V354

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Kalina Toben
kalina.toben@tu-dortmund.de

Daniel Wall
daniel.wall@tu-dortmund.de

Durchführung: 04.12.2018 Abgabe: 11.12.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

1.1 Gedämpfte Schwingungen

Besteht ein Schaltkreis aus einer Induktivität L, realisiert durch eine Spule, und einem Kondensator mit der Kapaziät C, führt das System ungedämpfte Schwingungen durch. Die Energie pendelt zwischen den Speichern hin und her und führt deshalb periodische Schwingungen durch. Wird dem Schaltkreis ein ohmscher Widerstand R hinzugefügt, nimmt die Energie mit der Zeit ab, die Amplituden von Strom und Spannung fallen, und das System führt Gedämpfte Schwingungen aus. Ein Aufbau eines solches Schwingkreises ist in Abbildung (1) dargestellt. Dieses System führt

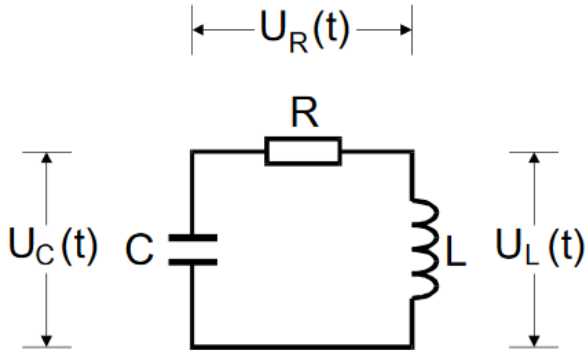

Abbildung 1: Aufbau eins RLC-Schwingkreises. [2, S.1]

Mit Hilfe des 2. Kirchhoffschen Gesetzes kann man die Differentialgleichung für den Schaltkreis aufstellen.

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0. \tag{1}$$

Setzt man die Gleichungen

$$U_R(t) = RI(t) \tag{2}$$

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \tag{3}$$

$$U_L(t) = L\frac{dI}{dt} \tag{4}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{5}$$

mit $Q(t)$ als Ladung in die DGL ein, und leitet einmal ab, ergibt sich

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC}I = 0. \tag{6}$$

Setzt man den Ansatz

$$I(t) = Ue^{j\omega t}$$

in die DGL ein, ergibt sich die charakteristiche Gleichung

$$\omega^2 - j\frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} = 0 \tag{7}$$

mit

$$\omega_{1,2} = j\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \tag{8}$$

Die Gleichung lässt sich schreiben als

$$I(t) = e^{-2\pi\mu t}(U_1 e^{j2\pi\nu t} + U_2 e^{-j2\pi\nu t}) \tag{9}$$

mit den Abkürzungen

$$2\pi\mu = \frac{R}{2L} \tag{10}$$

$$2\pi\nu = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \tag{11}$$

Je nachdem ob $\frac{1}{LC}$ größer oder kleiner $\frac{R^2}{4L^2]}$ ist, also ν reell oder imaginär ist, sieht $I(t)$ anders aus. Somit muss eine Fallunterscheidung getroffen werden. Im Ersten Fall sei ν reell. Die DGL ergibt sich dann zu

$$I(t) = Ae^{-2\pi\mu t} cos(2\pi\nu t + \eta). \tag{12}$$

Man erkennt, dass diese Gleichung eine harmonische Schwingung beschreibt, mit ν als Frequenz, und exponentiell abklingender Amplitude. Sie stellt die gedämpfte Schwingung dar. Die Abklingdauer dieser Schwingung, bestimmt sich durch

$$T_{ex} = \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{2L}{R}, \tag{13}$$

und nach dieser hat die Amplitude ihren ursprünglichen Wert angenommen. Darstellen lässt sich eine gedämpfte Schwingung durch die Abbildung (2).

