FYS2140 - Kvantefysikk

Obligatorisk oppgave 6

Gruppe 1

Filip Henrik Larsen
filiphenriklarsen@gmail.com

Dato: 3. mars 2014

Oppgave 1

a)

$$\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

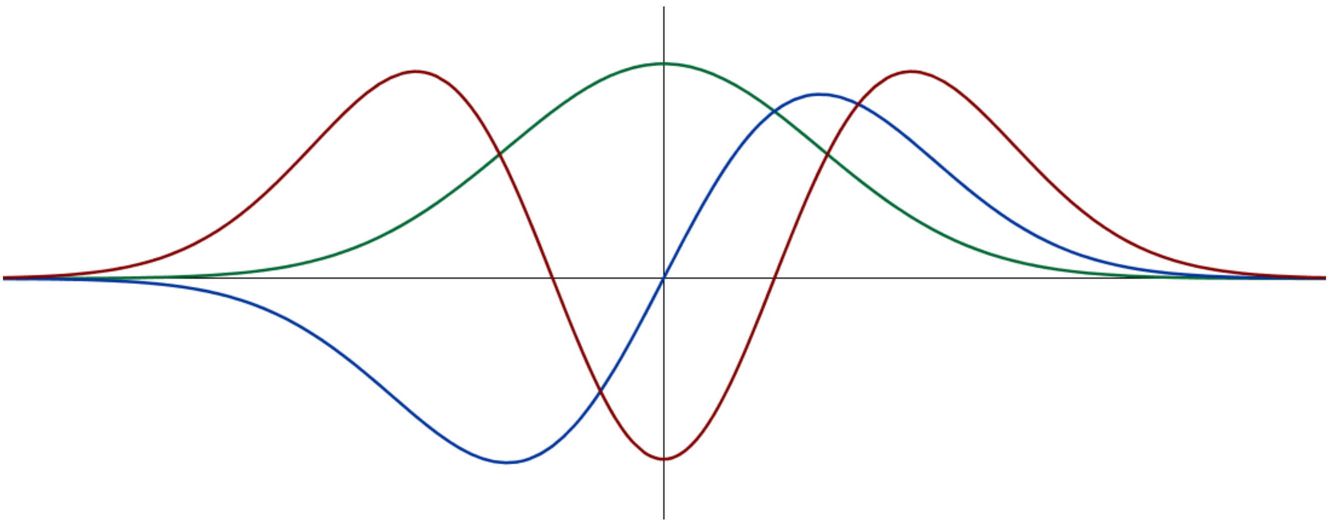
$$\begin{aligned}
\psi_1 = a_+\psi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \left(-\hbar\frac{\partial}{\partial x} + m\omega x\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} (m\omega x + m\omega x)\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\
&= \frac{2m\omega}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\
&= \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_2 = (a_+)^2\psi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \left(-\hbar\frac{\partial}{\partial x} + m\omega x\right) \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\
&= \frac{1}{\hbar} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \left(-\hbar\frac{\partial}{\partial x} + m\omega x\right) x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\
&= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \left(-\frac{\partial}{\partial x} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} + \frac{m\omega x^2}{\hbar} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right) \\
&= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \left(\frac{2m\omega x^2}{\hbar} - 1\right)
\end{aligned}$$

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\psi_2 = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \left(\frac{2m\omega x^2}{\hbar} - 1\right)}}$$

b) Partallsfunksjoner er symetrisk om y-aksen, mens oddetallsfunksjoner er antisymetrisk om y-aksen.



