

V354

# **Gedämpfte und erzwungene Schwingungen**

Kalina Toben

kalina.toben@tu-dortmund.de

Daniel Wall

daniel.wall@tu-dortmund.de

Durchführung: 04.12.2018

Abgabe: 11.12.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>3</b>
2.1 Gedämpfte Schwingungen . . . . .	3
2.2 Erzwungene Schwingungen . . . . .	5
<b>3 Durchführung</b>	<b>7</b>
<b>4 Auswertung</b>	<b>9</b>
<b>5 Diskussion</b>	<b>10</b>
<b>Literatur</b>	<b>10</b>

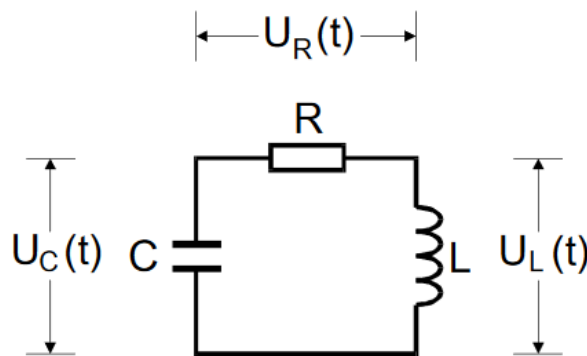
# 1 Zielsetzung

In diesem Versuch wird die Zeitabhängigkeit der Amplitude eines gedämpften Schwingkreises und der Dämpfungswiderstand bestimmt. Zudem wird die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung und der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Erregerspannung gemessen.

## 2 Theorie

### 2.1 Gedämpfte Schwingungen

Besteht ein Schaltkreis aus einer Induktivität  $L$ , realisiert durch eine Spule, und einem Kondensator mit der Kapazität  $C$ , führt das System ungedämpfte Schwingungen durch. Die Energie pendelt zwischen den Speichern hin und her und führt deshalb periodische Schwingungen durch. Wird dem Schaltkreis ein ohmscher Widerstand  $R$  hinzugefügt, nimmt die Energie mit der Zeit ab, die Amplituden von Strom und Spannung fallen, und das System führt gedämpfte Schwingungen aus. Ein Aufbau eines solchen Schwingkreises ist in Abbildung (1) dargestellt.



**Abbildung 1:** Aufbau eines RLC-Schwingkreises. [2, S.1]

Mit Hilfe des 2. Kirchhoffschen Gesetzes kann man die Differentialgleichung für den Schaltkreis aufstellen:

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0. \quad (1)$$

Setzt man die Gleichungen

$$U_R(t) = RI(t) \quad (2)$$

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad (3)$$

$$U_L(t) = L \frac{dI}{dt} \quad (4)$$

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (5)$$

mit  $Q(t)$  als Ladung in die DGL ein, und leitet einmal ab, ergibt sich

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0. \quad (6)$$

Setzt man den Ansatz

$$I(t) = U e^{j\omega t}$$

in die DGL ein, ergibt sich die charakteristische Gleichung

$$\omega^2 - j\frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} = 0 \quad (7)$$

mit

$$\omega_{1,2} = j\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (8)$$

Die Gleichung lässt sich schreiben als

$$I(t) = e^{-2\pi\mu t} (U_1 e^{j2\pi\nu t} + U_2 e^{-j2\pi\nu t}) \quad (9)$$

mit den Abkürzungen

$$2\pi\mu = \frac{R}{2L} \quad (10)$$

$$2\pi\nu = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (11)$$

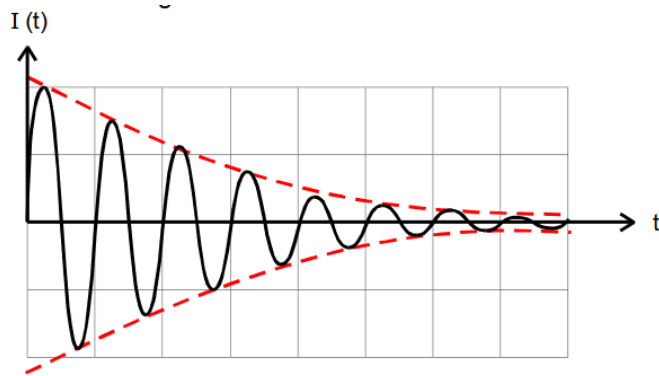
Je nachdem ob  $\frac{1}{LC}$  größer oder kleiner  $\frac{R^2}{4L^2}$  ist, also  $\nu$  reell oder imaginär ist, sieht  $I(t)$  anders aus. Somit muss eine Fallunterscheidung getroffen werden. Im Ersten Fall sei  $\nu$  reell. Die DGL ergibt sich dann zu

