

V353

Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

Kalina Toben

kalina.toben@tu-dortmund.de

Daniel Wall

daniel.wall@tu-dortmund.de

Durchführung: 27.11.2018

Abgabe: 04.12.2018

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Entladevorgang eines Plattenkondensators	3
1.2	Relaxationsverhalten bei angelegter Wechselspannung	4
1.3	Der RC-Kreis als Integrator	4
2	Durchführung	5
2.1	Messreihe zur Bestimmung der Zeitkonstanten im RC-Kreis anhand des Entladevorgangs	5
2.2	Messreihe zur Bestimmung der Spannungsamplitude des Kondensators im RC-Kreis	5
2.3	Messreihe zur Bestimmung der Phasenverschiebung im RC-Kreis	5
2.4	Messreihe zur Bestätigung der Integratorfunktion des RC-Kreises	6
3	Auswertung	6
3.1	Bestimmung der Zeitkonstanten durch Beobachtung des Entladevorgangs des Kondensators	7
3.2	Bestimmung der Zeitkonstanten durch die Frequenz der Kondensatorspannung	8
3.3	Bestimmung der Zeitkonstanten durch die Phasenverschiebung zwischen Generator- und Kondensatorspannung	10
3.4	RC-Kreis als Integrator	12
4	Diskussion	14
	Literatur	15

1 Theorie

Als Relaxationszeit bezeichnet man die Zeit, die zwischen dem Auslenken eines Systems aus seinem Ausgangszustand und dem nicht-oszillatorischem Zurückkehren in diesen vergeht. In diesem Versuch wird das Entladen eines Kondensators über einen Widerstand als Beispiel für eine Relaxationserscheinung betrachtet. Allgemein ist die Änderungsgeschwindigkeit zur Zeit t einer physikalischen Größe A

$$\frac{dA}{dt} = c[A(t) - A(\infty)] \quad (1)$$

proportional zur Auslenkung der Größe A vom (nicht erreichbaren) Endzustand $A(\infty)$. Hieraus folgt

$$A(t) = A(\infty) + [A(0) - A(\infty)]e^{ct}, \quad (2)$$

wobei $c < 0$ sein muss, damit A beschränkt bleibt.

1.1 Entladevorgang eines Plattenkondensators

Befindet sich auf den Platten eines Kondensators mit der Kapazität C eine Ladung Q , so liegt zwischen diesen die Spannung

$$U_C = \frac{Q}{C}.$$

Diese bedingt nach dem Ohm'schen Gesetz einen Strom

$$I = \frac{U_C}{R}$$

durch den Widerstand R um die Ladungen auszugleichen, wodurch sich die Ladung Q pro Zeiteinheit t um

$$dQ = -I dt$$

verändert. Hieraus ergibt sich die zur Gleichung (1) ähnliche Gleichung

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q(t)}{RC}, \quad (3)$$

sodass auch für diese durch Integration und Beachtung des unerreichbaren Grenzwertes $Q(\infty) = 0$

$$Q(t) = Q(0)e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4)$$

folgt. Der Ausdruck RC wird als Zeitkonstante des Relaxationsvorgangs bezeichnet und ist maßgebend für die Geschwindigkeit, mit der dieser gegen den Endzustand $Q(\infty)$ strebt.

1.2 Relaxationsverhalten bei angelegter Wechselspannung

Im Allgemeinen lässt sich eine von der Kreisfrequenz ω abhängige Wechselspannung durch

$$U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t) \quad (5)$$

beschreiben. Mit zunehmender Kreisfrequenz ω bildet sich eine Phasenverschiebung

$$\phi = \frac{a}{b} 2\pi \quad (6)$$

zwischen der eingehenden Wechselspannung U_0 und der verzögerten Kondensatorspannung U_C aus, sodass diese sich als

$$U_C(t) = A(\omega) \cdot \cos(\omega t + \phi(\omega)) \quad (7)$$

ausdrücken lässt, wobei A die Amplitude der Kondensatorspannung ist. Die Stromstärke $I(t)$ lässt sich über

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU_C}{dt} \quad (8)$$

in Abhängigkeit von der Kondensatorspannung U_C ausdrücken, sodass aus Gleichung (3) und (8) sowie den Kirchhoff'schen Regeln für die Amplitude

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (9)$$

folgt.

