VERSUCH NUMMER

TITEL

AUTOR A
authorA@udo.edu

AUTOR B
authorB@udo.edu

Durchführung: DATUM

Abgabe: DATUM

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung **3**

2 Theorie **3**

3 Durchführung **4**

4 Auswertung **4**

4.1 Betimmung der Winkelrichtgröße 4
4.2 Bestimmung des Trägheitsmoments der Drillachse 5
4.3 Bestimmung des Trägheitsmoments für zwei Körper 7
4.4 Bestimmung des Trägheitsmoments einer Modellpuppe 8

5 Diskussion **8**

Literatur **8**

1 Zielsetzung

In diesem Versuch wird das Trägheitsmoment verschiedener geometrischer Körper bestimmt und der Steiner'sche Satz bestätigt.

2 Theorie

Das Trägheitsmoment I ist eine Größe, die zur Charakterisierung der Dynamik von Drehbewegungen benutzt wird. Für eine punktförmige Masse m, die sich im Abstand r zu einer festen Rotationsachse befindet, ergibt sich für dieses

$$I = mr^2. \tag{1}$$

Das Gesamtträgheitsmoment ausgedehnter Körper setzt sich aus den Einzelträgheitsmomenten der Masseelemente m_i, welche sich im Abstand r_i zur Drehachse befinden, zusammen. Folglich gilt für das Gesamtträgheitsmoment:

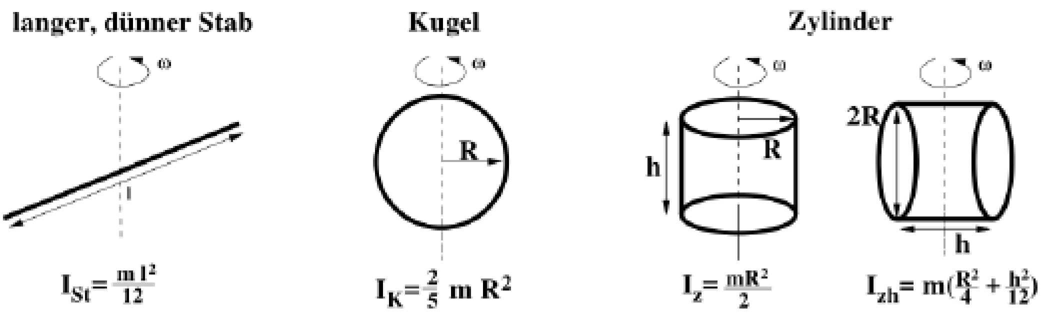
$$I = \sum_\mathrm{i} r_\mathrm{i}^2 \cdot m_\mathrm{i} \tag{2}$$

Für infinitisimale Massen dm ergibt sich folglich

$$I = \int r^2 dm. \tag{3}$$

Die Trägheitsmomente einiger geometrischer Körper sind Abb.1 zu entnehmen. Die

Abbildung 1: Trägheitsmomente geometrischer Körper. [1]



vorherigen Fälle beziehen sich auf Rotationsbewegungen, bei denen die Rotationsachse durch den Schwerpunkt des Körpers verläuft. Ist dies nicht der Fall, so berechnet sich das Trägheitsmoment mit Hilfe des Steiner'schen Satzes:

$$I = I_\mathrm{s} + m \cdot a^2,$$

wobei I_s das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse durch den Körperschwerpunkt und a der Abstand der tatsächlichen Drehachse zum Schwerpunkt ist.

Wenn auf einen drehbaren Körper die Kraft $\vec{F}$ im Abstand $\vec{r}$ der Achse angreift, so wirkt auf ihn ein Drehmoment $\vec{M}$

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}. \tag{4}$$

Wenn dem Körper, welcher um den Winkel φ gedreht wird, ein rücktreibendes Drehmoment, beispielsweise durch eine Feder, entgegen, so handelt es sich um ein schwingendes System, welches harmonische Oszillationen ausführt. Die Periodendauer T ist dabei

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}. \tag{5}$$

Hierbei stellt D die Winkelrichtgröße dar. Sie steht mit dem Drehmoment M über

$$M = D \cdot \varphi \tag{6}$$

in Verbindung. Das System führt nur für kleine Drehwinkel φ harmonische Schwingungen aus.