$$I(t) = A e^{-2\pi\mu t} \cos(2\pi\nu t + \eta). \quad (12)$$

Man erkennt, dass diese Gleichung eine harmonische Schwingung beschreibt, mit  $\nu$  als Frequenz, und exponentiell abklingender Amplitude. Sie stellt die gedämpfte Schwingung dar. Die Abklingdauer dieser Schwingung, bestimmt sich durch

$$T_{ex} = \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{2L}{R}, \quad (13)$$

und nach dieser hat die Amplitude ihren ursprünglichen Wert angenommen. Darstellen lässt sich eine gedämpfte Schwingung durch die Abbildung (2).



**Abbildung 2:** Darstellung einer gedämpften Schwingung. [2, S.4]

Betrachtet man nun den zweiten fall, also dass  $\nu$  imaginär ist, verhält sich die Schwingung nicht mehr oszillatorisch, und die aperiodische Dämpfung tritt ein. Die aperiodische Dämpfung ist in Abbildung (3) dargestellt.  $I(t)$  nähert sich in diesem Fall am schnellsten null an. Es gilt dann außerdem

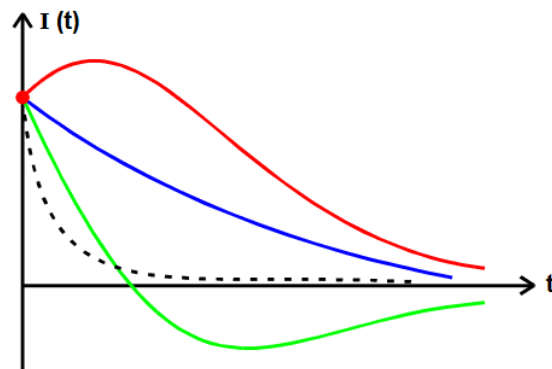
$$I(t) \propto e^{-(2\pi\mu - i2\pi\nu)t}. \quad (14)$$

Gilt

$$\frac{1}{LC} = \frac{R_{ap}^2}{4L^2}, \quad (15)$$

ergibt sich die DGL zu

$$I(t) = Ae^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}. \quad (16)$$



**Abbildung 3:** Darstellung des aperiodischen Grenzfalls. [2, S.5]

## 2.2 Erzwungene Schwingungen

Wirkt an einen Schwingkreis eine äußere periodische Kraft, führt das System erzwungene Schwingungen aus. Wird zum Beispiel eine Sinusspannung als Spannungsquelle eingeschaltet, wie in Abbildung (4) zu sehen ist, nimmt die Differentialgleichung folgende

Gestalt an:

$$LC \frac{d^2 U_C}{dt^2} + RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = U_0 e^{j\omega t}. \quad (17)$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$U = \frac{U_0(1 - LC\omega^2 - j\omega RC)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}. \quad (18)$$

Die zugehörige Phase wird durch

$$\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right) \quad (19)$$

beschrieben. Die Resonanzkurve, also die Abhängigkeit der Kondensatorspannung  $U_C$  von der Frequenz der Erregerspannung, wird durch

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (20)$$

beschrieben.  $U_C$  kann bei einer endlichen Frequenz ein Maximum erreichen, welches als Resonanz mit Resonanzfrequenz  $\omega_{res}$  bezeichnet wird. Diese lautet

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \quad (21)$$

Im Falle der schwachen Dämpfung

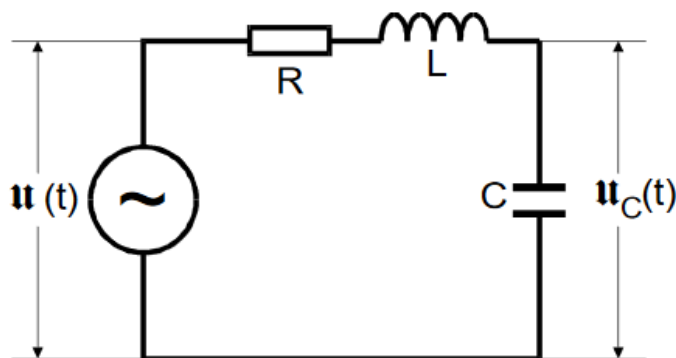
$$\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}$$

kann  $U_C$  die Spannung  $U_0$  um den Gütefaktor  $\frac{1}{\omega_0 RC}$  übertreffen

$$U_{C,max} = \frac{1}{\omega_0 RC} U_0 \quad (22)$$

und gegen unendlich gehen, wobei dann die Resonanzkatastrophe vorliegt. Die Schärfe der Resonanz kann man durch die Breite der Resonanzkurve beschreiben, für welche gilt:

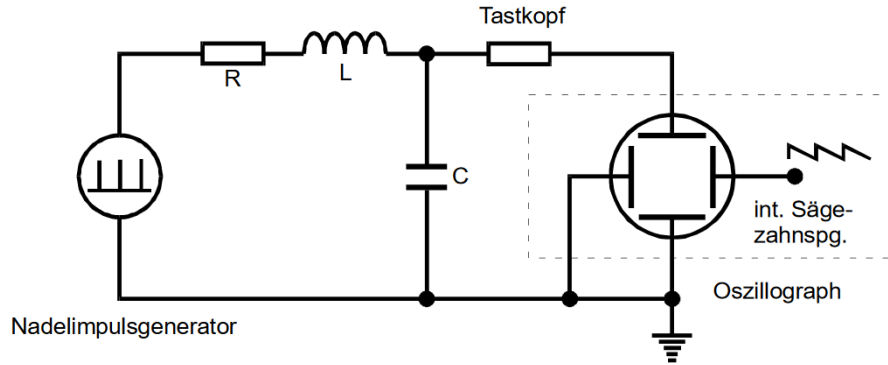
$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L}.$$



**Abbildung 4:** Schaltung mit einer Sinusspannung als Spannungsquelle. [2, S.6]

### 3 Durchführung

Für die Untersuchung der Zeitabhängigkeit der Amplitude, wird die in Abbildung (5) dargestellte Schaltung verwendet.



**Abbildung 5:** Messschaltung zur Bestimmung der zeitabhängigen Amplitude. [2, S. 11]

Um gedämpfte Schwingungen zu erzeugen, wird durch eine Rechteckspannung ein Impuls an den Schwingkreis gegeben. Ein Tastkopf ist notwendig, um den Eingangswiderstand des Oszillographen verschwindend gering zu halten. Es werden für zehn verschiedene Zeiten die Amplitude am Oszilloskop abgelesen und damit der effektive Dämpfungswiderstand ermittelt. Die gegebenen Daten für die Bauteile sind durch

