

V606

# **Suszeptibilität paramagnetischer Substanzen**

Kalina Toben

kalina.toben@tu-dortmund.de

Daniel Wall

daniel.wall@tu-dortmund.de

Durchführung: 14.05.2019

Abgabe: 21.05.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Theoretische Bestimmung der Suszeptibilität . . . . .	3
2.2	Experimentelle Bestimmung der Suszeptibilität . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>7</b>
4.1	Bestimmung der Filterkuve eines Selektivverstärkers . . . . .	7
4.2	Berechnung der Suszeptibilität durch Messung . . . . .	9
4.3	Berechnung der Suszeptibilität für Dysprosiumoxid . . . . .	11
4.4	Berechnung der Suszeptibilität für Neodymoxid . . . . .	11
4.5	Berechnung der Suszeptibilität für Praseodymiumoxalat . . . . .	11
4.6	Berechnung der Suszeptibilität für Gadoliniumoxid . . . . .	12
4.7	Theoretische Berechnung der Suszeptibilität . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>13</b>
	<b>Literatur</b>	<b>14</b>

# 1 Zielsetzung

In diesem Versuch wird die Suszeptibilität von Oxiden Seltener-Erd-Elemente experimentell bestimmt.

## 2 Theorie

### 2.1 Theoretische Bestimmung der Suszeptibilität

Der Zusammenhang von magnetischer Flussdichte  $\vec{B}$  und magnetischer Feldstärke  $\vec{H}$  ist gegeben durch

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M},$$

wobei  $\mu_0$  die Induktionskonstante und  $\vec{M}$  die Magnetisierung darstellen. Die Magnetisierung  $\vec{M}$ , welche durch magnetische Momente in der Materie entsteht, ist eine von  $\vec{H}$  abhängige Größe:

$$\vec{M} = \mu_0 \chi \vec{H}. \quad (1)$$

Hierbei ist  $\chi$  die Suszeptibilität, welche wiederum von der magnetischen Feldstärke  $\vec{H}$ , sowie von der Temperatur  $T$  abhängt.

Im Gegensatz zum Diamagnetismus, welcher bei allen Materialien auftritt, ist der hier betrachtete Paramagnetismus nicht bei jedem Element zu beobachten. Er tritt durch die Ausrichtung der magnetischen Momente relativ zu einem äußeren Magnetfeld auf. Die Orientierung der magnetischen Momente wird durch die thermische Bewegung beeinflusst. Dies erklärt die Temperaturabhängigkeit des Paramagnetismus. Paramagnetismus ist zu beobachten, wenn der Drehimpuls des Atoms ungleich Null ist, da dieser mit den magnetischen Momenten gekoppelt ist.

Der Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  besteht aus dem Bahndrehimpuls der Elektronenhülle, dem Spin der Elektronen, sowie dem Kerndrehimpuls, wobei letzterer bei Betrachtung des Paramagnetismus zu vernachlässigen ist. Wenn kein zu starkes äußeres Feld wirkt, setzt sich der Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  aus der Summe des Gesamtbahndrehimpulses  $\vec{L}$  und dem Gesamtspin  $\vec{S}$  zusammen:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S},$$

wobei sich die Drehimpulse  $\vec{L}$  und  $\vec{S}$  aus der Summe der Einzeldrehimpulse zusammensetzen. Für die magnetischen Momente der Drehimpulse  $\vec{L}$  und  $\vec{S}$  ergibt sich aus quantenmechanischen Überlegungen:

$$\begin{aligned} \vec{\mu}_L &= -\frac{\mu_B}{\hbar} \vec{L}, \\ \vec{\mu}_S &= -g_S \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{S}, \end{aligned}$$

mit  $\mu_B$  als Bohrsches Magneton und  $g_S$  als gyromagnetisches Verhältnis des freien Elektrons. Eine betragliche Betrachtung der Drehimpulse mit

