FYS2140 Kvantefysikk,
Løsningsforslag for Oblig 5

7. februar 2013

Her finner dere løsningsforslag for Oblig 5 pluss et løsningsforslag på Oppgave 2.8 i Griffiths som var en tilleggsoppgave denne uken.

Oppgave 1 Finn $\langle x\rangle$, $\langle x^2\rangle$, $\langle p\rangle$, $\langle p^2\rangle$, σ_x og σ_p for den n-te stasjonære tilstanden for en uendelig dyp kvadratisk brønn

$$\Psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)e^{-i(n^2\pi^2\hbar/2ma^2)t}. \tag{1}$$

Sjekk at Heisenbergs uskarphetsprinsipp er oppfylt. Hvilken tilstand kommer nærmest grensen for uskarpheten?

Svar: Merk at vi i denne oppgaven bare skal se på de enkelte stasjonære tilstandene og ikke den generelle løsningen for en vilkårlig initialbetingelse. Forventningsverdien til posisjonen x er da

$$\begin{aligned}\langle x\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x|\Psi_n(x,t)|^2\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x\psi_n^*(x)e^{i(n^2\pi^2\hbar/2ma^2)t}\psi_n(x)e^{-i(n^2\pi^2\hbar/2ma^2)t}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x|\psi_n(x)|^2\,dx \end{aligned}\tag{2}$$

hvor $\psi_n(x) = \sqrt{2/a}\sin(n\pi x/a)$ og hvor eksponentialfaktorene fra ligning (1) kansellerer. Altså $|\Psi_n(x,t)|^2 = |\psi_n(x)|^2$. Dette gir

$$\begin{aligned}\langle x\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x|\psi_n(x)|^2\,dx = \int_0^a x\cdot\frac{2}{a}\sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx \\ &= \frac{2}{a}\int_0^{n\pi}\frac{ay}{n\pi}\cdot\sin^2 y\cdot\frac{a}{n\pi}dy \\ &= \frac{2a}{n^2\pi^2}\int_0^{n\pi} y\sin^2 y\,dy \\ &= \frac{2a}{n^2\pi^2}\left[\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}y\sin 2y - \frac{1}{8}\cos 2y\right]_0^{n\pi} \\ &= \frac{2a}{n^2\pi^2}\left[\frac{1}{4}(n\pi)^2 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right] \\ &= \frac{a}{2}. \end{aligned}\tag{3}$$

Her har vi brukt variabelskiftet $y = n\pi x/a$ for å forenkle integralet. Integralet over y kan finnes ved delvis integrasjon og bruk av Rottmann:

$$\begin{aligned}\int y\sin^2 y\,dy &= \frac{1}{2}y^2\cdot\sin^2 y - \int\frac{1}{2}y^2\cdot 2\sin y\cos y\,dy \\ &= \frac{1}{2}y^2\sin^2 y - \int\frac{1}{2}y^2\sin 2y\,dy \\ &= \frac{1}{2}y^2\sin^2 y - \frac{1}{2}\int y^2\sin 2y\,dy\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}y^2\sin^2 y - \frac{1}{2}\left[\frac{2}{2^2}y\sin 2y + \frac{2-2^2y^2}{2^3}\cos 2y\right] + C \\
&= \frac{1}{2}y^2\sin^2 y - \frac{1}{4}y\sin 2y - \frac{1}{8}\cos 2y + \frac{y^2}{4}\cos 2y + C \\
&= \frac{1}{2}y^2\left(\sin^2 y + \frac{1}{2}\cos 2y\right) - \frac{1}{4}y\sin 2y - \frac{1}{8}\cos 2y + C \\
&= \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}y\sin 2y - \frac{1}{8}\cos 2y + C. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Merk at forventningsverdien vi har fått ikke bare er tidsuavhengig, men også uavhengig av n, og ligger i midten av brønnen som man kanskje kunne vente. Dette til tross for at halvparten av de stasjonære tilstandene (de med partalls n) har null sannsynlighet for å finne partikkelen i $x = a/2$!