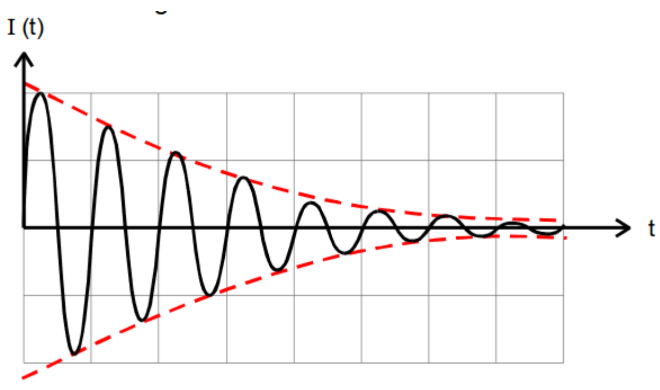

Abbildung 2: Darstellung einer gedämpften Schwingung. [2, S.4]

Betrachtet man nun den zweiten fall, also dass ν imaginär ist, verhält sich die Schwingung nicht mehr oszillatorisch, und die aperiodische Dämpfung tritt ein. Die aperiodische Dämpfung ist in Abbildung (3) dargestellt. $I(t)$ nähert sich in diesem Fall am schnellsten null an. Es gilt dann außerdem

$$I(t) \propto e^{-(2\pi\mu - i2\pi\nu)t}. \tag{14}$$

Gilt

$$\frac{1}{LC} = \frac{R_{ap}^2}{4L^2}, \tag{15}$$

ergibt sich die DGL zu

$$I(t) = Ae^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}. \tag{16}$$

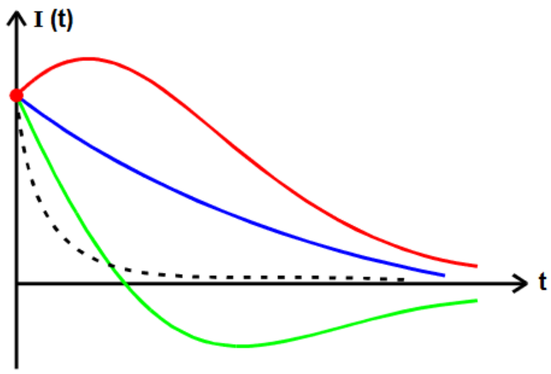

Abbildung 3: Darstellung des aperiodischen Grenzfalls. [2, S.5]

1.2 Erzwungene Schwingungen

Wirkt an einen Schwingkreis eine äußere periodische Kraft, führt das System erzwungene Schwingungen aus. Wird zum Beispiel eine Sinusspannung als Spannungsquelle eingeschaltet, wie in Abbildung (4) zu sehen ist, nimmt die Differentialgleichung folgende Gestalt an:

$$LC\frac{d^2U_C}{dt^2} + RC\frac{dU_C}{dt} + U_C = U_0 e^{j\omega t}. \tag{17}$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$U = \frac{U_0(1 - LC\omega^2 - j\omega RC)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}. \tag{18}$$

Die zugehörige Phase wird durch

$$\phi(\omega) = arctan(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}) \tag{19}$$

beschrieben. Die Resonanzkurve, also die Abhängigkeit der Kondensatorspannung U_C von der Frequenz der Erregerspannung, wird durch

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \tag{20}$$

beschrieben. U_C kann bei einer endlichen Frequenz ein Maximum erreichen, welches als Resonanz mit Resonanzfrequenz ω_{res} bezeichnet wird. Diese lautet

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \tag{21}$$

Im Falle der schwachen Dämpfung

$$\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}$$

Kann U_C die Spannung U_0 um den Gütefaktor $\frac{1}{\omega_0 RC}$ übertreffen

$$U_{C,max} = \frac{1}{\omega_0 RC} U_0 \tag{22}$$

und gegen unendlich gehen, liegt die Resonanzkatastrophe vor. Die Schärfe der Resonanz kann man durch die Breite der Resonanzkurve beschrieben, für welche gilt:

$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L}.$$

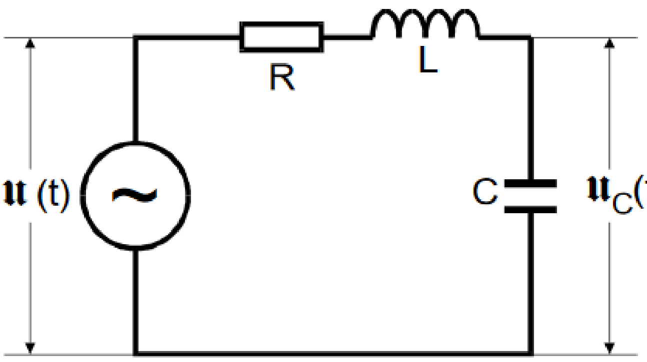

Abbildung 4: Schaltung mit einer Sinusspannung als Spannungsquelle. [2, S.6]

2 Durchführung

Für die Untersuchung der Zeitabhängigkeit der Amplitude, wird die in Abbildung (5) dargestellte Schaltung verwendet.