$$L = 16.78 \pm 0.009 \text{ mH}$$

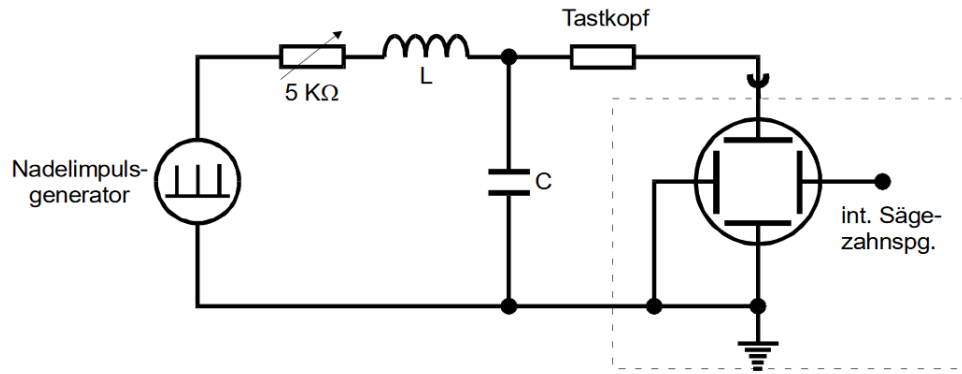
$$C = 2.066 \pm 0.006 \text{ nF}$$

$$R_1 = 67.2 \pm 0.2 \text{ } \Omega$$

$$R_2 = 682 \pm 1 \text{ } \Omega$$

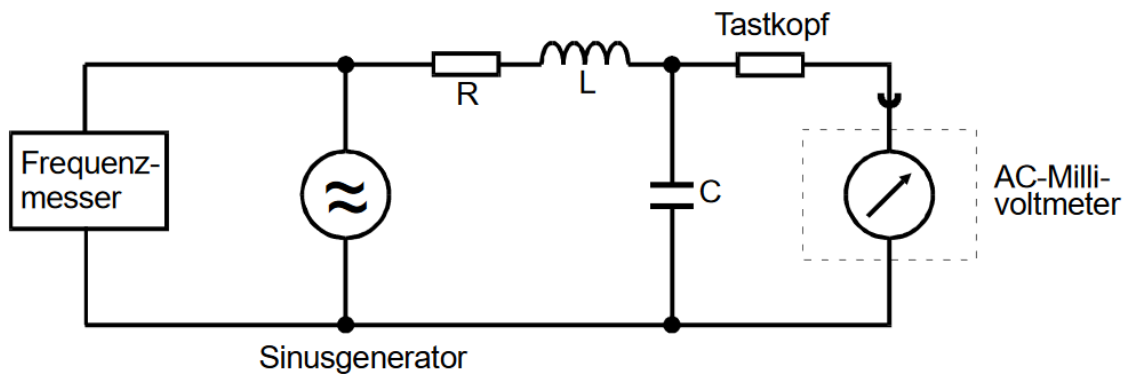
gegeben. Bei diesem Messvorgang wird der Widerstand  $R_1$  genommen.

Als nächstes wird der Dämpfungswiderstand für den aperiodischen Grenzfall bestimmt. Das geschieht durch Aufbau der Schaltung in Abbildung (6). Der regelbare Widerstand wird auf seinen Maximalwert gestellt und dann runter gedreht. Dabei wird der Graph auf dem Oszilloskop beobachtet, denn stellt sich ein Überspringen ein, muss der Widerstand wieder höher gestellt werden. Wenn kein Überspringen mehr auftritt, wird der Wert für den Widerstand abgelesen.



**Abbildung 6:** Messschaltung für den aperiodischen Grenzfall. [2, S. 12]

Soll nun die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung untersucht werden, wird der Schaltkreis wie in Abbildung (7) aufgebaut. Es wird diesmal eine Sinusspannung angelegt. Da der dort zu sehende Tastkopf einen Frequenzgang besitzt, muss auch die Erregerspannung  $U_0$  in Abhängigkeit der Frequenz gemessen werden. Es werden für folgende Intervalle Erregerspannung und Kondensatorpannung gemessen:  $2\text{ kHz}$  bis  $22\text{ kHz}$  in  $2\text{ kHz}$  Schritten,  $22\text{ kHz}$  bis  $32\text{ kHz}$  in  $1\text{ kHz}$  Schritten,  $32\text{ kHz}$  bis  $52\text{ kHz}$  in  $2\text{ kHz}$  Schritten, und daraus der Quotient gebildet. Diesmal wird der Widerstand  $R_2$  benutzt.



**Abbildung 7:** Messschaltung zur Bestimmung der frequenzabhängigen Amplitude. [2, S. 13]

Im letzten Versuchsteil wird die Frequenzabhängigkeit der Phase ermittelt. Die Schaltung ist in Abbildung (8) dargestellt. Es wird der zeitliche Abstand  $a$  der Nulldurchgänge von Kondensatorspannung und Erregerspannung gemessen, wie in Abbildung (9) dargestellt. Die außerdem benötigte Periodendauer wird durch die Frequenz bestimmt, die vorher schon gemessen wurde.



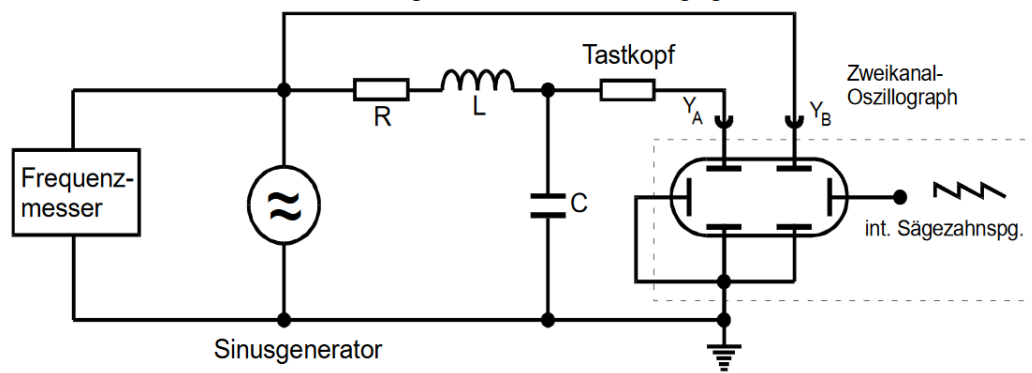


Abbildung 8: Messschaltung zur Bestimmung der frequenzabhängigen Phase. [2, S. 13]