$$|\vec{J}| = \sqrt{J(J+1)}\hbar,$$

$$|\vec{L}| = \sqrt{L(L+1)}\hbar,$$

$$|\vec{S}| = \sqrt{S(S+1)}\hbar$$

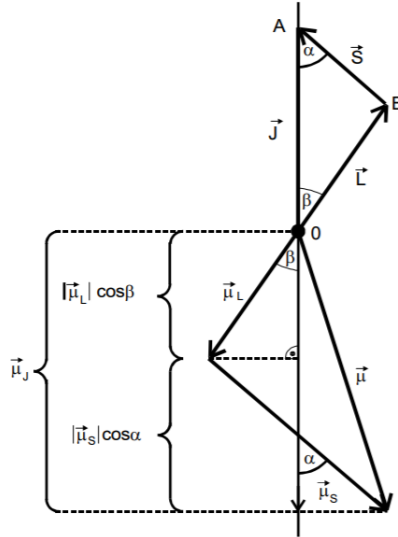
liefert für die Beträge der magnetischen Momente:

$$|\vec{\mu}_L| = \mu_B \sqrt{S(S+1)},$$

$$|\vec{\mu}_S| = g_S \mu_B \sqrt{S(S+1)}.$$

Aus Abbildung 1 und geometrischen Beziehungen ergibt sich

$$|\vec{\mu}_J| = |\vec{\mu}_S| \cos \alpha + |\vec{\mu}_L| \cos \beta.$$



**Abbildung 1:** Vektordiagramm der Drehimpulsvektoren und magnetischen Momenten [1].

Aus der Quantenmechanik wird für  $g_S$  eine Näherung mit dem Wert 2 angenommen, was

$$|\vec{\mu}_J| \approx \mu_B \sqrt{J(J+1)} \cdot \frac{3J(J+1) + (S(S+1) - L(L+1))}{2J(J+1)}$$

zur Folge hat. Dabei wird der Ausdruck

$$g_J := \frac{3J(J+1) + (S(S+1) - L(L+1))}{2J(J+1)} \quad (2)$$

als Landé-Faktor bezeichnet und führt zu der vereinfachten Schreibweise

$$|\vec{\mu}_J| \approx \mu_B g_J \sqrt{J(J+1)}.$$

Desweiteren ist zu beachten, dass der Winkel zwischen der Richtung des äußeren Magnetfelds und der Lage von  $\vec{\mu}_J$  nicht beliebig ist, sondern die  $z$ -Komponente von  $\vec{\mu}_J$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $\mu_B g_J$  sein muss. Dieser Effekt wird als Richtungsquantelung bezeichnet. Folglich ergibt sich hieraus für

$$\mu_{J_z} = -\mu_B g_J m,$$

mit  $m$  als Orientierungsquantenzahl und  $2J + 1$  möglichen Einstellungen mit je einer zugehörigen potentiellen Energie. Mit dieser lässt sich auch die Magnetisierung  $\vec{M}$  bestimmen. Dazu wird die Häufigkeit der einzelnen Winkeleinstellungen benötigt und mit dem Betrag des magnetischen Moments multipliziert. Anschließend wird über alle auftretenden Einstellungen summiert. Somit ergibt sich nach Umformungen für die Suszeptibilität

$$\chi = \frac{\mu_0 \mu_B^2 g_J^2 N J(J+1)}{3kT}, \quad (3)$$

mit  $N$  als Anzahl der magnetischen Momente pro Volumeneinheit,  $k$  als Boltzmann-Konstante und  $T$  als Temperatur. Bei hohen Temperaturen  $T$  ist die Suszeptibilität  $\chi$  proportional zum Kehrwert der Temperatur. Dieser Zusammenhang wird als Curiesche Gesetz des Paramagnetismus bezeichnet. Besonders stark ausgeprägt ist der Paramagnetismus bei Verbindungen, welche Ionen Seltener-Erd-Elemente enthalten. Aus Gleichung 3 folgt somit, dass ihre Elektronenhüllen große Drehimpulse besitzen müssen. Dieser kommt durch die 4f-Elektronen zustande. Die Anordnung dieser Elektronen, sowie der resultierende Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  werden durch die Hundschen Regeln bestimmt:

- Die einzelnen Spins  $\vec{s}_i$  ergeben den maximalen Gesamtspin  $\vec{S} = \sum \vec{s}_i$  unter Berücksichtigung des Pauli-Prinzips.
- Die Bahndrehimpulse  $\vec{\ell}_i$  kombinieren zum maximalen Gesamtbahndrehimpuls  $\vec{L} = \sum \vec{\ell}_i$  unter Beachtung der vorigen Regel und des Pauli-Prinzips.
- Für den Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  ergibt sich  $\vec{J} = \vec{L} - \vec{S}$  bei einer Schale, die weniger als halb gefüllt ist und  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  sonst.

