

V301

Leerlaufspannung und Innenwiderstand von Spannungsquellen

Kalina Toben

kalina.toben@tu-dortmund.de

Daniel Wall

daniel.wall@tu-dortmund.de

Durchführung: 08.01.2019

Abgabe: 15.01.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
3 Durchführung	4
4 Auswertung	6
4.1 Bestimmung des Innenwiderstands und der Leerlaufspannung einer Monzelle	6
4.2 Bestimmung des Innenwiderstands und der Leerlaufspannung einer Monzelle mit angelegter Gegenspannung	7
4.3 Bestimmung des Innenwiderstands und der Leerlaufspannung einer Sinus- und Rechteckspannung	9
4.4 Systematische Fehler bei der Messung der Leerlaufspannung	11
4.5 Bestimmung der Leistung und des Belastungswiderstands	12
5 Diskussion	13
Literatur	14

1 Zielsetzung

Ziel ist es, die Leerlaufspannung und den Innenwiderstand unterschiedlicher Spannungsquellen zu messen.

2 Theorie

Wird einer Spannungsquelle kein Strom entnommen, so liegt an den Ausgangsklemmen die Leerlaufspannung U_0 an. Wird in den Schaltkreis ein Lastwiderstand R_a geschaltet, fließt ein endlicher Strom I und die Klemmenspannung U_K , welche an einer belasteten Spannungsquelle abgegriffen werden kann, sinkt auf einen Wert unterhalb U_0 ab. Der Spannungsquelle wird also ein Innenwiderstand R_i zugeordnet. Aufgrund des Zweiten Kirchhoff'schen Gesetzes gilt für solch einen Schaltkreis (Abbildung 1)

$$U_0 = IR_i + IR_a.$$

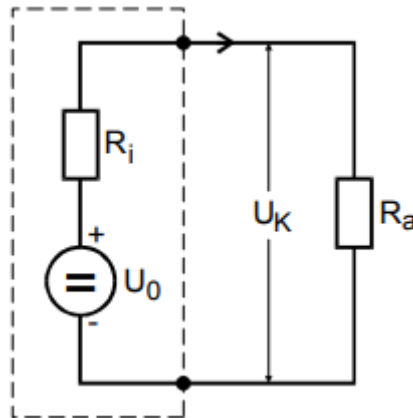


Abbildung 1: Ersatzschaltbild einer realen Spannungsquelle U_0 mit Innenwiderstand R_i und Lastwiderstand R_a . [1, S. 1]

Da

$$U_K = IR_a = U_0 - IR_i \quad (1)$$

gilt, ist es sinnvoll zur Messung der Leerlaufspannung den Widerstand R_a des Messgerätes so groß wie möglich zu halten. Wegen des daraus resultierend geringen Stromes kann so

$$U_K \approx U_0$$

angenommen werden. Der Innenwiderstand R_i bewirkt auch, dass einer idealen Spannungsquelle nicht unendlich elektrische Leistung entnommen werden kann. Die an R_a abgegebene Leistung lässt sich mit

$$N = I^2 R_a \quad (2)$$

bestimmen. Bei der Leistungsanpassung wird ein R_a gewählt, bei dem N maximal wird. Bei elektrischen Generatoren ist der Innenwiderstand nicht durch Gleichstromwiderstand, sondern durch einen Rückkopplungsmechanismus festgelegt. Ändert sich also der Belastungsstrom, so ändert sich auch das elektrische Verhalten von diesem, sodass der Innenwiderstand als differentielle Größe

$$R_i = \frac{dU_K}{dI}$$

eingeführt wird.

3 Durchführung

Eine Monozelle, welche aus idealer Spannungsquelle und Innenwiderstand besteht, wird an ein Voltmeter angeschlossen, um die Leerlaufspannung der Monozelle zu bestimmen. Das Voltmeter besitzt einen Widerstand von

$$R_V = 10 \text{ M}\Omega.$$

Es wird ein variierbarer Belastungswiderstand ($0\text{-}50 \Omega$) in Reihe geschaltet hinzugefügt.

