FYS2140 Kvantefysikk, Løsningsforslag for Oblig 6

18. februar 2014

Dette er løsningsforslaget for Oblig 6 som dreier seg om den harmoniske oscillator. I tillegg finnes løsningsforslag på Oppgave 2.14 fra Griffiths, som var tilleggsoppgave denne uken.

Oppgave 1

a) Konstruer ψ_2 for den harmoniske oscillator.

Svar: Vi vet at ψ_2 kan konstrueres fra grunntilstanden ved å bruke operatoren $\hat{a}_+$:

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2!}}\hat{a}_+^2\psi_0. \tag{1}$$

Vi begynner med grunntilstanden

$$\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}, \tag{2}$$

og bruker først $\hat{a}_+$ en gang:

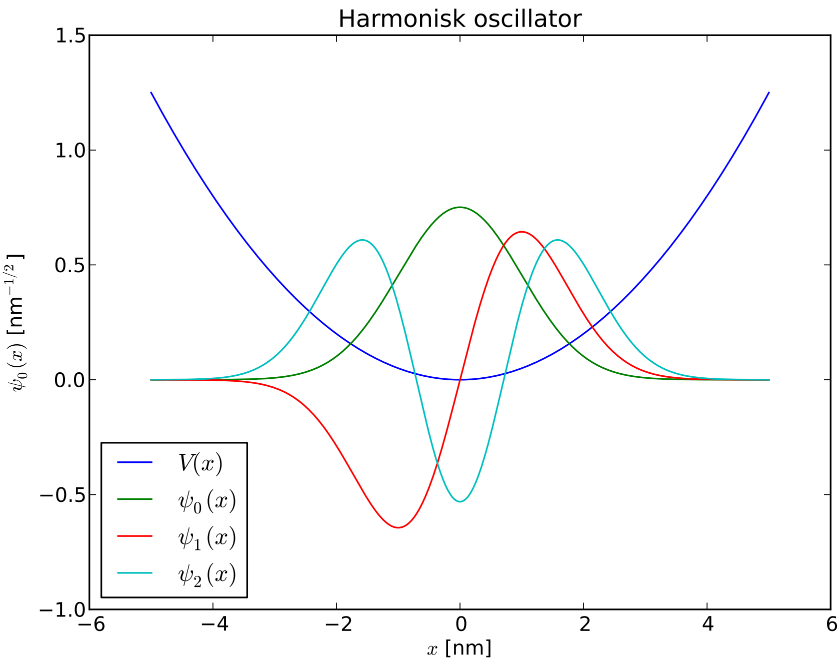
$$\begin{aligned}
\hat{a}_+\psi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(-i\hat{p} + m\omega\hat{x}\right)\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(-\hbar\frac{d}{dx} + m\omega x\right)\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left[-\hbar\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}\cdot 2x\right) + m\omega x\right] e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} 2m\omega x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2},
\end{aligned} \tag{3}$$

og så $\hat{a}_+$ en gang til:

$$\begin{aligned}
\hat{a}_+^2\psi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(-i\hat{p} + m\omega\hat{x}\right)\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} 2m\omega x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\
&= \frac{1}{\hbar}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left(-\hbar\frac{d}{dx} + m\omega x\right) x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\
&= \frac{1}{\hbar}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left[-\hbar\left(1 - x\frac{m\omega}{2\hbar}2x\right) + m\omega x^2\right] e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\
&= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{2m\omega}{\hbar}x^2 - 1\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Dette gir

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2!}}\hat{a}_+^2\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{2m\omega}{\hbar}x^2 - 1\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}. \tag{5}$$



Figur 1: ψ_0 (grønn), ψ_1 (rød) og ψ_2 (ekkel grønn) for $m\omega/\hbar = 1\,\mathrm{nm}^{-2}$.

b) Tegn ψ_0, ψ_1 og ψ_2.

Svar: Se figur 1. Vi velger oss konstanter som gir $m\omega/\hbar = 1\,\mathrm{nm}^{-2}$.

c) Sjekk ortogonaliteten til ψ_0, ψ_1 og ψ_2, ved eksplisitt integrasjon. *Hint:* hvis du utnytter symmetrien til integrandene rundt x–aksen så slipper du unna med å gjøre ett integral.

Svar: Ortogonaliteten til to bølgefunksjoner ψ_m og ψ_n er gitt ved

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n \, dx = \delta_{mn}, \tag{6}$$

hvor $\delta_{mn} = 1$ dersom $m = n$ og null ellers.