Das Pauli-Prinzip besagt, dass keine zwei Elektronen einer Hülle den gleichen Satz an Quantenzahlen besitzen können.

## 2.2 Experimentelle Bestimmung der Suszeptibilität

Zur experimentellen Bestimmung der Suszeptibilität  $\chi$  wird eine Brückenschaltung, wie in Abbildung 2 dargestellt, verwendet, welche zwei baugleiche Spulen enthält. Hierbei ist wichtig, dass die Induktivität dieser Spulen möglichst gleich ist, da die Induktivitätsdifferenz  $\Delta L$  zwischen der Spule mit Probe und luftgefüllter Spule benötigt wird. Bei dieser

Brückenschaltung gibt es zwei Möglichkeiten der Messung. Bei der ersten wird die Brücke zunächst abgeglichen. Dies bedeutet, dass theoretisch keine Brückenspannung  $U_{Br}$  mehr zu messen ist. Anschließend wird die Materialprobe in eine der Spulen eingeführt. Aus der nun gemessenen Brückenspannung  $U_{Br}$  kann für große Frequenzen die Suszeptibilität  $\chi$  durch:

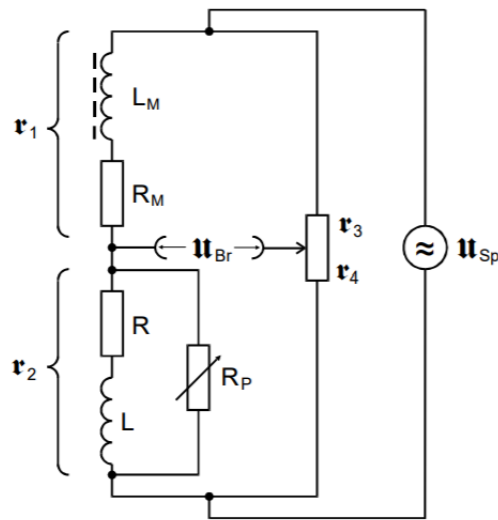
$$\chi(\omega \rightarrow \infty) = 4 \frac{F U_{Br}}{A U_{Sp}}, \quad (4)$$

mit  $F$  als Spulenquerschnittsfläche,  $A$  als Probenquerschnittsfläche und  $U_{Sp}$  als Speisenspannung, berechnet werden.

Bei der zweiten Methode wird zu Beginn ebenfalls die Brücke abgeglichen. Nachdem die Probe in eine der beiden Spulen eingeführt wurde, wird die Brücke erneut abgeglichen. Aus der Differenz der Abgleichbedingung zur Brückenspannung ergibt sich für die Suszeptibilität

$$\chi = 2 \frac{\Delta R F}{R_3 A}, \quad (5)$$

mit  $R_3$  als Widerstand am Potenziometer und  $\Delta R$  als Differenz aus der Abgleichbedingung.



**Abbildung 2:** Brückenschaltung zur Messung der Suszeptibilität [1].

### 3 Durchführung

Verwendet wird die in Abbildung 3 dargestellte Schaltung. Zu Beginn wird der Selektivverstärker untersucht. Dieser ist nötig, da bei Brückenschaltungen Störspannungen auftreten. Damit die zu messende Brückenspannung nicht von dieser Störung überdeckt wird, wird ein Selektivverstärker eingesetzt, welcher die Störspannung herausfiltert und

die Brückenspannung verstärkt. Um die Frequenz zu bestimmen, welche der Selektivverstärker verstärkt, wird ein Synthesizer angeschlossen. Mit ihm lässt sich die Frequenz  $\nu$  variieren. Die Ausgangsspannung  $U_A$  wird über einen Bereich von ca. (20 – 40) kHz gemessen.

