

**VERSUCH NUMMER**

**TITEL**

AUTOR A

authorA@udo.edu

AUTOR B

authorB@udo.edu

Durchführung: DATUM

Abgabe: DATUM

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>3</b>
<b>3 Durchführung</b>	<b>4</b>
<b>4 Auswertung</b>	<b>4</b>
4.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße . . . . .	4
4.2 Bestimmung des Trägheitsmoments der Drillachse . . . . .	5
4.3 Bestimmung des Trägheitsmoments für zwei Körper . . . . .	7
4.4 Bestimmung des Trägheitsmoments einer Modellpuppe . . . . .	8
<b>5 Diskussion</b>	<b>8</b>
<b>Literatur</b>	<b>8</b>

# 1 Zielsetzung

In diesem Versuch wird das Trägheitsmoment verschiedener geometrischer Körper bestimmt und der Steiner'sche Satz bestätigt.

## 2 Theorie

Das Trägheitsmoment  $I$  ist eine Größe, die zur Charakterisierung der Dynamik von Drehbewegungen benutzt wird. Für eine punktförmige Masse  $m$ , die sich im Abstand  $r$  zu einer festen Rotationsachse befindet, ergibt sich für dieses

$$I = mr^2. \quad (1)$$

Das Gesamtträgheitsmoment ausgedehnter Körper setzt sich aus den Einzelträgheitsmomenten der Masselemente  $m_i$ , welche sich im Abstand  $r_i$  zur Drehachse befinden, zusammen. Folglich gilt für das Gesamtträgheitsmoment:

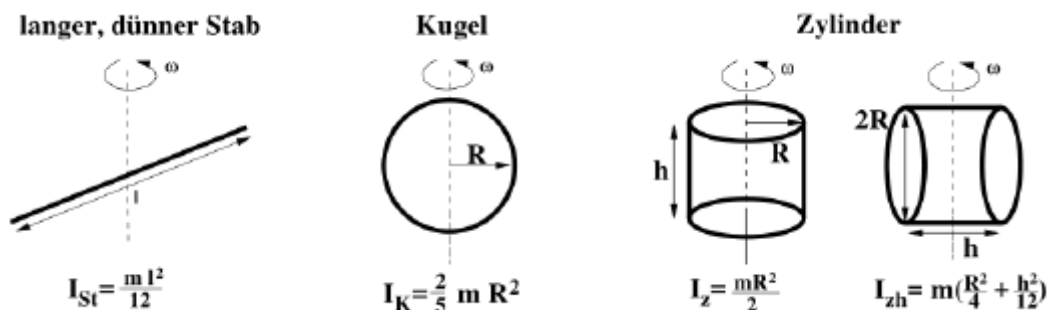
$$I = \sum_i r_i^2 \cdot m_i \quad (2)$$

Für infinitesimale Massen  $dm$  ergibt sich folglich

$$I = \int r^2 dm. \quad (3)$$

Die Trägheitsmomente einiger geometrischer Körper sind Abb.1 zu entnehmen. Die

**Abbildung 1:** Trägheitsmomente geometrischer Körper. [1]



vorherigen Fälle beziehen sich auf Rotationsbewegungen, bei denen die Rotationsachse durch den Schwerpunkt des Körpers verläuft. Ist dies nicht der Fall, so berechnet sich das Trägheitsmoment mit Hilfe des Steiner'schen Satzes:

$$I = I_s + m \cdot a^2,$$

wobei  $I_s$  das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse durch den Körperschwerpunkt und  $a$  der Abstand der tatsächlichen Drehachse zum Schwerpunkt ist.

Wenn auf einen drehbaren Körper die Kraft  $\vec{F}$  im Abstand  $\vec{r}$  der Achse angreift, so wirkt auf ihn ein Drehmoment  $\vec{M}$

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}. \quad (4)$$

Wenn dem Körper, welcher um den Winkel  $\varphi$  gedreht wird, ein rücktreibendes Drehmoment, beispielsweise durch eine Feder, entgegen, so handelt es sich um ein schwingendes System, welches harmonische Oszillationen ausführt. Die Periodendauer  $T$  ist dabei

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}. \quad (5)$$

Hierbei stellt  $D$  die Winkelrichtgröße dar. Sie steht mit dem Drehmoment  $M$  über

$$M = D \cdot \varphi \quad (6)$$

in Verbindung. Das System führt nur für kleine Drehwinkel  $\varphi$  harmonische Schwingungen aus.

