

V105

## **Das Magnetische Moment**

Kalina Toben

kalina.toben@tu-dortmund.de

Daniel Wall

daniel.wall@tu-dortmund.de

Durchführung: 06.11.2018

Abgabe: 13.11.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1 Zielsetzung</b>   | <b>3</b>  |
| <b>2 Theorie</b>   | <b>3</b>  |
| 2.1 Theorie zur Bestimmung des magnetischen Moments unter Ausnutzung der Gravitation . . . . .         | 4         |
| 2.2 Theorie zur Bestimmung des magnetischen Moments über die Schwingungsdauer eines Magneten . . . . . | 4         |
| 2.3 Theorie zur Bestimmung des magnetischen Moments über die Präzession eines Magneten . . . . .       | 5         |
| <b>3 Aufbau und Durchführung</b>   | <b>5</b>  |
| 3.1 Aufbau . . . . .   | 5         |
| 3.2 Durchführung . . . . .   | 6         |
| 3.2.1 Bestimmung des magnetischen Moments durch Gravitation . . . .                                    | 6         |
| 3.2.2 Bestimmung des magnetischen Moments durch Schwingungsdauer                                       | 7         |
| 3.2.3 Bestimmung des magnetischen Moments durch Präzession . . . . .                                   | 7         |
| <b>4 Auswertung</b>  | <b>8</b>  |
| 4.1 Bestimmung des magnetischen Moments eines Magneten unter Ausnutzung der Gravitation . . . . .      | 8         |
| 4.2 Bestimmung des magnetischen Moments über die Schwingungsdauer eines Magneten . . . . .             | 10        |
| 4.3 Bestimmung des magnetischen Moments über die Präzession . . . . .                                  | 11        |
| <b>5 Diskussion</b>  | <b>13</b> |
| <b>Literatur</b>   | <b>14</b> |

# 1 Zielsetzung

Es wird das magnetische Moment eines Permanentmagneten unter Ausnutzung der Gravitation, über die Schwingungsdauer und über die Präzession bestimmt.

# 2 Theorie

Der Magnetismus tritt in einfachster Form als magnetischer Dipol auf. Dieser kann durch eine, mit dem Strom  $I$  durchflossene, Leiterschleife realisiert werden. Jeder Dipol besitzt das magnetische Moment

$$\vec{\mu} = I \cdot \vec{A}, \quad (1)$$

mit  $A$  als Querschnittsfläche der Leiterschleife. Allerdings muss für einen Permanentmagneten  $\vec{\mu}$  experimentell bestimmt werden. Um ein homogenes Magnetfeld zu erzeugen, wird ein Helmholtz-Spulenpaar genutzt, dessen Achsen zusammenfallen und der Abstand der Spulen der Spulenradius  $R$  ist (Abbildung 1). Mithilfe des Biot-Savartschen Gesetzes

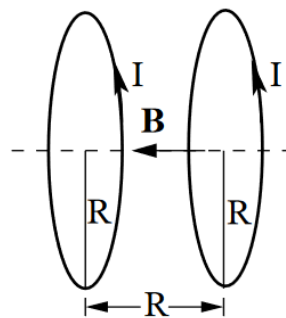
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (2)$$

kann das Magnetfeld im Inneren bestimmt werden. Für eine Spule mit einer Windung lautet die Formel für das Magnetfeld dann:

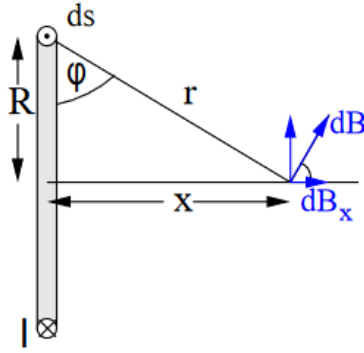
$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \hat{x}. \quad (3)$$