Zur Messung der Suszeptibilität  $\chi$  wird zunächst die Speisespannung  $U_{Sp}$  notiert. Anschließend wird die Brücke abgeglichen. Die Einstellung des Abgleichelements, sowie die Brückenspannung  $U_{Br}$  werden notiert. Eine Probe wird in eine der beiden Spulen eingeführt. Die neue Brückenspannung wird gemessen. Anschließend wird die Brücke wieder abgeglichen und die Einstellung des variablen Widerstands wird festgehalten. Diese Messung wird für jede der zu untersuchenden Proben drei Mal durchgeführt.

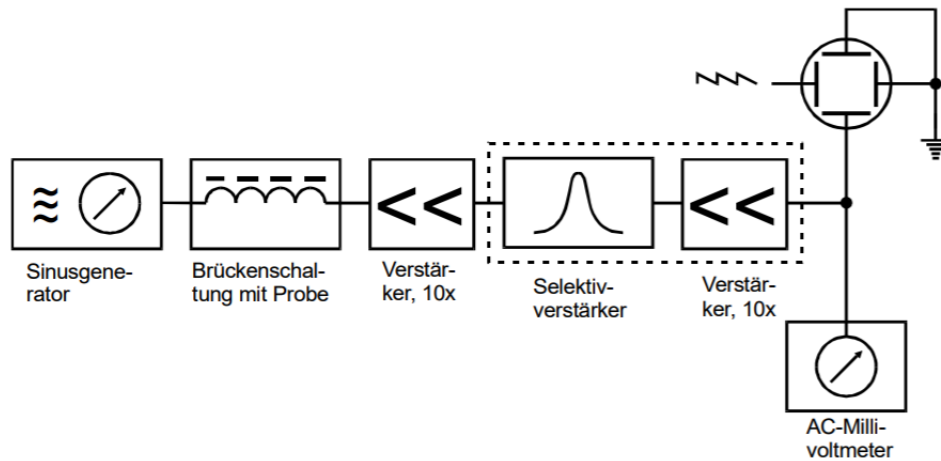


Abbildung 3: Schaltung zur Suszeptibilitätsmessung [1].

## 4 Auswertung

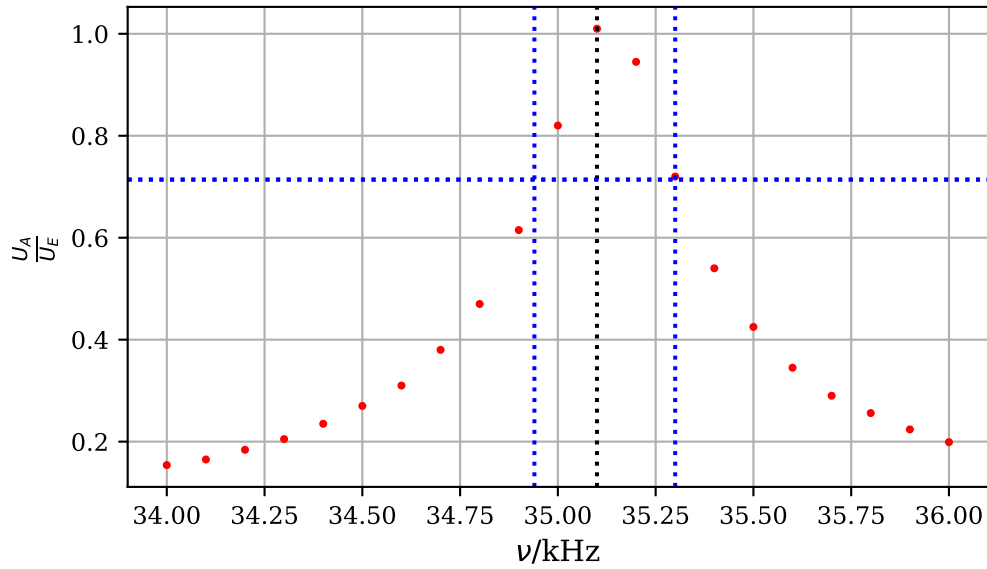
### 4.1 Bestimmung der Filterkuve eines Selektivverstärkers

Um die Filterkurve zu bestimmen, werden die gemessenen Ausgangsspannungen pro konstanter Eingangsspannung  $U_E = 100\text{mV}$  gegen die zugehörige Frequenz aufgetragen. Die Kurve findet sich in Abbildung () und die Messwerte sind in Tabelle 1 aufgelistet. Für die Kurve werden nur die Werte um das Maximum aufgetragen, also von einer Frequenz von  $\nu = 34\text{kHz}$  bis  $\nu = 36\text{kHz}$ .

