

V351

Fourier-Analyse und Synthese

Kalina Toben

kalina.toben@tu-dortmund.de

Daniel Wall

daniel.wall@tu-dortmund.de

Durchführung: 11.12.2018

Abgabe: 18.12.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
3 Durchführung	4
3.1 Vorbereitung	4
3.2 Fourier-Analyse	5
3.3 Fourier-Synthese	5
4 Auswertung	6
4.1 Fourier-Analyse	6
4.2 Fourier-Synthese	9
5 Diskussion	11
Literatur	11

1 Zielsetzung

Es sollen verschiedene elektrische Schwingungen in ihre Fourierkomponenten zerlegt werden. Im zweiten Teil des Versuchs sollen diese Funktionen durch Überlagerung ihrer Fourierkomponenten synthetisiert werden.

2 Theorie

Eine Vielzahl physikalischer Vorgänge, beispielsweise sich ausbreitende Wellen oder ungedämpfte Schwingungen, lassen sich durch periodische Funktionen beschreiben, die sich zeitlich und/oder räumlich wiederholen. Sie kehren also nach einem bestimmten Zeitraum T oder einer bestimmten Distanz D wieder zu ihrem Ursprungswert zurück und der Ablauf wiederholt sich. Die am häufigsten genutzten periodischen Funktionen sind die Cosinus- und die Sinusfunktion der Form

$$f(t) = a \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (1)$$

$$\text{bzw. } f(t) = b \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \quad (2)$$

mit den Amplituden a und b und der jeweiligen Periodendauer T . Nach Jean Baptiste Joseph Fourier lässt sich jedes periodische Phänomen der Natur durch eine Kombination dieser beschreiben, was er in dem Fourierschen Theorem

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \right) \quad (3)$$

formulierte. Ist die hier genannte Reihe gleichmäßig konvergent, so stellt sie eine periodische Funktion $f(t)$ mit der Periode T dar. Die Koeffizienten a_n und b_n lassen sich nach

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt \quad (4)$$

$$\text{und } b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt \quad (5)$$

berechnen. Demnach treten durch $n \in \mathbb{R}$ nur ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz ν_1 auf. Werden die zur jeweiligen Oberwelle gehörigen Amplituden a_n und b_n als Funktion der Frequenz aufgetragen, so ergibt sich dementsprechend ein Linienspektrum, welches in beispielhaft in Abbildung 1 zu sehen ist.

Besitzt eine periodische Funktion $f(t)$ eine unstetige Stelle t_0 , so lässt sich ein Überspringen beobachten, da die Funktion an der Stelle nicht approximiert werden kann. Mit wachsendem n bleibt dennoch eine endliche Abweichung der Reihe von der eigentlichen Funktion. Dies wird als Gibbsches Phänomen bezeichnet.

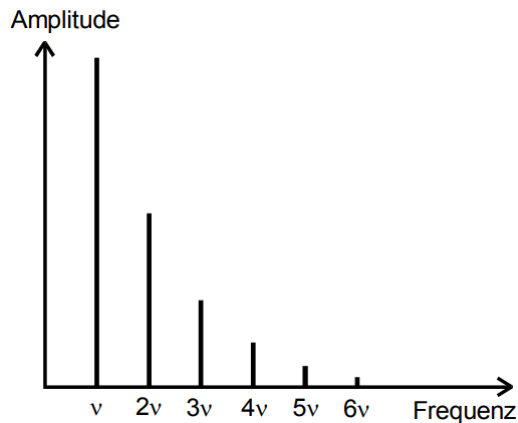


Abbildung 1: Beispielhafte Amplituden einer periodischen Schwingung als Funktion der Frequenz in einem Frequenzspektrum mit der Grundfrequenz ν_1 [1, S. 271]

