

V354

# **Gedämpfte und erzwungene Schwingungen**

Kalina Toben

kalina.toben@tu-dortmund.de

Daniel Wall

daniel.wall@tu-dortmund.de

Durchführung: 04.12.2018

Abgabe: 11.12.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>3</b>
2.1 Gedämpfte Schwingungen . . . . .	3
2.2 Erzwungene Schwingungen . . . . .	5
<b>3 Durchführung</b>	<b>7</b>
<b>4 Auswertung</b>	<b>9</b>
4.1 Zeitabhängigkeit der Amplitude . . . . .	9
4.2 Bestimmung des Dämpfungswiderstands . . . . .	11
4.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung . . . . .	11
4.4 Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung . . . . .	13
<b>5 Diskussion</b>	<b>15</b>
<b>Literatur</b>	<b>16</b>

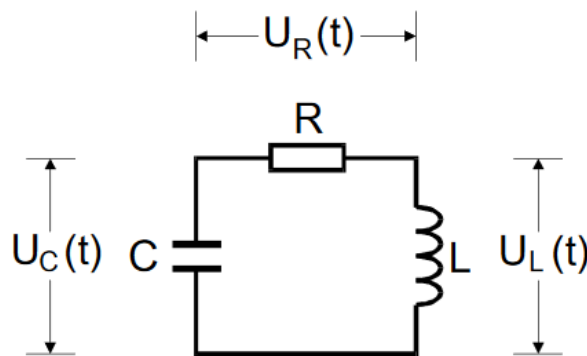
# 1 Zielsetzung

In diesem Versuch wird die Zeitabhängigkeit der Amplitude eines gedämpften Schwingkreises und der Dämpfungswiderstand bestimmt. Zudem wird die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung und der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Erregerspannung gemessen.

## 2 Theorie

### 2.1 Gedämpfte Schwingungen

Besteht ein Schaltkreis aus einer Induktivität  $L$ , realisiert durch eine Spule, und einem Kondensator mit der Kapazität  $C$ , führt das System ungedämpfte Schwingungen durch. Die Energie pendelt zwischen den Speichern hin und her und führt deshalb periodische Schwingungen durch. Wird dem Schaltkreis ein ohmscher Widerstand  $R$  hinzugefügt, nimmt die Energie mit der Zeit ab, die Amplituden von Strom und Spannung fallen, und das System führt gedämpfte Schwingungen aus. Ein Aufbau eines solchen Schwingkreises ist in Abbildung (1) dargestellt.



**Abbildung 1:** Aufbau eines RLC-Schwingkreises. [2, S.1]

Mit Hilfe des 2. Kirchhoffschen Gesetzes kann man die Differentialgleichung für den Schaltkreis aufstellen:

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0. \quad (1)$$

Setzt man die Gleichungen

$$U_R(t) = RI(t) \quad (2)$$

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad (3)$$

$$U_L(t) = L \frac{dI}{dt} \quad (4)$$

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (5)$$

mit  $Q(t)$  als Ladung in die DGL ein, und leitet einmal ab, ergibt sich

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0. \quad (6)$$

Setzt man den Ansatz

$$I(t) = U e^{j\omega t}$$

in die DGL ein, ergibt sich die charakteristische Gleichung

$$\omega^2 - j\frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} = 0 \quad (7)$$

mit

$$\omega_{1,2} = j\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (8)$$

Die Gleichung lässt sich schreiben als

$$I(t) = e^{-2\pi\mu t} (U_1 e^{j2\pi\nu t} + U_2 e^{-j2\pi\nu t}) \quad (9)$$

mit den Abkürzungen

$$2\pi\mu = \frac{R}{2L} \quad (10)$$

$$2\pi\nu = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (11)$$

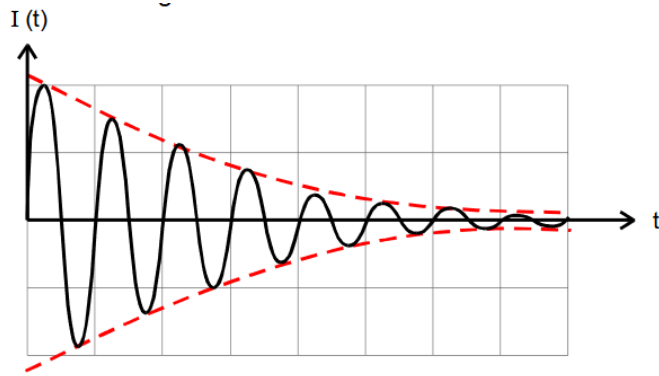
Je nachdem ob  $\frac{1}{LC}$  größer oder kleiner  $\frac{R^2}{4L^2}$  ist, also  $\nu$  reell oder imaginär ist, sieht  $I(t)$  anders aus. Somit muss eine Fallunterscheidung getroffen werden. Im Ersten Fall sei  $\nu$  reell. Die DGL ergibt sich dann zu