Die Winkelrichtgröße  $D$  kann statisch durch Messen der Kraft senkrecht zum Bahnradius bei Auslenkung um den Drehwinkel  $\varphi$  bestimmt werden

$$D = \frac{F \cdot r}{\varphi}. \quad (7)$$

Bei dynamischen Messungen wird das System zu harmonischen Schwingungen angeregt. Aus Gl. (5) folgt

$$I = \frac{T^2 D}{4\pi^2},$$

wobei  $I$  nun das gesamte Trägheitsmoment darstellt. Um das Trägheitsmoment  $I_K$  des Rotationskörpers zu erhalten, muss noch das Trägheitsmoment  $I_D$  der Drillachse subtrahiert werden. Somit ergibt sich:

$$I_K = \frac{T^2 D}{4\pi^2} - I_D. \quad (8)$$

[1]

## 3 Durchführung

## 4 Auswertung

### 4.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße

Die Winkelrichtgröße wird aus Gleichung (4) bestimmt. In Tabelle () sind alle dafür benötigten Größen, also Abstand des Mittelpunktes der Drillachse zur angesetzten Federwaage, Auslenkungswinkel, und gemessene Kraft, dargestellt, wie zuletzt auch die

berechnete Winkelrichtgröße. Dabei wurde für je einen Winkel zweimal der Abstand geändert und gemessen. Die Unsicherheit des Abstandes wird auf 0.05 mm geschätzt.

**Tabelle 1:** Werte zur Berechnung der Winkelrichtgröße

$\phi$	$F/N$	$r/m$	$D/Nm/10^{-3}$
30°	0.46	$0.02965 \pm 0.00005$	$0.455 \pm 0.00077$
30°	0.26	$0.04945 \pm 0.00005$	$0.429 \pm 0.00043$
40°	0.62	$0.02965 \pm 0.00005$	$0.460 \pm 0.00076$
40°	0.39	$0.04945 \pm 0.00005$	$0.482 \pm 0.00049$
50°	0.80	$0.02965 \pm 0.00005$	$0.474 \pm 0.00080$
50°	0.48	$0.04945 \pm 0.00005$	$0.475 \pm 0.00048$
60°	0.94	$0.02965 \pm 0.00005$	$0.465 \pm 0.00078$
60°	0.57	$0.04945 \pm 0.00005$	$0.470 \pm 0.00048$
70°	1.10	$0.02965 \pm 0.00005$	$0.466 \pm 0.00079$
70°	0.66	$0.04945 \pm 0.00005$	$0.466 \pm 0.00047$

Der Mittelwert aller Winkelrichtgrößen beträgt:

$$D = (0.464 \pm 0.0005) \cdot 10^{-3} \text{Nm} \quad (9)$$

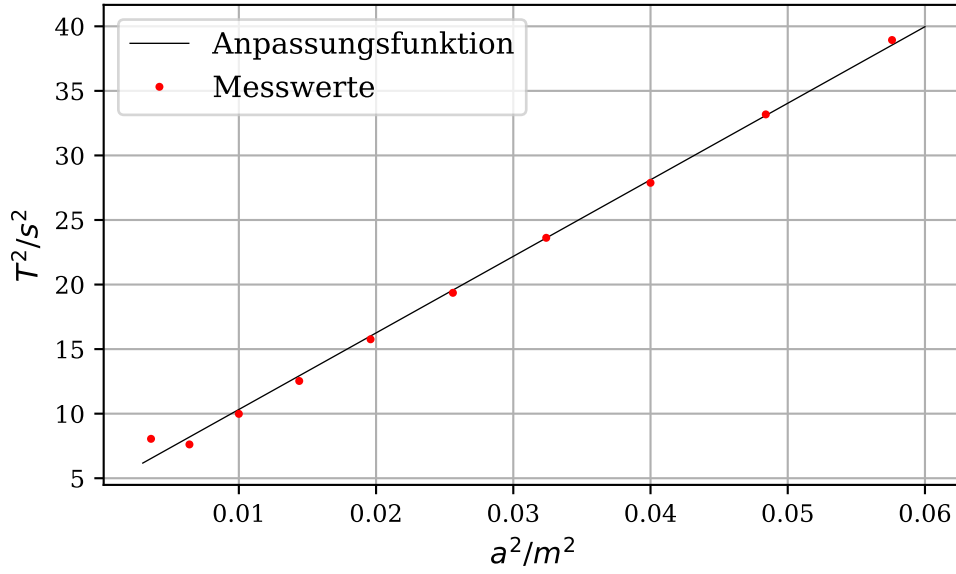
## 4.2 Bestimmung des Trägheitsmoments der Drillachse

