

# Drehschwingungen

## 1. Problemstellung

Auf Festkörper einwirkende Kräfte können bei diesen (unter anderem) Gestalts- und Volumenänderungen hervorrufen. Die Proportionalitätsfaktoren zwischen den pro Flächeneinheit angreifenden Kräften und den relativen Deformationen und Volumenänderungen bezeichnet man als elastische Konstanten. Sie spielen in der Werkstofftechnik eine wichtige Rolle. Ziel des hier beschriebenen Experimentes ist es, die elastischen Konstanten einer weit verbreiteten Metalllegierung zu bestimmen. Hierzu wird ein geeigneter Probenkörper aus dem zu untersuchenden Material in eine Vorrichtung eingebaut, die in der Lage ist, periodische Bewegungen auszuführen. Aus der gut messbaren Schwingungsdauer lässt sich dann eine der elastischen Konstanten bestimmen. In einer anderen Messvorrichtung wird die Schallgeschwindigkeit  $c$  ermittelt, mit der sich ein Schallimpuls durch den Probekörper hindurch fortpflanzt. Aus  $c$  kann man eine weitere elastische Konstante errechnen.

In einem zweiten Teil des Experimentes wird die zuvor erwähnte schwingungsfähige Vorrichtung durch den Einbau eines Permanentmagneten erweitert. Außerdem erfolgt jetzt die Bewegung im Einflussbereich eines homogenen Magnetfeldes. Dadurch wirkt auf den Magneten ein zusätzliches Drehmoment, welches die Schwingungsdauer des Gesamtsystems verändert. Der neue Wert kann verwendet werden, um daraus das magnetische Moment des Magneten zu ermitteln.

## 2. Zusammenstellung von Begriffen aus der Elastizitätstheorie

Man unterscheidet in der Mechanik bei Kräften, die auf einen festen Körper wirken, zwischen solchen, die an jedem Volumenelement angreifen (wie z.B. die Schwerkraft) und solchen, die nur über die Oberflächenelemente des Körpers wirken. Die Volumenkräfte können eine Änderung des Bewegungszustandes (Translation oder Rotation) hervorrufen, während die Oberflächenkräfte, von denen im Folgenden die Rede sein soll, nur Gestalts- und (oder) Volumenänderungen bewirken. Man bezieht die Kräfte in der Regel auf die Flächeneinheit und bezeichnet die so erhaltene Größe als **Spannung** (Dimension: Kraft/Fläche). Die Komponente der Spannung, die senkrecht zur Oberfläche steht, heißt **Normalspannung**  $\sigma$  oder **Druck**  $P$ , die oberflächenparallele Komponente dagegen **Tangential-** oder **Schubspannung**  $\tau$ . Die sogenannten Oberflächenkräfte wirken nun nicht nur an der Oberfläche des Körpers, sondern man kann sie an jeder Querschnittsfläche nachweisen, die man durch den Körper legt.

Wenn der Körper nach dem Verschwinden der Spannung wieder seine ursprüngliche Gestalt und Größe annimmt, spricht man im engeren Sinne von einer **elastischen Deformation**. Bei hinreichend kleinen Spannungen ist die Deformation, die man z.B. durch eine relative Längen- oder Volumenänderung ( $\Delta L/L$  bzw.  $\Delta V/V$ ) eines Körpers beschreiben kann, proportional zur einwirkenden Spannung

$$(1) \quad \sigma = E \frac{\Delta L}{L} \quad \text{oder} \quad P = Q \frac{\Delta V}{V} .$$

Man bezeichnet einen solchen Zusammenhang als **Hookesches Gesetz**<sup>1</sup>. Wie kann man nun die elastische Deformation eines festen Körpers unter der Einwirkung äußerer Spannungen verstehen? Hierzu muss man sich vergegenwärtigen, dass ein solcher aus einer regelmäßigen Anordnung von Atomen oder Molekülen (= Kristallgitter) besteht, die durch elektrostatische Kräfte in einem Gleichgewichtsabstand  $r_0$  von einander gehalten werden, bei dem die Summe der inneren Kräfte gerade verschwindet (siehe Abb.1). Wirkt nun von außen eine weitere Kraft, so wird sich eine neue Gleichgewichtslage  $r'_0$  einstellen, was zur Folge hat, dass der Körper sein Volumen und (oder) seine Gestalt ändert. Liegt  $r'_0$  in dem in Abb.1 eingezeichneten Bereich, so ist dieser Vorgang reversibel; das heißt nach dem Verschwinden der äußeren Kraft geht  $r'_0$  wieder  $r_0$  in über.