$$I(t) = A e^{-2\pi\mu t} \cos(2\pi\nu t + \eta). \quad (12)$$

Man erkennt, dass diese Gleichung eine harmonische Schwingung beschreibt, mit  $\nu$  als Frequenz, und exponentiell abklingender Amplitude. Sie stellt die gedämpfte Schwingung dar. Die Abklingdauer dieser Schwingung, bestimmt sich durch

$$T_{ex} = \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{2L}{R}, \quad (13)$$

und nach dieser hat die Amplitude ihren ursprünglichen Wert angenommen. Darstellen lässt sich eine gedämpfte Schwingung durch die Abbildung (2).



**Abbildung 2:** Darstellung einer gedämpften Schwingung. [2, S.4]

Betrachtet man nun den zweiten fall, also dass  $\nu$  imaginär ist, verhält sich die Schwingung nicht mehr oszillatorisch, und die aperiodische Dämpfung tritt ein. Die aperiodische Dämpfung ist in Abbildung (3) dargestellt.  $I(t)$  nähert sich in diesem Fall am schnellsten null an. Es gilt dann außerdem

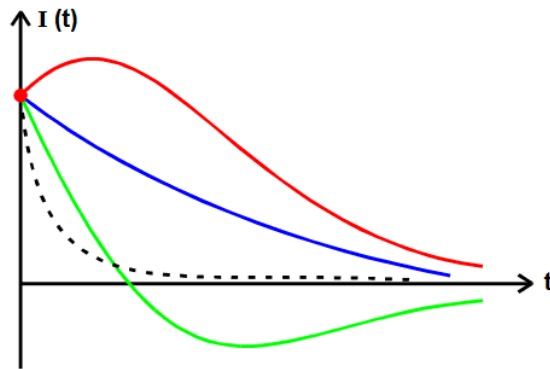
$$I(t) \propto e^{-(2\pi\mu - i2\pi\nu)t}. \quad (14)$$

Gilt

$$\frac{1}{LC} = \frac{R_{ap}^2}{4L^2}, \quad (15)$$

ergibt sich die DGL zu

$$I(t) = Ae^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}. \quad (16)$$



**Abbildung 3:** Darstellung des aperiodischen Grenzfalls. [2, S.5]

## 2.2 Erzwungene Schwingungen

Wirkt an einen Schwingkreis eine äußere periodische Kraft, führt das System erzwungene Schwingungen aus. Wird zum Beispiel eine Sinusspannung als Spannungsquelle eingeschaltet, wie in Abbildung (4) zu sehen ist, nimmt die Differentialgleichung folgende

Gestalt an:

$$LC \frac{d^2 U_C}{dt^2} + RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = U_0 e^{j\omega t}. \quad (17)$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$U = \frac{U_0(1 - LC\omega^2 - j\omega RC)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}. \quad (18)$$

Die zugehörige Phase wird durch

$$\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right) \quad (19)$$

beschrieben. Die Resonanzkurve, also die Abhängigkeit der Kondensatorspannung  $U_C$  von der Frequenz der Erregerspannung, wird durch

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (20)$$

beschrieben.  $U_C$  kann bei einer endlichen Frequenz ein Maximum erreichen, welches als Resonanz mit Resonanzfrequenz  $\omega_{res}$  bezeichnet wird. Diese lautet

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \quad (21)$$

Im Falle der schwachen Dämpfung

$$\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}$$

kann  $U_C$  die Spannung  $U_0$  um den Gütefaktor

$$q = \frac{1}{\omega_0 RC} \quad (22)$$

übertreffen

$$U_{C,max} = \frac{1}{\omega_0 RC} U_0 \quad (23)$$

und gegen unendlich gehen, wobei dann die Resonanzkatastrophe vorliegt. Die Schärfe der Resonanz kann man durch die Breite der Resonanzkurve beschreiben, für welche gilt:

$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L}. \quad (24)$$

Der Zusammenhang zwischen Güte und Breite kann durch

$$q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-} \quad (25)$$

dargestellt werden.