Mithilfe der Fourier-Transformation

$$g(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\nu t} dt \quad (6)$$

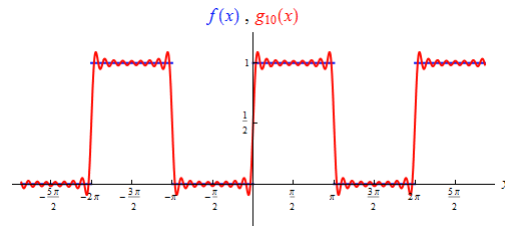
kann das gesamte Frequenzspektrum einer zeitabhängigen Funktion unabhängig von ihrer Periodizität bestimmt werden. Bei Funktionen die keine Periodizität aufweisen ergibt sich im Gegensatz zu einem Linienspektrum ein kontinuierliches Spektrum an Frequenzen, sodass bei der noch folgenden Fourier-Analyse Nebenmaxima ausgebildet werden, da es nicht möglich ist, einen unendlich großen Zeitraum zu betrachten. Diese werden jedoch vernachlässigt.

3 Durchführung

Der Versuchsablauf lässt sich in Fourier-Analyse und Fourier-Synthese unterteilen. Für die Auswertung werden die Fourier-Koeffizienten einer Rechteck-, Sägezahn- und Dreiecksspannung benötigt, die als Vorbereitung berechnet werden.

3.1 Vorbereitung

Vor Beginn der Messreihe werden die Fourier-Koeffizienten der ausgewählten Rechteck-, Dreieck-, und Sägezahnspannung (beispielhaft dargestellt in Abbildung 2 bis 4) bestimmt. Dazu werden diese zur Vereinfachung so parametrisiert, dass es sich um gerade bzw. ungerade Funktionen handelt, da so $b_n = 0$ bzw. $a_n = 0$ gilt. Die berechneten Koeffizienten lauten:



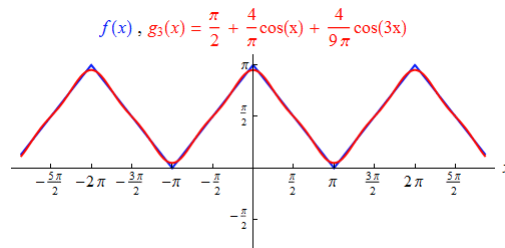
Rechteckspannung:

$$a_n = 0,$$

$$b_{n \text{ gerade}} = 0,$$

$$b_{n \text{ ungerade}} = \frac{4}{\pi n},$$

Abbildung 2: Eine Rechteckspannung und die Approximation mit 10 Termen der zugehörigen Fourierreihe in Abhängigkeit von x [2].



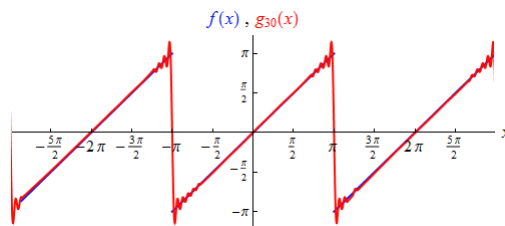
Dreieckspannung:

$$a_{n \text{ gerade}} = 0,$$

$$a_{n \text{ ungerade}} = -\frac{4}{\pi n^2},$$

$$b_n = 0,$$

Abbildung 3: Eine Dreieckspannung und die Approximation mit 3 Termen der zugehörigen Fourierreihe in Abhängigkeit von x [2].



Sägezahnspannung:

$$a_n = 0,$$

$$b_{n \text{ gerade}} = -\frac{2}{n},$$

$$b_{n \text{ ungerade}} = \frac{2}{n}.$$

Abbildung 4: Eine Sägezahnspannung und die Approximation mit 30 Termen der zugehörigen Fourierreihe in Abhängigkeit von x [2].

3.2 Fourier-Analyse

Für die Fourier-Analyse wird ein Funktionsgenerator an ein digitales Oszilloskop angeschlossen. Das Oszilloskop führt die Fourier-Transformation des Signals durch und stellt diese dar. Die Amplituden der Maxima dieser Transformation werden über die Cursor-Funktion gemessen und notiert, wobei Nebenmaxima ignoriert werden.