**Tabelle 1:** Gemessene Ausgangsspannungen und zugehörige Frequenz.

$\nu/\text{kHz}$	$U_A/\text{mV}$
20,0	0,8
21,0	0,9
22,0	1,0
23,0	1,1
24,0	1,2
25,0	1,4
26,0	1,5
27,0	1,7
28,0	2,1
29,0	2,5
30,0	3,1
31,0	4,0
32,0	5,3
33,0	8,1
34,0	15,4
34,1	16,5
34,2	18,4
34,3	20,5
34,4	23,5
34,5	27,0
34,6	31,0
34,7	38,0
34,8	47,0
34,9	61,5
35,0	82,0
35,1	101,0
35,2	94,5
35,3	72,0
35,4	54,0
35,5	42,5
35,6	34,5
35,7	29,0
35,8	25,6
35,9	22,4
36,0	19,9
37,0	9,5
38,0	6,2
39,0	4,6
40,0	3,7





**Abbildung 4:** Filterkurve eines Selektivverstärkers.

Die maximale Spannung liegt bei  $U_A = 101\text{mV}$  bei einer Frequenz von  $\nu = 35,1\text{kHz}$ . Die eingezeichneten vertikalen Linien geben die Maximale Frequenz und die Frequenzen an, bei denen das Verhältnis der Spannungen auf einen Wert von  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  abgesunken ist. Aus diesen drei Frequenzen lässt sich die Güte  $Q$  der Kurve bestimmen

$$Q = \frac{\nu_0}{\nu_+ - \nu_-} = \frac{35,1}{35,3 - 34,94} = 97,5.$$

## 4.2 Berechnung der Suszeptibilität durch Messung

In Tabelle 2 befinden sich die Messwerte zur Bestimmung der Suszeptibilität. Dabei sind  $U_o$  und  $R_o$  die gemessene Spannung bzw. der Widerstand ohne Probe, und  $U_m$  und  $R_m$  dementsprechend mit Probe.  $\Delta U$  und  $\Delta R$  beschreiben die Differenz der beiden Spannungen und der Widerstände, denn diese Werte werden zur Suszeptibilitätsbestimmung gebraucht.

**Tabelle 2:** Messwerte zur Bestimmung der Suszeptibilitäten.

Probe	$R_o/\text{m}\Omega$	$U_o/\text{mV} \cdot 10^{-2}$	$U_m/\text{mV} \cdot 10^{-2}$	$R_m/\text{m}\Omega$	$\Delta R/\text{m}\Omega$	$\Delta U/\text{mV} \cdot 10^{-2}$
Dy	3130	1,24	17,0	1600	1530	15,76
	3130	1,30	17,0	1600	1530	15,70
	3165	1,31	17,4	1595	1570	16,09
Nd	3130	1,28	1,50	3016	114	0,22
	3155	1,27	1,69	3016	139	0,42
	3140	1,26	1,50	3030	110	0,24
Pr	3140	1,25	1,26	3100	40	0,01
	3130	1,24	1,29	3075	55	0,05
	3150	1,25	1,29	3095	55	0,05
Gd	3140	1,25	8,80	2350	790	7,55
	3125	1,26	8,30	2370	755	7,04
	3155	1,25	9,00	2375	780	7,75

In folgender Tabelle 3 sind die Mittelwerte der Differenz  $\Delta U$  und  $\Delta R$  aufgezählt. Sie und ihre Fehler können mit den Formeln

$$x = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^3 x_i$$

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 (x_i - x)^2}$$

berechnet werden.