In diesem Experiment ist der Abstand  $d = 2x$  nicht identisch mit dem Radius. Wird beachtet, dass das Feld im Zentrum durch Überlagerung der Einzelfelder (Abbildung 2) entsteht und der Ursprung in der Mitte der Spulen ist, ergibt sich für dieses:

$$B(0) = B_1(x) + B_1(-x) = \frac{\mu_0 I R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (4)$$



**Abbildung 1:** Anordnung der Helmholtz-Spulen. [1, S. 1]



**Abbildung 2:** Magnetfeld einer Spule im Zentrum der Helmholtz-Spulen. [1, S. 1]

Der Feldgradient

$$\frac{dB}{dx} = -3\mu_0 I R^2 \frac{x}{(R^2 + x^2)^{5/2}} \quad (5)$$

ist in einem großen Bereich vernachlässigbar.

## 2.1 Theorie zur Bestimmung des magnetischen Moments unter Ausnutzung der Gravitation

Wirkt auf eine Masse  $m$  die Gravitationskraft  $\vec{F} = m\vec{g}$ , stellt sich ein Drehmoment  $\vec{D}_g = m(\vec{r} \times \vec{g})$  ein. Entgegen der Gravitationskraft wirkt das Magnetfeld der Spulen. Ein Gleichgewicht zwischen Drehmoment  $\vec{D}_B = \vec{\mu}_{\text{Dipol}} \times \vec{B}$  und Drehmoment  $\vec{D}_g$  tritt nur auf, wenn eine bestimmte Magnetfeldstärke gemäß

$$\vec{\mu}_{\text{Dipol}} \times \vec{B} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{g}) \quad (6)$$

eingestellt ist. Hierbei sind  $g$  und  $B$  parallel zueinander, weshalb sich die Gleichung durch

$$\mu_{\text{Dipol}} \cdot B = mrg \quad (7)$$

ausdrücken lässt.

## 2.2 Theorie zur Bestimmung des magnetischen Moments über die Schwingungsdauer eines Magneten

Wird eine Billiardkugel in Schwingung versetzt, verhält sie sich im homogenen Magnetfeld wie ein harmonischer Oszillator. Die Bewegungsgleichung für den Prozess lautet:

$$-|\vec{\mu}_{\text{Dipol}} \times \vec{B}| = J_K \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}. \quad (8)$$

Die quadrierte Schwingungsdauer

$$T^2 = \frac{4\pi^2 J_K}{\mu_{\text{Dipol}} B} \quad (9)$$

ist die Lösung der Gleichung, woraus sich dann das magnetische Moment bestimmen lässt.

### 2.3 Theorie zur Bestimmung des magnetischen Moments über die Präzession eines Magneten

Ein Kreisel erfährt eine Präzessionsbewegung, wenn eine äußere Kraft auf die Drehachse eines rotierenden Körpers wirkt. Die Drehachse bewegt sich hierbei auf dem Kegelmantel um die Drehimpulsachse. Wird eine rotierende Billiardkugel ausgelenkt, bleibt die Auslenkung wegen der Rotation stabil. Existiert außerdem ein Magnetfeld, wirkt eine äußere Kraft und die Präzessionsbewegung entsteht, welche durch