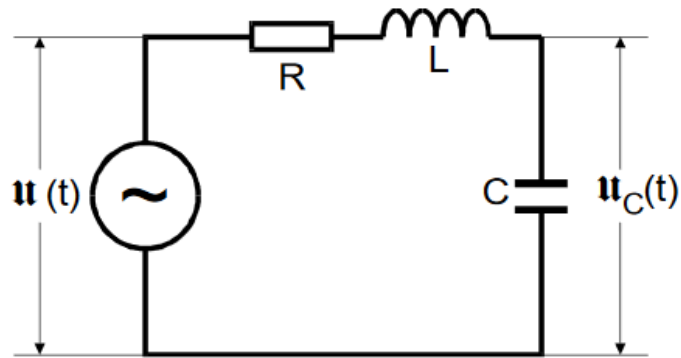


Abbildung 4: Schaltung mit einer Sinusspannung als Spannungsquelle. [2, S.6]

### 3 Durchführung

Für die Untersuchung der Zeitabhängigkeit der Amplitude, wird die in Abbildung (5) dargestellte Schaltung verwendet.

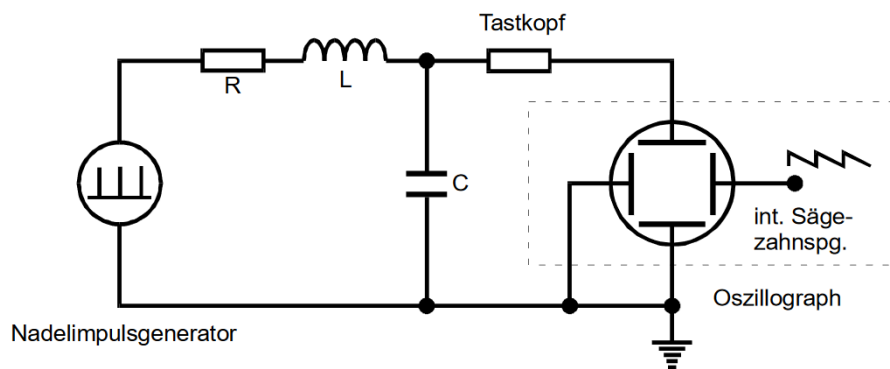


Abbildung 5: Messschaltung zur Bestimmung der zeitabhängigen Amplitude. [2, S. 11]

Um gedämpfte Schwingungen zu erzeugen, wird durch eine Rechteckspannung ein Impuls an den Schwingkreis gegeben. Ein Tastkopf ist notwendig, um den Eingangswiderstand des Oszillographen verschwindend gering zu halten. Es werden für zehn verschiedene Zeiten die Amplitude am Oszilloskop abgelesen und damit der effektive Dämpfungswiderstand ermittelt. Die gegebenen Daten für die Bauteile sind durch