1.3 Der RC-Kreis als Integrator

Ein RC-Kreis kann unter bestimmten Umständen dazu dienen, eine zeitlich veränderliche Spannung $U(t)$ zu integrieren. Damit dies möglich ist, muss die Kreisfrequenz $\omega \ll \frac{1}{RC}$ sein. Aus der Gleichung für die Gesamtspannung

$$\begin{aligned} U(t) &= U_R(t) + U_C(t) = R \cdot I(t) + U_C(t) \\ &= RC \cdot \frac{dU_C(t)}{dt} + U_C(t) \end{aligned}$$

folgt dann

$$U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt'. \quad (10)$$

2 Durchführung

2.1 Messreihe zur Bestimmung der Zeitkonstanten im RC-Kreis anhand des Entladevorgangs

In der ersten Messreihe wird zur Bestimmung der Zeitkonstante ein Spannungsgenerator wie in Abbildung 1 dargestellt an das RC-Glied angeschlossen und eine Rechteckspannung angelegt. Mithilfe eines digitalen Oszilloskops und der Trigger-Funktion wird die abfallende Flanke dargestellt. Es werden logarithmisch 30 Frequenzen ω im Bereich von 100 bis 10000 Hz eingestellt und mit der Cursor-Funktion die dazugehörige Kondensatorspannung $U_C(t)$ festgehalten.

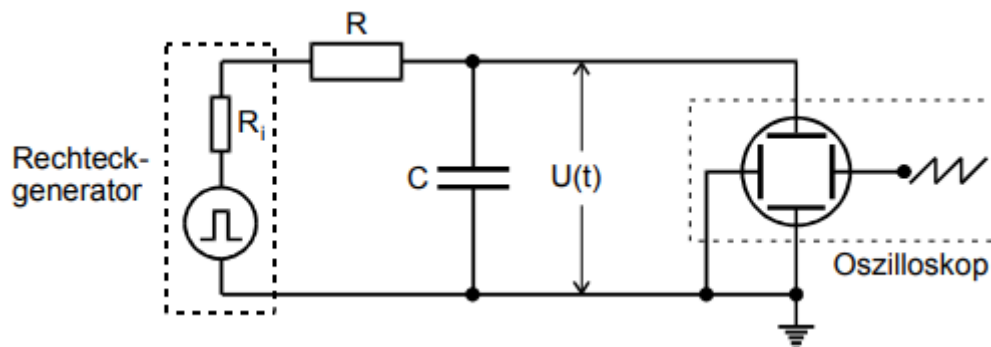


Abbildung 1: Messschaltung zur Bestimmung der Zeitkonstanten mittels Beobachtung des Entladevorgangs. [1, S. 6]

2.2 Messreihe zur Bestimmung der Spannungsamplitude des Kondensators im RC-Kreis

Für die zweite Messreihe wird eine Sinusspannung $U_0(t)$ angelegt und die Amplitude A der Kondensatorspannung $U_C(t)$ für dieselben Frequenzen ω festgehalten.

2.3 Messreihe zur Bestimmung der Phasenverschiebung im RC-Kreis

In der dritten Messreihe wird die Phasenverschiebung ϕ zwischen der generierten Spannung $U_G(t)$ und der Kondensatorspannung $U_C(t)$ bestimmt. Hierzu wird die Schaltung so verändert, dass die generierte Spannung ebenfalls auf dem Oszilloskopen dargestellt werden kann (Abbildung 2) und die Signale werden übereinander symmetrisch zur t -Achse ausgelegt. Mithilfe der Cursor-Funktion wird nun der Abstand a zwischen den zugehörigen Nulldurchläufen gemessen (Abbildung 3), wobei die Periodendauer b durch die Frequenz ω gegeben ist.