**Tabelle 3:** Mittelwerte der Messwerte zur Bestimmung der Suszeptibilitäten.

Probe	$\Delta R/\text{m}\Omega$	$\Delta U/\text{mV} \cdot 10^{-2}$
Dy	$1543,33 \pm 18,86$	$15,85 \pm 0,17$
Nd	$121,0 \pm 12,83$	$0,29 \pm 0,09$
Pr	$50,0 \pm 7,07$	$0,037 \pm 0,019$
Gd	$775,0 \pm 14,72$	$7,45 \pm 0,299$

Die Abmessungen der Proben, also die Masse  $m$ , die Dichte  $\rho$  und die Länge  $L$ , sind in Tabelle 4 aufgeführt. Dabei ist allerdings zu beachten, dass die Dichte für  $\text{C}_6\text{O}_{12}\text{Pr}_2$  nicht gefunden wurde, und deshalb die Dichte für Pr genommen wird([**sample2**]).

**Tabelle 4:** Abmessungen der Proben.

Probe	$m/g$	$\rho/\frac{g}{cm^3}$	$L/cm$
Dy	14,38	7,8	13,5
Nd	9,09	7,24	13,5
Pr	7,87	6,773	13,5
Gd	14,08	7,40	13,5

Weitere Größen, die bekannt sein müssen, sind folgende:

Die Speisespannung beträgt  $U_S = 0,71V$ ,

die Windungszahl der Spule beträgt  $n = 250$ ,

der Widerstand der Spule beträgt  $R = 0,7\Omega$ ,

und der Querschnitt der Spule beträgt  $F = 86,6\text{ mm}^2$ .

Außerdem lautet der Widerstand  $R_3 = 998\Omega$ .

### 4.3 Berechnung der Suszeptibilität für Dysprosiumoxid

Mit Gleichung () kann der Querschnitt der Probe ausgerechnet werden

$$Q_{real} = \frac{m}{L \cdot \rho}$$

$$Q_{Dy} = 13,66\text{mm}^2$$

Die Suszeptibilität bestimmt sich durch Gleichungen () und () auf zwei Weisen

$$\chi_{Dy_U} = 0,00566 \pm 0,00006$$

$$\chi_{Dy_R} = 0,01961 \pm 0,00024.$$

### 4.4 Berechnung der Suszeptibilität für Neodymoxid

Der reale Querschnitt berechnet sich zu

$$Q_{Nd} = 9,3\text{mm}^2$$

Die Suszeptibilität bestimmt sich durch Gleichungen () und () auf zwei Weisen

$$\chi_{Nd_U} = 0,00015 \pm 0,00005$$

$$\chi_{Nd_R} = 0,00226 \pm 0,00024.$$

### 4.5 Berechnung der Suszeptibilität für Praseodymiumoxalat

Der reale Querschnitt berechnet sich zu

$$Q_{Pr} = 8,61\text{mm}^2$$

Die Suszeptibilität bestimmt sich durch Gleichungen () und () auf zwei Weisen

$$\begin{aligned}\chi_{Pr_U} &= 0,00002 \pm 0,00001 \\ \chi_{Pr_R} &= 0,00101 \pm 0,00014.\end{aligned}$$

#### 4.6 Berechnung der Suszeptibilität für Gadoliniumoxid

Der reale Querschnitt berechnet sich zu

$$Q_{Gd} = 14,09 \text{mm}^2$$

Die Suszeptibilität bestimmt sich durch Gleichungen () und () auf zwei Weisen

$$\begin{aligned}\chi_{Gd_U} &= 0,00258 \pm 0,00010 \\ \chi_{Gd_R} &= 0,00954 \pm 0,00018.\end{aligned}$$

#### 4.7 Theoretische Berechnung der Suszeptibilität

Theoretisch berechnet werden kann die Suszeptibilität mit Gleichung (). Dazu benötigt man den Landé-Faktor  $g_J$ . Den Spin, Bahndrehimpuls und den Gesamtdrehimpuls berechnet man aus den Hundschen Regeln. Das Element Dy hat neun 4f-Elektronen, Gd hat sieben, und Nd hat drei. Als Beispiel zur Berechnung der Größen wird Dyprosiumoxid verwendet. In die 4f-Schale passen 14 Elektronen. Das f steht für den maximalen Drehimpuls  $l = 3$ . Da laut den Regeln erst die parallelen Spins aufgefüllt werden, haben 5 Elektronen Spin  $\frac{1}{2}$ , und diese addieren sich dann laut der ersten Regel zu  $S = 2,5$ . Da die Drehimpulse maximal sein sollen, und  $l$  von +3 bis -3 läuft, sind die Quantenzahlen  $l = 3$  und  $l = 2$  und der Drehimpuls ergibt sich zu  $L = 3 + 2 = 5$ . Der Gesamtspin  $J$  ist die Addition von L und S, also  $J = 2,5 + 5 = 7,5$ , da die Schale mehr als die Hälfte gefüllt ist. In einer Tabelle sind alle Werte für alle Elemente notiert, und dazu auch der sich aus Gleichung () ergebende Landé-Faktor.

