют его запись в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leq a < 10$ и n — целое число.

Число n называют порядком числа x .

12.5 Задачи на концентрацию смеси и сплавы

Процентными содержаниями веществ A, B, C в данной смеси называются величины $p_A\%, p_B\%, p_C\%$, соответственно вычисляемые по формулам:

$$p_A\% = C_A \cdot 100\%, \quad p_B\% = C_B \cdot 100\%, \quad p_C\% = C_C \cdot 100\%,$$

где C_A, C_B, C_C — масса соответствующих веществ.

13 Таблица квадратов двузначных чисел

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	5661	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801