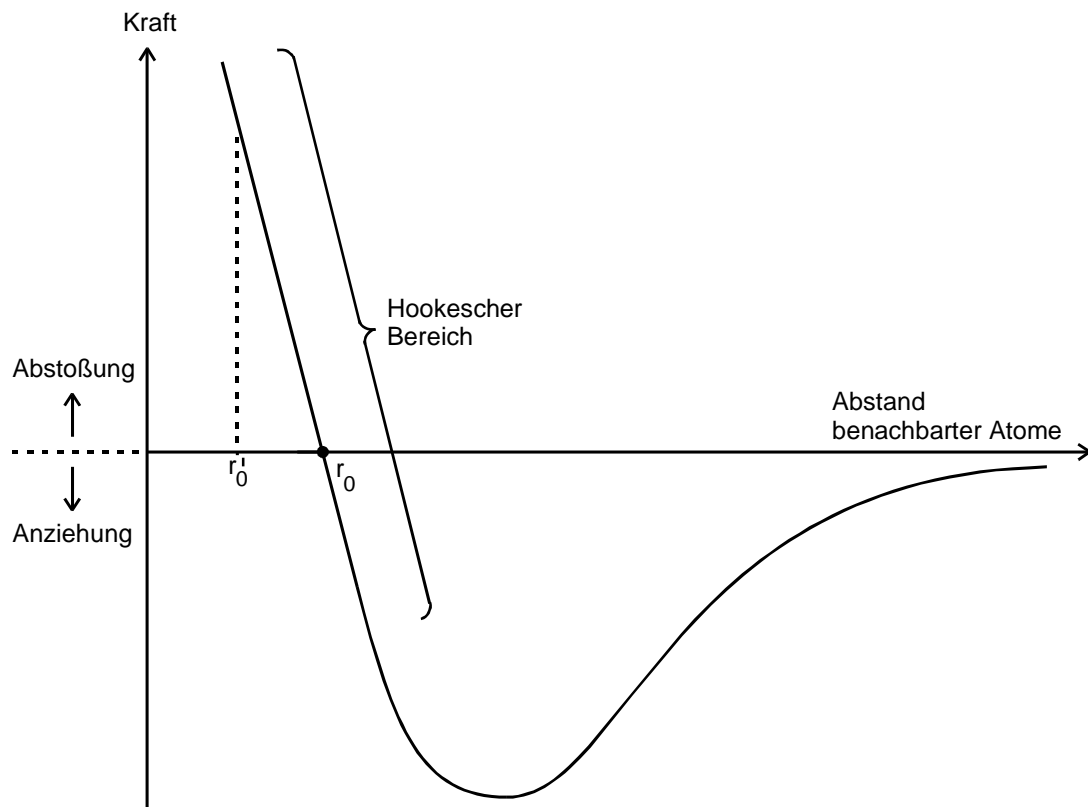


Abb.1: Schematischer Kraftverlauf zwischen benachbarten Atomen in einem Kristall in einer Dimension;  
 $r_0$  = Gleichgewichtsabstand im unbelasteten Fall,  $r'_0$  = Gleichgewichtsabstand bei Einwirkung einer  
 äußeren Spannung

In einem Kristall mit niedriger Symmetrie sind die elektrostatischen Kräfte richtungsabhängig, sodass man mehrere elastische Konstanten benötigt, um den Zusammenhang zwischen Spannung und Deformation vollständig darzustellen. Da man für die Beschreibung der Spannung insgesamt 6 Komponenten benötigt (3 für die Gestaltselastizität und 3 für die Volumenelastizität) und auch für die Charakterisierung der Deformation 6 Komponenten erforderlich sind, wird der Zusammenhang zwischen beiden Grö-

<sup>1</sup> benannt nach dem englischen Naturforscher Robert Hooke (1635 - 1705)

ßen durch eine 6x6-Matrix vermittelt. Im allgemeinen Fall wären daher 36 Konstanten erforderlich, um das Hookesche Gesetz zu formulieren. Mit Hilfe des Energieprinzips lässt sich jedoch zeigen, dass für die Matrixelemente die Beziehung

$$C_{ik} = C_{ki} \quad (i = 1, \dots, 6; k = 1, \dots, 6)$$

gilt, sodass sich die Zahl der elastischen Konstanten auf 21 reduziert. Diese Zahl verringert sich weiter, wenn der elastische Körper bestimmte Symmetrien besitzt<sup>2</sup>. Beim weit verbreiteten kubischen Kristallsystem bleiben beispielsweise noch 3 Konstanten übrig.

Im Experiment soll das elastische Verhalten sogenannter **isotroper** Körper untersucht werden. So bezeichnet man Materialien, bei denen die elastischen Konstanten **richtungsunabhängig** sind. Hierzu gehören beispielsweise die in der Technik verwendeten polykristallinen Metalle. Man kann nun zeigen, dass man das elastische Verhalten isotroper Materie mit genau **zwei** Konstanten vollständig beschreiben kann<sup>2</sup>. Die eine, als **Schubmodul** oder **Torsionsmodul G** bezeichnete Größe<sup>3</sup>, charakterisiert die Gestaltselastizität, die andere die Volumenelastizität. Letztere wird **Kompressionsmodul Q** genannt. Die Dimension dieser Größen ist gemäß (1) Kraft/Fläche = Masse / Länge • Zeit<sup>2</sup>. In der Praxis hat man aus Gründen der Zweckmäßigkeit insgesamt 4 elastische Konstanten für isotrope Stoffe eingeführt. Hinzu kommt der sogenannte **Elastizitätsmodul E**, der bereits durch Gleichung (1) definiert wurde und die relative Längenänderung eines Körpers in Spannungsrichtung beim Angreifen einer Normalspannung beschreibt. Die vierte elastische Konstante ist die sogenannte **Poissonsche Querkontraktionszahl  $\mu$** . Sie ist ein Maß für die Längenänderung eines unter dem Einfluss einer Normalspannung  $\vec{\sigma}$  stehenden Körpers **senkrecht** zur Richtung von  $\vec{\sigma}$  (siehe Abb.2):

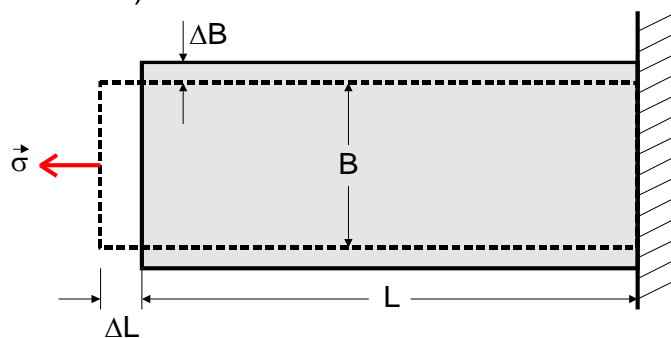


Abb.2: Erklärung der Querkontraktionszahl  $\mu$  an einem gedehnten Stab

$$\mu := - \frac{\Delta B}{B} \cdot \frac{L}{\Delta L}$$

Wie schon zuvor erwähnt, sind die vier Größen G, E, Q und  $\mu$  nicht unabhängig voneinander. Die Elastizitätstheorie kann zeigen, dass für isotrope Körper folgende Beziehungen zwischen ihnen bestehen

<sup>2</sup> Näheres hierzu findet man z.B. in C. Schäfer, M. Päsler, *Einführung in die Theoretische Physik Band 1*, W. de Gruyter & Co

<sup>3</sup> Ihre Definition findet man in Kap. 3a.