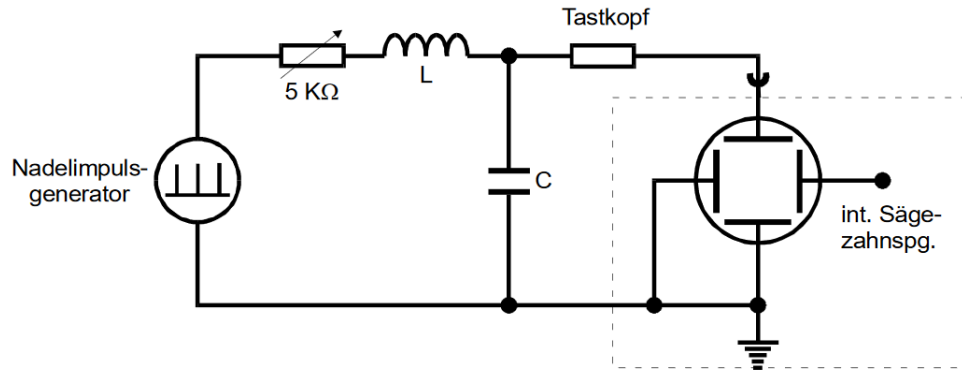
$$L = 16.78 \pm 0.009 \text{ mH}$$

$$C = 2.066 \pm 0.006 \text{ nF}$$

$$R_1 = 67.2 \pm 0.2 \text{ } \Omega$$

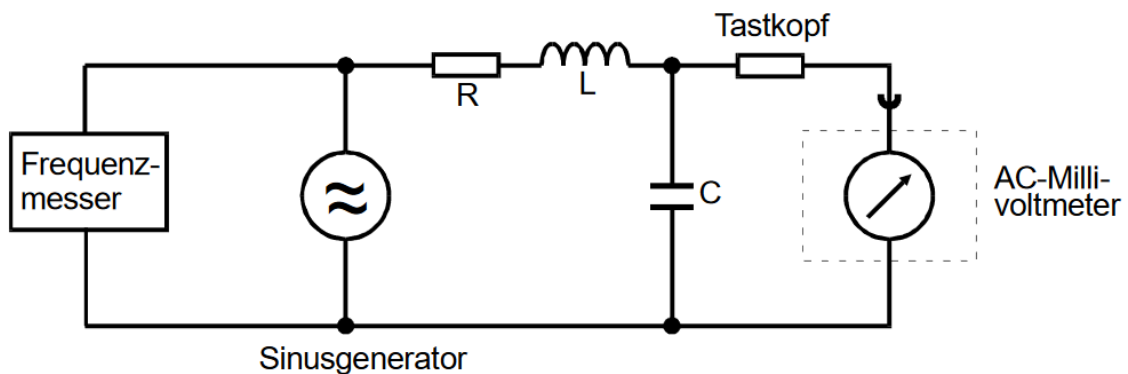
$$R_2 = 682 \pm 1 \text{ } \Omega$$

gegeben. Bei diesem Messvorgang wird der Widerstand  $R_1$  genommen. Als nächstes wird der Dämpfungswiderstand für den aperiodischen Grenzfall bestimmt. Das geschieht durch Aufbau der Schaltung in Abbildung (6). Der regelbare Widerstand wird auf seinen Maximalwert gestellt und dann runter gedreht. Dabei wird der Graph auf dem Oszillosgraph beobachtet, denn stellt sich ein Überschwingen ein, muss der Widerstand wieder höher gestellt werden. Wenn kein Überschwingen mehr auftritt, wird der Wert für den Widerstand abgelesen.



**Abbildung 6:** Messschaltung für den aperiodischen Grenzfall. [2, S. 12]

Soll nun die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung untersucht werden, wird der Schaltkreis wie in Abbildung (7) aufgebaut. Es wird diesmal eine Sinusspannung angelegt. Da der dort zu sehende Tastkopf einen Frequenzgang besitzt, muss auch die Erregerspannung  $U_0$  in Abhängigkeit der Frequenz gemessen werden. Es werden für folgende Intervalle Erregerspannung und Kondensatorpannung gemessen:  $2\text{ kHz}$  bis  $22\text{ kHz}$  in  $2\text{ kHz}$  Schritten,  $22\text{ kHz}$  bis  $32\text{ kHz}$  in  $1\text{ kHz}$  Schritten,  $32\text{ kHz}$  bis  $52\text{ kHz}$  in  $2\text{ kHz}$  Schritten, und daraus der Quotient gebildet. Diesmal wird der Widerstand  $R_2$  benutzt.



**Abbildung 7:** Messschaltung zur Bestimmung der frequenzabhängigen Amplitude. [2, S. 13]



Im letzten Versuchsteil wird die Frequenzabhängigkeit der Phase ermittelt. Die Schaltung ist in Abbildung (8) dargestellt. Es wird der zeitliche Abstand  $a$  der Nulldurchgänge von Kondensatorspannung und Erregerspannung gemessen, wie in Abbildung (9) dargestellt. Die außerdem benötigte Periodendauer wird durch die Frequenz bestimmt, die vorher schon gemessen wurde.

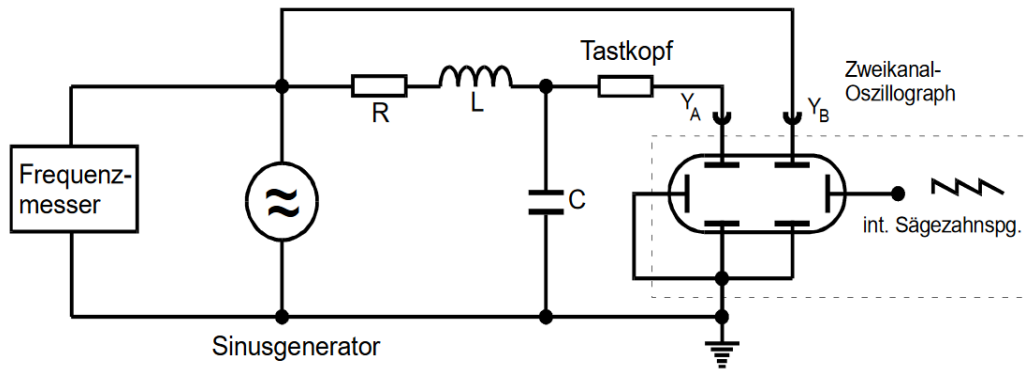


Abbildung 8: Messschaltung zur Bestimmung der frequenzabhängigen Phase. [2, S. 13]