3.3 Fourier-Synthese

Zunächst werden nacheinander zwei Ausgänge eines Oberwellengenerators an das Oszilloskop angeschlossen. Nur eins der Kabel wandert hierbei durch alle möglichen Ausgänge $A_{2,9}$ des Oberwellengenerators, das andere bleibt im Ausgang A_1 . Das Oszilloskop wird nun in den X-Y-Betrieb geschaltet, mit dem Ziel, alle Ausgänge des Generators in Phase

zu schalten. Hierzu wird die Amplitude zunächst maximal eingestellt, da so die höchste Genauigkeit erlangt werden kann. Die Phasen der einzelnen Generatoren werden nun solange justiert bis sich auf dem Oszilloskop Lissajous-Figuren ausbilden.

Im Folgenden werden die Amplituden der Generatoren mithilfe der in der Vorbereitung errechneten Proportionalitätsfaktoren so eingestellt, dass durch eine Überlagerung aller Einzelschwingungen die gewünschte zusammengesetzte Schwingung entsteht. Dazu werden alle Ausgänge nacheinander an ein Voltmeter angeschlossen. Das Oszilloskop wird nach dem Einstellen der Amplituden zurück in den X-T-Betrieb geschaltet. Es wird der summierte Ausgang des Oberwellengenerators mit dem Oszilloskop verbunden, sodass die Überlagerung aller Schwingungen auf dem Oszilloskop dargestellt wird. Gegebenenfalls werden einige Oberwellen um 180° in der Phase verschoben, wenn so die Approximation der zu synthetisierenden Spannung besser gelingt.

Im Fall der Sägezahn- und der Rechteckspannungssynthese beträgt dieser Proportionalitätsfaktor $\frac{1}{n}$. Für die Dreiecksspannung beträgt er $\frac{1}{n^2}$.

Zuletzt wird ein Abbild der synthetisierten Spannungen erstellt.

4 Auswertung

4.1 Fourier-Analyse

In Tabelle (1) finden sich die gemessenen Spannungen und der Quotient $\frac{U_n}{U_1}$, dabei ist U_1 die erste Oberwelle. Mit Hilfe einer linearen Ausgleichsrechnung werden die Werte mit den theoretischen Werten verglichen. Dazu wird je die Steigung überprüft. Der Theoriewert für die Rechteck- und Sägezahnspannung beträgt -1 und für die Dreiecksspannung -2 . Dies ergibt sich aus den berechneten Fourier-Koeffizienten. Beispielhaft wird die Steigung der Dreiecksspannung berechnet:

$$a_n = -\frac{4}{\pi n^2}$$

$$\ln(a_n) = \ln\left(-\frac{4}{\pi n^2}\right) = \ln\left(-\frac{4}{\pi}\right) - \ln(n^2)$$

$$\ln(a_n) = \underbrace{-2}_{\text{Steigung}} \ln(n) + \underbrace{\ln\left(-\frac{4}{\pi}\right)}_{\text{Achsenabschnitt}}$$

Da die anderen Koeffizienten ein n^1 im Nenner haben, ist die Steigung analog zur Rechnung oben -1 .

Tabelle 1: Gemessene und normierte Amplituden für die jeweilige Oberschwingung der Rechteckspannung, Dreieckspannung und der Sägezahnspannung.

Oberwellenzahl n	U_R/V	$\frac{U_n}{U_1}$	U_D/V	$\frac{U_n}{U_1}$	Oberwellenzahl n	U_S/V	$\frac{U_n}{U_1}$
1	6,92	1,000	4,400	1,000	1	3,44	1,000
3	2,70	0,390	0,608	0,138	2	2,00	0,581
5	1,70	0,246	0,224	0,051	3	1,40	0,407
7	1,04	0,150	0,108	0,025	4	0,74	0,215
9	0,60	0,087	0,048	0,011	5	0,84	0,244
11	0,68	0,098	0,044	0,010	6	0,58	0,169
13	0,52	0,075	0,044	0,010	7	0,52	0,151
15	0,32	0,046	0,040	0,009	8	0,50	0,145
17	0,36	0,052			9	0,32	0,093
19	0,38	0,055			10	0,40	0,116

In den folgenden Graphen werden die Amplituden gegen n doppellogarithmisch aufgetragen.