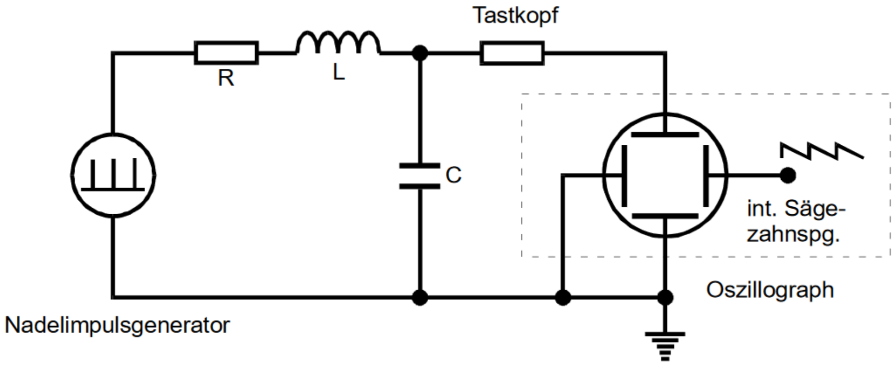

Abbildung 5: Messschaltung zur Bestimmung der zeitabhängigen Amplitude. [2, S. 11]

Um gedämpfte Schwingungen zu erzeugen, wird durch eine Rechteckspannung ein Impuls an den Schwingkreis gegeben. Ein Tastkopf ist notwendig, um den Eingangswiderstand des Oszillographen verschwindend gering zu halten. Es werden für zehn verschiedene Zeiten die Amplitude am Oszilloskop abgelesen und damit der effektive Dämpfungswiderstand ermittelt. Die gegebenen Daten für die Bauteile sind durch

$$
\begin{aligned}
L &= 16.78 \pm 0.009\, mH \\
C &= 2.066 \pm 0.006\, nF \\
R_1 &= 67.2 \pm 0.2\, \Omega \\
R_2 &= 682 \pm 1\, \Omega
\end{aligned}
$$

gegeben. Bei diesem Messvorgang wird der Widerstand R_1 genommen.
Als nächstes wird der Dämpfungswiderstand für den aperiodischen Grenzfall bestimmt. Das geschieht durch Aufbau der Schaltung in Abbildung (6). Der regelbare Widerstand wird auf seinen Maximalwert gestellt und dann runter gedreht. Dabei wird der Graph auf dem Oszillosgraph beobachtet, denn stellt sich ein Überschwingen ein, muss der Widerstand wieder höher gestellt werden. Wenn kein Überschwingen mehr auftritt, wird der Wert für den Widerstand abgelesen.

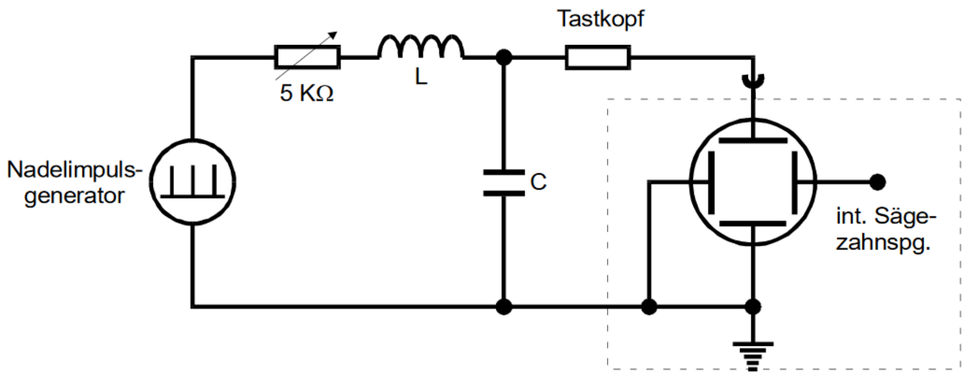

Abbildung 6: Messschaltung für den aperiodischen Grenzfall. [2, S. 12]