Siden ψ_0 og ψ_2 er symmetriske ("like") rundt $x = 0$ og ψ_1 er anti-symmetrisk ("odde"), så er integrandene $\psi_0^* \psi_1$ og $\psi_2^* \psi_1$ anti-symmetriske og integralene dermed automatisk null, noe som oppfyller ortogonalitetskravet i (6). Det gjenstår å teste $\psi_0^* \psi_2$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^* \psi_2 \, dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{2m\omega}{\hbar}x^2 - 1\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\, dx \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2m\omega}{\hbar}x^2 - 1\right) e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\, dx \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2m\omega}{\hbar}x^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\, dx - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\, dx\right] \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar}} \left[2\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\, dy - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\, dy\right] \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar}} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \left[4\int_{0}^{\infty} y^2 e^{-y^2}\, dy - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy\right] \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar}} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \left[4 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} - \sqrt{\pi}\right] = 0, \qquad (7)
\end{aligned}
$$

hvor vi har brukt variabelbyttet $y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$, og fra Rottmann integralene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda y^2}\, dy = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \qquad (8)$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda y^2} y^k\, dy = \frac{1}{2}\lambda^{-\frac{k+1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right), \qquad (9)$$

som sammen med de følgende egenskapene til Gamma-funksjonen: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ og $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, gir

$$\int_{0}^{\infty} e^{-y^2} y^2\, dy = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}. \qquad (10)$$

Oppgave 2

a) Beregn $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$, $\langle x^2\rangle$ og $\langle p^2\rangle$ for tilstandene ψ_0 og ψ_1. Det er lov å tenke. *Kommentar:* i denne og andre oppgaver om den harmoniske oscillator så vil det forenkle regningen dersom du introduserer variablen $\xi = \sqrt{m\omega/\hbar}\, x$ og konstanten $\alpha = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}$.

Svar: Før vi regner kan det lønne seg å tenke litt. Vi har sett at ψ_0 er en symmetrisk ("like") funksjon om $x = 0$, og ψ_1 anti-symmetrisk ("odde"), det betyr at for begge tilstandene er $|\psi|^2$ en symmetrisk funksjon, og $x|\psi|^2$ anti-symmetrisk. Som et resultat er $\langle x\rangle = \int x|\psi|^2\, dx = 0$ og $\langle p\rangle = m\, d\langle x\rangle/dt = 0$ for begge tilstandene. Vi behøver derfor bare finne $\langle x^2\rangle$ og $\langle p^2\rangle$ for $\psi_0 = \alpha e^{-\xi^2/2}$ og $\psi_1 = \sqrt{2}\alpha\xi e^{-\xi^2/2}$. Vi legger også merke til at

$$\xi = \sqrt{\pi}\alpha^2 x, \qquad (11)$$

slik at

$$dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha^2} d\xi. \tag{12}$$

Vi begynner med ψ_0:

$$\begin{aligned}
\langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi_0|^2 \, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \alpha^2 e^{-\xi^2} \, dx \\
&= \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi\alpha^4} \xi^2 \cdot e^{-\xi^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha^2} \, d\xi \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2}\alpha^4} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 e^{-\xi^2} \, d\xi \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2}\alpha^4} \cdot 2 \int_{0}^{\infty} \xi^2 e^{-\xi^2} \, d\xi \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2}\alpha^4} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} \\
&= \frac{1}{2\pi\alpha^4} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m\omega},
\end{aligned} \tag{13}$$

hvor vi har brukt integralet i ligning (10).

$$\begin{aligned}
\langle p^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^* \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right)^2 \psi_0 \, dx \\
&= -\hbar^2 \pi \alpha^4 \int_{-\infty}^{\infty} \alpha e^{-\xi^2/2} \frac{d^2}{d\xi^2} \alpha e^{-\xi^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha^2} \, d\xi \\
&= -\hbar^2 \sqrt{\pi} \alpha^4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/2} \frac{d}{d\xi} \left(-\xi e^{-\xi^2/2} \right) d\xi \\
&= -\hbar^2 \sqrt{\pi} \alpha^4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/2} \left(-e^{-\xi^2/2} + \xi^2 e^{-\xi^2/2} \right) d\xi \\
&= -\hbar^2 \sqrt{\pi} \alpha^4 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\xi^2 - 1 \right) e^{-\xi^2} \, d\xi \\
&= -\hbar^2 \sqrt{\pi} \alpha^4 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \sqrt{\pi} \right) \\
&= \frac{\hbar^2 \pi \alpha^4}{2} \\
&= \frac{1}{2} m\hbar\omega,
\end{aligned} \tag{14}$$