$$\vec{\mu}_{\text{Dipol}} \times \vec{B} = \frac{d\vec{L}_K}{dt} \quad (10)$$

beschrieben wird. Diesmal stellt die Präzessionsfrequenz

$$\Omega_p = \frac{\mu B}{|L_K|} \quad (11)$$

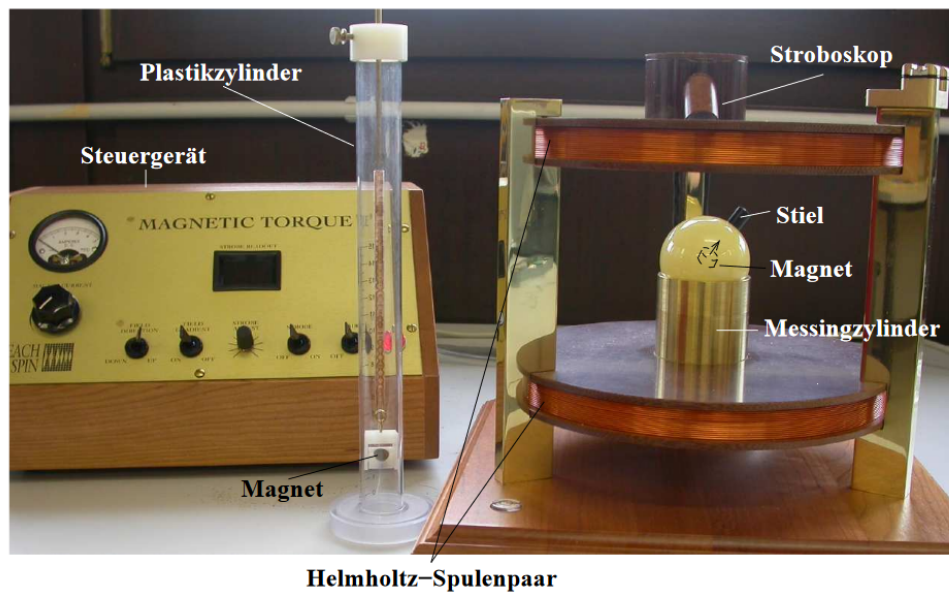
eine Lösung dar. Der Drehimpuls kann über das Trägheitsmoment und dessen Kreisfrequenz bestimmt werden und das magnetische Moment folgt über:

$$\frac{1}{T_p} = \frac{\mu_{\text{Dipol}}}{2\pi L_K} B. \quad (12)$$

## 3 Aufbau und Durchführung

### 3.1 Aufbau

In der Mitte einer Billiardkugel befindet sich ein Permanentmagnet, dessen magnetisches Moment in Richtung des Stiels zeigt. Die Kugel bewegt sich wegen eines Luftkissens reibungsfrei auf einem Messingzylinder zwischen zwei Helmholtz-Spulen (Abbildung 3). Die zwei Helmholtz-Spulen ( $N = 195$ ) erzeugen ein Magnetfeld, und haben einen Abstand von  $d = 0,138\text{ m}$  und einen Radius von  $R = 0,109\text{ m}$ . Ein Stroboskop, welches sich an der oberen Spule befindet, bestimmt die Drehbewegung. Mit einem Steuergerät können Strom, Magnetfeld, Stroboskop und Luftkissen eingestellt und bedient werden.



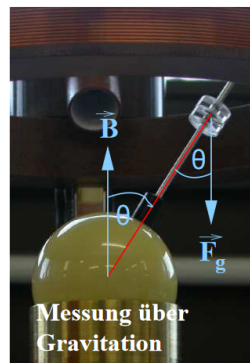
**Abbildung 3:** Versuchsaufbau mit Steuergerät, Helmholtz-Spulen und Billiardkugel.  
[1, S. 2]

## 3.2 Durchführung

Als erstes werden Radius und Masse der Billiardkugel gemessen und daraus das Trägheitsmoment bestimmt. Desweiteren wird die Länge des Stiels gemessen.

### 3.2.1 Bestimmung des magnetischen Moments durch Gravitation

In den Stiel der Kugel wird eine Aluminiumstange, auf welcher eine verschiebbare Masse ist, gesetzt, und die Kugel wird auf den Zylinder gesetzt. Dann wird der Abstand  $r$  von Anfang des Stiels bis zum Schwerpunkt der Masse bestimmt. Nun wird am Steuergerät das Gebläse für das Luftkissen eingeschaltet, die Feldrichtung auf "up" und der Feldgradient auf "off" gestellt. Das Magnetfeld wird nun solange justiert, bis sich das System in einem Gleichgewicht befindet (Abbildung 4). Ist dies der Fall, werden sich Magnetfeld und Abstand notiert. Diese Messung wird 10 mal wiederholt, wobei der Abstand beliebig verändert wird.