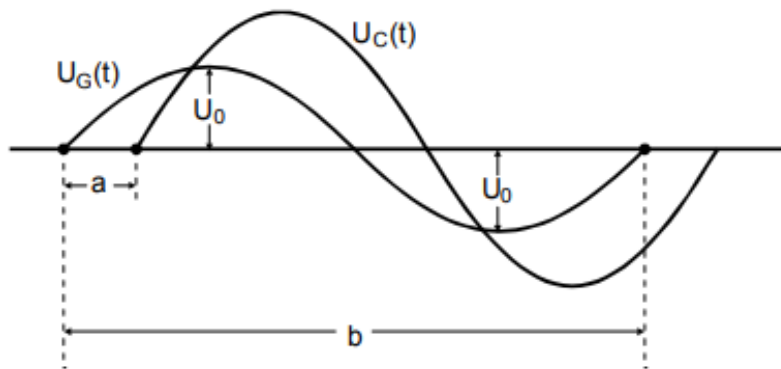


Abbildung 9: Bestimmung der Nulldurchgänge. [1, S. 7]

## 4 Auswertung

### 4.1 Zeitabhängigkeit der Amplitude

Die Form der Einhüllenden ist, da  $U(t) \propto I(t)$ , durch

$$A = A_0 e^{-2\pi\mu t}$$

gegeben.

Die aufgenommenen Wertepaare der Spannungsamplitude  $U_C$  und der Zeit  $t$  befinden sich in Tabelle 1. Mithilfe exponentieller Regression mittels Python erhält man

$$A_0 = (31,32 \pm 0,63) \text{ V}$$

$$\mu = (194,51 \pm 13,15) \frac{1}{\text{s}}.$$

**Tabelle 1:** Messdaten zur Bestimmung des effektiven Dämpfungswiderstandes sowie der Abklingdauer.

$U_C / \text{V}$	$t / 10^{-6} \text{s}$	$U_C / \text{V}$	$t / 10^{-6} \text{s}$
20	32,2	286	21,2
58	29,8	322	20,6
96	27,6	362	20,4
134	25,8	398	19,8
172	24,6	436	19,4
210	23,4	474	18,8
248	22		

Über Gleichung (10) und (13) ergibt sich dann für den effektiven Dämpfungswiderstand  $R_{\text{eff}}$  und die Abklingdauer  $T_{\text{ex}}$

$$R_{\text{eff}} = 4\pi L\mu$$

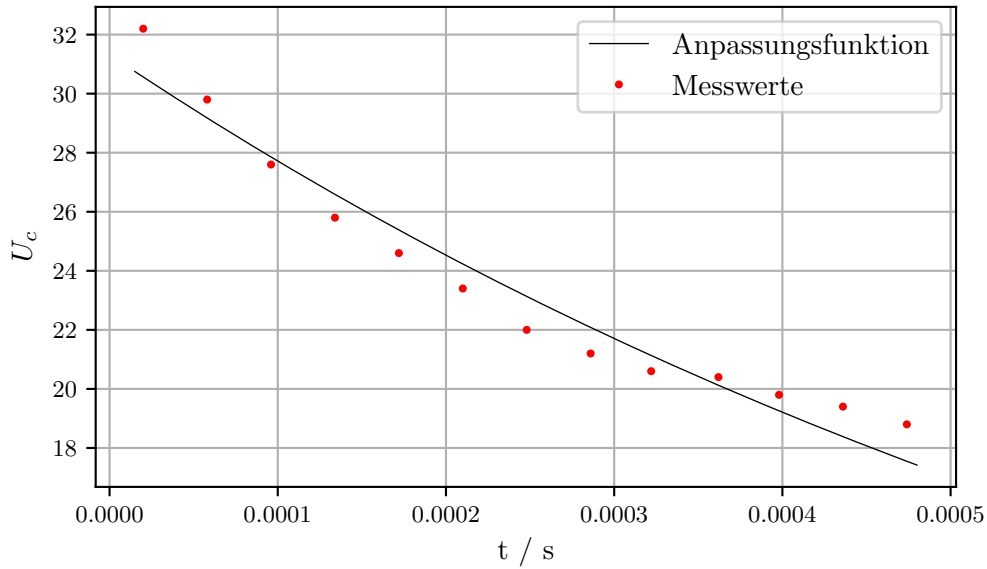
$$= (41,0 \pm 2,8) \Omega$$

$$T_{\text{ex}} = (820 \pm 60) \mu\text{s}.$$

Die zugehörigen Fehler ergeben sich durch die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung der Form

$$\sigma_{R_{\text{eff}}} = \sqrt{16L^2\pi^2\sigma_\mu^2 + 16\mu^2\pi^2\sigma_L^2}$$

$$\sigma_{T_{\text{ex}}} = \sqrt{\frac{4L^2\sigma_{R_{\text{eff}}}^2}{R_{\text{eff}}^4} + \frac{4\sigma_L^2}{R_{\text{eff}}^2}}.$$