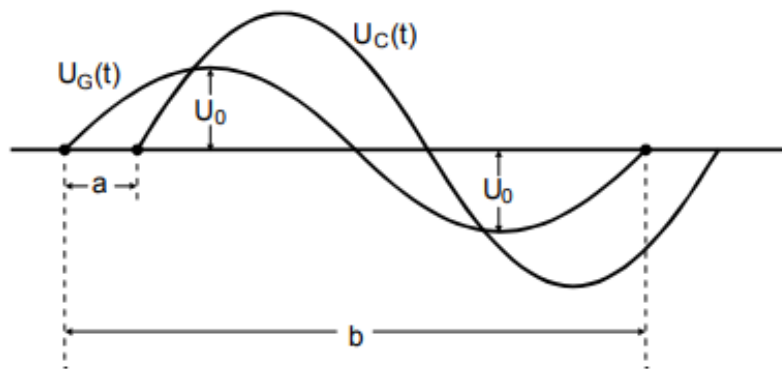


Abbildung 9: Bestimmung der Nulldurchgänge. [1, S. 7]

## 4 Auswertung

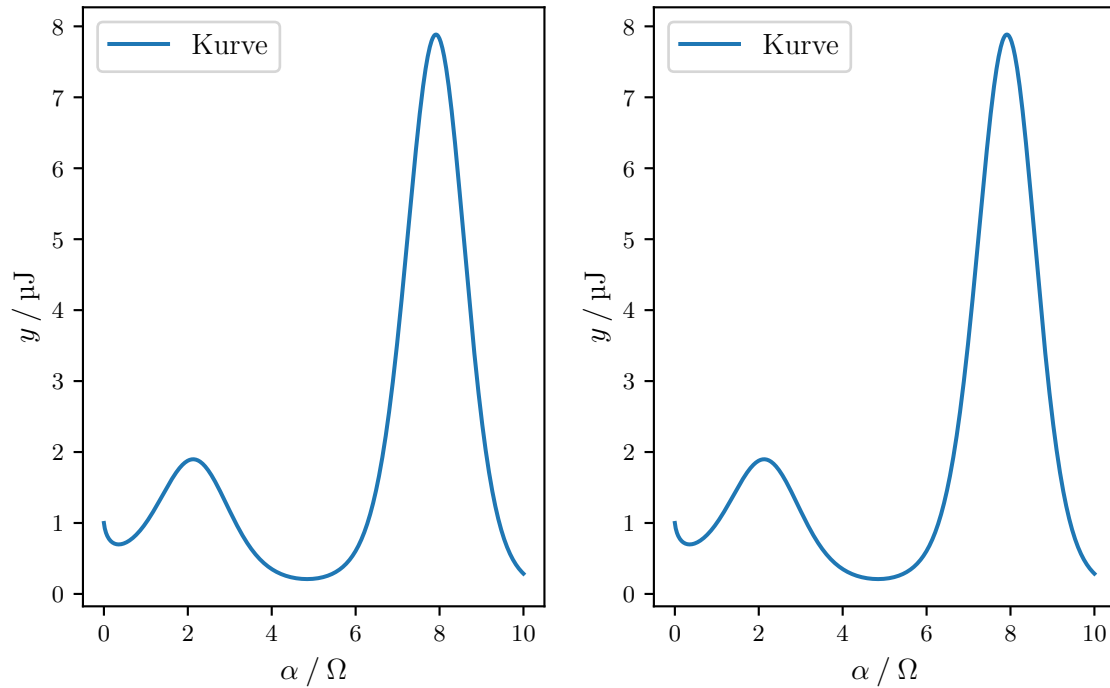


Abbildung 10: Plot.

## 5 Diskussion

### Literatur

- [1] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch 353, Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V353.pdf>.
- [2] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch 354, Gedämpfte und erzwungene Schwingungen*. 6. Dez. 2018. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V354.pdf>.