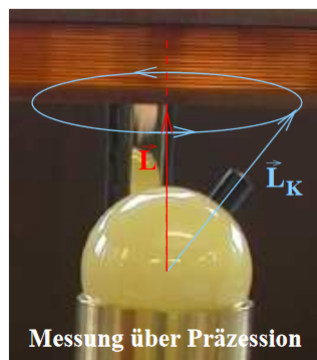
**Abbildung 4:** Krafteinwirkungen auf Aluminiumstange und Masse. [1, S. 3]

### 3.2.2 Bestimmung des magnetischen Moments durch Schwingungsdauer

Wieder wird die Kugel auf den Zylinder gesetzt und das Magnetfeld eingeschaltet. Die Kugel wird bei eingestelltem Magnetfeld nun in Schwingung versetzt, indem der Stiel um einen kleinen Winkel ausgelenkt wird. Es werden 10 Perioden gemessen und die Ergebnisse gemittelt. Insgesamt wird dies für 10 Stromstärken wiederholt.

### 3.2.3 Bestimmung des magnetischen Moments durch Präzession

Es wird am Stroboskop eine Frequenz zwischen  $\nu = 4 \text{ Hz}$  und  $\nu = 6 \text{ Hz}$  eingestellt. Die sich auf dem Zylinder befindende Kugel wird in Rotation versetzt und durch gezielte Berührungen ausgelenkt (Abbildung 5), bis diese die eingestellte Frequenz erreicht. Das ist der Fall, wenn der weiße Punkt auf dem Stiel stationär erscheint. Anschließend wird das Magnetfeld eingeschaltet und die Umlaufzeit  $T$  gemessen. Insgesamt wird die Messung für 10 Magnetfeldstärken wiederholt.



**Abbildung 5:** Achsenanordnung der Präzession. [1, S. 5]

## 4 Auswertung

Die Messung der Apparaturkonstanten liefert

$$\begin{aligned} r_K &= 0,026\,83\,\text{m}, \\ m_K &= 0,141\,97\,\text{kg}, \\ J_K &= \frac{2}{5}m_K r_K^2 = 4,1 \cdot 10^{-5}\,\text{kg m}^2, \\ N &= 195, \\ d &= 0,138\,\text{m}, \\ R_{\text{Spule}} &= 0,109\,\text{m}. \end{aligned}$$

### 4.1 Bestimmung des magnetischen Moments eines Magneten unter Ausnutzung der Gravitation

Mithilfe von Gleichung (4) wird die Magnetfeldstärke ausgerechnet (Tabelle 1).

**Tabelle 1:** Magnetfeldstärke  $B$  in Abhängigkeit von Abstand  $r$  und Spulenstrom  $I$ .

| Abstand<br>$r / \text{cm}$ | Spulenstrom<br>$I / \text{A}$ | Magnetfeldstärke<br>$B / \text{mT}$ |
|----------------------------|-------------------------------|-------------------------------------|
| 4,1                        | 1,28                          | 1,74                                |
| 4,9                        | 1,49                          | 2,02                                |
| 5,3                        | 1,58                          | 2,14                                |
| 5,6                        | 1,6                           | 2,17                                |
| 6,1                        | 1,78                          | 2,41                                |
| 7,2                        | 2                             | 2,71                                |
| 8,0                        | 2,19                          | 2,97                                |
| 8,9                        | 2,35                          | 3,19                                |
| 9,3                        | 2,46                          | 3,34                                |
| 10,1                       | 2,64                          | 3,58                                |

Um das magnetische Moment der Kugel zu berechnen wird die Magnetfeldstärke  $B$  gegen den Abstand  $r$  aufgetragen und mithilfe linearer Regression in Form von

