V102

Drehschwingungen

Kalina Toben
kalina.toben@tu-dortmund.de

Daniel Wall
daniel.wall@tu-dortmund.de

Durchführung: 20.11.2018

Abgabe: 27.11.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

Wirken sogenannte Oberflächenkräfte auf einen festen Körper, erfahren sie Gestalts- oder Volumenänderungen. Die Spannung die dabei auftritt, hat eine senkrecht zur Oberfläche stehende Komponente, welche Normalspannung σ oder auch Druck P genannt wird, und eine Tangential-Komponente, welche Schubspannung τ heißt. Nimmt der Körper nach der Verformung seine ursprüngliche Gestalt an, spricht man von einer elastischen Deformation.
Mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes

$$P = Q\frac{\Delta V}{V}, \tag{1}$$

wird der Zusammenhang der Spannung und Deformation beschrieben. Dieses gilt nur für kleine Spannungen. Ein Körper besteht aus einem Kristallgitter, also einer regelmäßigen Anordnung von Atomen und Molekülen. Ist die Symmetrie des Kristalls niedrig, sind die elektrostatischen Kräfte richtungsabhängig, und man braucht insgesamt 36 elastische Konstanten. Da sich in diesem Experiment aber auf isotrope Körper beschränkt wird, die Konstanten also richtungsunabhängig sind, werden nur 4 Konstanten benötigt. Diese sind das Schubmodul G, welches die Gestaltelastizität beschreibt, das Kompressionsmodul G, welches die Volumenelastizität beschreibt, das Elastizitätsmodul E, zur Beschreibung der Längenänderung, wenn eine Normalspannung wirkt, und die Poissonsche Querkontraktionszahl μ, zur Beschreibung der Längenänderung senkrecht zur Richtung der Normalspannung.
Die Querkontraktionszahl bestimmt sich aus

$$\mu = -\frac{\Delta B}{B} \cdot \frac{L}{\Delta L}, \tag{2}$$

mit Breite B und Länge L eines Stabes aus Abbildung (1). Insgesamt gelten folgende Beziehungen zwischen den Konstanten:

$$E = 2G(\mu + 1) \tag{3}$$

und

$$E = 3(1 - 2\mu)Q. \tag{4}$$

Nur die Konstanten E und G lassen sich experimentell bestimmen; die beiden anderen Konstanten müssen aus den obigen Gleichungen berechnet werden.

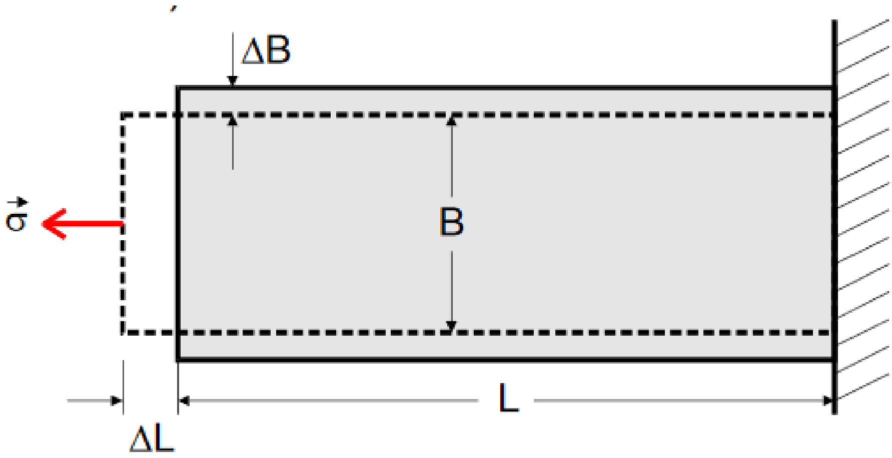

Abbildung 1: Skizze mit den Maßen eines Stabes.[1]