hvor vi har brukt

$$-i\hbar \frac{d}{dx} = -i\hbar \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi} = -i\hbar \sqrt{\pi} \alpha^2 \frac{d}{d\xi}, \tag{15}$$

og

$$\left(-i\hbar\sqrt{\pi}\alpha^2\frac{d}{d\xi}\right)^2 = -\hbar^2\pi\alpha^4\frac{d^2}{d\xi^2}, \tag{16}$$

samt (8) og (10).

Så tar vi for oss ψ_1:

$$\begin{aligned}
\langle x^2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2|\psi_1|^2\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot 2\alpha^2\xi^2 e^{-\xi^2}\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi\alpha^4}\xi^2\cdot 2\alpha^2\xi^2 e^{-\xi^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha^2}\,d\xi \\
&= \frac{2}{\pi^{3/2}\alpha^4}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^4 e^{-\xi^2}\,d\xi \\
&= \frac{4}{\pi^{3/2}\alpha^4}\int_{0}^{\infty}\xi^4 e^{-\xi^2}\,d\xi \\
&= \frac{4}{\pi^{3/2}\alpha^4}\cdot\frac{3}{8}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{3}{2\pi\alpha^4} \\
&= \frac{3}{2}\frac{\hbar}{m\omega}
\end{aligned} \tag{17}$$

hvor vi har brukt at fra (9) er

$$\int_0^{\infty}\xi^4 e^{-\xi^2}\,d\xi = \frac{1}{2}\cdot 1^{-\frac{4+1}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{4+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}. \tag{18}$$

Tilslutt er

$$\begin{aligned}
\langle p^2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\psi_1^*\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)^2\psi_1\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{2}\alpha\xi e^{-\xi^2/2}\left(-\hbar^2\pi\alpha^4\frac{d^2}{d\xi^2}\right)\sqrt{2}\alpha\xi e^{-\xi^2/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha^2}\,d\xi \\
&= -2\hbar^2\sqrt{\pi}\alpha^4\int_{-\infty}^{\infty}\xi e^{-\xi^2/2}\frac{d^2}{d\xi^2}\xi e^{-\xi^2/2}\,d\xi \\
&= -2\hbar^2\sqrt{\pi}\alpha^4\int_{-\infty}^{\infty}\xi e^{-\xi^2/2}\frac{d}{d\xi}\left(e^{-\xi^2/2}-\xi^2 e^{-\xi^2/2}\right)d\xi \\
&= -2\hbar^2\sqrt{\pi}\alpha^4\int_{-\infty}^{\infty}\xi e^{-\xi^2/2}\left(-\xi e^{-\xi^2/2}-2\xi e^{-\xi^2/2}+\xi^3 e^{-\xi^2/2}\right)d\xi \\
&= -2\hbar^2\sqrt{\pi}\alpha^4\int_{-\infty}^{\infty}\left(\xi^4-3\xi^2\right)e^{-\xi^2}\,d\xi \\
&= -2\hbar^2\sqrt{\pi}\alpha^4\cdot 2\int_{0}^{\infty}\left(\xi^4-3\xi^2\right)e^{-\xi^2}\,d\xi
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -4\hbar^2\sqrt{\pi}\alpha^4\left(\frac{3}{8}\sqrt{\pi} - 3\cdot\frac{1}{4}\sqrt{\pi}\right)\\
&= \frac{3}{2}\hbar^2\pi\alpha^4\\
&= \frac{3}{2}m\hbar\omega, \qquad (19)
\end{aligned}
$$

hvor vi har benyttet oss av (10) og (18).

