

FYS2140 Kvantefysikk,  
Løsningsforslag for Oblig 5

13. februar 2014

Her finner dere løsningsforslag for Oblig 5 pluss et løsningsforslag på Oppgave 2.8 i Griffiths som var en tilleggsoppgave denne uken.

**Oppgave 1** Finn  $\langle x \rangle$ ,  $\langle x^2 \rangle$ ,  $\langle p \rangle$ ,  $\langle p^2 \rangle$ ,  $\sigma_x$  og  $\sigma_p$  for den  $n$ -te stasjonære tilstanden for en uendelig dyp kvadratisk brønn

$$\Psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-i(n^2\pi^2\hbar/2ma^2)t}. \quad (1)$$

Sjekk at Heisenbergs uskarphetsprinsipp er oppfylt. Hvilken tilstand kommer nærmest grensen for uskarpheten?

**Svar:** Merk at vi i denne oppgaven bare skal se på de enkelte stasjonære tilstandene og ikke den generelle løsningen for en vilkårlig initialbetingelse. Eksponentialfaktoren fra ligning (1) kansellerer når vi finner absoluttverdivadratet, altså er  $|\Psi_n(x, t)|^2 = |\psi_n(x)|^2$ . Forventningsverdien til posisjonen  $x$  er da

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x |\Psi_n(x, t)|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi_n(x)|^2 dx, \end{aligned} \quad (2)$$

hvor  $\psi_n(x) = \sqrt{2/a} \sin(n\pi x/a)$ . Dette gir

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi_n(x)|^2 dx = \int_0^a x \cdot \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \\ &= \frac{2}{a} \int_0^{n\pi} \frac{ay}{n\pi} \cdot \sin^2 y \cdot \frac{a}{n\pi} dy \\ &= \frac{2a}{n^2\pi^2} \int_0^{n\pi} y \sin^2 y dy \\ &= \frac{2a}{n^2\pi^2} \left[ \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}y \sin 2y - \frac{1}{8} \cos 2y \right]_0^{n\pi} \\ &= \frac{2a}{n^2\pi^2} \left[ \frac{1}{4}(n\pi)^2 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right] \\ &= \frac{a}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Her har vi brukt variabelskiftet  $y = n\pi x/a$  for å forenkle integralet. Integralet over  $y$  kan finnes ved delvis integrasjon og bruk av Rottmann:

$$\begin{aligned} \int y \sin^2 y dy &= \frac{1}{2}y^2 \cdot \sin^2 y - \int \frac{1}{2}y^2 \cdot 2 \sin y \cos y dy \\ &= \frac{1}{2}y^2 \sin^2 y - \int \frac{1}{2}y^2 \sin 2y dy \\ &= \frac{1}{2}y^2 \sin^2 y - \frac{1}{2} \int y^2 \sin 2y dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}y^2 \sin^2 y - \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{2^2}y \sin 2y + \frac{2 - 2^2y^2}{2^3} \cos 2y \right] + C \\
&= \frac{1}{2}y^2 \sin^2 y - \frac{1}{4}y \sin 2y - \frac{1}{8} \cos 2y + \frac{y^2}{4} \cos 2y + C \\
&= \frac{1}{2}y^2 \left( \sin^2 y + \frac{1}{2} \cos 2y \right) - \frac{1}{4}y \sin 2y - \frac{1}{8} \cos 2y + C \\
&= \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}y \sin 2y - \frac{1}{8} \cos 2y + C. \tag{4}
\end{aligned}$$

Merk at forventningsverdien vi har fått ikke bare er tidsuavhengig, men også uavhengig av  $n$ , og ligger i midten av brønnen som man kanskje kunne vente. Dette til tross for at halvparten av de stasjonære tilstandene (de med partalls  $n$ ) har *null sannsynlighet* for å finne partikkelen i  $x = a/2$ !

Forventningsverdien til  $x^2$  er

$$\begin{aligned}
\langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi_n(x)|^2 dx = \int_0^a x^2 \cdot \frac{2}{a} \sin^2 \left( \frac{n\pi}{a} x \right) dx \\
&= \frac{2}{a} \int_0^{n\pi} \left( \frac{ay}{n\pi} \right)^2 \cdot \sin^2 y \cdot \frac{a}{n\pi} dy \\
&= \frac{2}{a} \left( \frac{a}{n\pi} \right)^3 \int_0^{n\pi} y^2 \sin^2 y dy \\
&= \frac{2a^2}{(n\pi)^3} \left[ \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{4}y \cos 2y + \left( 1 - 2y^2 \right) \frac{1}{8} \sin 2y \right]_0^{n\pi} \\
&= \frac{2a^2}{(n\pi)^3} \left[ \frac{1}{6}(n\pi)^3 - \frac{1}{4}n\pi \right] \\
&= a^2 \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{2(n\pi)^2} \right]. \tag{5}
\end{aligned}$$

Vi har igjen brukt at forventningsverdien til en stasjonær tilstand er tidsuavhengig, og samme variabelskifte som over.