$$(2) \quad E = 2 G (\mu + 1)$$

und

$$(3) \quad E = 3 (1 - 2\mu) Q \quad ^4.$$

### 3. Bestimmung der elastischen Konstanten isotroper Stoffe

Von den in Kap.2 eingeführten elastischen Konstanten lassen sich nur der Elastizitätsmodul  $E$  und der Schubmodul  $G$  einfach und zuverlässig an Proben mit  $L \gg B$  (Abb.2) bestimmen. Die beiden anderen Konstanten  $\mu$  und  $Q$  müssen gemäß (2) und (3) aus  $E$  und  $G$  errechnet werden. Hier sollen insbesondere zwei "dynamische" Messverfahren beschrieben werden. Sie sind dadurch gekennzeichnet, dass die an der Probe angreifende Spannung eine periodische Funktion der Zeit ist. Man vermeidet damit eine Fehlerquelle, die durch die sogenannte **elastische Nachwirkung** entstehen kann. Darunter versteht man die Erscheinung, dass sich die Deformation bei einigen Materialien, insbesondere bei Metallen mit niedrigem Schmelzpunkt (z.B. Blei), nicht sofort nach der Belastung auf einen endgültigen Wert einstellt und auch nicht sofort wieder beim Verschwinden der Spannung auf den Wert null zurückgeht.

#### a) Experimentelle Bestimmung des Schubmoduls $G$

In Kapitel 2 wurde erwähnt, dass der Schubmodul- oder Torsionsmodul  $G$  die Gestaltselastizität eines Körpers beschreibt. Eine solche Verformung tritt dann auf, wenn an der Probe ausschließlich Tangentialspannungen angreifen. Ein Modellbeispiel ist in Abb.3 dargestellt. Man bezeichnet die hier veranschaulichte Deformation als **Scherung**:

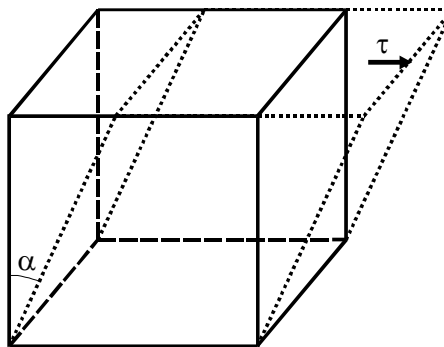


Abb.3: Elastische Deformation eines Würfels durch eine Schubspannung  $\tau$

Alle Ebenen parallel der Grundfläche des Würfels bleiben Quadrate, sie werden nur um einen gewissen Betrag nach rechts verschoben, der proportional zum Abstand des Quadrates von der Grundfläche anwächst, sodass man folgende Beziehung zwischen der Schubspannung  $\tau$  und dem "Scherungswinkel"  $\alpha$  formulieren kann:

$$(4) \quad \tau = G \alpha \quad .$$

In der Messtechnik hat das in Abb.3 beschriebene Experiment allerdings keine Bedeutung erhalten, da es unter anderem schwierig ist,  $\alpha$  zuverlässig zu bestimmen. Wesent-

<sup>4</sup> Die Ableitung der Beziehungen (2) und (3) wird vorgerechnet z.B. in C. Schäfer, M. Päsler, Einführung in die Theoretische Physik Band 1, W de Gruyter & Co

lich genauer lässt sich  $G$  dagegen aus einer **Torsion** oder Drillung eines zylindrischen Stabes oder Drahtes ermitteln. Man spannt ihn dazu an einem Ende fest ein und lässt am anderen Ende an zwei diametral gegenüberliegenden Punkten ein Kräftepaar gemäß Abb.4 angreifen.

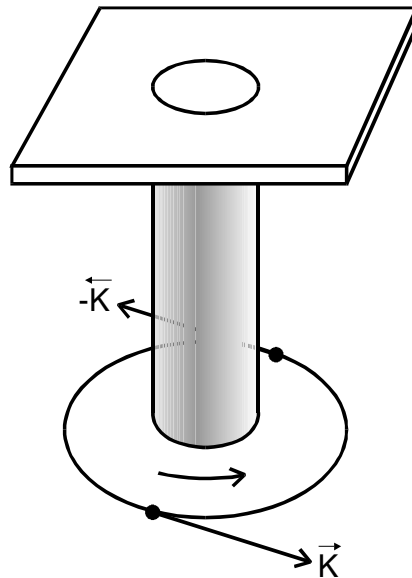


Abb.4: Torsion eines zylindrischen Stabes

Es wirkt dann ein Drehmoment  $M$  auf den Draht, das eine Verdrehung der unteren Stirnfläche gegen die obere um den Winkel  $\varphi$  hervorruft (siehe Abb.5). Man erkennt an dieser Abbildung, dass die Mantelschichten des Zylinders eine Scherung erfahren haben. Der Scherungswinkel  $\alpha$  ist dort eingezeichnet. Das bedeutet, dass in dem Zusammenhang zwischen  $M$  und  $\varphi$  der gesuchte Schubmodul eingehen muss. Bei der Ableitung dieses Zusammenhanges muss man berücksichtigen, dass das Drehmoment, welches auf einen Massepunkt wirkt, auch vom Hebelarm (das heißt, dem Abstand des Massepunktes von der Drehachse) abhängt. Dieser variiert über den Probendurchmesser. Man muss daher die gesamte Probe in Hohlzylinder der infinitesimalen Dicke  $dr$  und dem Radius  $r$  zerlegen (siehe Abb.5), für jeden das infinitesimale Drehmoment  $dM$  angeben und schließlich über den gesamten Probenradius  $R$  integrieren.