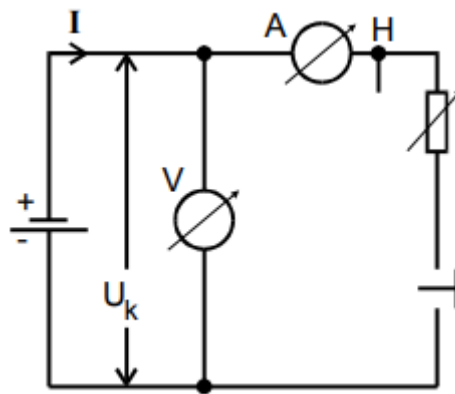


Abbildung 2: Schaltbild zur Bestimmung der Leerlaufspannung U_0 und Innenwiderstand R_i . [1, S. 3]

Mit einem ebenfalls in Reihe geschalteten Amperemeter lässt sich eine Beziehung zwischen Klemmenspannung U_K und Belastungsstrom I bestimmen. Das Schaltbild ist in Abbildung 2 dargestellt. Es werden 10 Wertepaare für unterschiedliche Widerstände notiert. Nun wird hinter den Belastungswiderstand eine Gegenspannung geschaltet, die etwa 2 V größer ist, sodass ein Strom in entgegengesetzter Richtung fließt (Abbildung 3). Es werden erneut 10 Wertepaare von U_K und I notiert. Für die letzten Messungen wird die Gegenspannung ausgebaut und die Monozelle durch einen RC-Generator ersetzt, der zunächst eine Rechteckspannung von 1 V generiert. Der Widerstand R_a wird durch einen ersetzt, der einen Variationsbereich $20\text{-}250 \Omega$ aufweist. Es werden erneut die gleichen 10 Wertepaare notiert. Zuletzt wird eine Sinusspannung von 1 V generiert und der Widerstand wird

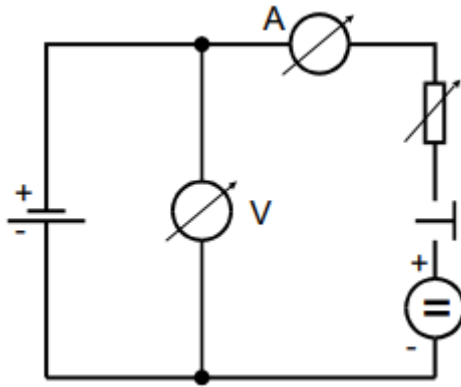


Abbildung 3: Schaltbild mit Gegenspannung. [1, S. 3]

durch einen mit einem Variationsbereich von $0,1 - 5 \text{ k}\Omega$ ersetzt. Die Messung wird erneut 10 mal durchgeführt.

4 Auswertung

Die gemessene Leerlaufspannung der Monozelle beträgt

$$U_0 = 1,4\text{V}.$$

Der Eingangswiderstand R_V beträgt

$$R_V = 10\text{M}\Omega.$$

4.1 Bestimmung des Innenwiderstands und der Leerlaufspannung einer Monzelle

Die gemessenen Werte für den Belastungsstrom und die Klemmenspannung sind in Tabelle (1) zu finden.

Tabelle 1: Belastungsstrom und Klemmenspannung einer Monozelle.

I/mA	U_K/V
91,5	0,90
70,0	1,10
65,0	1,15
58,0	1,17
47,0	1,19
41,0	1,23
36,0	1,25
32,0	1,27
29,0	1,30
25,0	1,32

Mit Hilfe einer linearen Ausgleichsrechnung der Form $y = ax + b$ wird der Innenwiderstand und die Leerlaufspannung bestimmt. Die Parameter und Fehler werden mit Python berechnet. In Abbildung (4) ist das zugehörige Diagramm dargestellt.

