

V101

# Das Trägheitsmoment

Kalina Toben

kalina.toben@tu-dortmund.de

Daniel Wall

daniel.wall@tu-dortmund.de

Durchführung: 13.11.18

Abgabe: 20.11.18

TU Dortmund – Fakultät Physik

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>3</b>
<b>3 Durchführung</b>	<b>4</b>
<b>4 Fehlerrechnung</b>	<b>5</b>
<b>5 Auswertung</b>	<b>6</b>
5.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße . . . . .	6
5.2 Bestimmung des Trägheitsmoments der Drillachse . . . . .	6
5.3 Bestimmung des Trägheitsmoments für zwei Körper . . . . .	8
5.4 Bestimmung des Trägheitsmoments einer Modellpuppe . . . . .	9
<b>6 Diskussion</b>	<b>10</b>
<b>Literatur</b>	<b>10</b>

## 1 Zielsetzung

In diesem Versuch wird das Trägheitsmoment verschiedener geometrischer Körper bestimmt und der Steiner'sche Satz bestätigt.

## 2 Theorie

Das Trägheitsmoment  $I$  ist eine Größe, die zur Charakterisierung der Dynamik von Drehbewegungen benutzt wird. Für eine punktförmige Masse  $m$ , die sich im Abstand  $r$  zu einer festen Rotationsachse befindet, ergibt sich für dieses

$$I = mr^2. \quad (1)$$

Das Gesamtträgheitsmoment ausgedehnter Körper setzt sich aus den Einzelträgheitsmomenten der Masselemente  $m_i$ , welche sich im Abstand  $r_i$  zur Drehachse befinden, zusammen. Folglich gilt für das Gesamtträgheitsmoment:

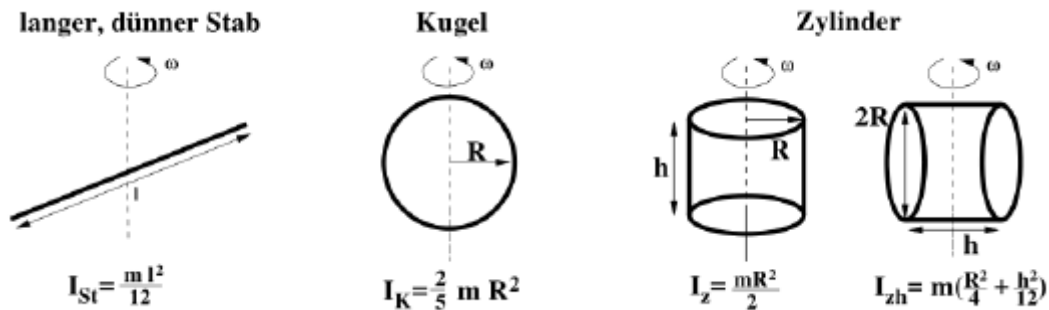
$$I = \sum_i r_i^2 \cdot m_i \quad (2)$$

Für infinitesimale Massen  $dm$  ergibt sich folglich

$$I = \int r^2 dm. \quad (3)$$

Die Trägheitsmomente einiger geometrischer Körper sind Abb.1 zu entnehmen. Die

**Abbildung 1:** Trägheitsmomente geometrischer Körper. [1]



vorherigen Fälle beziehen sich auf Rotationsbewegungen, bei denen die Rotationsachse durch den Schwerpunkt des Körpers verläuft. Ist dies nicht der Fall, so berechnet sich das Trägheitsmoment mit Hilfe des Steiner'schen Satzes:

$$I = I_s + m \cdot a^2,$$

wobei  $I_s$  das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse durch den Körperschwerpunkt und  $a$  der Abstand der tatsächlichen Drehachse zum Schwerpunkt ist.

Wenn auf einen drehbaren Körper die Kraft  $\vec{F}$  im Abstand  $\vec{r}$  der Achse angreift, so wirkt auf ihn ein Drehmoment  $\vec{M}$

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}. \quad (4)$$

Wenn dem Körper, welcher um den Winkel  $\varphi$  gedreht wird, ein rücktreibendes Drehmoment, beispielsweise durch eine Feder, entgegen, so handelt es sich um ein schwingendes System, welches harmonische Oszillationen ausführt. Die Periodendauer  $T$  ist dabei

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}. \quad (5)$$

Hierbei stellt  $D$  die Winkelrichtgröße dar. Sie steht mit dem Drehmoment  $M$  über

$$M = D \cdot \varphi \quad (6)$$

in Verbindung. Das System führt nur für kleine Drehwinkel  $\varphi$  harmonische Schwingungen aus.