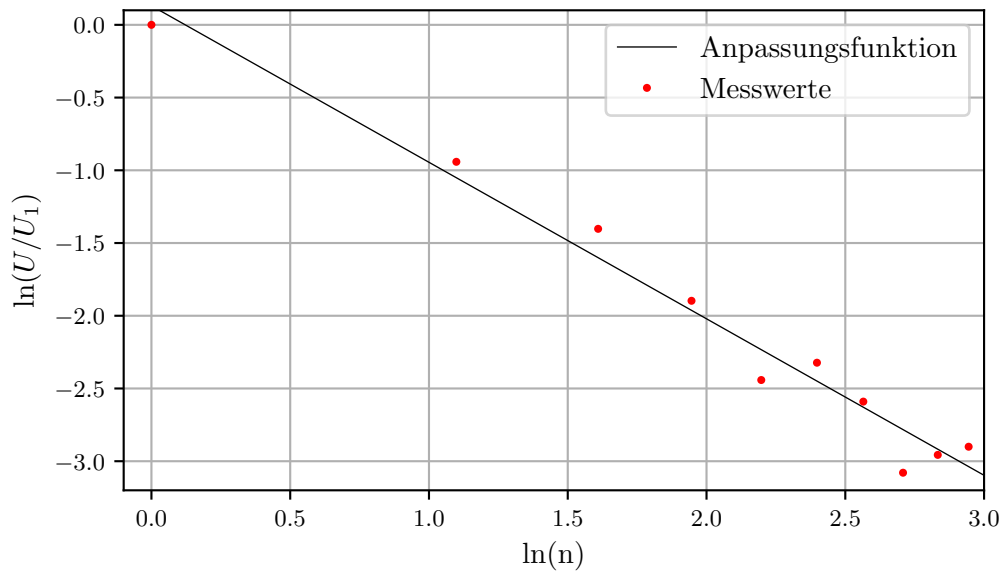


Abbildung 5: Amplituden der Rechteckspannung doppellogarithmisch aufgetragen gegen die Zahl der Oberwelle in Form einer linearen Ausgleichsgeraden, und die zugehörigen Messwerte.

Der Ansatz der linearen Regression lautet $y = mx + b$, und mit Hilfe von Python werden

die Parameter und Fehler berechnet, die für die Rechteckschwingung

$$m = -1,08 \pm 0,06$$

$$b = -0,13 \pm 0,14$$

lauten.

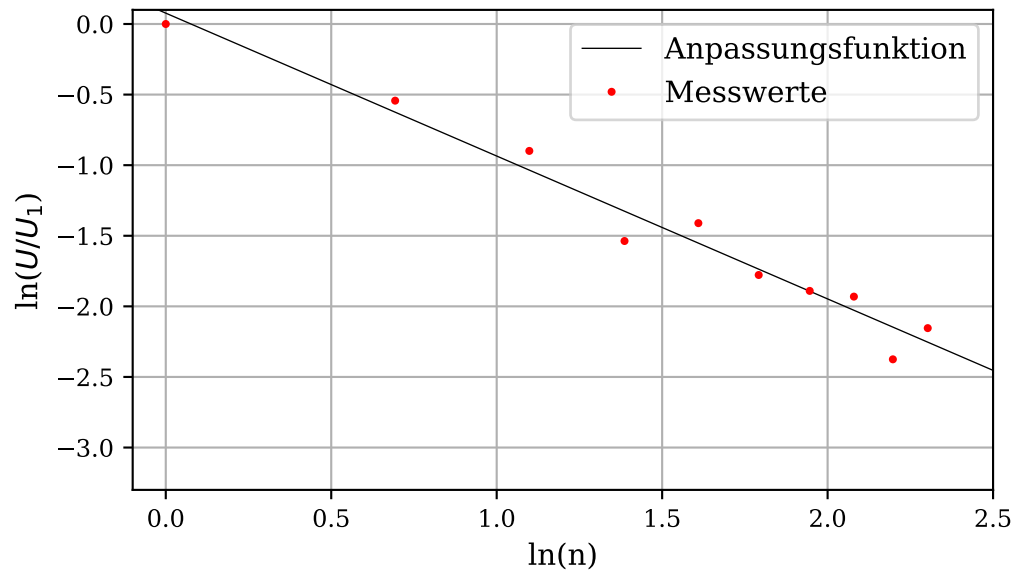


Abbildung 6: Amplituden der Sägezahnspannung aufgetragen gegen die Zahl der Oberwelle in Form einer linearen Ausgleichsgeraden, und die zugehörigen Messwerte.