Forventningsverdien til x^2 er

$$
\begin{aligned}
\langle x^2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2|\psi_n(x)|^2\,dx = \int_0^a x^2\cdot\frac{2}{a}\sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx \\
&= \frac{2}{a}\int_0^{n\pi}\left(\frac{ay}{n\pi}\right)^2\cdot\sin^2 y\cdot\frac{a}{n\pi}dy \\
&= \frac{2}{a}\left(\frac{a}{n\pi}\right)^3\int_0^{n\pi} y^2\sin^2 y\,dy \\
&= \frac{2a^2}{(n\pi)^3}\left[\frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{4}y\cos 2y + \left(1-2y^2\right)\frac{1}{8}\sin 2y\right]_0^{n\pi} \\
&= \frac{2a^2}{(n\pi)^3}\left[\frac{1}{6}(n\pi)^3 - \frac{1}{4}n\pi\right] \\
&= a^2\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2(n\pi)^2}\right]. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Vi har igjen brukt at forventningsverdien til en stasjonær tilstand er tidsuavhengig, og samme variabelskifte som over.

Integralet over y gjøres på samme måte, men med to delvis integrasjoner:

$$
\begin{aligned}
&\int y^2\sin^2 y\,dy \\
&= \frac{1}{3}y^3\cdot\sin^2 y - \int\frac{1}{3}y^3\cdot 2\sin y\cos y\,dy \\
&= \frac{1}{3}y^3\sin^2 y - \int\frac{1}{3}y^3\sin 2y\,dy \\
&= \frac{1}{3}y^3\sin^2 y + \frac{1}{3}y^3\frac{1}{2}\cos 2y - \int y^2\frac{1}{2}\cos 2y\,dy \\
&= \frac{1}{3}y^3\sin^2 y + \frac{1}{6}y^3\cos 2y - \frac{1}{2}\int y^2\cos 2y\,dy \\
&= \frac{1}{3}y^3\sin^2 y + \frac{1}{6}y^3\cos 2y - \frac{1}{2}\left[\frac{2}{2^2}y\cos 2y - \frac{2-2^2y^2}{2^3}\sin 2y\right] + C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}y^3\sin^2 y + \frac{1}{6}y^3\cos 2y - \frac{1}{4}y\cos 2y + \frac{1}{8}\sin 2y - \frac{1}{4}y^2\sin 2y + C \\
&= \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{4}y\cos 2y + \frac{1}{8}\sin 2y - \frac{1}{4}y^2\sin 2y + C \\
&= \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{4}y\cos 2y + \left(1 - 2y^2\right)\frac{1}{8}\sin 2y + C. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Forventningsverdien til bevegelsesmengden, $\langle p\rangle$, er da

$$\langle p\rangle = m\frac{d\langle x\rangle}{dt} = 0, \qquad (7)$$

fordi forventningsverdien til posisjonen er tidsuavhengig. Dette er noe som alltid er tilfelle for stasjonære tilstander. (Ikke gjør utregningen direkte fra operatoren for p, dette er unødvendig arbeid!)

Forventningsverdien til p^2 er

$$
\begin{aligned}
\langle p^2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^*(x)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_n(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^*(x)\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi_n(x)\,dx, \qquad (8)
\end{aligned}
$$

hvor vi har eliminert eksponentialfaktorene igjen som ikke er berørt av de deriverte med hensyn på posisjonen. Vi kan nå gjøre et lurt triks hvor vi skaffer oss den tids-uavhengige SL inne i integralet:

$$
\begin{aligned}
\langle p^2\rangle &= 2m\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^*(x)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_n(x)}{\partial x^2}\right)dx \\
&= 2m\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^*(x)E_n\psi_n(x)\,dx \\
&= 2mE_n\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_n(x)|^2\,dx, \qquad (9)
\end{aligned}
$$

hvor vi har brukt at ψ_n skal være en løsning av den tids-uavhengige SL (TUSL) på innsiden av brønnen/boksen der $V(x) = 0$, altså ligning [2.20] i Griffiths:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_n(x)}{\partial x^2} = E_n\psi_n(x). \qquad (10)$$

Da får vi til slutt

$$\langle p^2\rangle = 2mE_n = \left(\frac{n\pi\hbar}{a}\right)^2, \qquad (11)$$

på grunn av normeringen til $\psi_n(x,t)$ og energien til de stasjonære tilstandene $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$.