Für das Drehmoment, das am Kreisring mit dem Radius  $r$  angreift, gilt

$$dM = r dK .$$

Aus der Definition der Schubspannung als Tangentialkraft pro Flächeneinheit

$$\tau = \frac{dK}{dF}$$

folgt weiterhin

$$(5) \quad dM = r \tau dF .$$

Über das Hookesche Gesetz (4) lässt sich in (5) der Schubmodul einführen

$$(6) \quad dM = r G \alpha dF .$$

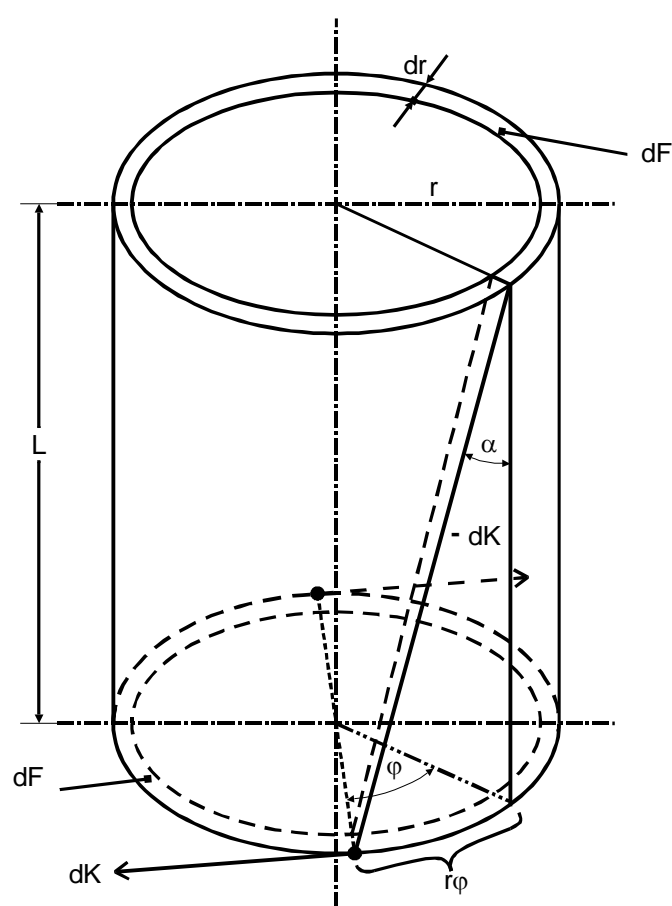


Abb.5: Skizze zur Ableitung eines Zusammenhanges zwischen Drehmoment  $M$  und Verdrillungswinkel  $\varphi$  an einer zylindrischen Probe

Aus Abb.5 liest man ferner einen Zusammenhang zwischen den Scherungswinkel  $\alpha$  und Torsionswinkel  $\varphi$  und Probenlänge  $L$  ab:

$$(7) \quad \alpha = \frac{r \varphi}{L} .$$

Mit dem Flächeninhalt des Kreisringes

$$(8) \quad dF = 2 \pi r dr$$

erhält man schließlich aus (6), (7) und (8)

$$(9) \quad M = 2 \pi \frac{G}{L} \varphi r^3 dr .$$

Das gesamte am Probenquerschnitt angreifende Drehmoment bekommt man dann durch Integration von (9) über den Probenradius  $R$

$$(10) \quad M = \int_0^R 2 \pi \frac{G}{L} \varphi r^3 dr = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{L} \varphi .$$

Die Gleichung (10) spiegelt das Hookesche Gesetz wieder; man erkennt eine lineare Beziehung zwischen dem Drehmoment  $M$  und dem Drehwinkel  $\varphi$  bei Torsionsvorgängen. Den Proportionalitätsfaktor

$$(11) \quad D := \frac{\pi G R^4}{2L}$$

nennt man auch die **Richtgröße** des Zylinders.

Im Prinzip kann man die Gleichung (10) bereits zur Bestimmung von  $G$  benutzen; denn sämtliche anderen Größen in (10) sind leicht messbar. Doch bei dieser als statisch zu bezeichnenden Methode können Fehler durch die zuvor erwähnte elastische Nachwirkung entstehen.

Diesen Nachteil besitzt die sogenannte dynamische Methode, auf die im Folgenden näher eingegangen werden soll, nicht. Man erweitert hierzu das Torsionssystem zu einer schwingungsfähigen Anordnung, indem man an das untere Ende des oben fest eingespannten Drahtes einen Körper mit dem Trägheitsmoment  $\theta$  hängt. Lenkt man das System aus seiner Gleichgewichtslage aus, indem man den Draht tordiert, so führt es Drehschwingungen aus, wie sich leicht zeigen lässt: An dem am Torsionsdraht hängenden Körper greifen zwei entgegengesetzt wirkende Drehmomente an, einmal das durch die Torsion des Drahtes entstehende, welches durch (10) gegeben ist, und zum anderen eines, das durch die Trägheit der rotierenden Masse hervorgerufen wird. Dieses hat den Wert

$$M_T = \theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} .$$

Die Bewegungsgleichung des Systems lautet somit

$$D \varphi + \theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0 .$$

(Energieverluste durch Reibung werden vernachlässigt.) Die Differentialgleichung wird gelöst durch den Ansatz:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \frac{2\pi}{T} t$$

wo

$$(12) \quad T = 2\pi \sqrt{\theta/D}$$

ist, wie man durch Einsetzen der Lösungsfunktion in die Differentialgleichung sieht. Nach der Auslenkung aus der Gleichgewichtslage um den Winkel  $\varphi_0$  führt das System also eine ungedämpfte harmonische Schwingung mit der Periodendauer  $T$  aus. Da sich  $T$  sehr genau messen lässt, hat man mit Gleichung (12) die Möglichkeit, den Schubmodul  $G$  unbeeinflusst von elastischen Nachwirkungen zu ermitteln. Es muss jedoch das Trägheitsmoment  $\theta$  bekannt sein. Bei einfacher Geometrie des Körpers lässt es sich leicht berechnen. Im Versuch wird eine Kugel mit dem Radius  $R_k \gg R$  benutzt. Ihr Trägheitsmoment für eine durch den Mittelpunkt gehende Rotationsachse soll im Folgenden berechnet werden. Das skalare Trägheitsmoment eines Körpers ist definiert als

