

# Pilotprosjekt ved Sandvika vgs

Jonas van den Brink

February 6, 2014

Elever som deltar i prosjektet vil gjøre følgende

- Utlede differensialligninger for fallskjermhopp og strikkehopp fra enkle fysiske lover, og drøfte gyldigheten av ligningene.
- Løse disse differensialligningene numerisk, samt finne kreftene hopperen blir utsatt for over tid.
- Diskutere tolkning av de numeriske løsningene ved å lage grafiske plot, og utskrift av terminalhastigheter og lignende.
- Elever får en innføring i bruk av python til løsning av matematiske/fysiske problemstilling. En introduksjon til differensialligninger og integrasjon.

Følgende læreplanmål møtes

- beskrive banen til en partikkel ved hjelp av parameterframstilling, og bruke derivasjon og integralregning til å regne ut posisjon, fart og akselerasjon når en av de tre størrelsene er kjent
- bruke matematiske modeller som kilde for kvalitativ og kvantitativ informasjon, presentere resultater og vurdere gyldighetsområdet for modellene
- planlegge og gjennomføre egne undersøkelser og foreta relevante forsøk innen de forskjellige hovedområdene i faget
- samle inn og bearbeide data og presentere og vurdere resultater og konklusjoner av forsøk og undersøkelser, med og uten digitale verktøy
- bruke simuleringsprogrammer til å vise fenomener og fysiske sammenhenger

Mål for prosjektet

- Gi engasjerte studenter muligheten til å lære noe utover
- Finne hastighet for fallskjermhopper som funksjon av tid  $v(t)$ , se hvordan terminalhastighet endrer seg når fallskjerm utløses.

- Beregne terminalhastighet analytisk og sammenligne med numerisk resultat.
- Plotte g-krefter som funksjon av tid, justere parametere for å finne en realistisk max g.
- Finne hastighet og posisjon av strikkhopper som funksjon av tid  $v(t)$ ,  $x(t)$ .
- Finne en passende fjærkonstant  $k$  ved prøving og feiling, og ev analytisk regning for spesielt interesserte.
- Plotte g-krefter i et strikkehopp og sammenligne disse med fallskjermhopp.

## 1 Introduksjon

I dette prosjektet skal vi studere hvordan hastigheten til en person som hopper i fallskjerm og strikkhopp endrer seg over tid. Vi kommer til å finne matematiske ligninger basert på vår fysiske forståelse av de kreftene som virker på hopperen i hvert tilfelle. Vi skal diskutere ligningene vi kommer frem til, vi vil ikke greie å løse dem med kun penn og papir og vil derfor lage enkle dataprogrammer som løser ligningene for oss. For dette kommer vi til å bruke programmeringsspråket *python*.

## 2 Fallskjermhopping

Et fallskjermhopp består hovedsakelig av to deler. Den første delen er det som skjer før fallskjerm er utløst, denne delen kalles gjerne *fritt fall*, i de fleste sportssammenhenger vil man oppleve ca ett minutt fritt fall per hopp. Etter dette utløser hopperen fallskjermen som da drastisk reduserer fallhastigheten, under fallskjerm bruker hopperen så fra ett til tre minutter videre ned til bakken avhengig av hvor stor fallskjerm de bruker og hvor nærme bakken de utløste skjermen.

I begge faser utsettes hopperen bare for to krefter, tyngdekraft og luftmotstand. Så vi har

$$\sum F = F_G + F_D,$$

der  $F_G$  er tyngdekraften, og  $F_D$  er luftmotstand. Dere har sikkert god kjennskap til at tyngdekraften er gitt ved  $F_G = mg$ , der  $m$  er den totale massen til hopperen, som vil se personvekten og alt utstyret, og  $g$  er tyngdens akselerasjonskonstant, som vi setter til  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . En fallskjermhopper vil falle med veldig høy hastighet, og vi bruker derfor en kvadratisk form på luftmotstanden, som vi kan skrive som følger

$$F_D = \frac{1}{2}\rho C A v^2,$$

her er  $\rho$  tettheten til luft,  $C$  vil være og  $A$  blablabla. For å slippe å skrive så mye kaller vi disse tallene samlet for  $D$ , slik at

$$\frac{1}{2}\rho C A = D,$$

$$F_D = -Dv^2.$$

ligningen vi skal løse har altså følgende form

$$ma = mg - Dv^2.$$

Dette er det som matematisk kalles en differensialligning, la oss diskutere hva det betyr.

$$m \frac{dv}{dt} = mg - Dv(t)^2.$$

## 2.1 Motivasjon

Vi ignorerer ofte luftmotstand, ofte er dette greit fordi resultatet er tilnærmet likt med og uten. MEN, i visse tilfeller vil luftmotstand gi et veldig stort forskjell. Vi ser på fallskjermhopping som et eksempel.

### Det fysiske problemet

Før vi tar en titt på programmeringen, må vi ha en god forståelse av problemet vi prøver å løse. Vi skal finne hastigheten til en fallskjermhopper, la oss derfor sette opp Newton's 2lov, som kjent har den formen

$$\sum F = ma.$$

Merk at vi regner på dette som rettlinjett bevegelse for enkelhetens skyld, men alt kan i prinsippet også gjøres vektorielt.

Det er to krefter som virker på fallskjermhopperen, tyngdekraft og luftmotstand.

$$\sum F = mg - \frac{1}{2}C_D\rho A|v|v,$$

kaller

$$\frac{1}{2}C_D\rho A \equiv k,$$

slik at vi har

$$ma = mg - k|v|v.$$

Dette er en differensialligning, som er åpenbart om vi skriver ut akselerasjonen som den deriverte av hastigheten

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}|v|v.$$

Som vi skal løse for å finne hastigheten som funksjon av tid  $v(t)$ .

## 2.2 Uløselighet

## 2.3 Fremgangsmåte

$$v = v_0 + at.$$

$$v_{n+1} = v_n + a(t_n)\Delta t.$$

## 2.4 En mer matematisk tankemåte

Vi skrev tidligere differensialligningen vår som

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}|v|v.$$

Definisjonen av den deriverte av  $v$  er

$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Vi kan si at vi tilnærmer den deriverte ved istedenfor å la  $\Delta t$  gå helt mot 0, at vi stopper den på et lite tall, vi har da at

$$\frac{dv}{dt} \approx \frac{v(t + \delta t) - v(t)}{\Delta t} \approx g - \frac{k}{m}|v(t)|v(t).$$

slik at

$$v(t + \Delta t) = v(t)\Delta t$$

### 3 En kjapp introduksjon til python

## 4 Oppgaver

a)

## 5 Bungee jump