Eventuelt kunne vi brukt direkte at $\hat{H} = \hat{p}^2/2m$ når potensialet forsvinner inne i boksen, slik at $\hat{p}^2 = 2m\hat{H}$. Sammen med egenverdiligningen

$\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n$ gir det $\langle p^2\rangle = \langle \hat{p}^2\rangle = 2m\langle \hat{H}\rangle = 2mE_n$, en veldig rask måte å finne svaret på!

Vi sjekker Heisenbergs uskarphetsprinsipp ved å beregne variansen til x og p:

$$\sigma_x^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = a^2\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2(n\pi)^2}\right] - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2\left[\frac{1}{12} - \frac{1}{2(n\pi)^2}\right], \quad (12)$$

$$\sigma_p^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 = \left(\frac{n\pi\hbar}{a}\right)^2. \quad (13)$$

Dette gir

$$\sigma_x\sigma_p = a\sqrt{\left[\frac{1}{12} - \frac{1}{2(n\pi)^2}\right]}\cdot\frac{n\pi\hbar}{a} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{(n\pi)^2}{3} - 2}. \quad (14)$$

Uttrykket innenfor rottegnet er alltid større enn en, slik at Heisenbergs uskarphetsprinsipp er oppfylt. Det er tilstanden $n = 1$ som kommer nærmest grensen med

$$\sigma_x\sigma_p = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{\pi^2}{3} - 2} \simeq 1.136\frac{\hbar}{2}. \quad (15)$$

Oppgave 2 En partikkel i den uendelige dype kvadratiske brønnen har som starttilstand en bølgefunksjon som er en lik blanding av de to første stasjonære tilstandene:

$$\Psi(x,0) = A[\psi_1(x) + \psi_2(x)]. \quad (16)$$

a) Normaliser $\Psi(x,0)$. (Det vil si: finn A. Dette er veldig enkelt om du utnytter ortonormaliteten til ψ_1 og ψ_2. Husk at når bølgefunksjonen er normalisert ved $t = 0$ så vil den forbli normalisert — sjekk dette eksplisitt etter at du har gjort oppgave b) dersom du er i tvil.)

Svar:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,0)|^2\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2(\psi_1^*\psi_1 + \psi_1^*\psi_2 + \psi_2^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2)\,dx \\
&= |A|^2\int_{-\infty}^{\infty}(\psi_1^*\psi_1 + \psi_1^*\psi_2 + \psi_2^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2)\,dx \\
&= |A|^2(1+0+0+1) \\
&= 2|A|^2, \quad (17)
\end{aligned}$$

hvor vi har brukt ortonormaliteten til ψ_1 og ψ_2 for å gjøre integralene. Normaliseringskravet betyr at dette integralet må bli en, dvs. at vi kan velge $A = 1/\sqrt{2}$. (A er generelt et komplekst tall med lengde $1/\sqrt{2}$ i det komplekse planet, men vi velger en reell normering da fasen til normeringen ikke har fysisk betydning.)

b) Finn $\Psi(x,t)$ og $|\Psi(x,t)|^2$. Uttrykk den siste som en cosinusfunksjon av tiden, som i eksempel 2.1 i Griffiths. For å forenkle resultatet, la $\omega \equiv \pi^2\hbar/2ma^2$.

Svar: Siden initialbetingelsen $\Psi(x,0)$ er oppgitt ved hjelp av de stasjonære tilstandene (løsninger av TUSL) så kjenner vi konstantene c_n i den generelle løsningen: $c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($c_n = 0$ for $n > 2$). Den generelle løsningen er da

$$\begin{aligned}
\Psi(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} + \psi_2(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)e^{-\frac{i}{\hbar}\hbar\omega t} + \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)e^{-\frac{i}{\hbar}2^2\hbar\omega t}\right] \\
&= \sqrt{\frac{1}{a}}e^{-i\omega t}\left[\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)e^{-3i\omega t}\right],
\end{aligned} \tag{18}$$