$$\theta := \int_{\text{Masse}} r^2 dm ,$$

worin  $r' = r \cos \vartheta$  den Abstand des Massenelementes  $dm$  von der Rotationsachse bedeutet. Bei der Integration über das Kugelvolumen bekommt man ( $\rho$  = Dichte)

$$\theta_{\text{Kugel}} = \rho \int_{\text{Kugel-volumen}} r'^2 dV = \rho \int_0^{R_k} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^4 \cos^3 \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr ,$$

denn nach Abb.6 ergibt sich für das Volumenelement  $dV$  der Kugel

$$dV = dr \, r \, d\vartheta \, r \cos \vartheta \, d\varphi .$$

Somit ist

$$\theta_{\text{Kugel}} = \frac{8}{15} \pi \rho R_k^5 ,$$

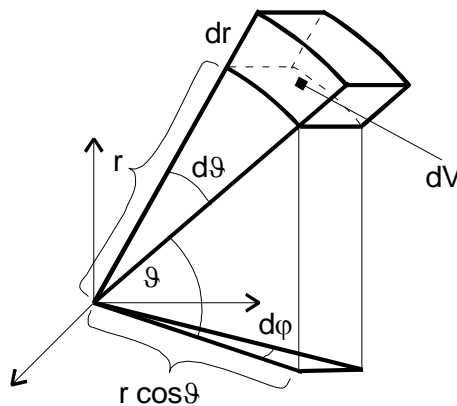


Abb.6: Skizze zur Berechnung des Trägheitsmomentes einer Kugel (Die Rotationsachse soll durch den Kugelmittelpunkt gehen.)

oder, wenn man die Kugelmasse  $m_k$  einsetzt

$$(13) \quad \theta_{\text{Kugel}} = \frac{2}{5} m_k R_k^2 .$$

Aus (11), (12) und (13) erhält man nun die endgültige Gleichung, die eine Berechnung des Schubmoduls  $G$  aus messbaren Größen gestattet:

$$(14) \quad G = \frac{16}{5} \pi \frac{m_k R_k^2 L}{T^2 R^4} .$$

## b) Experimentelle Bestimmung des Elastizitätsmoduls $E$

Prinzipiell kann man  $E$  mit Hilfe des in Abb.2 skizzierten Modellexperimentes bestimmen. Aber auch hier wird wie bei jeder anderen statischen Verformung das Messergebnis durch die elastische Nachwirkung im Probenkörper beeinflusst. Aus diesem Grunde soll im Folgenden ebenfalls ein dynamisches Messverfahren für  $E$  beschrieben werden. Es beruht auf der Messung der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  einer Schallwelle im Probenkörper: In Versuch 103 wird gezeigt, dass in einem isotropen Festkörper folgender einfacher Zusammenhang zwischen  $c$  und  $E$  besteht:



$$(15) \quad c^2 = \frac{E}{\rho} \cdot 100$$

Darin bedeutet  $\rho$  die Dichte des Probenmaterials. Zur Bestimmung von  $E$  nach Gleichung (15) sind demnach eine Schallgeschwindigkeits- und eine Dichtemessung erforderlich.  $c$  wird aus der Laufzeit  $t$  eines Schallimpulses durch eine stabförmige Probe der Länge  $L$  errechnet. Näheres zur Laufzeitmessung findet man in Kap.9. Die Dichte wird aus der Masse der Probe, die man durch Wägung mit einer elektronischen Waage erhält, und aus ihrem Volumen, welches sich aus ihren geometrischen Abmessungen errechnen lässt, ermittelt.

#### 4. Aufgabe aus dem Gebiet der Kontinuumsmechanik

Man bestimme den Schubmodul  $G$  und den Elastizitätsmodul  $E$  einer Stahlprobe nach den in Kap. 3 beschriebenen Methoden. Aus den Ergebnissen berechne man ferner die Poissonsche Querkontraktionszahl  $\mu$  und den Kompressionsmodul  $Q$ .

#### 5. Beschreibung der Messapparatur zur Bestimmung des Schubmoduls

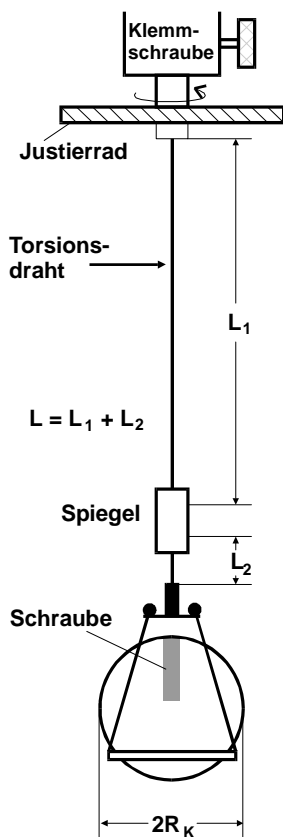


Abb.7: Skizze der Messapparatur  
(ohne Zeitmessvorrichtung)

Die Apparatur besteht aus einer an einem Torsionsdraht aufgehängten Kugel (siehe Abb.7). Nach den in Kap.2a angestellten Überlegungen kann ein solches System harmonische Schwingungen ausführen. Die zugehörige Periodendauer soll hier mit einer elektronischen Stoppuhr gemessen werden. Diese besteht aus einem frequenzstabilen Quarzoszillator, dessen Schwingungen von einem elektronischen Zählwerk gezählt werden können. Durch eine von außen steuerbare Torstufe, die zwischen den beiden Einheiten liegt, kann man erreichen, dass die Zählung genau zu Beginn einer Torsionschwingungsperiode einsetzt und an deren Ende stehen bleibt. Da die Oszillatorfrequenz ein dekadisches Vielfaches von 1 Hz ist, kann  $T$  am Zählwerk unmittelbar in Sekunden abgelesen werden. Die zur Steuerung der Torstufe erforderlichen Signale erzeugt man mit Hilfe einer Lichtschranke. Diese besteht, wie in Abb.8 dargestellt, aus einer Beleuchtungsvorrichtung (Lampe, Spalt und Sammellinse), die ein scharfberandetes Lichtbündel auf einen am unteren Ende des Torsionsdrahtes ange-

brachten Spiegel wirft, und einem Lichtdetektor (Photodiode). Jedesmal, wenn dieser vom Lichtstrahl getroffen wird, gibt er ein elektrisches Signal ab, welches mit Hilfe einer Schaltung aus digitalen Bauelementen in geeigneter Weise auf die Torsteuerungs und Rückstell-Eingänge des elektronischen Zählwerks geleitet werden muss.