Figur 1: Visualisering av de tre første bølgefunksjonene. ψ_0: Grønn, ψ_1: Blå, ψ_2: Rød.

c) For å undersøke om to funksjoner er ortogonale, kan man ta integralet av den ene funksjonen konjugert multiplisert med den andre funksjonen fra -∞ til ∞. Om summen blir 0 er de to ortogonale. Vi må derfor se etter om:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^* \psi_1 dx = 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^* \psi_2 dx = 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \psi_2 dx = 0$$

Her kan vi spare litt tid om vi legger merke til en detalj. Multipliserer man en partallsfunksjon med en partallfunksjon blir produktet en ny partallsfunksjon, men multipliserer man en partallsfunksjon med en oddetallsfunksjon, blir produktet en oddetallsfunksjon. Tar vi integralet av en oddetallsfunksjon fra -∞ til ∞ blir summen 0, grunnet symetrien. Vi trenger altså bare å ikke å regne ut de ytterste ligningene, da de blir lik 0. For en partallsfunskjon er ikke dette nødvendigvis tilfellet, og vi må derfor utføre integralet for å se om ψ_0 og ψ_2 er ortogonale.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^* \psi_2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \left(\frac{2m\omega x^2}{\hbar} - 1\right) dx \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2m\omega x^2}{\hbar} - 1\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2m\omega x^2}{\hbar} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} dx &= \frac{2m\omega}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} dx \qquad \text{Bruker Rottmann (53)...} \\ &= \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}}\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} -e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} dx = -\sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} \qquad \text{Rottmann (51)...}$$

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2m\omega x^2}{\hbar} - 1\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} dx = 0 \\ \Rightarrow \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^* \psi_2 dx = 0\end{aligned}$$

Alle disse funksjonene er altså ortogonale.

Oppgave 2

a)

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x|\psi|^2 dx$$

$|\psi|^2$ vil være en partallsfunksjon uansett og ψ er det eller ikke. Den vil altså være symetrisk om y-aksen. Dette medfører at $\psi(-x) = -\psi(x)$. Tar vi integralet fra $-\infty$ til ∞, blir dermed summen 0! Så for alle bølgeligningene vil $\langle x \rangle = 0$. Formelen:

$$\langle p \rangle = m\frac{d\langle x \rangle}{dt}$$

gir oss at for alle bølgeligningene er også $\langle p \rangle = 0$
For x^2 er det ikke like enkelt. Her må vi faktisk utføre integralet. Jeg velger å uttrykke x^2 ved hjelp av stigeoperatorene.

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_+ + a_-) \qquad p = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a_+ - a_-)$$

$$
\begin{aligned}
x^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega}[(a_+)^2 + (a_+a_-) + (a_-a_+) + (a_-)^2] \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}(n + n + 1) \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}(2n + 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p^2 &= -\frac{hm\omega}{2}[(a_+)^2 - (a_+a_-) - (a_-a_+) + (a_-)^2] \\
&= -\frac{hm\omega}{2}(-n - n - 1) \\
&= \frac{hm\omega}{2}(2n + 1)
\end{aligned}
$$

Nå kan jeg finne $\langle x^2 \rangle$ og $\langle p^2 \rangle$ ved å benytte uttrykkene over.

$$
\langle x^2 \rangle_n = \frac{\hbar}{2m\omega}(2n + 1)\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \psi_n dx
$$

$$
\langle p^2 \rangle_n = \frac{\hbar m\omega}{2}(2n + 1)\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \psi_n dx)
$$

$$
\begin{aligned}
\langle x^2 \rangle_0 &= \frac{\hbar}{2m\omega}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^* \psi_0 dx \\
&= \alpha^2 \frac{\hbar}{2m\omega}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\xi^2} dx \qquad \text{bruker Rottmann (51)} \\
&= \alpha^2 \frac{\hbar}{2m\omega}\sqrt{\frac{\pi x}{\xi}} \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\frac{\hbar}{2m\omega}\sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} \\
&= \underline{\underline{\frac{\hbar}{2m\omega}}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle p^2 \rangle_0 &= \frac{\alpha\hbar m\omega}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\xi^2} dx \\
&= \frac{\alpha^2\hbar m\omega}{2}\sqrt{\frac{\pi x}{\xi}} \\
&= \underline{\underline{\frac{\hbar m\omega}{2}}}
\end{aligned}
$$