hvor vi har brukt at $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = n^2\hbar\omega$. Sannsynlighetstettheten er

$$\begin{aligned}
|\Psi(x,t)|^2 &= \Psi^*(x,t)\Psi(x,t) \\
&= \frac{1}{a}\left[\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)e^{3i\omega t}\right] \\
&\quad \times \left[\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)e^{-3i\omega t}\right] \\
&= \frac{1}{a}\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)e^{3i\omega t}\right. \\
&\quad \left. + \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)e^{-3i\omega t} + \sin^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right] \\
&= \frac{1}{a}\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right. \\
&\quad \left. + \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)(e^{3i\omega t} + e^{-3i\omega t})\right] \\
&= \frac{1}{a}\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right. \\
&\quad \left. + 2\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos\left(3\omega t\right)\right],
\end{aligned} \tag{19}$$

hvor vi har brukt at $\cos y = (e^{iy} + e^{-iy})/2$ fra Rottmann.

c) Finn $\langle x\rangle$. Legg merke til at denne forventningsverdien oscillerer som funksjon av tiden. Hva er vinkelfrekvensen til denne oscillasjonen? Hva er amplituden til oscillasjonen? (Hvis du får en amplitude større enn $a/2$ så er du på bærtur!)

Svar:

$$\begin{aligned}\langle x\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x|\Psi(x,t)|^2\,dx \\ &= \frac{1}{a}\int_0^a x\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right. \\ &\quad \left. +2\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos\left(3\omega t\right)\right]\,dx \end{aligned} \tag{20}$$

Vi ser på de tre integrandene hver for seg:

$$\int_0^a x\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)dx = \frac{a^2}{4}, \tag{21}$$

$$\int_0^a x\sin^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right)dx = \frac{a^2}{4}, \tag{22}$$

hvor vi bruker resultatet av det første integralet i Oppgave 1, ligning (3), som var uavhengig av n. Det tredje integralet gir

$$\begin{aligned} &\int_0^a x\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)dx \\ =\ & \frac{1}{2}\int_0^a x\left[\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{a}x\right)\right]dx \\ =\ & \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}\cos\frac{\pi}{a}x+\frac{x}{\frac{\pi}{a}}\sin\frac{\pi}{a}x-\frac{1}{\left(\frac{3\pi}{a}\right)^2}\cos\frac{3\pi}{a}x-\frac{x}{\frac{3\pi}{a}}\sin\frac{3\pi}{a}x\right]_0^a \\ =\ & \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{3\pi}{a}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{3\pi}{a}\right)^2}\right] \\ =\ & \left(\frac{a}{3\pi}\right)^2-\left(\frac{a}{\pi}\right)^2=\left(\frac{a}{\pi}\right)^2\left[\frac{1}{9}-1\right]=-\frac{8}{9}\left(\frac{a}{\pi}\right)^2, \end{aligned} \tag{23}$$

hvor vi har brukt forholdet

$$\cos\theta_1-\cos\theta_2=-2\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right), \tag{24}$$

fra Rottmann, med $\theta_1 = 3\pi x/a$ og $\theta_2 = \pi x/a$, for å unngå produktet av to sinusfunksjoner i integranden. Vi setter integralene sammen og får:

$$\langle x\rangle = \frac{1}{a}\left[\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}-\frac{16}{9}\left(\frac{a}{\pi}\right)^2\cos\left(3\omega t\right)\right]=\frac{a}{2}\left[1-\frac{32}{9\pi^2}\cos\left(3\omega t\right)\right]. \tag{25}$$

Vinkelfrekvensen til $\langle x\rangle$ er $3\omega = \frac{3\pi^2\hbar}{2ma^2}$ og amplituden (maksimumsutslaget for oscillasjonen) er

$$\frac{a}{2}\frac{32}{9\pi^2} = \frac{16a}{9\pi^2}. \tag{26}$$

d) Finn $\langle p\rangle$. (*Hint:* det finnes en rask måte!)