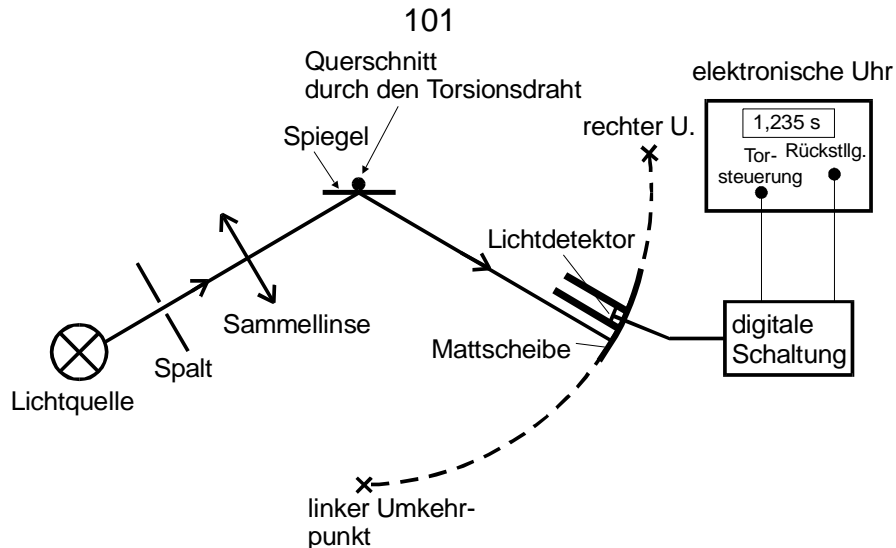


Abb.8: Schematische Darstellung der Periodendauermessung

## 6. Bedienung der Apparatur zur Schubmodul-Bestimmung

Zunächst stelle man mit Hilfe des Justierrades (siehe Abb.7) den Spiegel so ein, dass der reflektierte Lichtstrahl ein wenig neben die Photodiode fällt. Links und rechts neben dieser sind Mattscheiben angebracht, auf denen der Strahl gut zu sehen ist. Sodann justiere man die Beleuchtungsanordnung so ein, dass auf der Mattscheibe ein scharfes Bild des Spaltes entsteht. Wenn man das Justierrad hin und her bewegt, wird das System zu Torsionsschwingungen angeregt. Dabei wandert der Strahl aus seiner Ruhelage beispielsweise über die Photodiode hinweg zum rechten Umkehrpunkt (siehe Abb.8). Der hierdurch entstehende elektrische Impuls kann zum Starten der Uhr verwendet werden. Der nächste Impuls, welcher entsteht, wenn der Strahl vom rechten Umkehrpunkt zurückkehrt und die Photodiode überstreicht, wird nicht benötigt. Erst, wenn der Strahl zum anderen Umkehrpunkt gewandert ist und von dort über den Detektor zurückkehrt, ist eine volle Periode verstrichen. Das bedeutet, dass der nun erzeugte (dritte) Impuls als Stoppsignal zu verwenden ist. Aus dem vierten Impuls, der bei seiner Rückkehr vom rechten Umkehrpunkt entsteht, kann man mit Hilfe einer monostabilen Kippstufe einen Rückstellimpuls für das Zählwerk erzeugen.

## 7. Arbeitsprogramm und Angaben zur Auswertung

- Man entwerfe eine Schaltung aus digitalen TTL-Bausteinen, die zur Steuerung der elektronischen Uhr geeignet ist, und erkläre ihre Arbeitsweise. Folgende Bauelemente stehen zur Verfügung: 1 monostabile Kippstufe, 2 getaktete RS-Flip-Flops<sup>5</sup>, 1 UND-Gatter und 2 Inverter. Die Eigenschaften digitaler Bausteine sind in Kap.5 des V104 dargestellt.
- Zur Bestimmung des Schubmoduls sind zu messen: der Drahtdurchmesser  $2R$  an verschiedenen Stellen mit einer Mikrometerschraube ( $1\text{ }\mu\text{m}$  Auflösung), die Länge  $L$  des

<sup>5</sup> Bei den RS-Flip-Flops handelt es sich um invertierende Flip-Flops d.h. sie werden durch die abfallende Flanke gesetzt.

Drahtes mit einem Bandmaß und die Periodendauer  $T$ . Kugelmasse  $m_k$  und -durchmesser  $2R_k$  sind angegeben.

## 8. Praktische Hinweise

Eine einwandfreie Messung von  $T$  ist nur möglich, wenn die Kugel keine Pendelbewegung ausführt. Diese müssen vor Beginn der Messreihe mit Hilfe einer am Sockel der Apparatur angebrachten Vorrichtung gedämpft werden. Reine Torsionsschwingungen kann man anregen, wenn man das Justierad in Abb.7 für einige Sekunden aus seiner Ausgangsstellung heraus- und dann wieder zurückdreht.

Bei der Bestimmung von  $G$  kann das Erdmagnetfeld stören, da ein Permanentmagnet fest in der Kugel montiert ist. Dieser Einfluss verschwindet, wenn man die Dipolachse parallel zum Torsionsdraht (also vertikal) einstellt. Ihre Lage ist in der Kugel durch einen Madenschraubenkopf und einen weißen Punkt gekennzeichnet.

## 9. Beschreibung einer Apparatur zur Messung von Schalllaufzeiten in Stäben

Eine Skizze einer für eine Laufzeitmessung geeigneten Apparatur ist in Abb.9 wiedergegeben.