Soll nun die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung untersucht werden, wird der Schaltkreis wie in Abbildung (7) aufgebaut. Es wird diesmal eine Sinusspannung angelegt. Da der dort zusehende Tastkopf einen Frequenzgang besitzt, muss auch die Erregerspannung U_0 in Abhängigkeit der Frequenz gemessen werden. Es werden für folgende Intervalle Erregerspannung und Kondensatorpannnung gemessen: 2 kHz bis 22 kHz in 2 kHz Schritten, 22 kHz bis 32 kHz in 1 kHz Schritten, 32 kHz bis 52 kHz in 2 kHz Schritten, und daraus der Quotient gebildet. Diesmal wird der Widerstand R_2 benutzt.

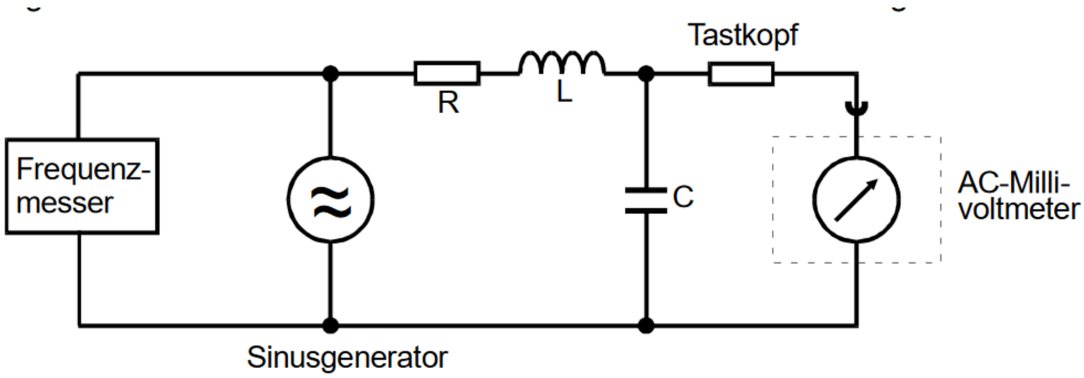

Abbildung 7: Messschaltung zur Bestimmung der frequenzabhängigen Amplitude. [2, S. 13]

Im letzten Versuchsteil wird die Frequenzabhängigkeit der Phase ermittelt. Die Schaltung ist in Abbildung (8) dargestellt. Es wird der zeitliche Abstand a der Nulldurchgänge von Kondensatorspannung und Erregerspannung gemessen, wie in Abbildung (9) dargestellt. Die außerdem benötigte Periodendauer wird durch die Frequenz bestimmt, die vorher schon gemessen wurde.

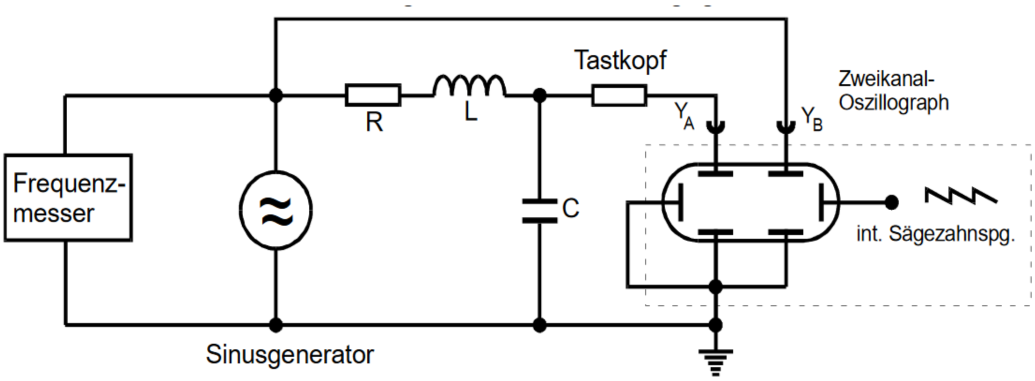

Abbildung 8: Messschaltung zur Bestimmung der frequenzabhängigen Phase. [2, S. 13]