In folgender Tabelle wird die Schwingungsdauer  $T$  und der zugehörige Abstand  $a$  vom Mittelpunkt der Drillachse bis zum Schwerpunkt der Gewichte dargestellt. Dabei wurde für einen Abstand 10 Schwingungen gemessen und das Ergebnis durch 10 geteilt. Der Fehler der Messung wird auf 0.5 Sekunden geschätzt.

**Tabelle 2:** Gemessene Schwingungsdauern und Abstände

$a/\text{mm}$	$T/\text{s}$
$60 \pm 0.05$	$2.46 \pm 0.05$
$80 \pm 0.05$	$2.79 \pm 0.05$
$100 \pm 0.05$	$3.16 \pm 0.05$
$120 \pm 0.05$	$3.54 \pm 0.05$
$140 \pm 0.05$	$3.97 \pm 0.05$
$160 \pm 0.05$	$4.40 \pm 0.05$
$180 \pm 0.05$	$4.86 \pm 0.05$
$200 \pm 0.05$	$5.28 \pm 0.05$
$220 \pm 0.05$	$5.76 \pm 0.05$
$240 \pm 0.05$	$6.24 \pm 0.05$

Das Quadrat der Schwingungsdauer wird gegen das Quadrat des Abstandes aufgetragen, und mit linearer Regression wird das Trägheitsmoment der Drillachse berechnet.



**Abbildung 2:** Ausgleichsrechnung zur Bestimmung des Trägheitsmomentes der Dril-lachse.

Beschrieben wird die Ausgleichsgerade durch folgende Gleichung:

$$y = (592.91 \pm 11.52)x + (4.39 \pm 0.36) \quad (10)$$

Mit Hilfe von Gleichung () ergibt sich:

$$T^2(a^2) = 4\pi^2 \frac{(I_D + I_K)}{D} \quad (11)$$

wobei  $I_K$  das Trägheitsmoment der Gewichte ist, welches sich wie folgt zusammen setzt:

$$I_K = (I_{Z1S} + I_{Z2S}) + (m_{Z1} + m_{Z2})a^2 \quad (12)$$

$I_{Z1S}$  bzw.  $I_{Z2S}$  sind die Trägheitsmomente der Zylinder-Gewichte mit Achse durch den Schwerpunkt. Sie lassen sich mit Gleichung () berechnen. Die Masse der Gewichte beträgt:

$$m_{Z1} = 0.2218kg, m_{Z2} = 0.2225kg \quad (13)$$

Der Durchmesser beider Gewichte beträgt  $d = (0.03475 \pm 0.00005)m$  und die Höhe  $h = (0.0297 \pm 0.00005)m$ . Die Werte für die Trägheitsmomente lauten also:

$$I_{Z1S} = (3.304 \pm 0.007)10^{-5}, I_{Z2S} = (3.315 \pm 0.007)10^{-5}. \quad (14)$$