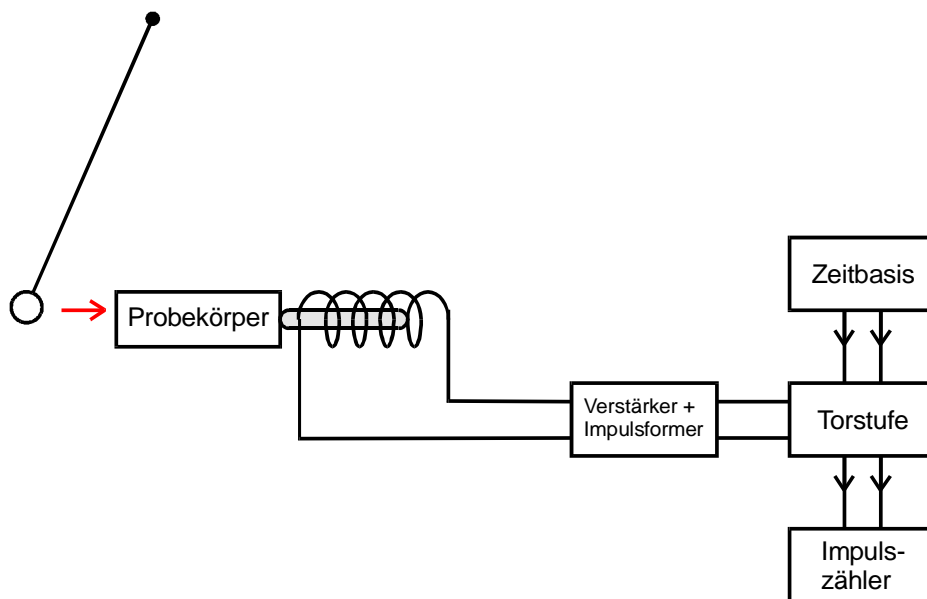


Abb.9: Schema einer Versuchsanordnung zur Messung der Laufzeit eines Schallimpulses durch eine stabförmige Probe

Die elastische Deformation wird durch den Aufprall einer Stahlkugel auf die linke Stirnseite des Probekörpers erzeugt. Der Schallimpuls läuft dann durch den Stab hindurch und trifft auf die rechte Stirnfläche. Ihre Deformation wird durch einen Tonabnehmer, wie er von der Schallplattentechnik her bekannt ist, registriert. Dieser gibt zum Zeitpunkt des Eintreffens des Schallimpulses einen elektrischen Impuls ab, welcher, nachdem er einen Verstärker und Impulsformer durchlaufen hat, eine elektronische Torstufe öffnet, sodass von einem quarzgesteuerten Zeitbasisgenerator elektrische Impulse in Abständen von  $1\text{ }\mu\text{s}$  in ein elektronisches Zählwerk gelangen können. Der auf die rechte Stirnfläche einfallende Schallimpuls geht nur zu einem geringen Teil in die umgebende Luft über, der größte Teil wird reflektiert, da  $c_{\text{stab}} \gg c_{\text{luft}}$  ist. Die Schallwelle läuft also zur linken Stirnfläche zurück, wird dort reflektiert und trifft zum zweiten Mal auf die

rechte Stirnfläche. Der hierbei entstehende elektrische Impuls schließt jetzt die Torstufe, sodass der Impulszähler die **doppelte** Laufzeit des Schallimpulses anzeigt. Da der Schallimpuls nicht einmal sondern viele Male reflektiert wird, bevor seine Energie verbraucht ist, kann man mit der hier beschriebenen Apparatur auch die doppelte Laufzeit eines zehnfach reflektierten Impulses messen. Hierzu braucht man nur einen Schalter in die entsprechende Stellung zu bringen.

## 10. Messung des magnetischen Momentes eines Permanentmagneten

Da sich nach der soeben beschriebenen Messmethode auch das sogenannte **Magnetische Moment**  $\vec{m}$  eines Permanentmagneten messen lässt, soll in diesem Kapitel näher darauf eingegangen werden. Unter diesem Begriff versteht man das Produkt aus der Polstärke  $p$  und dem Abstand  $\vec{a}$  der beiden Pole, also

$$\vec{m} := p \vec{a} ,$$

wobei der Vektor  $\vec{a}$  vom Nordpol zum Südpol weist. In einem **homogenen** Magnetfeld mit der Flussdichte  $\vec{B}$  wirken auf den Magneten zwei Kräfte  $\vec{K}_N$  und  $\vec{K}_S$ , die an den Polen angreifen und wegen des unterschiedlichen Vorzeichens von  $p$  entgegengesetzt gleich sind (siehe Abb.10). Das heißt, es wirkt keine resultierende Kraft auf den Magneten sondern ein Drehmoment  $\vec{M}_{\text{Mag}}$ , welches ihn in Feldrichtung dreht. Für  $\vec{M}_{\text{Mag}}$  ergibt sich

$$\vec{M}_{\text{Mag}} = p \vec{a} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

und für seinen Betrag

$$(16) \quad M_{\text{Mag}} = m B \sin \gamma .$$

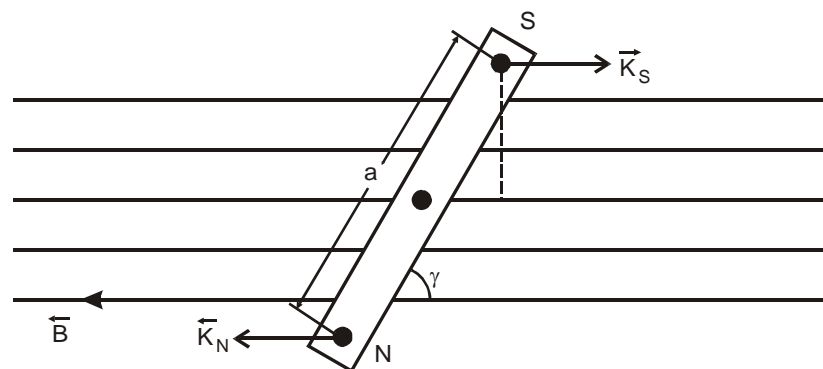


Abb. 10: Permanentmagnet in einem äußeren Magnetfeld  $\vec{B}$

Dieses Drehmoment kann man verwenden, um  $m$  zu messen. Man benutzt dazu das in Kap.2 beschriebene Messverfahren, baut jedoch jetzt den zu untersuchenden Magneten in das Innere der Kugel ein und bringt beide in ein (praktisch) homogenes Magnetfeld, welches von einer Helmholtz-Spule erzeugt wird (siehe Abb.11). Lenkt man nun die Vorrichtung aus ihrer Gleichgewichtslage aus, so wird sie wiederum Schwingungen ausführen jedoch wegen des zusätzlich wirkenden Drehmomentes (16) mit einer geänderten Periodendauer  $T_m \neq T$ . Zweckmäßigerweise justiert man die Dipolachse (durch