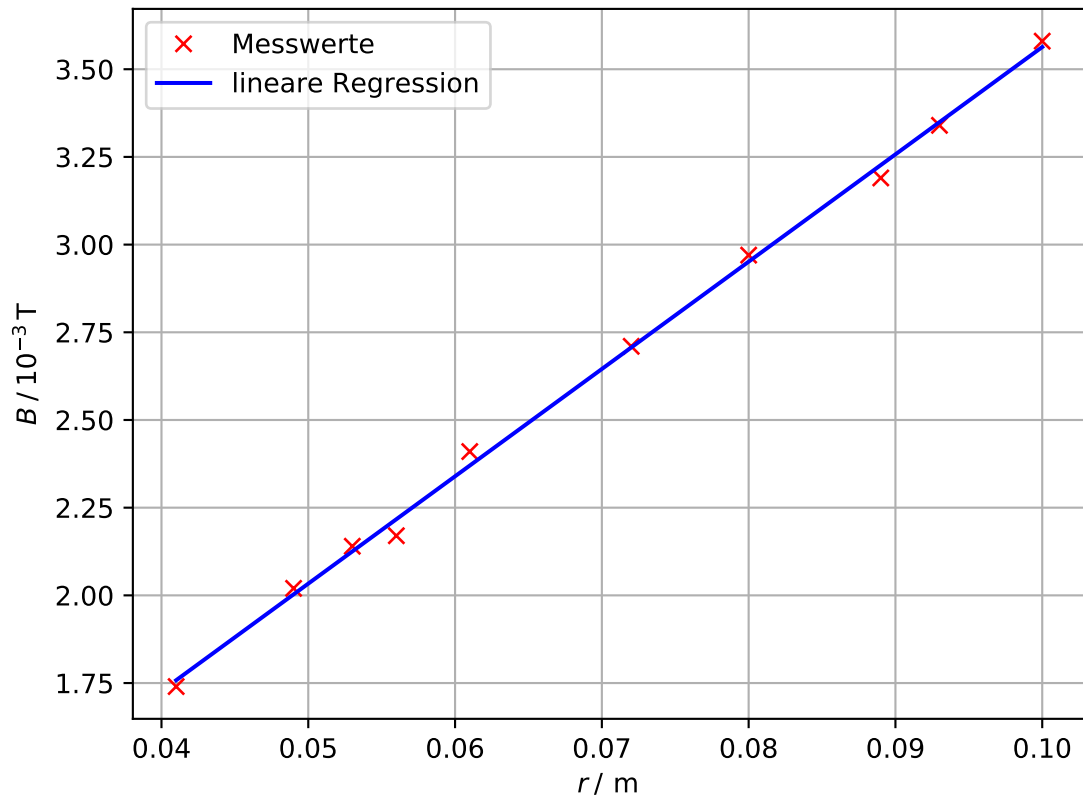
$$y = a \cdot x + b, \quad (13)$$

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}, \quad (14)$$

$$b = \frac{\overline{x^2 y} - \overline{xy} \cdot \bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (15)$$

wird die Steigung der Ausgleichsgeraden bestimmt.





**Abbildung 6:** Magnetfeldstärke  $B$  in Abhängigkeit des Abstands  $r$ .

Nun wird nach Gleichung (7) das magnetische Moment  $\mu_{\text{Dipol}}$  gemäß

$$\mu_{\text{Dipol}} = \frac{m_g g}{a} \quad (16)$$

berechnet. Mit

$$a = 0,0303 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2 \text{ A m}^2},$$

$$b = 0,0005 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2 \text{ A}}$$

folgt:

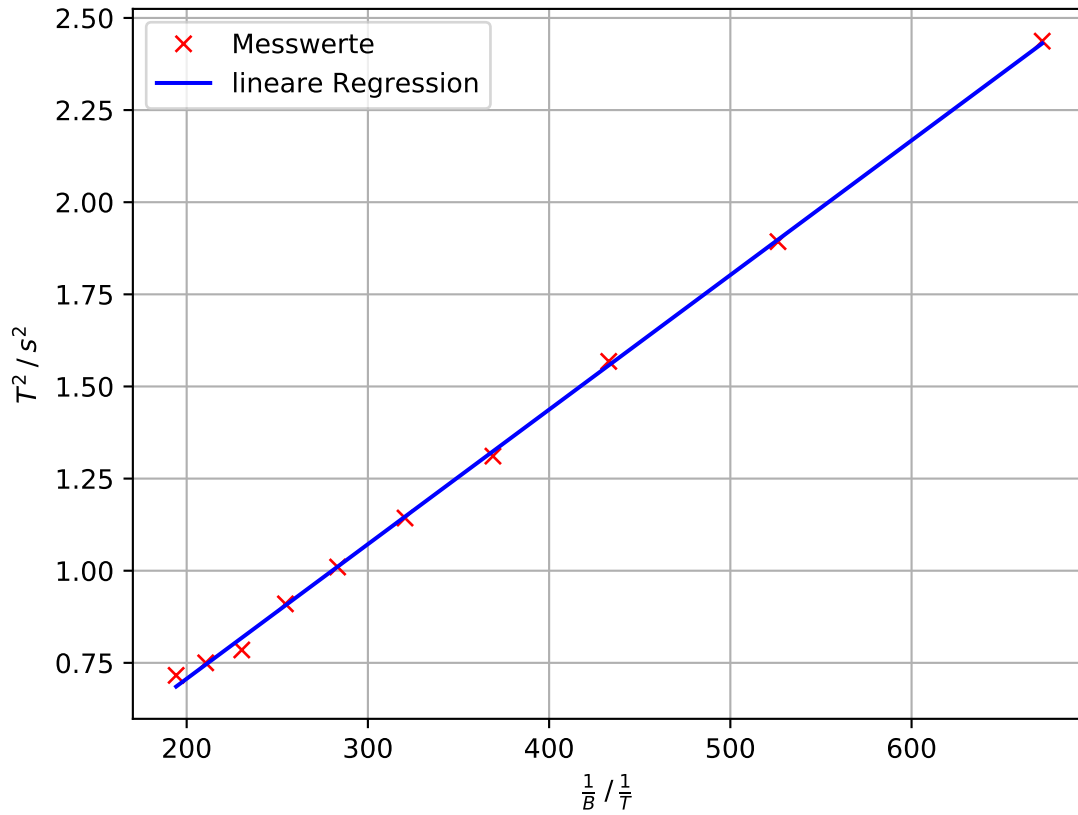
$$\mu_{\text{Dipol}} = 0,447 \text{ A m}^2.$$

## 4.2 Bestimmung des magnetischen Moments über die Schwingungsdauer eines Magneten

Mittels Gleichung (4) wird erneut die Magnetfeldstärke  $B$  der jeweiligen Stromstärke  $I$  berechnet (Tabelle 2). Um das magnetische Moment  $\mu_{\text{Dipol}}$  zu berechnen wird  $T^2$  gegen  $1/B$  aufgetragen.

**Tabelle 2:** Zur Stromstärke  $I$  zugehörige Magnetfeldstärke  $B$ , reziproke Magnetfeldstärke  $\frac{1}{B}$ , Periodendauer  $T$  und quadrierte Periodendauer  $T^2$ .