**Tabelle 5:** Gesamtspin, Bahndrehimpuls, Gesamtdrehimpuls und Landé-Faktor der Proben.

Probe	$L$	$S$	$J$	$g_J$
Dy	5	2,5	7,5	1,33
Pr	5	1	4	0,8
Nd	6	1,5	4,5	0,73
Gd	0	3,5	3,5	2,00

Die Werte für  $N$  lauten nach der Formel  $N = \frac{2\rho N_A}{M}$

$$N_{Dy} = 2,52 \cdot 10^{28} / \text{m}^3$$

$$N_{Pr} = 1,49 \cdot 10^{28} / \text{m}^3$$

$$N_{Nd} = 2,59 \cdot 10^{28} / \text{m}^3$$

$$N_{Gd} = 2,46 \cdot 10^{28} / \text{m}^3$$

wobei  $N_A$  die Avogadrokonstante und  $M$  die molare Masse ist. Diese molaren Massen sind laut [sample1] für die Elemente

$$M_{Dy} = 373,00 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

$$M_{Pr} = 545,87 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

$$M_{Nd} = 336,48 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

$$M_{Gd} = 362,49 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

Es wird eine Raumtemperatur von 295,15K angenommen. Die Suszeptibilitäten ergeben sich also zu

$$\chi_{Dy_T} = 0,0251$$

$$\chi_{Pr_T} = 0,00169$$

$$\chi_{Nd_T} = 0,00302$$

$$\chi_{Gd_T} = 0,0137$$

## 5 Diskussion

In Tabelle 6 werden die experimentell bestimmten Suszeptibilitäten mit den theoretisch berechneten Suszeptibilitäten verglichen.

**Tabelle 6:** Vergleiche der Suszeptibilitäten.

Probe	$\chi_T$	$\chi_U$	$\chi_R$	$\frac{\chi_T - \chi_U}{\chi_T} / \%$	$\frac{\chi_T - \chi_R}{\chi_T} / \%$
Dy	0,0251	$0,00566 \pm 0,00006$	$0,01961 \pm 0,00024$	77,45	21,87
Nd	0,00302	$0,00015 \pm 0,00005$	$0,00226 \pm 0,00024$	95,03	25,17
Pr	0,00169	$0,00002 \pm 0,00001$	$0,00101 \pm 0,00014$	98,82	40,24
Gd	0,0137	$0,00258 \pm 0,00010$	$0,00954 \pm 0,00018$	81,17	30,37

Die Abweichungen der berechneten Suszeptibilitäten zu den theoretischen Werten sind insgesamt sehr groß. Die Fehler müssen bei der Messung über die Spannung größer gewesen sein, da die Abweichungen hier nahezu 100 Prozent sind. Eventueller Messfehler ist die nur angenommene Temperatur. Auch die Widerstände konnten nur ungenau eingeregelt werden. Die Längen der Proben wurden nur auf die Spulenlänge genähert. Das Ablesen der Spannungen war fehlerhaft, da diese geschwankt haben, auch je nach gewählter Skala. Ein systematischer Fehler ist außerdem, dass die Dichte von Praseodym genommen wurde, und nicht von dem hier verwendeten Oxid. Die Filterkurve des Selektivverstärkers entspricht der erwarteten Kurve. Die Güte von 97,5 liegt nah an dem zu erwartenden Wert, mit nur 2,5 prozentiger Abweichung.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch 606, Suszeptibilität paramagnetischer Substanzen*. 18. Mai 2019. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V606.pdf>.