**Abbildung 10:** Abklingvorgang des gedämpften  $RLC$ -Schwingkreises und Ausgleichsfunktion.

## 4.2 Bestimmung des Dämpfungswiderstands

Der Dämpfungswiderstand, für den der aperiodische Grenzfall eintritt, wird als

$$R_{\text{ap,ex}} = 3,05 \text{ k}\Omega$$

gemessen. Der theoretische Wert des Dämpfungswiderstandes wird mit Gleichung (13) berechnet. Der Fehler errechnet sich über die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_{R_{\text{ap,th}}} = \sqrt{\frac{\sigma_L^2 \frac{L}{C}}{L^2} + \frac{\sigma_C^2 \frac{L}{C}}{C^2}}$$

Somit ergibt sich für den theoretischen Dämpfungswiderstand

$$R_{\text{ap,th}} = (5,70 \pm 0,02) \text{ k}\Omega.$$

## 4.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

Die zur Berechnung der Resonanzüberhöhung  $q$  aufgenommenen Wertepaare, bestehend aus der Spannungsamplitude  $U_c$  und der Frequenz  $f$ , befinden sich zusammen mit der normierten Spannungsamplitude in Tabelle 2. Ferner werden die normierten Kondensatorspannungen in Abbildung 2 gegen die Frequenz aufgetragen. Die Resonanzüberhöhung

$$q_{\text{ex}} = 3,8$$

wird Abbildung 11 entnommen. Mit der Gleichung (22) ergibt sich für den theoretischen Wert der Resonanzüberhöhung

$$q_{\text{th}} = 4,179 \pm 0,014,$$

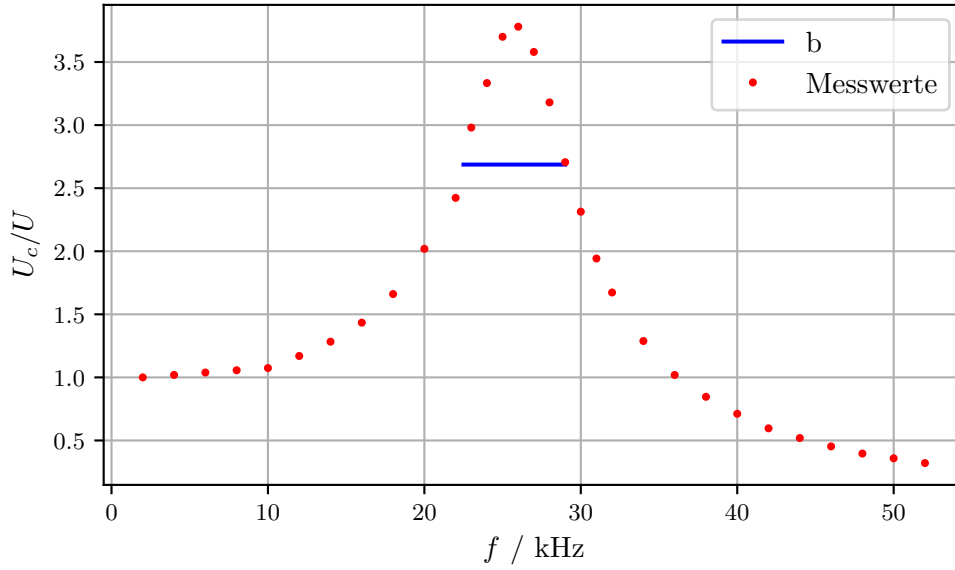
wobei der Fehler mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung in der Form

$$\sigma_{q_{\text{th}}} = \sqrt{\frac{L\sigma_C^2}{4C^3R^2} + \frac{\sigma_L^2}{4CLR^2} + \frac{L\sigma_R^2}{CR^4}}$$

ermittelt wird.