Die Winkelrichtgröße  $D$  kann statisch durch Messen der Kraft senkrecht zum Bahnradius bei Auslenkung um den Drehwinkel  $\varphi$  bestimmt werden

$$D = \frac{F \cdot r}{\varphi}. \quad (7)$$

Bei dynamischen Messungen wird das System zu harmonischen Schwingungen angeregt. Aus Gl. (5) folgt

$$I = \frac{T^2 D}{4\pi^2},$$

wobei  $I$  nun das gesamte Trägheitsmoment darstellt. Um das Trägheitsmoment  $I_K$  des Rotationskörpers zu erhalten, muss noch das Trägheitsmoment  $I_D$  der Drillachse subtrahiert werden. Somit ergibt sich:

$$I_K = \frac{T^2 D}{4\pi^2} - I_D. \quad (8)$$

[1]

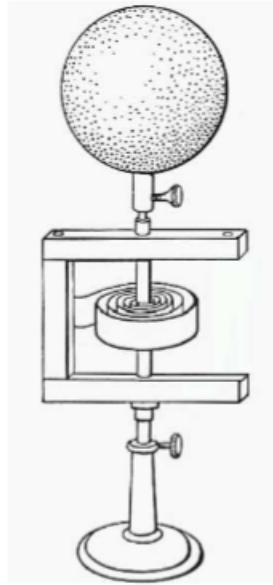
### 3 Durchführung

Um das Trägheitsmoment bestimmter Körper zu berechnen, wird eine Drillachse verwendet. Dabei werden die Körper auf einer drehbaren Achse befestigt, welche über eine Spiralfeder mit dem Rahmen verbunden ist. Um zunächst die Winkelrichtgröße und das Eigenträgheitsmoment der Drillachse zu berechnen, wird eine nahezu masselose Stange auf der Achse befestigt. Dann wird eine Federwaage senkrecht zur Stange eingehakt, da sonst eine ungenaue Kraft angezeigt wird, und um bestimmte Winkel ausgelenkt. Die gemessene Kraft, der Radius und der Winkel werden notiert und die Messung wird 10 mal durchgeführt.

Auf die masselose Stange werden in gleichem Abstand zwei Gewichte angebracht, und das System wird zum Schwingen gebracht. Die Schwingungsdauer wird für 10 verschiedene Abstände gemessen.

Zur Trägheitsmoment-Bestimmung einer Kugel und eines Zylinders, werden diese auf der Achse befestigt, und ausgelenkt. Wieder wird die Schwingungsdauer gemessen, diesmal 5 mal.

Auf gleiche Weise wird die Schwingungsdauer einer Holzpuppe in zwei verschiedenen Stellungen gemessen.



**Abbildung 2:** Die Drillachse.

## 4 Fehlerrechnung

Der Mittelwert berechnet sich mit folgender Formel:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (9)$$

Der Fehler des Mittelwertes lautet entsprechend :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (10)$$

Werden Daten mit Unsicherheiten in späteren Formeln weiter verwendet, breiten sich die Fehler nach der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung aus:

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_i \right)^2} \quad (11)$$

Ausgleichsrechnung wird mit folgender Formel durchgeführt :

$$y = a \cdot x + b \quad (12)$$

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\bar{x}^2 - \bar{x}^2} \quad (13)$$

$$b = \frac{\bar{x}^2 \bar{y} - \overline{xy} \bar{x}}{\bar{x}^2 - \bar{x}^2} \quad (14)$$

## 5 Auswertung

### 5.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße

Die Winkelrichtgröße wird aus Gleichung (7) bestimmt. In Tabelle (1) sind alle dafür benötigten Größen, also Abstand des Mittelpunktes der Drillachse zur angesetzten Federwaage, Auslenkungswinkel, und gemessene Kraft, dargestellt, wie zuletzt auch die berechnete Winkelrichtgröße. Dabei wurde für je einen Winkel zweimal der Abstand geändert und gemessen. Die Unsicherheit des Abstandes wird auf 0.05 mm geschätzt.