Integralet over  $y$  gjøres på samme måte, men med to delvis integrasjoner:

$$\begin{aligned}
&\int y^2 \sin^2 y dy \\
&= \frac{1}{3}y^3 \cdot \sin^2 y - \int \frac{1}{3}y^3 \cdot 2 \sin y \cos y dy \\
&= \frac{1}{3}y^3 \sin^2 y - \int \frac{1}{3}y^3 \sin 2y dy \\
&= \frac{1}{3}y^3 \sin^2 y + \frac{1}{3}y^3 \frac{1}{2} \cos 2y - \int y^2 \frac{1}{2} \cos 2y dy \\
&= \frac{1}{3}y^3 \sin^2 y + \frac{1}{6}y^3 \cos 2y - \frac{1}{2} \int y^2 \cos 2y dy \\
&= \frac{1}{3}y^3 \sin^2 y + \frac{1}{6}y^3 \cos 2y - \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{2^2}y \cos 2y - \frac{2 - 2^2y^2}{2^3} \sin 2y \right] + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}y^3 \sin^2 y + \frac{1}{6}y^3 \cos 2y - \frac{1}{4}y \cos 2y + \frac{1}{8} \sin 2y - \frac{1}{4}y^2 \sin 2y + C \\
&= \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{4}y \cos 2y + \frac{1}{8} \sin 2y - \frac{1}{4}y^2 \sin 2y + C \\
&= \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{4}y \cos 2y + \left(1 - 2y^2\right) \frac{1}{8} \sin 2y + C.
\end{aligned} \tag{6}$$

Forventningsverdien til bevegelsesmengden,  $\langle p \rangle$ , er da

$$\langle p \rangle = m \frac{d\langle x \rangle}{dt} = 0, \tag{7}$$

fordi forventningsverdien til posisjonen er tidsuavhengig. Dette er noe som alltid er tilfelle for stasjonære tilstander. (Ikke gjør utregningen direkte fra operatoren for  $p$ , dette er unødvendig arbeid!)

Forventningsverdien til  $p^2$  er

$$\begin{aligned}
\langle p^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_n(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \left( -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi_n(x) dx,
\end{aligned} \tag{8}$$

hvor vi igjen har eliminert eksponentialfaktorene. Vi kan nå gjøre et lurt triks hvor vi skaffer oss den tids-uavhengige SL inne i integralet:

$$\begin{aligned}
\langle p^2 \rangle &= 2m \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_n(x)}{\partial x^2} \right) dx \\
&= 2m \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) E_n \psi_n(x) dx \\
&= 2m E_n \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(x)|^2 dx,
\end{aligned} \tag{9}$$

hvor vi har brukt at  $\psi_n$  skal være en løsning av den tids-uavhengige SL (TUSL) på innsiden av brønnen/boksen der  $V(x) = 0$ , altså ligning [2.20] i Griffiths:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_n(x)}{\partial x^2} = E_n \psi_n(x). \tag{10}$$

Da får vi til slutt

$$\langle p^2 \rangle = 2m E_n = \left( \frac{n\pi\hbar}{a} \right)^2, \tag{11}$$

på grunn av normeringen til  $\psi_n(x, t)$  og energien til de stasjonære tilstandene

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}. \tag{12}$$

Eventuelt kunne vi brukt direkte at  $\hat{H} = \hat{p}^2/2m$  når potensialet forsvinner inne i boksen, slik at  $\hat{p}^2 = 2m\hat{H}$ . Sammen med egenverdiligningen

$\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n$  gir det  $\langle p^2 \rangle = \langle \hat{p}^2 \rangle = 2m\langle \hat{H} \rangle = 2mE_n$ , en veldig rask måte å finne svaret på!