**Tabelle 2:** Messdaten zur Bestimmung Resonanzüberhöhung  $q_{\text{ex}}$ .

$U_c / \text{V}$	$\frac{U_c}{U_0}$	$f / \text{KHz}$	$U_c / \text{V}$	$\frac{U_c}{U_0}$	$f / \text{KHz}$	$U_c / \text{V}$	$\frac{U_c}{U_0}$	$f / \text{KHz}$
2	1	10,2	23	2,980	30,4	36	1,019	10,6
4	1,019	10,4	24	3,333	34	38	0,846	8,8
6	1,038	10,8	25	3,7	37	40	0,711	7,4
8	1,056	11,2	26	3,78	37,8	42	0,596	6,2
10	1,074	11,6	27	3,58	35,8	44	0,519	5,4
12	1,169	12,4	28	3,18	31,8	46	0,452	4,8
14	1,283	13,6	29	2,705	27,6	48	0,396	4,2
16	1,433	15,2	30	2,313	23,6	50	0,358	3,8
18	1,660	17,6	31	1,942	20,2	52	0,320	3,4
20	2,019	21	32	1,673	17,4			
22	2,423	25,2	34	1,288	13,4			



**Abbildung 11:** Lineare Darstellung der normierten Kondensatorspannung  $\frac{U_c}{U_0}$  in Abhängigkeit der Frequenz  $f$ .

Der experimentelle Wert der Halbwertsbreite  $b_{\text{ex}}$  wird aus der Abbildung als

$$b_{\text{ex}} = 6\,500 \frac{1}{s}$$

abgelesen. Mit Gleichung (24) wird die theoretische Halbwertsbreite

$$b_{\text{th}} = (6\,470 \pm 40) \frac{1}{s}$$

bestimmt. Der zugehörige Fehler wird über die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_{b_{\text{th}}} = \sqrt{\frac{\sigma_R^2}{2\pi L^2} + \frac{R^2 \sigma_L^2}{2\pi L^4}}$$

ermittelt.

#### 4.4 Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung

In Abbildung 9 erkennt man die für die Phasenverschiebung benötigten Parameter a und b. Die Phasenverschiebung lässt sich nun durch

$$\phi = \frac{a}{b} \cdot 2\pi$$

berechnen und wird zusammen mit den Messwerten für die Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung in Tabelle 3 festgehalten. Ferner wird in Abbildung 12 die Phasenverschiebung  $\phi$  halblogarithmischer gegen die Frequenz  $f$  aufgetragen.

Mittels Gleichung (21) wird die Resonanzfrequenz  $f_{\text{res}}$  bestimmt. Die Frequenzen  $f_1$  und  $f_2$  für die Phasenverschiebung  $\frac{\pi}{4}$  und  $\frac{3\pi}{4}$  werden nach Gleichung (19) berechnet. Die entsprechenden experimentell ermittelten Werte werden Abbildung 12 entnommen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} f_{\text{res,ex}} &= 31,5 \text{ kHz} \\ f_{\text{res,th}} &= (26,64 \pm 0,08) \text{ kHz} \\ f_{1,\text{ex}} &= 23 \text{ kHz} \\ f_{1,\text{th}} &= (23,99 \pm 0,07) \text{ kHz} \\ f_{2,\text{ex}} &= 30 \text{ kHz} \\ f_{2,\text{th}} &= (30,46 \pm 0,1) \text{ kHz}. \end{aligned}$$

**Tabelle 3:** Messdaten zur Bestimmung der frequenzabhängigen Phasenverschiebung.

$f / \text{kHz}$	$a / \mu\text{s}$	$\phi / \text{rad}$	$f / \text{kHz}$	$a / \mu\text{s}$	$\phi / \text{rad}$	$f / \text{kHz}$	$a / \mu\text{s}$	$\phi / \text{rad}$
2	1,64	0,0206	23	5,20	0,7515	36	12,3	2,7822
4	1,48	0,0372	24	6,32	0,9530	38	12	2,8651
6	1,68	0,0633	25	7,60	1,1939	40	11,5	2,8903
8	1,53	0,0769	26	9,20	1,5029	42	11,1	2,9292
10	1,68	0,1056	27	10,60	1,7982	44	10,7	2,9581
12	1,84	0,1387	28	11,7	2,0584	46	10,3	2,9770
14	1,91	0,1680	29	12,3	2,2412	48	10	3,0160
16	2,06	0,2071	30	12,8	2,4127	50	9,5	2,9845
18	2,28	0,2579	31	12,9	2,5126	52	9,4	3,0712
20	2,66	0,3343	32	12,9	2,5937			
22	3,40	0,4700	34	12,7	2,7131			