Die Winkelrichtgröße D kann statisch durch Messen der Kraft senkrecht zum Bahnradius bei Auslenkung um den Drehwinkel φ bestimmt werden

$$D = \frac{F \cdot r}{\varphi}. \tag{7}$$

Bei dynamischen Messungen wird das System zu harmonischen Schwingungen angeregt. Aus Gl. (5) folgt

$$I = \frac{T^2 D}{4\pi^2},$$

wobei I nun das gesamte Trägheitsmoment darstellt. Um das Trägheitsmoment I_K des Rotationskörpers zu erhalten, muss noch das Trägheitsmoment I_D der Drillachse subtrahiert werden. Somit ergibt sich:

$$I_\mathrm{K} = \frac{T^2 D}{4\pi^2} - I_\mathrm{D}. \tag{8}$$

[1]

3 Durchführung

4 Auswertung

4.1 Betimmung der Winkelrichtgröße

Die Winkelrichtgröße wird aus Gleichung (7) bestimmt. In Tabelle (1) sind alle dafür benötigten Größen, also Abstand des Mittelpunktes der Drillachse zur angesetzten Federwaage, Auslenkungswinkel, und gemessene Kraft, dargestellt, wie zuletzt auch die berechnete Winkelrichtgröße. Dabei wurde für je einen Winkel zweimal der Abstand geändert und gemessen. Die Unsicherheit des Abstandes wird auf 0.05 mm geschätzt.

Tabelle 1: Werte zur Berechnung der Winkelrichtgröße

ϕ	F/N	r/m	D/Nm/10^{-3}
30°	0.46	0.02965 ± 0.00005	0.455 ± 0.00077
30°	0.26	0.04945 ± 0.00005	0.429 ± 0.00043
40°	0.62	0.02965 ± 0.00005	0.460 ± 0.00076
40°	0.39	0.04945 ± 0.00005	0.482 ± 0.00049
50°	0.80	0.02965 ± 0.00005	0.474 ± 0.00080
50°	0.48	0.04945 ± 0.00005	0.475 ± 0.00048
60°	0.94	0.02965 ± 0.00005	0.465 ± 0.00078
60°	0.57	0.04945 ± 0.00005	0.470 ± 0.00048
70°	1.10	0.02965 ± 0.00005	0.466 ± 0.00079
70°	0.66	0.04945 ± 0.00005	0.466 ± 0.00047

Der Mittelwert aller Winkelrichtgrößen beträgt:

$$D = (0.464 \pm 0.0005) \cdot 10^{-3}\text{Nm} \tag{9}$$

4.2 Bestimmung des Trägheitsmoments der Drillachse

In folgender Tabelle wird die Schwingungsdauer T und der zugehörige Abstand a vom Mittelpunk der Drillachse bis zum Schwerpunkt der Gewichte dargestellt. Dabei wurde für einen Abstand 10 Schwingungen gemessen und das Ergebnis durch 10 geteilt. Der Fehler der Messung wird auf 0.5 Sekunden geschätzt.

Tabelle 2: Gemessene Schwingungsdauern und Abstände

a/mm	T/s
60 ± 0.05	2.46 ± 0.05
80 ± 0.05	2.79 ± 0.05
100 ± 0.05	3.16 ± 0.05
120 ± 0.05	3.54 ± 0.05
140 ± 0.05	3.97 ± 0.05
160 ± 0.05	4.40 ± 0.05
180 ± 0.05	4.86 ± 0.05
200 ± 0.05	5.28 ± 0.05
220 ± 0.05	5.76 ± 0.05
240 ± 0.05	6.24 ± 0.05

Das Quadrat der Schwingungsauer wird gegen das Quadrat des Abstandes aufgetragen, und mit linearer Regression wird das Trägheitsmoment der Drillachse berechnet.