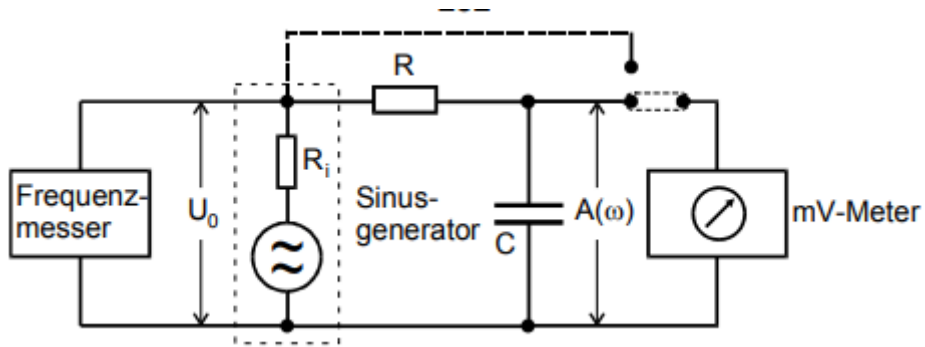


Abbildung 2: Messschaltung zur Bestimmung der Phasenverschiebung ϕ . [1, S. 7]

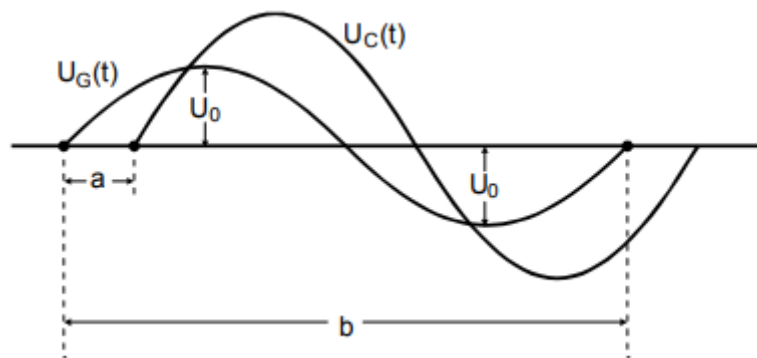


Abbildung 3: Messung der Phasenverschiebung zwischen zwei Spannungen mit dem Zweistrahloszilloskopen. [1, S. 7]

2.4 Messreihe zur Bestätigung der Integratorfunktion des RC-Kreises

Um die Integratorfunktion des RC-Kreises zu überprüfen, wird nun eine ausreichend hohe Frequenz ω eingestellt und eine Rechteckspannung angelegt. Das Oszilloskop zeigt nun sowohl die angelegte als auch die integrierte Spannung an. Als zweites wird eine Dreieckspannung angelegt. Die letzte Einstellung ist eine Sinusspannung. Die Ergebnisse werden als Bilder gespeichert.

3 Auswertung

Im folgenden wird auf drei verschiedene Arten die Zeitkonstante RC bestimmt. Außerdem wird die Integration von drei Spannungen dargestellt.

3.1 Bestimmung der Zeitkonstanten durch Beobachtung des Entladevorgangs des Kondensators

Es werden bei einer angelegten Rechteckspannung die Spannung U_c und die zugehörige Zeit t gemessen. Für eine lineare Ausgleichsrechnung wird der Logarithmus der Spannung berechnet, und dieser wird gegen t aufgetragen. Alle Werte sind in Tabelle (1) aufgelistet. Der Wert für U_0 beträgt 18 V.

Der Ansatz der linearen Regression lautet

$$y = ax + b. \quad (11)$$

Der Plot, die Parameter und die Fehler werden mit Python berechnet.