**Tabelle 1:** Werte zur Berechnung der Winkelrichtgröße

$\phi/\text{rad}$	$F/\text{N}$	$r/\text{m}$	$D/\text{Nm}/10^{-3}$
0.52	0.46	$0.02965 \pm 0.00005$	$0.455 \pm 0.00077$
0.52	0.26	$0.04945 \pm 0.00005$	$0.429 \pm 0.00043$
0.70	0.62	$0.02965 \pm 0.00005$	$0.460 \pm 0.00076$
0.70	0.39	$0.04945 \pm 0.00005$	$0.482 \pm 0.00049$
0.87	0.80	$0.02965 \pm 0.00005$	$0.474 \pm 0.00080$
0.87	0.48	$0.04945 \pm 0.00005$	$0.475 \pm 0.00048$
1.05	0.94	$0.02965 \pm 0.00005$	$0.465 \pm 0.00078$
1.05	0.57	$0.04945 \pm 0.00005$	$0.470 \pm 0.00048$
1.22	1.10	$0.02965 \pm 0.00005$	$0.466 \pm 0.00079$
1.22	0.66	$0.04945 \pm 0.00005$	$0.466 \pm 0.00047$

Der Mittelwert aller Winkelrichtgrößen beträgt:

$$D = (0.464 \pm 0.0005) \cdot 10^{-3} \text{Nm} \quad (15)$$

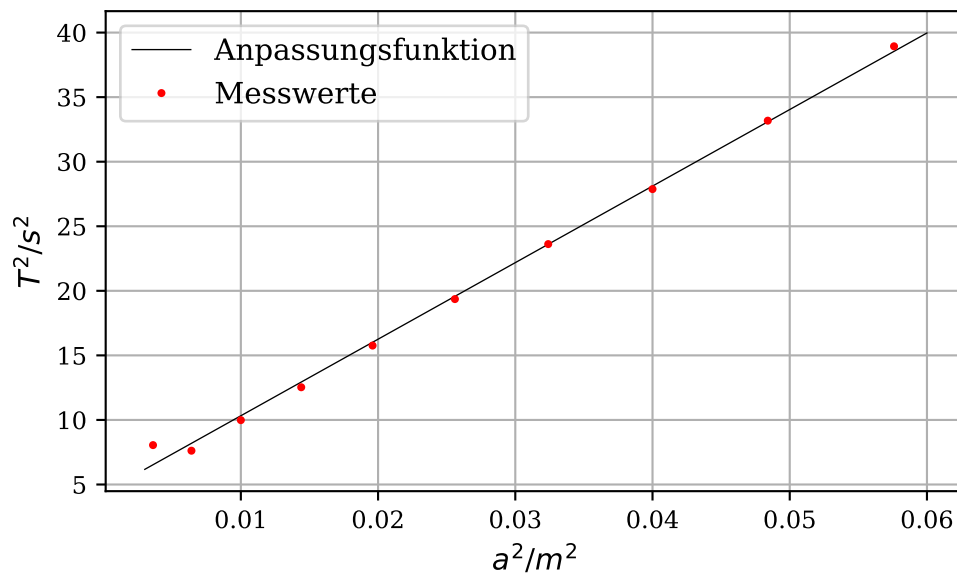
### 5.2 Bestimmung des Trägheitsmoments der Drillachse

In folgender Tabelle wird die Schwingungsdauer T und der zugehörige Abstand a vom Mittelpunkt der Drillachse bis zum Schwerpunkt der Gewichte dargestellt. Dabei wurde für einen Abstand 10 Schwingungen gemessen und das Ergebnis durch 10 geteilt. Der Fehler der Messung wird auf 0.5 Sekunden geschätzt.

**Tabelle 2:** Gemessene Schwingungsdauern und Abstände

$a/\text{mm}$	$T/\text{s}$
$60 \pm 0.05$	$2.46 \pm 0.05$
$80 \pm 0.05$	$2.79 \pm 0.05$
$100 \pm 0.05$	$3.16 \pm 0.05$
$120 \pm 0.05$	$3.54 \pm 0.05$
$140 \pm 0.05$	$3.97 \pm 0.05$
$160 \pm 0.05$	$4.40 \pm 0.05$
$180 \pm 0.05$	$4.86 \pm 0.05$
$200 \pm 0.05$	$5.28 \pm 0.05$
$220 \pm 0.05$	$5.76 \pm 0.05$
$240 \pm 0.05$	$6.24 \pm 0.05$

Das Quadrat der Schwingungsdauer wird gegen das Quadrat des Abstandes aufgetragen, und mit linearer Regression wird das Trägheitsmoment der Drillachse berechnet.