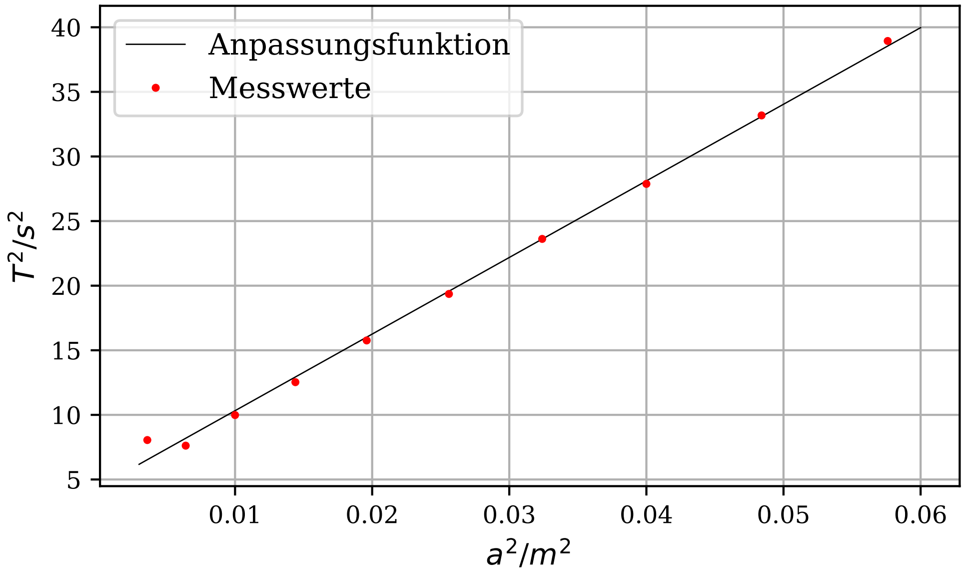


Abbildung 2: Ausgleichsrechnung zur Bestimmung des Trägheitsmomentes der Drillachse.

Beschrieben wird die Ausgleichsgerade durch folgende Gleichung:

$$y = (592.91 \pm 11.52)x + (4.39 \pm 0.36) \tag{10}$$

Mit Hilfe von Gleichung (5) ergibt sich:

$$T^2(a^2) = 4\pi^2 \frac{(I_\mathrm{D} + I_\mathrm{K})}{D} \tag{11}$$

wobei I_K das Trägheitsmoment der Gewichte ist, welches sich wie folgt zusammen setzt:

$$I_\mathrm{K} = (I_\mathrm{Z1S} + I_\mathrm{Z2S}) + (m_\mathrm{Z1} + m_\mathrm{Z2})a^2 \tag{12}$$

I_Z1S bzw. I_Z2S sind die Trägheitsmomente der Zylinder-Gewichte mit Achse durch den Schwerpunkt. Sie lassen sich mit der letzten Gleichung aus Abbildung (1) berechnen. Die Masse der Gewichte beträgt:

$$m_\mathrm{Z1} = 0.2218kg, m_\mathrm{Z2} = 0.2225kg \tag{13}$$

Der Durchmesser beider Gewichte beträgt $d = (0.03475 \pm 0.00005)m$ und die Höhe $h = (0.0297 \pm 0.00005)m$. Die Werte für die Trägheitsmomente lauten also:

$$I_\mathrm{Z1S} = (3.304 \pm 0.007)10^{-5}\mathrm{kgm}^2, I_\mathrm{Z2S} = (3.315 \pm 0.007)10^{-5}\mathrm{kgm}^2. \tag{14}$$

Setzt man I_K in Gleichung (11) ein, so ergibt sich:

$$T^2(a^2) = 4\pi^2 \frac{(I_\mathrm{D} + (I_\mathrm{Z1S} + I_\mathrm{Z2S}) + (m_\mathrm{Z1} + m_\mathrm{Z2})a^2)}{D} \tag{15}$$

$$\Rightarrow T^2(a^2) = \underbrace{4\pi^2 \frac{(I_\mathrm{D} + (I_\mathrm{Z1S} + I_\mathrm{Z2S}))}{D}}_{Achsenabschnitt\, b} + \underbrace{\frac{4\pi^2(m_\mathrm{Z1} + m_\mathrm{Z2})}{D}}_{Steigung\, m} a^2 \tag{16}$$

$$\Rightarrow I_D = \frac{bD}{4\pi^2} - (I_\mathrm{ZS1} + I_\mathrm{ZS2}) \tag{17}$$