1.1 Die elastische Konstante G

In diesem Versuch werden dynamische Messverfahren beschrieben, in denen die Spannung von der Zeit abhängt. Damit werden Fehler vermieden, die durch elastische Nachwirkung entstehen können. Bei jener stellt sich die Deformation nicht direkt auf einen endgültigen Wert ein.
Um das Schubmodul G zu bestimmen, wird das Prinzip der Torsion angewandt(s. Abbildung (2)). Dabei wird ein Körper an einem Ende fest eingespannt, und am anderen Ende werden an zwei Punkten Kräfte angreifen. Ein Drehmoment entsteht, welches allerdings auch vom Hebelarm abhängt(dem Abstand des Massepunktes von der Drehachse). Da dieser nicht konstant ist, muss der Körper in mehrere Hohlzylinder zerlegt werden, und zuletzt über den gesamten Radius integriert werden, was schließlich auf

$$M = \frac{2}{\pi} G \frac{R^4}{L} \phi \tag{5}$$

führt, mit Radius R und Länge L. Es lässt sich eine lineare Beziehung zwischen Drehmoment und Drehwinkel erkennen. Die Konstante

$$D = \frac{\pi G R^4}{2L} \tag{6}$$

nennt man Richtgröße.
Um die dynamische Variante zu nutzen, wird an das untere Ende des Drahtes ein Körper mit einem bestimmten Trägheitsmoment θ eingehangen. Tordiert man den Draht nun, wird das System ausgelenkt, und es führt Drehschwingungen aus. Diese kommen dadurch zustande, dass nun zwei Drehmomente wirken, einmal das in Gleichung (5) beschriebene, und jenes der rotierenden Masse. Dieses wird beschrieben durch

$$M_T = \theta \frac{d^2\phi}{dt^2}. \tag{7}$$

Somit lässt sich die Bewegungsgleichung des Systems beschrieben mit

$$D\phi + \theta \frac{d^2\phi}{dt^2} = 0. \tag{8}$$

Der Ansatz

$$\phi(t) = \phi_0 cos \frac{2\pi}{T} t \tag{9}$$

löst die Gleichung, wobei

$$T = 2\pi\sqrt{\theta/D} \tag{10}$$

ist.
Das Trägheitsmoment einer Kugel muss also bekannt sein, und errechnet sich aus

$$\theta_{\text{Kugel}} = \frac{2}{5} m_K R_K^2. \tag{11}$$

Aus den Gleichungen (6), (10) und (11) ergibt sich nun schließlich:

$$G = \frac{16\pi}{5} \frac{m_K R_K^2 L}{T^2 R^4}. \tag{12}$$

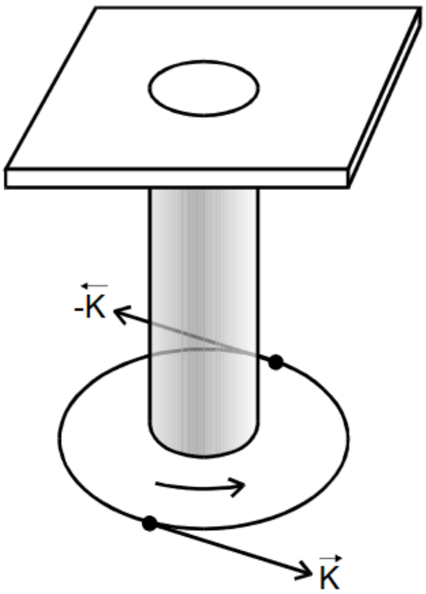

Abbildung 2: Torsion eines Zylinders.[1]

1.2 Das magnetische Moment eines Permanentmagneten

Das magnetische Moment ist gegeben durch

$$\vec{m} = p\vec{a}, \tag{13}$$

wobei der Vektor $\vec{a}$ vom Nordpol zum Südpol zeigt, und p die Polstärke ist. In einem homogenen Magnetfeld $\vec{B}$ wirken auf den Magneten zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte. Somit wirkt nur ein Drehmoment $\vec{M}_{\text{Mag}}$ auf den Magneten

$$\vec{M}_{\text{Mag}} = p\vec{a} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}, \tag{14}$$

mit Betrag

$$M_{\text{Mag}} = mBsin\gamma, \tag{15}$$

wobei γ der Winkel zwischen dem Magnetfeld und dem magnetischen Moment ist. Wird ein System, welches sich in einem Magnetfeld befindet, ausgelenkt, und zeigt die Dipolachse in Richtung des Feldes($\gamma = \phi$), ergibt sich folgende Bewegungsgleichung:

$$mBsin\phi + D\phi + \theta\frac{d^2\phi}{dt^2} = 0. \tag{16}$$

Wieder lässt sich die Gleichung mit einem Kosinus-Ansatz lösen, mit

$$T_m = 2\pi\sqrt{\frac{\theta}{mB + D}} \tag{17}$$

als Periode.