**Abbildung 3:** Ausgleichsrechnung zur Bestimmung des Trägheitsmomentes der Drillachse.

Beschrieben wird die Ausgleichsgerade durch folgende Gleichung:

$$y = (592.91 \pm 11.52)x + (4.39 \pm 0.36) \quad (16)$$

Mit Hilfe von Gleichung (5) ergibt sich:

$$T^2(a^2) = 4\pi^2 \frac{(I_D + I_K)}{D} \quad (17)$$

wobei  $I_K$  das Trägheitsmoment der Gewichte ist, welches sich wie folgt zusammen setzt:

$$I_K = (I_{Z1S} + I_{Z2S}) + (m_{Z1} + m_{Z2})a^2 \quad (18)$$

$I_{Z1S}$  bzw.  $I_{Z2S}$  sind die Trägheitsmomente der Zylinder-Gewichte mit Achse durch den Schwerpunkt. Sie lassen sich mit der letzten Gleichung aus Abbildung (1) berechnen. Die Masse der Gewichte beträgt:

$$m_{Z1} = 0.2218kg, m_{Z2} = 0.2225kg \quad (19)$$

Der Durchmesser beider Gewichte beträgt  $d = (0.03475 \pm 0.00005)m$  und die Höhe  $h = (0.0297 \pm 0.00005)m$ . Die Werte für die Trägheitsmomente lauten also:

$$I_{Z1S} = (3.304 \pm 0.007)10^{-5}kgm^2, I_{Z2S} = (3.315 \pm 0.007)10^{-5}kgm^2. \quad (20)$$

Setzt man  $I_K$  in Gleichung (11) ein, so ergibt sich:

$$T^2(a^2) = 4\pi^2 \frac{(I_D + (I_{Z1S} + I_{Z2S}) + (m_{Z1} + m_{Z2})a^2)}{D} \quad (21)$$

$$\Rightarrow T^2(a^2) = \underbrace{4\pi^2 \frac{(I_D + (I_{Z1S} + I_{Z2S}))}{D}}_{\text{Achsenabschnitt } b} + \underbrace{\frac{4\pi^2(m_{Z1} + m_{Z2})}{D}}_{\text{Steigung } m} a^2 \quad (22)$$

$$\Rightarrow I_D = \frac{bD}{4\pi^2} - (I_{ZS1} + I_{ZS2}) \quad (23)$$

Das Trägheitsmoment der Drillachse beträgt:

$$I_D = (-1.5 \pm 0.4) \cdot 10^{-5}kgm^2. \quad (24)$$

### 5.3 Bestimmung des Trägheitsmoments für zwei Körper

In diesem Auswertungsteil werden die Trägheitsmomente für eine Kugel und einen Zylinder berechnet, deren Drehachsen ihren Symmetrieachsen entsprechen. Für die Kugel wurden je 8 Schwingungen gemessen, für den Zylinder je 5.

**Tabelle 3:** Schwingungsdauer eines Zylinder und einer Kugel

$T_Z/s$	$T_K/s$
$0.72 \pm 0.01$	$1.47 \pm 0.0625$
$0.75 \pm 0.01$	$1.45 \pm 0.0625$
$0.74 \pm 0.01$	$1.48 \pm 0.0625$
$0.74 \pm 0.01$	$1.44 \pm 0.0625$
$0.74 \pm 0.01$	$1.46 \pm 0.0625$