| Spulenstrom<br>$I / \text{A}$ | Magnetfeldstärke<br>$B / \text{mT}$ | reziproke Magnetfeldstärke<br>$\frac{1}{B} / \frac{1}{\text{T}}$ | Periodendauer<br>$T / \cdot 10^{-1}\text{s}$ | quadrierte Periodendauer<br>$T^2 / \cdot 10^{-2}\text{s}^2$ |
|-------------------------------|-------------------------------------|--|--|---|
| 3,8                           | 5,15                                | 194  | 8,46   | 71,57   |
| 3,5                           | 4,75                                | 210  | 8,66   | 75,00   |
| 3,2                           | 4,34                                | 230  | 8,86   | 78,50   |
| 2,9                           | 3,93                                | 254  | 9,54   | 91,01   |
| 2,6                           | 3,53                                | 283  | 10,05  | 101,00  |
| 2,3                           | 3,12                                | 321  | 10,69  | 114,28  |
| 2,0                           | 2,71                                | 369  | 11,45  | 131,10  |
| 1,7                           | 2,31                                | 433  | 12,52  | 156,75  |
| 1,4                           | 1,90                                | 526  | 13,76  | 189,34  |
| 1,1                           | 1,49                                | 671  | 15,61  | 243,67  |



**Abbildung 7:** Quadrierte Schwingungsdauer  $T^2$  in Abhängigkeit von der reziproken Magnetfeldstärke  $1/B$

Mittels linearer Regression (Abbildung 7) ergibt sich für die Ausgleichsgerade

$$a = 0,00365 \frac{\text{kg}}{\text{A}},$$

$$b = -0,023 \text{ s}^2.$$

Aus Gleichung (9) ergibt sich somit für das magnetische Moment

$$\mu_{\text{Dipol2}} = \frac{4\pi^2 J_K}{a} = 0,443 \text{ A m}^2. \quad (17)$$

### 4.3 Bestimmung des magnetischen Moments über die Präzession

Um das magnetische Moment  $\mu_{\text{Dipol}}$  zu bestimmen, wird die reziproke Periodendauer  $1/T_p$  gegen die Magnetfeldstärke  $B$  aufgetragen, welche sich aus der Stromstärke  $I$  mittels Gleichung (4) ergibt. Mithilfe der linearen Regression (Abbildung 8) ergibt sich für die

**Tabelle 3:** Zur Stromstärke  $I$  zugehörige Magnetfeldstärke  $B$  und reziproke Periodendauer  $1/T_P$

| Spulenstrom<br>$I / \text{A}$ | Magnetfeldstärke<br>$B / \text{mT}$ | reziproke Periodendauer<br>$1/T_P / 1/\text{s}$ |
|-------------------------------|-------------------------------------|---|
| 0,2                           | 0,27                                | 0,0240  |
| 0,5                           | 0,68                                | 0,0439  |
| 0,8                           | 1,08                                | 0,0593  |
| 1,1                           | 1,49                                | 0,0749  |
| 1,4                           | 1,90                                | 0,0917  |
| 1,7                           | 2,31                                | 0,1205  |
| 2,0                           | 2,71                                | 0,1689  |
| 2,3                           | 3,12                                | 0,1745  |
| 2,6                           | 3,53                                | 0,2160  |
| 2,8                           | 3,80                                | 0,2212  |