2 Durchführung

Der Versuch wird mit der Apparatur in Abbildung (3) durchgeführt. Sie besteht aus einem Torsionsdraht, und einer daran aufgehangenen Kugel mit einem Permanentmagneten.

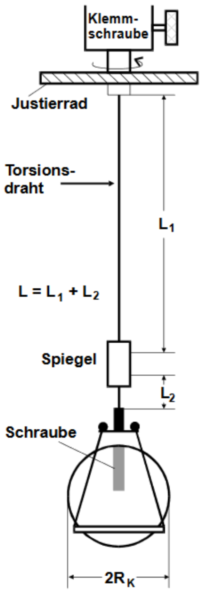

Abbildung 3: Messapparatur ohne Zeitmessvorrichtung.[1]

2.1 Bestimmung des Schubmoduls

Zuerst wird sichergestellt, dass der Magnet vertikal in der Kugel liegt, damit das Erdmagnetfeld die Messung nicht beeinflussen kann. Das System wird in Schwingung versetzt und mit einer elektronischen Stoppuhr wird die Periodendauer gemessen. Eine Torstufe stellt sicher, dass die Zählung zum richigen Zeitpunkt beginnt. Das dafür erforderliche Signal wird mit einer Lichtschranke erzeugt(s. Abbildung (4)). Immer, wenn die Photoiode von einem Lichtstrahl getroffen wird, gibt sie ein Signal ab, welches mittels einer digitalen Schaltung auf die Torstufe geleitet wird.
Ist alles aufgebaut, wird der Spiegel mittels des Justierrades so eingestellt, dass der Lichtstrahl etwas neben die Photoiode fällt. Lenkt man das System aus, indem man das Justierrad dreht, wird der Lichtstrahl an der Photoiode hinweg geführt zum Umkehrpunkt, und schließlich wieder zurück. Somit ist nach dem dritten Impuls eine Periode vergangen, und die Zeit kann abgelesen werden. Für diese Methode werden 10 Schwingungen gemessen. Es ist zu beachten, dass die Kugel nur um kleine Winkel ausgelenkt werden darf, und sie keine Pendelbewegungen ausführen darf.

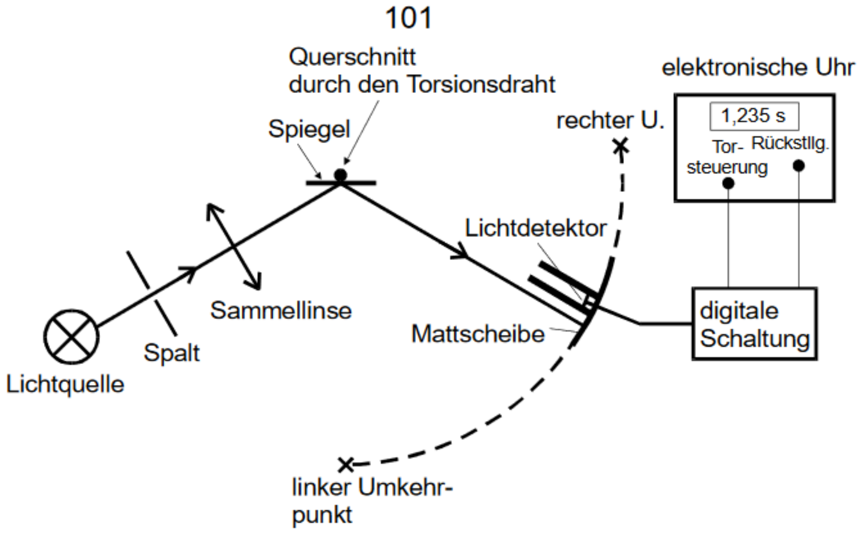

Abbildung 4: Prinzip der Messung der Periode.[1]

2.2 Bestimmung des magnetischen Momentes eines Permanentmagneten

Das Magnetfeld wird von einer Helmholtz-Spule erzeugt (s. Abbildung (5)). Diesmal muss der Magnet horizontal in der Kugel liegen, so dass die Dipolachse parallel zur Feldrichtung steht. Das System wird wie im Abschnitt vorher in Schwingung versetzt, nur diesmal werden für 5 verschiedene Stromstärken je 5 Perioden ermittelt. Auch bei dieser Messung wird mit Kleinwinkelnäherung gerechnet, somit darf die Auslenkung nicht allzu groß sein.