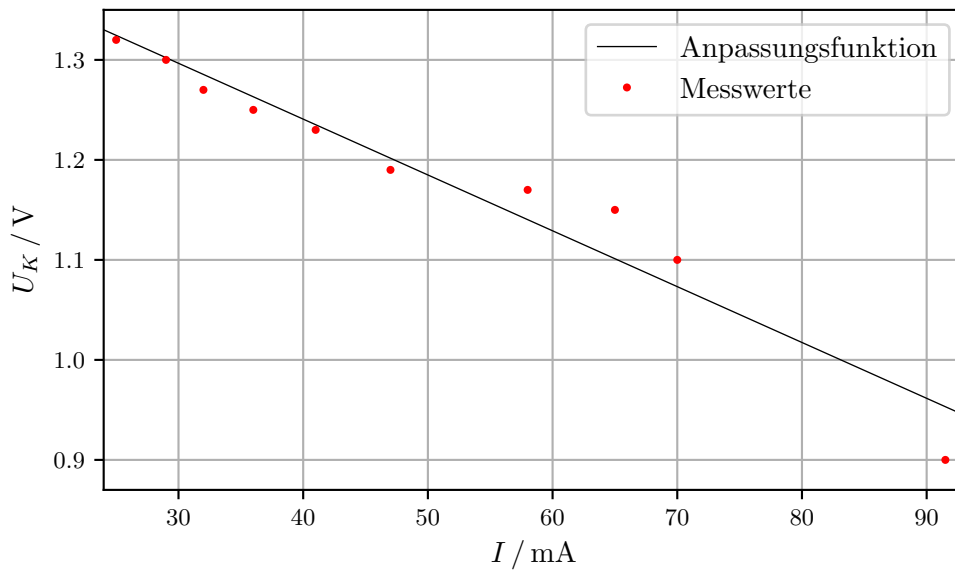


Abbildung 4: Klemmenspannung U_K der Monozelle aufgetragen gegen den Belastungsstrom I in Form einer linearen Ausgleichsgeraden, und die zugehörigen Messwerte.

Die Parameter betragen

$$a = (-5,58 \pm 0,48)\Omega$$

$$b = (1,46 \pm 0,03)\text{V}.$$

Die Steigung a ist betragsmäßig gleich dem Innenwiderstand R_i

$$R_i = (5,58 \pm 0,48)\Omega$$

und der y-Achsenabschnitt b ist gleich der Leerlaufspannung U_0

$$U_0 = (1,46 \pm 0,03)\text{V},$$

was sich aus Gleichung (1) ergibt.

4.2 Bestimmung des Innenwiderstands und der Leerlaufspannung einer Monzelle mit angelegter Gegenspannung

In Tabelle (2) sind die diesmal gemessene Spannung und Stromstärke dargestellt.

Tabelle 2: Stromstärke und Klemmenspannung einer Monozelle mit angelegter Gegen-
spannung.

I/mA	U_K/V
60	1,77
70	1,81
80	1,86
90	1,92
100	1,98
110	2,05
120	2,09
130	2,15
140	2,20
150	2,26

Wieder wird eine lineare Regression durchgeführt, welche in Abbildung (5) aufgezeigt ist.
Diesmal lauten die Parameter:

$$a = R_i = (5,56 \pm 0,08)\Omega$$

$$b = U_0 = (1,43 \pm 0,01)\text{V}.$$

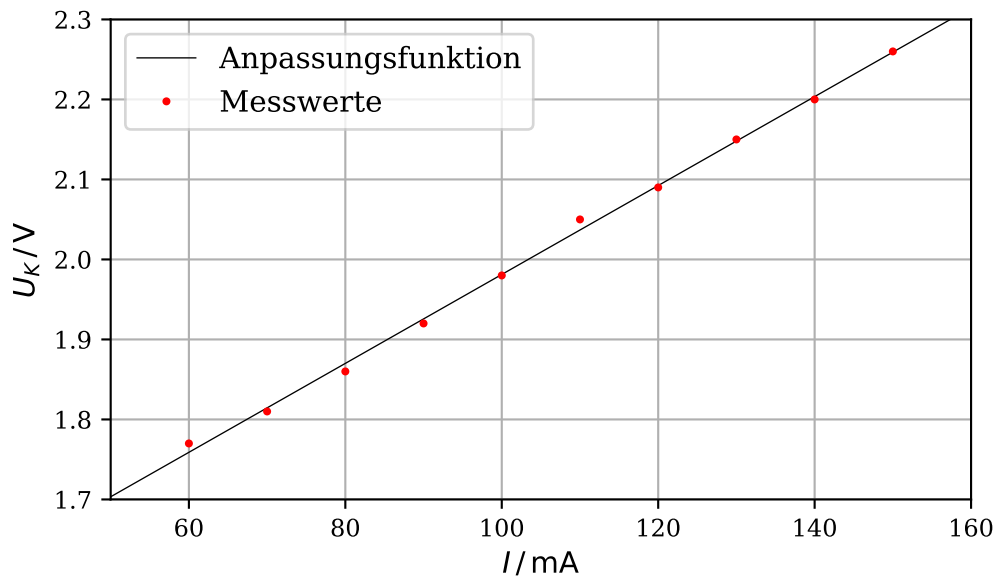


Abbildung 5: Klemmenspannung U_K der Monozelle bei angelegter Gegen-
spannung aufgetragen gegen den Belastungsstrom I in Form einer linearen Aus-
gleichsgeraden, und die zugehörigen Messwerte.

4.3 Bestimmung des Innenwiderstands und der Leerlaufspannung einer Sinus- und Rechteckspannung

In Tabelle (3) sind die gemessenen Werte für die Rechteckspannung dargelegt, und in Tabelle (4) die der Sinusspannung. Die lineare Regression für die Rechteckspannung ist in Abbildung (6) aufgezeigt.

Tabelle 3: Belastungsstrom und Klemmenspannung bei angelegter Rechteckspannung.

I/mA	U/V
2,2	0,60
2,4	0,59
2,7	0,57
2,9	0,56
3,3	0,54
3,7	0,52
4,2	0,49
4,9	0,46
6,2	0,38
8,0	0,28

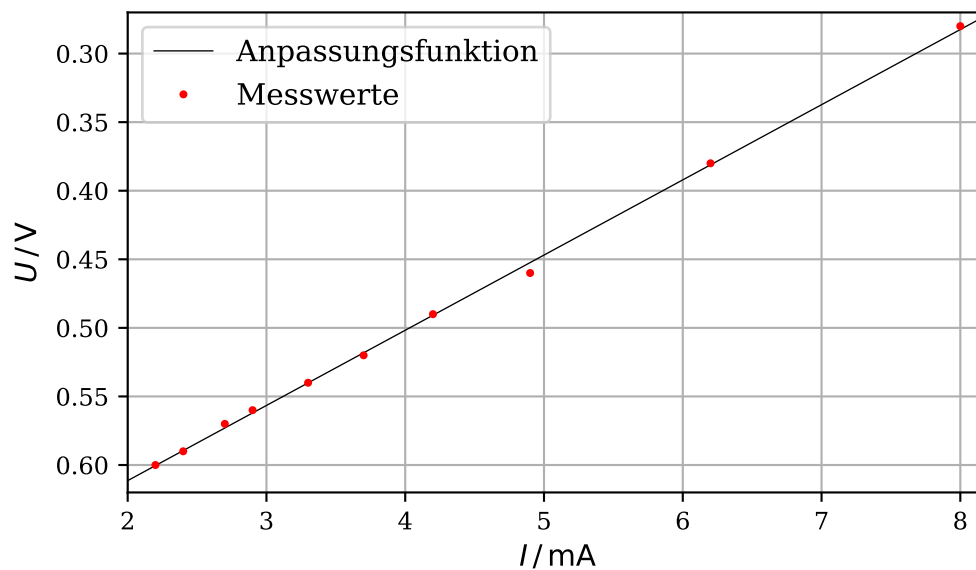


Abbildung 6: Klemmenspannung U der Rechteckspannung aufgetragen gegen den Belastungsstrom I in Form einer linearen Ausgleichsgeraden, und die zugehörigen Messwerte.

Die zugehörigen Parameter betragen:

$$a = (-54,82 \pm 0,58)\Omega$$

$$b = (0,72 \pm 0,002)V.$$

Der Innenwiderstand und die Leerlaufspannung bei der Rechteckspannung lauten

$$R_i = (54,82 \pm 0,58)\Omega$$

$$U_0 = (0,72 \pm 0,002)V.$$

Für die Sinusspannung wird analog verfahren; Abbildung (7) zeigt den Graphen.

Tabelle 4: Belastungsstrom und Klemmenspannung bei angelegter Sinusspannung.