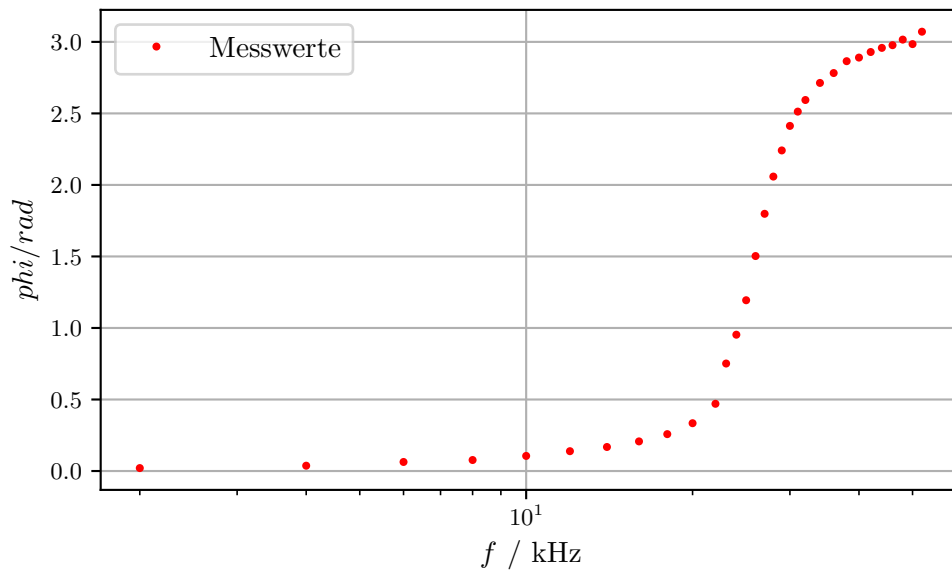


Abbildung 12: Phasenverschiebung  $\phi$  in Abhängigkeit der Frequenz  $f$ .

## 5 Diskussion

Im Allgemeinen fällt auf, dass die theoretisch errechneten Werte meist höher sind als die experimentell bestimmten. Es folgt die Bestimmung der relativen Abweichung:

$$R_{\text{eff}} = (41,0 \pm 2,8) \Omega \quad R_1 = (67,2 \pm 0,2) \Omega$$

$$\Rightarrow \text{Relative Abweichung} = 38,99\%$$

$$R_{\text{ap,ex}} = 3,05 \text{ k}\Omega \quad R_{\text{ap,th}} = (5,7 \pm 0,02) \text{ k}\Omega$$

$$\Rightarrow \text{Relative Abweichung} = 46,49\%$$

$$q_{\text{ex}} = 3,8 \quad q_{\text{th}} = 4,179 \pm 0,014$$

$$\Rightarrow \text{Relative Abweichung} = 9,07\%$$

$$b_{\text{ex}} = 6\,500 \frac{1}{s} \quad b_{\text{th}} = (6\,470 \pm 40) \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \text{Relative Abweichung} = 0,46\%$$

$$f_{\text{res,ex}} = 31,5 \text{ kHz} \quad f_{\text{res,th}} = (26,64 \pm 0,08) \text{ kHz}$$

$$\Rightarrow \text{Relative Abweichung} = 18,24\%$$

$$f_{1,\text{ex}} = 23 \text{ kHz} \quad f_{1,\text{th}} = (23,99 \pm 0,07) \text{ kHz}$$

$$\Rightarrow \text{Relative Abweichung} = 4,13\%$$

$$f_{2,\text{ex}} = 30 \text{ kHz} \quad f_{2,\text{th}} = (30,46 \pm 0,1) \text{ kHz}$$

$$\Rightarrow \text{Relative Abweichung} = 1,51\%.$$

Die Abweichungen lassen sich unter anderem dadurch erklären, dass die Innenwiderstände sämtlicher Geräte (Spulen, Drähte, Oszilloskop) nicht miteinbezogen werden konnten, sodass diese Fehlerquelle in der gesamten Messung nicht auszuschließen ist. Weiterhin kann es zu systematischen Ablesefehlern kommen, da auch die Cursorfunktion manuell bedient wird und somit nicht exakt ist.

Im Angesicht dieser Tatsachen liegen die meisten bestimmten Werte dennoch in einem angemessenen Bereich, was sich in den Verläufen der Graphen widerspiegelt.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch 353, Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V353.pdf>.
- [2] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch 354, Gedämpfte und erzwungene Schwingungen*. 6. Dez. 2018. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V354.pdf>.