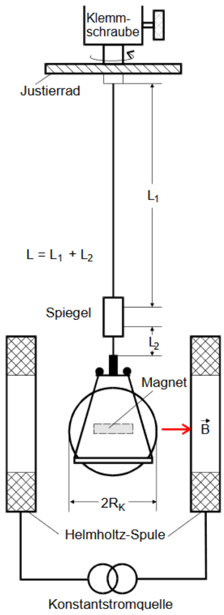

Abbildung 5: Messapparatur mit Helmholtz-Spule.[1]

3 Auswertung

3.1 Bestimmung des Schubmoduls ohne Magnetfeld

Das Gesamtträgheitsmoment θ_{ges} ergibt sich aus der Summe des Trägheitsmomentes der Kugel θ_{Kugel} nach Gleichung (11), und dem gegebenen Trägheitsmoment der Halterung θ_{h} zu

$$\begin{aligned}\theta_{\text{ges}} &= \theta_{\text{Kugel}} + \theta_{\text{h}}\\ &= (1,53 \cdot 10^{-4} \pm 1,4 \cdot 10^{-7})\,\text{kg}\,\text{m}^2 + 2,25 \cdot 10^{-6}\,\text{kg}\,\text{m}^2\\ &= (1,5525 \cdot 10^{-4} \pm 1,4 \cdot 10^{-7})\,\text{kg}\,\text{m}^2.\end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Schubmoduls G werden nun 10 Schwingungsperioden ohne Magnetfeld B gemessen (Tabelle 1).

Tabelle 1: Periodendauer T des zur Schwingung angeregten Drahtes ohne Magnetfeld B.

Fehler	T / s
	18,247
	18,242
	18,244
	18,245
	18,250
	18,249
	18,243
	18,235
	18,248
	18,250
Mittelwert	18,245
Standardabweichung	0,004

Mit der Länge L und dem Durchmesser d des Drahtes (Tabelle 2) lässt sich nach Gleichung (12) den Schubmodul G zu

Tabelle 2: Messgrößen des Drahtes.

	d / mm	L / cm
	0,172	66,30
	0,173	
	0,170	
Mittelwert	0,172	
Standardabweichung	0,001	

$$G = (1,41 \pm 0,04) \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

berechnen.

Der Elastizitätsmodul E wird aufgrund der fehlenden experimentellen Bestimmung nach Literaturwerten

$$E = 210\,\mathrm{GPa}$$

gesetzt.

Nach Gleichung (3) ergibt sich für die Poissonsche Querkontraktionszahl

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1$$
$$= (0,257 \pm 0,022)$$

und daraus über die Gleichung (4) für den Kompressionsmodul

$$Q = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$
$$= (1,44 \pm 0,13) \cdot 10^{11}\,\mathrm{Pa}.$$

3.2 Bestimmung des magnetischen Momentes eines Permanentmagneten

Die Magnetfeldstärke B im Zentrum des Helmholtz-Spulenpaars ergibt sich zu

$$B_\mathrm{H} = \mu_0 \frac{8NI}{\sqrt{125}R}$$

mit $N = 80$ und $R = 72\,\mathrm{mm}$.

Tabelle 3: Periodendauer T_m des zur Schwingung angeregten Drahtes mit eingeschaltetem Magnetfeld B.

Stromstärke I / A	T_m / s 0,4	0,5	0,6	0,8	1
	5,670	5,087	4,576	3,842	3,301
	5,687	5,039	4,596	3,856	3,284
	5,659	5,046	4,611	3,846	3,276
	5,682	5,090	4,603	3,847	3,270
	5,441	5,107	4,597	3,831	3,289
Mittelwert	5,6278	5,0738	4,5966	3,8444	3,2840
St.Abw.	0,0939	0,0265	0,0116	0,0081	0,0107
Magnetfeld B / mT	0.3996	0.4995	0.5995	0.7993	0.9991

Nach Umstellen der Gleichung (17) erhält man

$$\Psi := m_\mathrm{mgn} B + D = \frac{4\pi^2 \theta_\mathrm{ges}}{T_\mathrm{m}^2}. \tag{18}$$

Um das magnetische Moment m_mgn zu berechnen wird nun Ψ gegen die Magnetfeldstärke B aufgetragen (Abbildung 6) und mithilfe linearer Regression wird die Steigung der Ausgleichsgeraden bestimmt:

$$m_\mathrm{mgn} = (0,628 \pm 0,035)\,\mathrm{A\,m^2}$$
$$D = (-7,3 \pm -2,4) \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}}.$$