I/mA	U/V
0,50	2,87
0,52	2,87
0,58	2,83
0,69	2,75
0,79	2,70
0,94	2,60
1,10	2,50
1,36	2,33
1,77	2,10
2,45	1,63

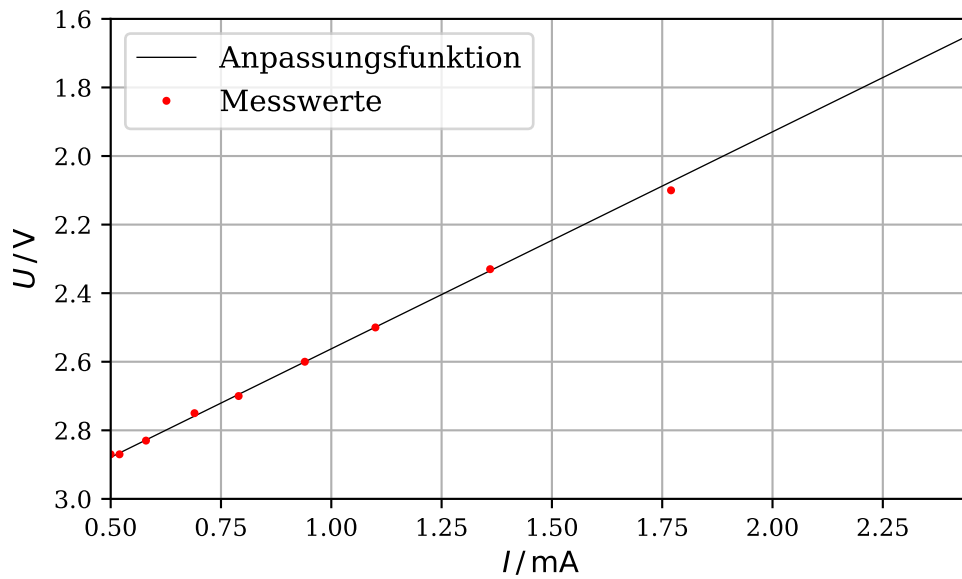


Abbildung 7: Klemmenspannung U der Sinusspannung aufgetragen gegen den Belastungsstrom I in Form einer linearen Ausgleichsgeraden, und die zugehörigen Messwerte.

Die Parameter lauten:

$$a = (-632,91 \pm 6,05)\Omega$$

$$b = U_0 = (3,20 \pm 0,007)\text{V}.$$

Also gilt für Innenwiderstand und Leerlaufspannung

$$R_i = (632,91 \pm 6,05)\Omega$$

$$U_0 = (3,20 \pm 0,007)\text{V}.$$

4.4 Systematische Fehler bei der Messung der Leerlaufspannung

Den systematischen Fehler bei der Messung der Leerlaufspannung berechnet man aus Gleichung (1):

$$U_0 = I(R_i + R_V) = \frac{U_K}{R_V}(R_i + R_V) = U_K + \frac{U_K R_i}{R_V}. \quad (3)$$

In dieser Gleichung ist U_K die oben gemessene Leerlaufspannung, also 1,4V. Der Wert für den Innenwiderstand R_i wurde in Abschnitt 4.1 berechnet. Der Fehler ist dann

$$\begin{aligned}\Delta U_0 &= U_0 - U_K = \frac{U_K R_i}{R_V} \\ &= (7,8 \pm 0,7) \cdot 10^{-7} \text{ V}.\end{aligned}$$

Der Fehler von jenem Wert lässt sich mit

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{d\Delta U_0}{dR_i}\right)^2 \Delta(R_i)^2}$$

berechnen, wobei $\Delta(R_i)$ der Fehler von R_i ist.

Schaltet man das Voltmeter hinter das reale Amperemeter, ändert sich die Spannung, da auch jenes einen Innenwiderstand R_{IA} hat. Der Fehler wäre dann analog

$$\Delta U_0 = \frac{U_K R_i}{R_V} + \frac{U_K R_{IA}}{R_V}.$$

4.5 Bestimmung der Leistung und des Belastungswiderstands

Die Formel zur Berechnung der Leistung lautet

$$N = U \cdot I, \tag{4}$$

und die zur Berechnung des Belastungswiderstands

$$R_a = \frac{U}{I}. \tag{5}$$

In Tabelle (5) sind die berechneten Werte aufgelistet.

Tabelle 5: Berechnete Leistung und berechneter Belastungswiderstand.