Drehen der Kugel in ihrer Halterung) so ein, dass sie in Ruhestellung parallel zur Feldrichtung steht. Dann ist  $\gamma = \varphi$  und die Bewegungsgleichung nimmt die Gestalt

$$(17) \quad m B \sin \varphi + D \varphi + \theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0$$

an. Diese nicht-lineare Differentialgleichung liefert eine Lösung, bei der die Schwingungsdauer amplitudenabhängig ist. Man kann diese Komplikation praktisch vermeiden, wenn man bei der Ablenkung nur so kleine Amplituden  $\varphi_0$  zulässt, dass die Näherung

$$(18) \quad \sin \varphi = \varphi + \dots$$

brauchbar ist, dann vereinfacht sich (17) zu

$$(19) \quad (m B + D) \varphi + \theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung hat die bereits die bekannte Form

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \frac{2\pi}{T_m} t$$

mit

$$T_m = 2\pi \sqrt{\frac{\theta}{m B + D}}$$

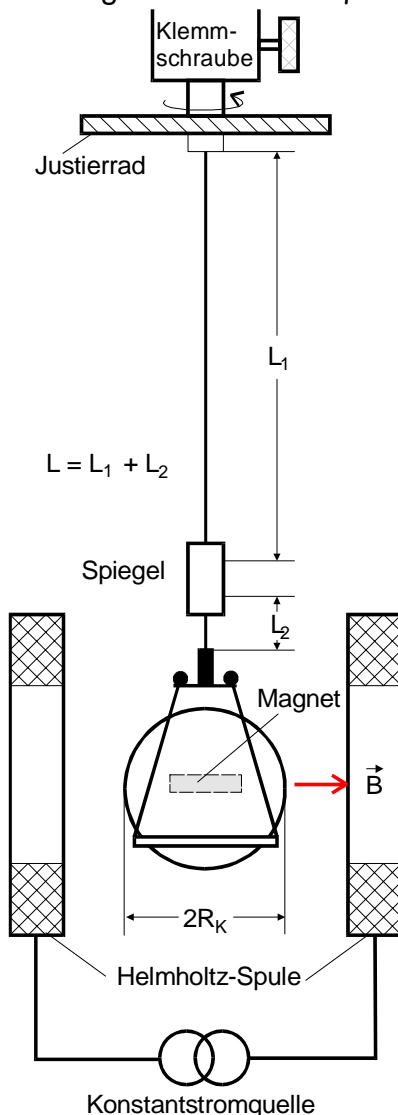


Abb.11: Versuchsanordnung zur Messung des magnetischen Momentes eines Permanentmagneten

## 11. Aufgabe aus dem Gebiet der Magnetostatik

Man bestimme das magnetische Moment  $m$  eines Permanentmagneten mittels Drehschwingungen.

## 12. Praktische Hinweise zur Lösung des Messproblems aus 11

Zur Messung des magnetischen Momentes wird die bereits in den Kap.5 und 6 beschriebene Apparatur benutzt. Man beachte daher die dort gegebenen Hinweise. Neu hinzu kommt jetzt ein Magnetfeld, welches mittels einer Helmholtz-Spule erzeugt wird. Den Zusammenhang zwischen der Flussdichte  $B$  und den geometrischen Daten der Spule sowie dem Feldstrom kann man aus V308 entnehmen.

Die Kugel mit dem darin enthaltenen Magneten muss so in ihrer Halterung gedreht werden, dass die Dipolachse in Ruhestellung ( $\varphi = 0$ ) parallel zu Feldrichtung steht. Die Dipolachse ist durch einen Schraubenkopf und einen weißen Punkt auf der Kugel gekennzeichnet.

Zur Entfaltung einer Schwingung lenkt man das Justierad kurzfristig ein wenig aus seiner Ruhestellung aus. Bei der Messung von  $T_m$  darf man nur kleine Amplituden zulassen, wenn die Näherungsgleichung (18) gültig sein soll. Ob die Winkelamplitude  $\varphi_0$

hinreichend klein ist, kann man an einer fortlaufenden Messung von  $T_m$  erkennen: Ist  $\varphi_0$  zu groß, zeigt sich eine systematische Abhängigkeit der Periodendauer von  $\varphi_0$ , da die Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung (17) eine amplitudenabhängige Periodendauer besitzt. Man führe daher mehrere Messungen von  $T_m$  durch und zwar so lange, bis  $\varphi_0$  durch die Dämpfung, die bei eingeschaltetem Feld auftritt, so klein geworden ist, dass  $T_m$  nur noch statistische Schwankungen zeigt.

Unter den soeben beschriebenen Bedingungen messe man  $T_m$  in Abhängigkeit von  $B$ . Die Ergebnisse veranschauliche man in einem Diagramm, in dem man  $B$  gegen  $1/T_m^2$  auftrage. Das magnetische Moment  $m$  errechne man mittels einer Ausgleichsrechnung aus diesen Daten.

Die zuvor beschriebene Apparatur kann man auch benutzen, um die Horizontalkomponente des Erdmagnetfeldes zu messen. Zu diesem Zwecke messe man die Schwingungsdauer  $T_{NS}$  des Systems, wenn die Apparatur in Nord-Süd-Richtung ausgerichtet ist und vergleiche sie mit der Zeit  $T$  aus (12), die man erhält, wenn der Magnet vertikal steht.