Vi sjekker Heisenbergs uskarphetsprinsipp ved å beregne variansen til  $x$  og  $p$ :

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = a^2 \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{2(n\pi)^2} \right] - \left( \frac{a}{2} \right)^2 = a^2 \left[ \frac{1}{12} - \frac{1}{2(n\pi)^2} \right], \quad (13)$$

$$\sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \left( \frac{n\pi\hbar}{a} \right)^2. \quad (14)$$

Dette gir

$$\sigma_x\sigma_p = a\sqrt{\left[ \frac{1}{12} - \frac{1}{2(n\pi)^2} \right]} \cdot \frac{n\pi\hbar}{a} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{(n\pi)^2}{3} - 2}. \quad (15)$$

Uttrykket innenfor rottegnet er alltid større enn en, slik at Heisenbergs uskarphetsprinsipp er oppfylt. Det er tilstanden  $n = 1$  som kommer nærmest grensen med

$$\sigma_x\sigma_p = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{\pi^2}{3} - 2} \simeq 1.136\frac{\hbar}{2}. \quad (16)$$

**Oppgave 2** En partikkel i den uendelige dype kvadratiske brønnen har som starttilstand en bølgefunksjon som er en lik blanding av de to første stasjonære tilstandene:

$$\Psi(x, 0) = A[\psi_1(x) + \psi_2(x)]. \quad (17)$$

- a) Normaliser  $\Psi(x, 0)$ . (Det vil si: finn  $A$ . Dette er veldig enkelt om du utnytter ortonormaliteten til  $\psi_1$  og  $\psi_2$ . Husk at når bølgefunksjonen er normalisert ved  $t = 0$  så vil den forbli normalisert — sjekk dette eksplisitt etter at du har gjort oppgave b) dersom du er i tvil.)

**Svar:**

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, 0)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 (\psi_1^* \psi_1 + \psi_1^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2) dx \\ &= |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_1^* \psi_1 + \psi_1^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2) dx \\ &= |A|^2 (1 + 0 + 0 + 1) \\ &= 2|A|^2, \end{aligned} \quad (18)$$

hvor vi har brukt ortonormaliteten til  $\psi_1$  og  $\psi_2$  for å gjøre integralene. Normaliseringskravet betyr at dette integralet må bli en, det vil si at vi kan velge  $A = 1/\sqrt{2}$ . (Vi velger en reell og positiv normeringskonstant da fasen til normeringen ikke har fysisk betydning.)

- b) Finn  $\Psi(x, t)$  og  $|\Psi(x, t)|^2$ . Uttrykk den siste som en cosinusfunksjon av tiden, som i eksempel 2.1 i Griffiths. For å forenkle resultatet, la  $\omega \equiv \pi^2 \hbar / 2ma^2$ .

**Svar:** Siden initialbetingelsen  $\Psi(x, 0)$  er oppgitt ved hjelp av de stasjonære tilstandene (løsninger av TUSL) så kjenner vi konstantene  $c_n$  i den generelle løsningen:  $c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ( $c_n = 0$  for  $n > 2$ ). Den generelle løsningen er da

$$\begin{aligned}\Psi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_1(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} + \psi_2(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E_2 t}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-\frac{i}{\hbar} \hbar \omega t} + \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi}{a} x\right) e^{-\frac{i}{\hbar} 2^2 \hbar \omega t} \right] \\ &= \sqrt{\frac{1}{a}} e^{-i\omega t} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{a} x\right) e^{-3i\omega t} \right],\end{aligned}\tag{19}$$

hvor vi har brukt at

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = n^2 \hbar \omega.\tag{20}$$

Sannsynlighetstettheten er

$$\begin{aligned}|\Psi(x, t)|^2 &= \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) \\ &= \frac{1}{a} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{a} x\right) e^{3i\omega t} \right] \\ &\quad \times \left[ \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{a} x\right) e^{-3i\omega t} \right] \\ &= \frac{1}{a} \left[ \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{3i\omega t} \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a} x\right) e^{-3i\omega t} + \sin^2\left(\frac{2\pi}{a} x\right) \right] \\ &= \frac{1}{a} \left[ \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{a} x\right) \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a} x\right) (e^{3i\omega t} + e^{-3i\omega t}) \right] \\ &= \frac{1}{a} \left[ \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{a} x\right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a} x\right) \cos(3\omega t) \right],\end{aligned}\tag{21}$$

hvor vi har brukt at  $\cos y = (e^{iy} + e^{-iy})/2$  fra Rottmann.

- c) Finn  $\langle x \rangle$ . Legg merke til at denne forventningsverdien oscillerer som funksjon av tiden. Hva er vinkelfrekvensen til denne oscillasjonen? Hva er amplituden til oscillasjonen? (Hvis du får en amplitude større enn  $a/2$  så er du på bærtur!)