N/W	R/Ω
0.082	9.836
0.077	15.71
0.075	17.69
0.068	20.17
0.056	25.32
0.050	30.00
0.045	34.72
0.041	39.69
0.038	44.83
0.033	52.80

Die Kurve für die Leistung wird aus den Gleichungen (1) und (2) berechnet:

$$\begin{aligned} IR_a &= U_0 - IR_i \\ \Leftrightarrow I &= \frac{U_0}{R_a + R_i} \\ \rightarrow N &= \frac{U_0^2}{(R_a + R_i)^2} R_a \end{aligned}$$

Die in Tabelle (5) aufgelisteten Werte werden in Abbildung (8) dargestellt, sowie die Kurve $N = f(R_a)$.

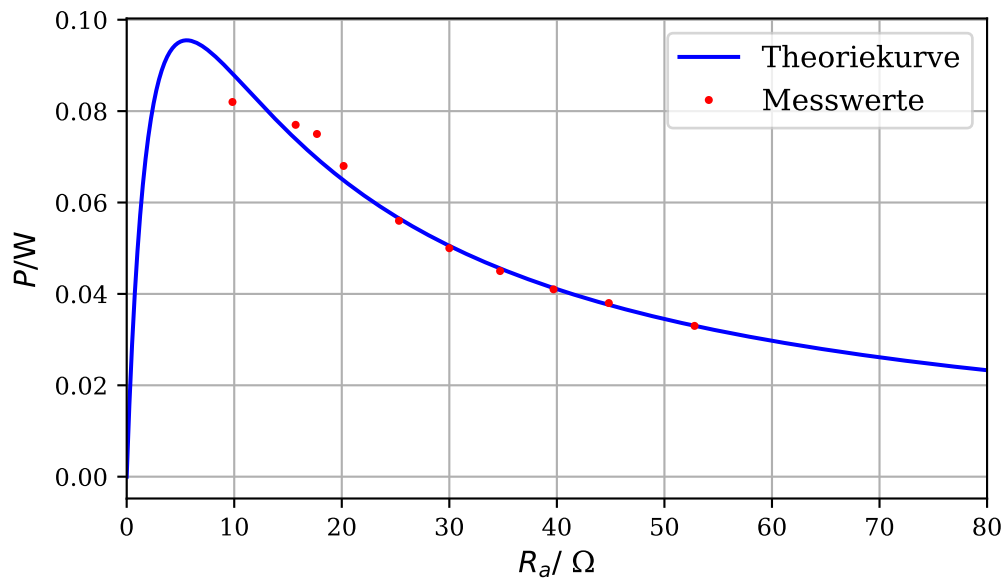


Abbildung 8: Die Kurve der Leistung einer Monozelle und die berechneten Werte.

5 Diskussion

Der theoretische Wert für die Leerlaufspannung beträgt

$$U_0 = 1,4\text{V},$$

und der experimentell bestimmte Wert beträgt

$$U_0 = (1,46 \pm 0,03)\text{V}.$$

Die prozentuale Abweichung der beiden Werte beträgt ca. 4,3 Prozent. Da außerdem der Fehler der Leerlaufspannung

$$\Delta U_0 = (7,8 \pm 0,7) \cdot 10^{-7} \text{ V}$$

sehr klein ist, können größere systematische oder statistische Fehlerquellen ausgeschlossen werden und die Messung als relativ genau beurteilt werden. Die zweite berechnete Leerlaufspannung beträgt

$$U_0 = (1,43 \pm 0,01)\text{V},$$

und die Abweichung liegt bei ca. 2,1 Prozent. Das oben gesagte kann also auch auf diese Messreihe übertragen werden. Für die restlichen Leerlaufspannungen und Innenwiderstände gibt es keine Theoriewerte, jedoch kann man anhand der Graphen sagen, dass die Messung genau verlief. Die Messwerte liegen nämlich ziemlich nah an bzw. auf der Ausgleichsgeraden.

Auch die Werte der Leistung liegen in gutem Bereich, da sie bis auf wenige Ausnahmen nah an der Kurve liegen.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch 301, Leerlaufspannung und Innenwiderstand von Spannungsquellen*. 9. Jan. 2019. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V301.pdf>.