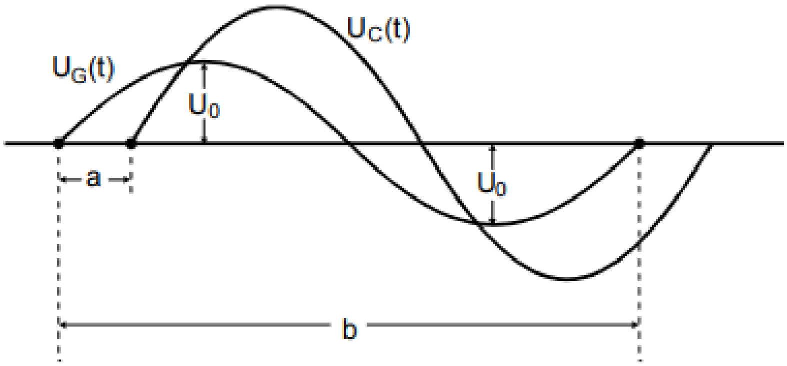

Abbildung 9: Bestimmung der Nulldurchgänge. [1, S. 7]

3 Auswertung

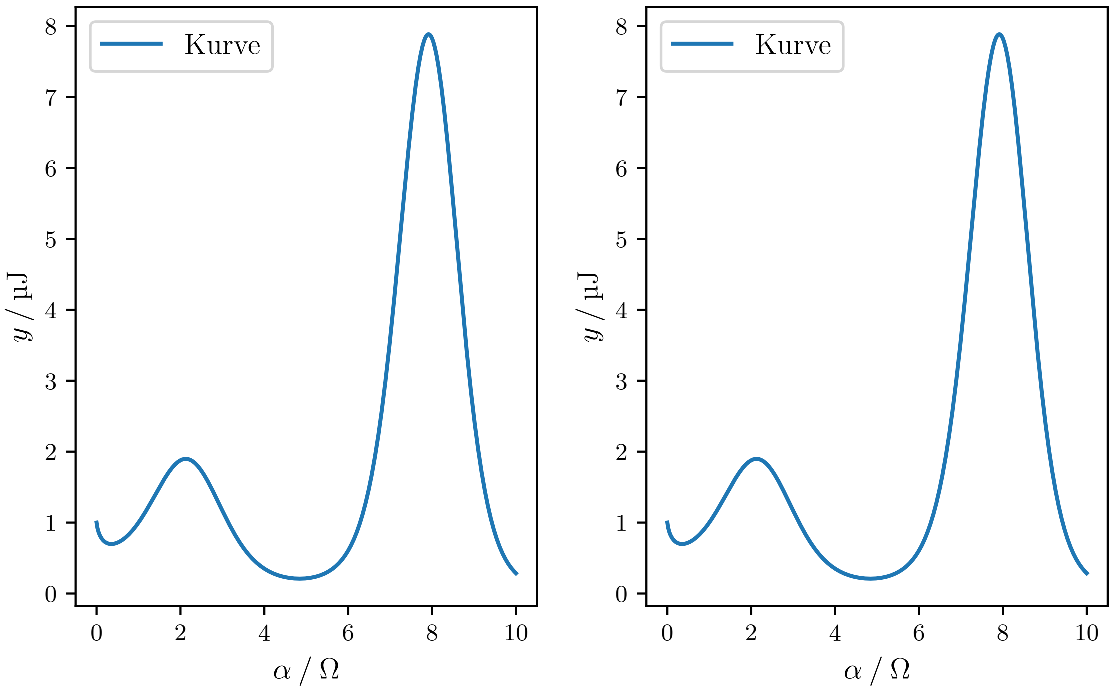

Abbildung 10: Plot.

4 Diskussion

Literatur

[1] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch 353, Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. URL: `http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V353.pdf`.

[2] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch 354, Gedämpfe und erzwungene Schwingungen*. 6. Dez. 2018. URL: `http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V354.pdf`.