Det finnes også en enda enklere måte å løse integralene på. Sånn for profesjonelle. Det første vi må innse er at vi kan skrive om relasjonene for heve- og senke-operatorene. Vi hadde

$$
\begin{aligned}
\hat{a}_+ &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-i\hat{p} + m\omega\hat{x}), \qquad (20)\\
\hat{a}_- &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(+i\hat{p} + m\omega\hat{x}). \qquad (21)
\end{aligned}
$$

Summen og differansen av disse vil gi

$$
\begin{aligned}
\hat{a}_+ + \hat{a}_- &= \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\hat{x}, \qquad (22)\\
\hat{a}_+ - \hat{a}_- &= -i\sqrt{\frac{2}{\hbar m\omega}}\,\hat{p}, \qquad (23)
\end{aligned}
$$

eller

$$
\begin{aligned}
\hat{x} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}_+ + \hat{a}_-), \qquad (24)\\
\hat{p} &= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a}_+ - \hat{a}_-). \qquad (25)
\end{aligned}
$$

Med Diracs brakket-notasjon blir for eksempel foreventningsverdiene til x^2 for tilstanden ψ_0 da

$$
\begin{aligned}
\langle x^2\rangle &= \langle\psi_0|\hat{x}^2\psi_0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\psi_0|(\hat{a}_+ + \hat{a}_-)^2\psi_0\rangle\\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\psi_0|(\hat{a}_+^2 + \hat{a}_-\hat{a}_+)\psi_0\rangle\\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\Big(\langle\psi_0|\hat{a}_+^2\psi_0\rangle + \langle\psi_0|\hat{a}_-\hat{a}_+\psi_0\rangle\Big)\\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\langle\hat{a}_-\psi_0|\hat{a}_+\psi_0\rangle + \langle\hat{a}_+\psi_0|\hat{a}_+\psi_0\rangle\right)\\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\langle 0|\hat{a}_+\psi_0\rangle + \langle\psi_1|\psi_1\rangle\right) = \frac{\hbar}{2m\omega}. \qquad (26)
\end{aligned}
$$

b) Sjekk uskarphetsprinsippet for disse tilstandene.

Svar: For ψ_0 har vi

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}}, \tag{27}$$

og

$$\sigma_p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{2}m\hbar\omega}, \tag{28}$$

slik at

$$\sigma_x\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}}\sqrt{\frac{1}{2}m\hbar\omega} = \frac{1}{2}\hbar, \tag{29}$$

som er akkurat på uskarphetsgrensen, ψ_0 (med gaussisk form) er altså en tilstand med minimal uskarphet.

For ψ_1 har vi

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{\hbar}{m\omega}}, \tag{30}$$

og

$$\sigma_p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} = \sqrt{\frac{3}{2}m\hbar\omega}, \tag{31}$$

slik at

$$\sigma_x\sigma_p = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{\hbar}{m\omega}}\sqrt{\frac{3}{2}m\hbar\omega} = \frac{3}{2}\hbar, \tag{32}$$

som større enn uskarphetsgrensen.

c) Beregn $\langle K\rangle$ (forventningsverdien for kinetisk energi) og $\langle V\rangle$ (forventningsverdien for potensiell energi) for disse tilstandene. (Du har ikke lov til å gjøre noen nye integral!) Er summen hva du ville forvente?

Svar: Forventningsverdien til kinetisk energi K finnes fra relasjonen $K = p^2/2m$, som gir

$$\langle K\rangle = \frac{1}{2m}\langle p^2\rangle. \tag{33}$$

For ψ_0 er da

$$\langle K\rangle = \frac{1}{2m}\cdot\frac{1}{2}m\hbar\omega = \frac{1}{4}\hbar\omega, \tag{34}$$

og for ψ_1 er

$$\langle K\rangle = \frac{1}{2m}\cdot\frac{3}{2}m\hbar\omega = \frac{3}{4}\hbar\omega. \tag{35}$$

Forventningsverdien til potensiell energi $\langle V\rangle$ finnes fra HO potensialet $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$, som gir

$$\langle V\rangle = \frac{1}{2}m\omega^2\langle x^2\rangle. \tag{36}$$

For ψ_0 er da

$$\langle V\rangle = \frac{1}{2}m\omega^2 \cdot \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega} = \frac{1}{4}\hbar\omega, \tag{37}$$

og for ψ_1 er

$$\langle V\rangle = \frac{1}{2}m\omega^2 \cdot \frac{3}{2}\frac{\hbar}{m\omega} = \frac{3}{4}\hbar\omega. \tag{38}$$

For både ψ_0 og ψ_1 er summen av forventningsverdiene til kinetisk og potensiell energi lik forventningsverdien til Hamilton-operatoren for tilstanden, $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ og $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$.