Ausgleichsgerade

$$a = 0,0586 \frac{\text{A s}}{\text{kg}},$$

$$b = -0,003 \frac{1}{\text{s}}.$$

Aus der Steigung der Geraden lässt sich mittels

$$\mu_{\text{Dipol}} = 2\pi L_K a \quad (18)$$

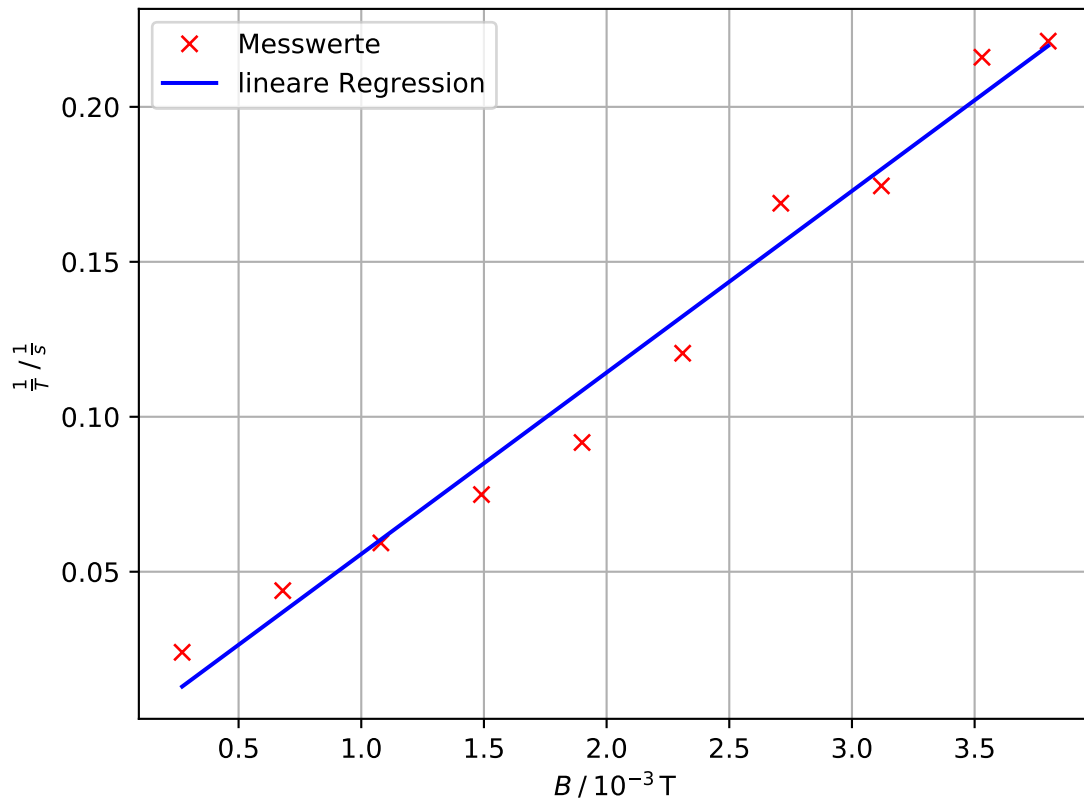
mit

$$L_K = 4,1 \cdot 10^{-5} \text{kg m}^2 \cdot 2\pi \cdot 4,3 \text{Hz} = 1,11 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$$

das magnetische Moment

$$\mu_{\text{Dipol3}} = 0,453 \text{A m}^2.$$

berechnen.



**Abbildung 8:** Reziproke Periodendauer  $1/T_P$  in Abhängigkeit von der Magnetfeldstärke  $B$

## 5 Diskussion

Bei dem Vergleich der Ergebnisse fällt auf, dass die errechneten magnetischen Momente verhältnismäßig nah beieinander liegen, wobei alle aufgrund unterschiedlicher Gründe fehlerbehaftet sind. Bei der Bestimmung über die Gravitation ist es mit dem bloßen Auge nicht möglich, den genauen Zeitpunkt zu bestimmen, bei der die auf den Stab wirkenden Kräfte nicht mehr im Gleichgewicht sind und der Stab zu kippen beginnt. Ausschlaggebend für die Fehler bei der Schwingungsdauermethode ist vor allem die menschliche Reaktionszeit beim Stoppen der Zeit, welche durch mehrfache Messung relativiert werden könnte. Allerdings bleibt es schwierig, den Stab immer wieder gleich stark auszulenken. Am meisten fehleranfällig ist die Methode, bei der die Präzession ausgenutzt wird, da es aufgrund der aufwendigen Durchführung insgesamt zu viele Variablen gibt, wie beispielsweise die nicht konstante Rotation, die Reaktionszeit beim Stoppen der Zeit und das manuelle Andrehen und Auslenken.

Ein Vergleich mit Literaturwerten ist in diesem Versuch nicht möglich.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch 105, Das Magnetische Moment*. 24. Nov. 2018. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/MagneticTo.pdf>.