**Svar:**

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x |\Psi(x, t)|^2 dx \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a x \left[ \sin^2 \left( \frac{\pi}{a} x \right) + \sin^2 \left( \frac{2\pi}{a} x \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin \left( \frac{\pi}{a} x \right) \sin \left( \frac{2\pi}{a} x \right) \cos(3\omega t) \right] dx\end{aligned}\quad (22)$$

Vi ser på de tre integrandene hver for seg:

$$\int_0^a x \sin^2 \left( \frac{\pi}{a} x \right) dx = \frac{a^2}{4}, \quad (23)$$

$$\int_0^a x \sin^2 \left( \frac{2\pi}{a} x \right) dx = \frac{a^2}{4}, \quad (24)$$

hvor vi bruker resultatet av det første integralet i Oppgave 1, ligning (3), som var uavhengig av  $n$ . Det tredje integralet gir

$$\begin{aligned}&\int_0^a x \sin \left( \frac{\pi}{a} x \right) \sin \left( \frac{2\pi}{a} x \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^a x \left[ \cos \left( \frac{\pi}{a} x \right) - \cos \left( \frac{3\pi}{a} x \right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\left( \frac{\pi}{a} \right)^2} \cos \frac{\pi}{a} x + \frac{x}{\frac{\pi}{a}} \sin \frac{\pi}{a} x - \frac{1}{\left( \frac{3\pi}{a} \right)^2} \cos \frac{3\pi}{a} x - \frac{x}{\frac{3\pi}{a}} \sin \frac{3\pi}{a} x \right]_0^a \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{\left( \frac{\pi}{a} \right)^2} + \frac{1}{\left( \frac{3\pi}{a} \right)^2} - \frac{1}{\left( \frac{\pi}{a} \right)^2} + \frac{1}{\left( \frac{3\pi}{a} \right)^2} \right] \\ &= \left( \frac{a}{3\pi} \right)^2 - \left( \frac{a}{\pi} \right)^2 = \left( \frac{a}{\pi} \right)^2 \left[ \frac{1}{9} - 1 \right] = -\frac{8}{9} \left( \frac{a}{\pi} \right)^2,\end{aligned}\quad (25)$$

hvor vi har brukt forholdet

$$\cos \theta_1 - \cos \theta_2 = -2 \sin \left( \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \sin \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right), \quad (26)$$

fra Rottmann, med  $\theta_1 = 3\pi x/a$  og  $\theta_2 = \pi x/a$ , for å unngå produktet av to sinusfunksjoner i integranden. Vi setter integralene sammen og får:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{a} \left[ \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{16}{9} \left( \frac{a}{\pi} \right)^2 \cos(3\omega t) \right] = \frac{a}{2} \left[ 1 - \frac{32}{9\pi^2} \cos(3\omega t) \right]. \quad (27)$$

Vinkelfrekvensen til  $\langle x \rangle$  er

$$3\omega = \frac{3\pi^2\hbar}{2ma^2}, \quad (28)$$

og amplituden (maksimumsutslaget for oscillasjonen) er

$$\frac{a}{2} \frac{32}{9\pi^2} = \frac{16a}{9\pi^2}. \quad (29)$$

d) Finn  $\langle p \rangle$ . (*Hint*: det finnes en rask måte!)

**Svar:**

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= m \frac{d\langle x \rangle}{dt} = m \frac{d}{dt} \frac{a}{2} \left[ 1 - \frac{32}{9\pi^2} \cos(3\omega t) \right] \\ &= \frac{16}{3\pi^2} m a \omega \sin(3\omega t) = \frac{16}{3\pi^2} m a \frac{\pi^2 \hbar}{2ma^2} \sin(3\omega t) \\ &= \frac{8\hbar}{3a} \sin(3\omega t). \end{aligned} \quad (30)$$

e) Hvis du skulle måle energien til denne partikkelen, hvilke verdier ville du fått, og hva er sannsynligheten for å få hver av de? Finn forventningsverdien til  $H$ . Hvordan er denne sammenlignet med  $E_1$  og  $E_2$ ?

**Svar:** Målinger av energien kan bare gi en av egenverdiene  $E_n$  til Hamiltonoperatoren  $\hat{H}\psi = E_n\psi$ . Sannsynligheten for å få  $E_1 = \pi^2\hbar^2/2ma^2$  er  $|c_1|^2 = \frac{1}{2}$ , for  $E_2 = 2\pi^2\hbar^2/ma^2$  er den  $|c_2|^2 = \frac{1}{2}$ . Alle andre energier har null i sannsynlighet fordi  $c_n = 0$  for  $n > 2$ . Forventningsverdien til Hamiltonoperatoren er

$$\langle \hat{H} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 E_n = |c_1|^2 E_1 + |c_2|^2 E_2 = \frac{5\pi^2\hbar^2}{4ma^2}, \quad (31)$$

altså gjennomsnittet av  $E_1$  og  $E_2$ .