Oppgave 3

For grunntilstanden til en harmonisk oscillator, hva er sannsynligheten (med tre desimalers presisjon) for å finne partikkelen utenfor det klassisk tillatte området? *Hint:* klassisk sett så er energien til en oscillator $E = \frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}m\omega^2a^2$, hvor a er amplituden (maksimumsutslaget). Derfor går det klassisk tillatte området for en oscillator med energi E fra $-\sqrt{2E/m\omega^2}$ til $\sqrt{2E/m\omega^2}$. Slå opp den numeriske verdien for det intregralet du behøver.

Svar: Sannsynligheten for å finne en partikkel i grunntilstanden i et forbudt område (utenfor det klassiske maksutslaget) er gitt ved

$$P_{\text{forbudt}} = \int_a^\infty |\psi_0|^2\,dx + \int_{-\infty}^{-a} |\psi_0|^2\,dx = 2\int_a^\infty |\psi_0|^2\,dx, \tag{39}$$

hvor vi har utnyttet at ψ_0 er symmetrisk om $x = 0$ (en "lik" funksjon), slik at integralet fra $-\infty$ til $-a$ er identisk med integralet fra a til ∞. Energien til grunntilstanden er $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$, slik at

$$a = \sqrt{\frac{2E_0}{m\omega^2}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}. \tag{40}$$

Med variabelbyttet $\xi = \sqrt{m\omega/\hbar}\,x$ gir dette en integrasjonsgrense på $\xi(a) = 1$. Integralet blir:

$$\begin{aligned} P_{\text{forbudt}} &= 2\int_1^\infty \alpha^2 e^{-\xi^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha^2}d\xi \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_1^\infty e^{-\xi^2}\,d\xi \\ &\simeq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot 0.1394 \simeq 0.157. \end{aligned} \tag{41}$$

Sannsynligheten er altså nesten 16%.

Oppgave 4 Tilleggsoppgave — ikke oblig!

En partikkel befinner seg i grunntilstanden til en harmonisk oscillator med frekvens ω når vi plutselig endrer fjærkonstanten slik at frekvensen blir $\omega' = 2\omega$, uten at vi endrer bølgefunksjonen (nå vil selvsagt $\Psi(x,t)$ utvikle seg forskjellig fordi vi har endret Hamiltonoperatoren). Hva er sannsynligheten for at en senere måling av energien til partikkelen vil gi verdien $\hbar\omega/2$? Hva er sannsynligheten for å få $\hbar\omega$?

Svar: De nye tillatte energiene til den harmoniske oscillatoren etter endringen av frekvensen er $E'_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega' = 2(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ med $n = 0, 1, 2, \ldots$, altså er ikke $\hbar\omega/2$ en energi vi kan måle lengre (en egenverdi til hamiltonoperatoren), og sannsynligheten for å måle dette er derfor null.

Sannsynligheten for å få $\hbar\omega$, den nye grunntilstandsenergien, er $P_0 = |c_0|^2$, hvor c_0 er koeffisienten til den nye grunntilstanden i ekspansjonen av de nye tilstandene med høyere frekvens. c_0 finnes som vanlig fra Fouriers triks

$$c_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0'^*(x)\Psi(x,0)\,dx. \tag{42}$$

Initialtilstanden her er gitt fra den tidligere grunntilstanden (der partikkelen var før vi endret fjærkonstanten)

$$\Psi(x,0) = \psi_0(x) = \alpha e^{-\xi^2/2}. \tag{43}$$

Bølgefunksjonen til den nye grunntilstanden finner vi ved å gjøre byttene $\alpha' = 2^{1/4}\alpha$ og $\xi' = \sqrt{2}\xi$

$$\psi_0'(x) = \alpha' e^{-\xi'^2/2} = 2^{1/4}\alpha e^{-2\xi^2/2} = 2^{1/4}\alpha e^{-\xi^2}, \tag{44}$$

slik at

$$\begin{aligned} c_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} 2^{1/4}\alpha e^{-\xi^2}\cdot \alpha e^{-\xi^2/2}\cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha^2} d\xi \\ &= \frac{2^{1/4}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3\xi^2/2}\,d\xi \\ &= \frac{2^{1/4}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{3/2}} \\ &= 2^{1/4}\sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned} \tag{45}$$

hvor vi har brukt integralet (8). Dette gir en sannsynlighet for å finne partikkelen i den nye grunntilstanden på $P_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \simeq 0.9428$.