Als Mittelwerte ergeben sich:

$$T_Z = (0.74 \pm 0.04)s \quad (25)$$

$$T_K = (0.146 \pm 0.028)s. \quad (26)$$

Dadurch lassen sich mit Gleichung (8) die Trägheitsmomente berechnen:

$$I_Z = (6.4 \pm 0.8) \cdot 10^{-6} \text{kgm}^2 \quad (27)$$

$$I_K = (2.51 \pm 0.1) \cdot 10^{-5} \text{kgm}^2. \quad (28)$$

Das negative Trägheitsmoment der Drillachse wurde bei der Berechnung nicht berücksichtigt, da es physikalisch keinen Sinn ergibt. Berechnet man das Trägheitsmoment für einen Zylinder mit Masse  $m = 0.3684 \text{kg}$ , Durchmesser  $d = (0.0973 \pm 0.00005)m$  und Höhe  $h = (0.101 \pm 0.00005)m$ , ergibt sich:  $I_Z = (4.36 \pm 0.004)10^{-4} \text{kgm}^2$ . Der Theoriewert einer Kugel mit Masse  $m = 0.8123 \text{kg}$  und Durchmesser  $d = (0.13755 \pm 0.00005)m$  beträgt:  $I_K = (1.54 \pm 0.001)10^{-3} \text{kgm}^2$

#### 5.4 Bestimmung des Trägheitsmoments einer Modellpuppe

Es wird die Schwingungsdauer einer Puppe für zwei unterschiedliche Posen  $P_1$  und  $P_2$  bestimmt. Bei der ersten Pose sind Arme und Beine am Körper angewinkelt und in der zweiten sind Arme senkrecht zum Körper nach außen gestreckt, und die Beine entgegengesetzt nach hinten bzw. vorne gestreckt. Für die erste Pose werden 5 Schwingungen gemessen, für die zweite 10.

**Tabelle 4:** Schwingungsdauer der Modellpuppe

$T_{P_1}/s$	$T_{P_2}/s$
$0.34 \pm 0.1$	$0.85 \pm 0.05$
$0.35 \pm 0.1$	$0.85 \pm 0.05$
$0.36 \pm 0.1$	$0.84 \pm 0.05$
$0.38 \pm 0.1$	$0.85 \pm 0.05$
$0.35 \pm 0.1$	$0.86 \pm 0.05$

Als Mittelwerte ergeben sich:

$$T_{P_1} = (0.35 \pm 0.04)s \quad (29)$$

$$T_{P_2} = (0.85 \pm 0.02)s \quad (30)$$

Die Trägheitsmomente lassen sich analog zu den zwei Körpern mit Gleichung (8) berechnen. Da Allerdings das Trägheitsmoment der Drillachse negativ ist, wird es in der Berechnung auf Null geschätzt:

$$I_{P_1} = (1.5 \pm 0.4) \cdot 10^{-6} \text{kgm}^2 \quad (31)$$

$$I_{P_2} = (8.5 \pm 0.4) \cdot 10^{-6} \text{kgm}^2. \quad (32)$$

## 6 Diskussion

Die Abstände der Gewichte auf der masselosen Stange konnten nur sehr ungenau bestimmt werden, weshalb möglicherweise das negative Trägheitsmoment der Drehachse zustande kommt. Auch der Einsatz einer masselosen Stange ist nicht zu verwirklichen. Laut Versuchsanleitung gilt Gleichung (6) nur für kleine Winkel, was bei diesem Versuch nicht möglich war zu beachten. Deshalb unterschieden sich die Trägheitsmomente der Kugel bzw. des Zylinders zu den Theoriewerten um ca. 98 Prozent. Der Zylinder hat außerdem eine sehr kurze Schwingungsdauer, weshalb bei der Durchführung 5 Schwingungen gemessen wurden und für die Kugel 8. Das genaue Messen mit der Stoppuhr ist fast unmöglich genau zu realisieren, auf Grund der kurzen Schwingungsdauer, deshalb muss von großen Abweichungen der Zeit ausgegangen werden. Außerdem konnte die Drillachse nicht mit einbezogen werden, was falsch ist. Auch die Schwingungsdauer der Puppe war sehr kurz, weshalb für die erste Pose nur 5 Schwingungen gemessen wurden. Die systematischen Fehler sind die gleichen wie bei den zwei Körpern. Die Abweichung der Trägheitsmomente zu den Theoriewerten beträgt: ... bzw. ... Für die Berechnung des Trägheitsmomentes wurden auch starke Vereinfachungen angenommen, denn die Puppe wurde nicht komplett in alle ihre Einzelteile zerlegt. Nichts desto trotz ...

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch zum Literaturverzeichnis*. 2014.