Tilslutt en liten kommentar om hva som foregår i denne oppgaven. Partikkelen begynner i tilstanden  $\Psi(x, 0)$  som er en superponering av de to laveste (i energi) stasjonære tilstandene. Tidsutviklingen av partikkelen blir da en oscillasjon mellom disse tilstandene, noe målinger på partikkelen bærer preg av.

**Oppgave 3** Anta at du legger en konstant (uavhengig av  $x$  og  $t$ )  $V_0$  til den potensielle energien. I *klassisk* mekanikk endrer ikke dette noe, men hva med *kvantemekanikk*? Vis at bølgefunksjonen plukker opp en tidsavhengig



fasefaktor  $\exp(-iV_0t/\hbar)$ . Hva slags konsekvenser har dette for forventningsverdien til en dynamisk variabel?

**Svar:** Anta at  $\Psi(x, t)$  er en løsning av Schrödingerligningen

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (32)$$

uten  $V_0$ . Vi vil finne løsningen for Schrödingerligningen med  $V_0$ :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + (V(x) + V_0) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (33)$$

Denne har løsningen  $\Psi_0(x, t) = \Psi(x, t)e^{-iV_0t/\hbar}$ , som vi kan se ved innsetting:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi_0}{\partial t} &= i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} e^{-iV_0t/\hbar} + i\hbar \Psi \left( \frac{\partial}{\partial t} e^{-iV_0t/\hbar} \right) \\ &= \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x) \Psi \right] e^{-iV_0t/\hbar} + i\hbar \Psi \left( \frac{-iV_0}{\hbar} e^{-iV_0t/\hbar} \right) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} e^{-iV_0t/\hbar} + V(x) \Psi e^{-iV_0t/\hbar} + V_0 \Psi e^{-iV_0t/\hbar} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x^2} + V(x) \Psi_0 + V_0 \Psi_0 \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x^2} + (V(x) + V_0) \Psi_0. \end{aligned} \quad (34)$$

Denne fasefaktoren har ingen betydning for forventningsverdier fordi den alltid kansellerer. Grunnen er at potensen får motsatt fortegn i  $\Psi_0^*$  og  $\Psi_0$  i forventningsverdiintegralet.

#### Oppgave 4 Tilleggsoppgave — ikke oblig!

En partikkel med masse  $m$  i den uendelige brønnen med vidde  $a$  begynner i venstre halvdel av brønnen, og kan ved tiden  $t = 0$  finnes med like stor sannsynlighet ved alle posisjoner i den halvdel.

- a) Hva er den initielle bølgefunksjonen  $\Psi(x, 0)$ ? (Anta den er reell. Glem ikke å normalisere den.)

**Svar:** Den initielle bølgefunksjonen må ha en flat, eller uniform, fordeling i intervallet  $0 \leq x \leq a/2$ , og være null ellers:

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} A, & 0 \leq x \leq \frac{a}{2} \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}. \quad (35)$$

Vi finner  $A$  ved normalisering

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, 0)|^2 dx = \int_0^{\frac{a}{2}} |A|^2 dx = \frac{a}{2} |A|^2 = 1, \quad (36)$$

som gir (vi velger en reell konstant)  $A = \sqrt{2/a}$ .

- b) Hva er sannsynligheten for at en måling av energien gir akkurat verdien  $\pi^2 \hbar^2 / 2ma^2$ ?

**Svar:** Energien  $E_1 = \pi^2 \hbar^2 / 2ma^2$  er energien til den laveste stasjonære tilstanden. Denne har sannsynlighet  $P_1 = |c_1|^2$  i en måling. Vi må altså bestemme  $c_1$  for vår initialbetingelse  $\Psi(x, 0)$  i oppgave a). Dette gjøres ved **Fouriers triks**, vi integrerer initialbetingelsen multiplisert med bølgefunksjonen for den laveste stasjonære tilstanden:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^*(x) \Psi(x, 0) dx \\
 &= \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) A dx \\
 &= \frac{2}{a} \left[ -\frac{a}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \right]_0^{\frac{a}{2}} \\
 &= \frac{2}{a} \left[ -\frac{a}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{a}{\pi} \right] \\
 &= \frac{2}{\pi}.
 \end{aligned} \tag{37}$$

Sannsynligheten for å finne partikkelen med energi  $E_1$  er da  $P_1 = |c_1|^2 = \frac{4}{\pi^2} \simeq 0.405$ .

---

<sup>1</sup>Vi sier ofte, i likhet med vektorterminologi, at vi projiserer ut komponenten av  $\Psi(x, 0)$  langs  $\psi_1(x)$ .