Für die Sägezahnspannung ergeben sich die Parameter

$$m = -1,01 \pm 0,07$$

$$b = 0,08 \pm 0,11.$$

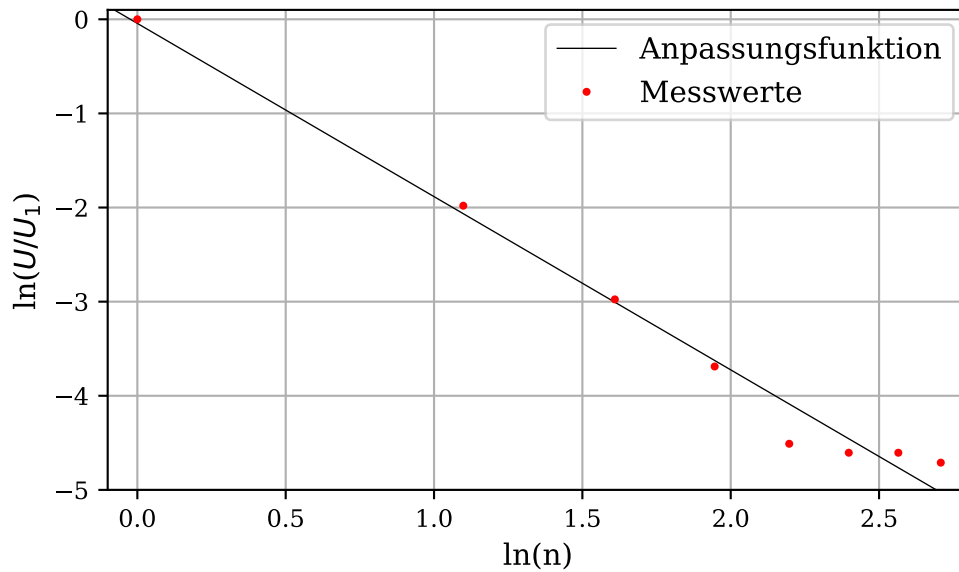


Abbildung 7: Amplituden der Dreiecksspannung aufgetragen gegen die Zahl der Oberwelle in Form einer linearen Ausgleichsgeraden, und die zugehörigen Messwerte.

Zuletzt die Parameter der Dreiecksspannung:

$$m = -1,84 \pm 0,09$$

$$b = -0,04 \pm 0,20.$$

4.2 Fourier-Synthese

Die Abbildungen 8 bis 10 zeigen die synthetisierten Funktionen. Dabei wird beachtet, dass die Amplituden der Rechteck- und der Sägezahnspannung mit dem Faktor $\frac{1}{n}$ fallen und die der Dreiecksspannung um den Faktor $\frac{1}{n^2}$. Die Berechnung der notwendigen Spannung erfolgt also durch Multiplikation der ersten Oberschwingung mit dem jeweiligen Faktor. Außerdem fallen die Oberschwingungen mit geradem n bei der Rechteck und Dreiecksspannung weg. In Tabelle (2) sind die eingestellten Spannungen aufgelistet. Bei der Dreiecksspannung war es nicht möglich, mehr als 4 Oberwellen einzustellen.

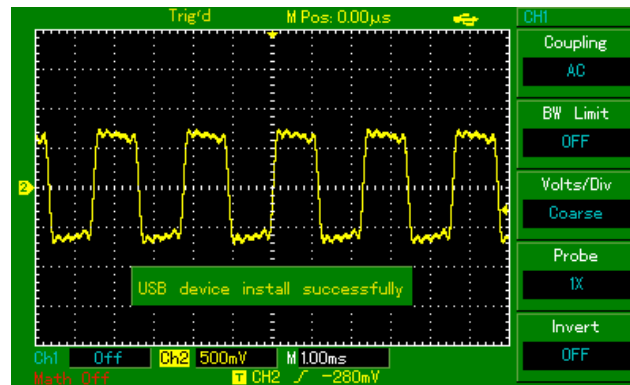


Abbildung 8: Die synthetisierte Rechteckspannung.