Setzt man  $I_K$  in Gleichung () ein, so ergibt sich:

$$T^2(a^2) = 4\pi^2 \frac{(I_D + (I_{Z1S} + I_{Z2S}) + (m_{Z1} + m_{Z2})a^2)}{D} \quad (15)$$

$$\Rightarrow T^2(a^2) = 4\pi^2 \underbrace{\frac{(I_D + (I_{Z1S} + I_{Z2S}))}{D}}_{\text{Achsenabschnitt } b} + \underbrace{\frac{4\pi^2(m_{Z1} + m_{Z2})}{D}}_{\text{Steigung } m} a^2 \quad (16)$$

$$\Rightarrow I_D = \frac{bD}{4\pi^2} - (I_{ZS1} + I_{ZS2}) \quad (17)$$

Das Trägheitsmoment der Drillachse beträgt:

$$I_D = (-1.5 \pm 0.4) \cdot 10^{-5} \text{kgm}^2 \quad (18)$$

### 4.3 Bestimmung des Trägheitsmoments für zwei Körper

In diesem Auswertungsteil werden die Trägheitsmomente für eine Kugel und einen Zylinder berechnet, deren Drehachsen ihren Symmetrieachsen entsprechen. Für die Kugel wurden je 8 Schwingungen gemessen, für den Zylinder je 5.

**Tabelle 3:** Schwingungsdauer eines Zylinder und einer Kugel

$T_Z/\text{s}$	$T_K/\text{s}$
$0.72 \pm 0.01$	$1.47 \pm 0.0625$
$0.75 \pm 0.01$	$1.45 \pm 0.0625$
$0.74 \pm 0.01$	$1.48 \pm 0.0625$
$0.74 \pm 0.01$	$1.44 \pm 0.0625$
$0.74 \pm 0.01$	$1.46 \pm 0.0625$

Als Mittelwerte ergeben sich:

$$T_Z = (0.74 \pm 0.04) \quad (19)$$

$$T_K = (0.146 \pm 0.028) \quad (20)$$

Dadurch lassen sich mit Gleichung ( ) die Trägheitsmomente berechnen:

$$I_Z = (6.4 \pm 0.8) \cdot 10^{-6} \quad (21)$$

$$I_K = (2.51 \pm 0.1) \cdot 10^{-5} \quad (22)$$

Das negative Trägheitsmoment der Drillachse wurde bei der Berechnung nicht berücksichtigt, da es physikalisch keinen Sinn ergibt. Berechnet man das Trägheitsmoment für einen Zylinder mit Masse  $m = 0.3684\text{kg}$ , Durchmesser  $d = (0.0973 \pm 0.00005)$  und Höhe  $h = (0.101 \pm 0.00005)$ , ergibt sich:  $I_Z = (4.36 \pm 0.004)10^{-4}$ . Der Theoriewert einer Kugel mit Masse  $m = 0.8123\text{kg}$  und Durchmesser  $d = (0.13755 \pm 0.00005)$  beträgt:  $I_K = (1.54 \pm 0.001)10^{-3}$

#### 4.4 Bestimmung des Trägheitsmoments einer Modellpuppe

Es wird die Schwingungsdauer einer Puppe für zwei unterschiedliche Posen  $P_1$  und  $P_2$  bestimmt. Bei der ersten Pose sind Arme und Beine am Körper angewinkelt und in der zweiten sind Arme senkrecht zum Körper nach außen gestreckt, und die Beine entgegengesetzt nach hinten bzw. vorne gestreckt. Für die erste Pose werden 5 Schwingungen gemessen, für die zweite 10.

**Tabelle 4:** Schwingungsdauer der Modellpuppe

$T_{P_1}/s$	$T_{P_2}/s$
$0.34 \pm 0.1$	$0.85 \pm 0.05$
$0.35 \pm 0.1$	$0.85 \pm 0.05$
$0.36 \pm 0.1$	$0.84 \pm 0.05$
$0.38 \pm 0.1$	$0.85 \pm 0.05$
$0.35 \pm 0.1$	$0.86 \pm 0.05$

Als Mittelwerte ergeben sich:

$$T_{P_1} = (0.35 \pm 0.04) \quad (23)$$

$$T_{P_2} = (0.85 \pm 0.02) \quad (24)$$

Die Trägheitsmomente lassen sich analog zu den zwei Körpern mit Gleichung () berechnen:

$$I_{P_1} = (1.6 \pm 0.4) \cdot 10^{-5} \quad (25)$$

$$I_{P_2} = (2.3 \pm 0.4) \cdot 10^{-5} \quad (26)$$

## 5 Diskussion

### Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch zum Literaturverzeichnis*. 2014.