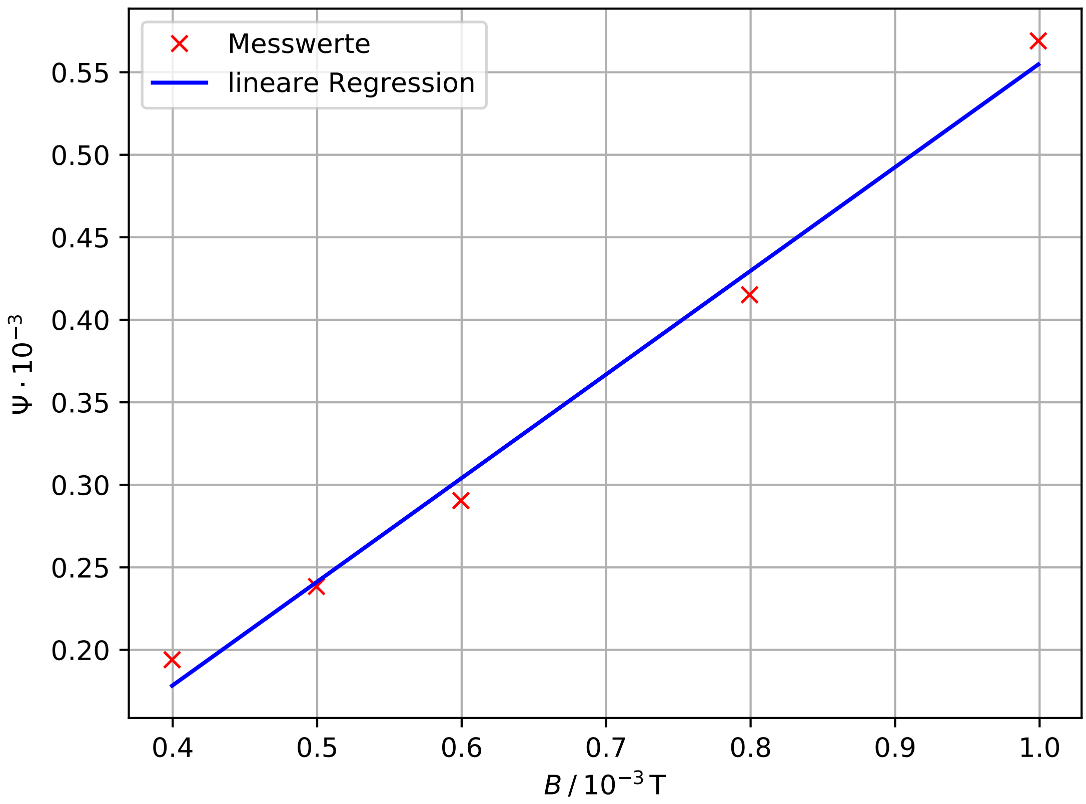

Abbildung 6: Ψ-B-Diagramm und lineare Regression

4 Diskussion

Beim Vergleich mit Literaturwerten weist der Schubmodul G eine relative Abweichung von 77,81% und der Kompressionsmodul Q eine relative Abweichung von 10% auf, wobei der Kompressionsmodul teilweise aus Literaturwerten berechnet wurde (Elastizitätsmodul E). Die Poissonsche Querkontraktionszahl μ für Eisen liegt zwischen 0,21 und 0,259, sodass diese je nach Material relativ genau bestimmt werden konnte. Ein Vergleich des magnetischen Moments mit Literaturwerten ist nicht möglich, wobei es jedoch in einem realistischen Bereich liegt. Im Allgemeinen war der Versuchsaufbau sehr empfindlich, da bereits kleinste Bewegungen oder Stöße am Tisch oder Aufbau zu verhältnismäßig großen Messabweichungen führen. Dies war gerade bei der Messung mit eingeschaltetem Magnetfeld der Fall, da hier besonders darauf geachtet werden sollte, dass der Draht nur um einen kleinen Winkel tordiert. Eine reine Drehschwingung ohne Pendelbewegung zu erhalten ist mit manueller Auslenkung am Justierrad kaum möglich, wobei diese durch die Dämpfungsvorrichtung an der Apparatur zumindest etwas vermindert werden konnte.

Systematische Messfehler durch die Photodiode oder der automatischen Stoppuhr sind nicht zu berücksichtigen.

Literatur

[1] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch 102, Drehschwingungen.* 26. Nov. 2018. URL: `http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V102.pdf`.