Svar:

$$\begin{aligned}
\langle p\rangle &= m\frac{d\langle x\rangle}{dt} = m\frac{d}{dt}\frac{a}{2}\left[1 - \frac{32}{9\pi^2}\cos(3\omega t)\right] \\
&= \frac{16}{3\pi^2}ma\omega\sin(3\omega t) = \frac{16}{3\pi^2}ma\frac{\pi^2\hbar}{2ma^2}\sin(3\omega t) \\
&= \frac{8\hbar}{3a}\sin(3\omega t).
\end{aligned} \tag{27}$$

e) Hvis du skulle måle energien til denne partikkelen, hvilke verdier ville du fått, og hva er sannsynligheten for å få hver av de? Finn forventningsverdien til H. Hvordan er denne sammenlignet med E_1 og E_2?

Svar: Målinger kan bare gi en av egenverdiene E_n til Hamiltonoperatoren $\hat{H}\psi = E_n\psi$. Sannsynligheten for å få $E_1 = \pi^2\hbar^2/2ma^2$ er $|c_1|^2 = \frac{1}{2}$, for $E_2 = 2\pi^2\hbar^2/ma^2$ er den $|c_2|^2 = \frac{1}{2}$. Alle andre energier har null i sannsynlighet fordi $c_n = 0$ for $n > 2$. Forventningsverdien til Hamiltonoperatoren er

$$\langle\hat{H}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2E_n = |c_1|^2E_1 + |c_2|^2E_2 = \frac{5\pi^2\hbar^2}{4ma^2}, \tag{28}$$

altså gjennomsnittet av E_1 og E_2.

Tilslutt en liten kommentar om hva som foregår i denne oppgaven. Partikkelen begynner i tilstanden $\psi(x,0)$ som er en superponering av de to laveste (i energi) stasjonære tilstandene. Tidsutviklingen av partikkelen blir da en oscillasjon mellom disse tilstandene, noe målinger på partikkelen bærer preg av.

Oppgave 3 Tilleggsoppgave — ikke oblig!

En partikkel med masse m i den uendelige brønnen med vidde a begynner i venstre halvdel av brønnen, og kan ved tiden $t = 0$ finnes med like stor sannsynlighet ved alle posisjoner i den halvdelen.

a) Hva er den initielle bølgefunksjonen $\Psi(x,0)$? (Anta den er reell. Glem ikke å normalisere den.)

Svar: Den initielle bølgefunksjonen må ha en flat, eller uniform, fordeling i intervallet $0 \leq x \leq a/2$, og være null ellers:

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} A, & 0 \leq x \leq \frac{a}{2} \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} . \tag{29}$$

Vi finner A ved normalisering

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,0)|^2 \, dx = \int_0^{\frac{a}{2}} |A|^2 \, dx = \frac{a}{2}|A|^2 = 1, \tag{30}$$

som gir (vi velger en reell konstant) $A = \sqrt{2/a}$.

b) Hva er sannsynligheten for at en måling av energien gir akkurat verdien $\pi^2\hbar^2/2ma^2$?

Svar: Energien $E_1 = \pi^2\hbar^2/2ma^2$ er energien til den laveste stasjonære tilstanden. Denne har sannsynlighet $P_1 = |c_1|^2$ i en måling. Vi må altså bestemme c_1 for vår initialbetingelse $\Psi(x,0)$ i oppgave **a)**. Dette gjøres ved **Fouriers triks**, vi integrerer initialbetingelsen multiplisert med bølgefunksjonen for den laveste stasjonære tilstanden:[1]

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^*(x)\Psi(x,0)\, dx \\ &= \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) A\, dx \\ &= \frac{2}{a}\left[-\frac{a}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right]_0^{\frac{a}{2}} \\ &= \frac{2}{a}\left[-\frac{a}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{a}\frac{a}{2}\right) + \frac{a}{\pi}\right] \\ &= \frac{2}{\pi}. \end{aligned} \tag{31}$$

Sannsynligheten for å finne partikkelen med energi E_1 er da $P_1 = |c_1|^2 = \frac{4}{\pi^2} \simeq 0.405$.

[1] Vi sier ofte, i likhet med vektorterminologi, at vi projiserer ut komponenten av $\Psi(x,0)$ langs $\psi_1(x)$.