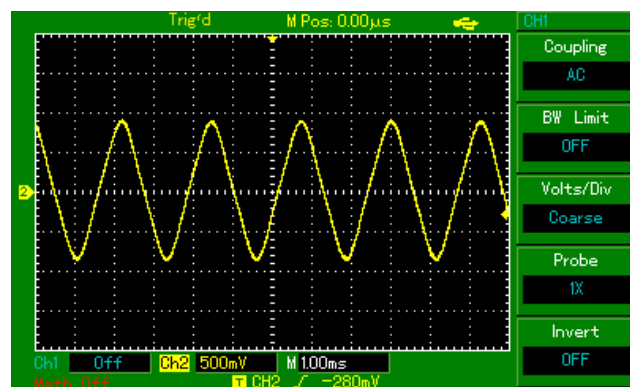


Abbildung 9: Die synthetisierte Dreieckspannung.

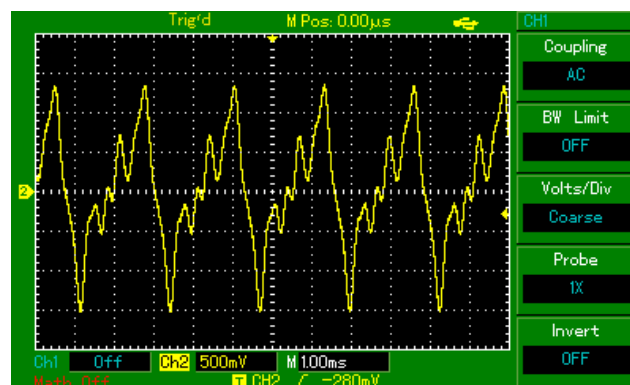


Abbildung 10: Die synthetisierte Sägezahnspannung.

Tabelle 2: Die für die Synthese der Funktionen notwendigen Spannungen.

Oberwellenzahl n	U_R/V und U_S/V	U_D/V
1	0,621	0,617
2	0,311	0,154
3	0,207	0,069
4	0,155	0,039
5	0,124	
6	0,104	
7	0,089	
8	0,078	
9	0,069	

5 Diskussion

Die berechneten Steigungen betragen

$$m_R = -1,08 \pm 0,06 \quad (7)$$

$$m_D = -1,84 \pm 0,09 \quad (8)$$

$$m_S = -1,01 \pm 0,07. \quad (9)$$

Die Steigungen m_R und m_S sollten -1 betragen, und weichen somit um 8 Prozent bzw. 1 Prozent ab. Die Steigung m_D sollte -2 betragen, und weicht um 8 Prozent von dem Wert ab. Die Abweichung der Dreiecksspannung kann sich dadurch erklären lassen, dass sie um $\frac{1}{n^2}$ abfällt, und es unmöglich war, mehr als 8 Amplituden zu messen. Die Messung der Amplituden der Sägezahnspannung lief am genauesten. Insgesamt entspricht der Abfall der Amplituden aber in etwa den theoretischen Werten, obwohl das Ablesen der Werte am Oszilloskop nur ungenau vorgenommen werden konnte, da dies ohne Hilfsmittel stattfinden konnte und die Amplituden nicht konstant auf einem Wert standen.

Die Synthese der Dreieck- und Sägezahnspannung konnte nicht genau stattfinden, obwohl die Formen der Spannungen mit kleinen Abweichungen auf den Abbildungen zu erkennen sind. Die Amplituden sind vor allem bei der Dreiecksspannung zu weit gefallen, und somit konnten nur 2 Oberwellen eingestellt werden, da sich am Oberwellengenerator keine niedrigeren Spannungen als 0,039 Volt einstellen ließ. Somit ist der Oberwellengenerator als Fehlerquelle zu nennen.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch 351, Fourier-Analyse und Synthese*. 17. Dez. 2018. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V351.pdf>.
- [2] mathe online. *Fourierreihen*. 17. Dez. 2018. URL: <https://www.mathe-online.at/mathint/fourier/i.html>.