Das Trägheitsmoment der Drillachse beträgt:

$$I_D = (-1.5 \pm 0.4) \cdot 10^{-5}\mathrm{kgm}^2. \tag{18}$$

4.3 Bestimmung des Trägheitsmoments für zwei Körper

In diesem Auswertungsteil werden die Trägheitsmomente für eine Kugel und einen Zylinder berechnet, deren Drehachsen ihren Symmetrieachsen entsprechen. Für die Kugel wurden je 8 Schwingungen gemessen, für den Zylinder je 5.

Tabelle 3: Schwingungsdauer eines Zylinder und einer Kugel

T_Z/s	T_K/s
0.72 ± 0.01	1.47 ± 0.0625
0.75 ± 0.01	1.45 ± 0.0625
0.74 ± 0.01	1.48 ± 0.0625
0.74 ± 0.01	1.44 ± 0.0625
0.74 ± 0.01	1.46 ± 0.0625

Als Mittelwerte ergeben sich:

$$T_Z = (0.74 \pm 0.04)s \tag{19}$$

$$T_K = (0.146 \pm 0.028)s. \tag{20}$$

Dadurch lassen sich mit Gleichung (8) die Trägheitsmomente berechnen:

$$I_Z = (6.4 \pm 0.8) \cdot 10^{-6}\mathrm{kgm}^2 \tag{21}$$

$$I_K = (2.51 \pm 0.1) \cdot 10^{-5}\mathrm{kgm}^2. \tag{22}$$

Das negative Trägheitsmoment der Drillachse wurde bei der Berechnung nicht berücksichtigt, da es physikalisch keinen Sinn ergibt. Berechnet man das Trägheitsmoment für einen Zylinder mit Masse $m = 0.3684kg$, Durchmesser $d = (0.0973 \pm 0.00005)m$ und Höhe $h = (0.101 \pm 0.00005)m$, ergibt sich: $I_Z = (4.36 \pm 0.004)10^{-4}\mathrm{kgm}^2$. Der Theoriewert einer Kugel mit Masse $m = 0.8123kg$ und Durchmesser $d = (0.13755 \pm 0.00005)m$ beträgt: $I_K = (1.54 \pm 0.001)10^{-3}\mathrm{kgm}^2$

4.4 Bestimmung des Trägheitsmoments einer Modellpuppe

Es wird die Schwingungsdauer einer Puppe für zwei unterschiedliche Posen P_1 und P_2 bestimmt. Bei der ersten Pose sind Arme und Beine am Körper angewinkelt und in der zweiten sind Arme senkrecht zum Körper nach außen gestreckt, und die Beine entgegengesetzt nach hinten bzw. vorne gestreckt. Für die erste Pose werden 5 Schwingungen gemessen, für die zweite 10.

Tabelle 4: Schwingungsdauer der Modellpuppe

T_{P_1}/s	T_{P_2}/s
0.34 ± 0.1	0.85 ± 0.05
0.35 ± 0.1	0.85 ± 0.05
0.36 ± 0.1	0.84 ± 0.05
0.38 ± 0.1	0.85 ± 0.05
0.35 ± 0.1	0.86 ± 0.05

Als Mittelwerte ergeben sich:

$$T_{P_1} = (0.35 \pm 0.04)s \tag{23}$$

$$T_{P_2} = (0.85 \pm 0.02)s \tag{24}$$

Die Trägheitsmomente lassen sich analog zu den zwei Körpern mit Gleichung (8) berechnen:

$$I_{P_1} = (1.6 \pm 0.4) \cdot 10^{-5}\mathrm{kgm}^2 \tag{25}$$

$$I_{P_2} = (2.3 \pm 0.4) \cdot 10^{-5}\mathrm{kgm}^2. \tag{26}$$

5 Diskussion

Literatur

[1] TU Dortmund. *Versuch zum Literaturverzeichnis*. 2014.