Samme utregningsmetode som for $\langle x^2 \rangle_0$ og $\langle p^2 \rangle_0$

$$
\begin{aligned}
\langle x^2 \rangle_1 &= \frac{3\hbar}{2m\omega}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \psi_1 dx \\
&= \underline{\underline{\frac{3\hbar}{2m\omega}}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle p^2 \rangle_1 &= \frac{3\hbar m\omega}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \psi_1 dx \\
&= \underline{\underline{\frac{3\hbar m\omega}{2}}}
\end{aligned}
$$

b)

$$\sigma_{x0} = \sqrt{\langle x^2 \rangle_0 - \langle x \rangle_0^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

$$\sigma_{x1} = \sqrt{\langle x^2 \rangle_1 - \langle x \rangle_1^2} = \sqrt{\frac{3\hbar}{2m\omega}}$$

$$\sigma_{p0} = \sqrt{\langle p^2 \rangle_0 - \langle p \rangle_0^2} = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}$$

$$\sigma_{p1} = \sqrt{\langle p^2 \rangle_1 - \langle p \rangle_1^2} = \sqrt{\frac{3\hbar m\omega}{2}}$$

$$\sigma_{x0}\sigma_{p0} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} = \underline{\underline{\frac{\hbar}{2}}}$$

$$\sigma_{x1}\sigma_{p1} = \sqrt{\frac{3\hbar}{2m\omega}}\sqrt{\frac{3\hbar m\omega}{2}} = \underline{\underline{\frac{3\hbar}{2}}}$$

c) I denne oppgaven benytter jeg enkelt:

$$\langle K \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m}$$

$$\langle V \rangle = \frac{m\omega^2 \langle x^2 \rangle}{2}$$

For å finne forventningsverdien til den kinetske- og den potensielle energien.

$$\langle K \rangle_0 = \frac{\langle p^2 \rangle_0}{2m} = \frac{\hbar\omega}{4}$$

$$\langle K \rangle_1 = \frac{\langle p^2 \rangle_1}{2m} = \frac{3\hbar\omega}{4}$$

$$\langle V \rangle_0 = \frac{m\omega^2 \langle x^2 \rangle_0}{2} = \frac{\hbar\omega}{4}$$

$$\langle V \rangle_1 = \frac{m\omega^2 \langle x^2 \rangle_1}{2} = \frac{3\hbar\omega}{4}$$

$$\langle H \rangle_0 = \langle K \rangle_0 + \langle V \rangle_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$$

$$\langle H \rangle_1 = \langle K \rangle_1 + \langle V \rangle_1 = \frac{3\hbar\omega}{2}$$

Dette var som forventet, da de tillatte energinivåene er:

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$$

Oppgave 3

Sannsynligheten for å finne partikkelen utenfor det klassisk tillatte området er når $x > x_0$, der x_0 er den største tillatte amplituden til den harmoniske oscillatoren. Dette kan forekomme både med positiv og negativ amplitude, og sannsynligheten er likestor for dem begge, derfor dropper jeg fortegnene, beregner den ene og ganger med to.
I punktet x_0 er all energien potensiell energi, og vi har sammenhengen:

$$\frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2 = E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$$
$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$\begin{aligned}2\int_{x_0}^{\infty} |\psi_0|^2 dx &= 2\alpha^2 \int_{x_0}^{\infty} e^{-\xi^2} dx \\ &= 2\alpha^2 \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \int_{\xi_0}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi_0}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi\end{aligned}$$

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \cdot \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = 1$$

$$2\int_{x_0}^{\infty} |\psi_0|^2 dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{1}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$$

Jeg finner ingen formler for dette integralet, og ser ingen løsning, men wolfram alpha foreslår at svaret er 0.157299. Jeg har ingen måte å vurdere om dette stemmer annet enn at jeg vet at sannsynligheten må være mindre enn 1, og antakeligvis ganske liten. Jeg satser på at dette stemmer og siden oppgaven krever 3 desimaler i svaret er svaret mitt: $\underline{\underline{0.157}}$.