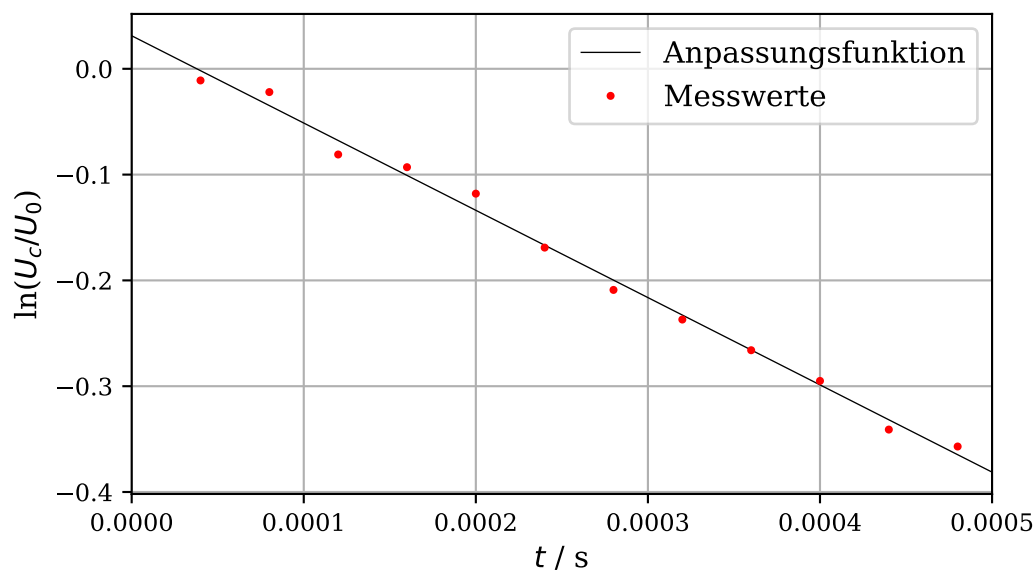


Abbildung 4: Logarithmus der Kondensatorspannung in Abhängigkeit der Zeit.

Um die Ausgleichsgerade zu bestimmen, wird Gleichung (4) entsprechend umgeformt:

$$\begin{aligned} \frac{U_c}{U_0} &= e^{-\frac{t}{RC}} \\ \Leftrightarrow \ln\left(\frac{U_c}{U_0}\right) &= -\frac{1}{RC}t. \end{aligned}$$

Somit hat die Gerade folgende Gestalt:

$$\ln\left(\frac{U_c}{U_0}\right) = \underbrace{-\frac{1}{RC}}_{\text{Steigung } a} t + b. \quad (12)$$

Daraus ergeben sich $a = (-824.913 \pm 20.909)s$ und $b = (3.123 \pm 0.616) \cdot 10^{-2}$. Daraus folgt für RC :

$$RC = -\frac{1}{a} = (1.21 \pm 0.04) \cdot 10^{-3}s,$$

wobei der Fehler berechnet wird mit

$$\Delta RC = \sqrt{\left(\frac{dRC}{da}\right)^2 \Delta a^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{a^2}\right)^2 \Delta a^2},$$

mit Δa als der oben aufgelistete Fehler des Parameters a .

Tabelle 1: Gemessene Spannung und Logarithmus der Spannung zum Zeitpunkt t beim Entladevorgang des Kondensators.

$t \cdot 10^{-3}/s$	U_c/V	$\ln(U_c/U_0)$
0.04	17.8	-0.011
0.08	17.6	-0.022
0.12	16.6	-0.081
0.16	16.4	-0.093
0.20	16.0	-0.118
0.24	15.2	-0.169
0.28	14.6	-0.209
0.32	14.2	-0.237
0.36	13.8	-0.266
0.40	13.4	-0.295
0.44	12.8	-0.341
0.48	12.6	-0.357

3.2 Bestimmung der Zeitkonstanten durch die Frequenz der Kondensatorspannung

Die für diese Methode gemessenen Daten finden sich in Tabelle (2). In einem halblogarithmischen Diagramm wird die Amplitude gegen die Frequenz aufgetragen.

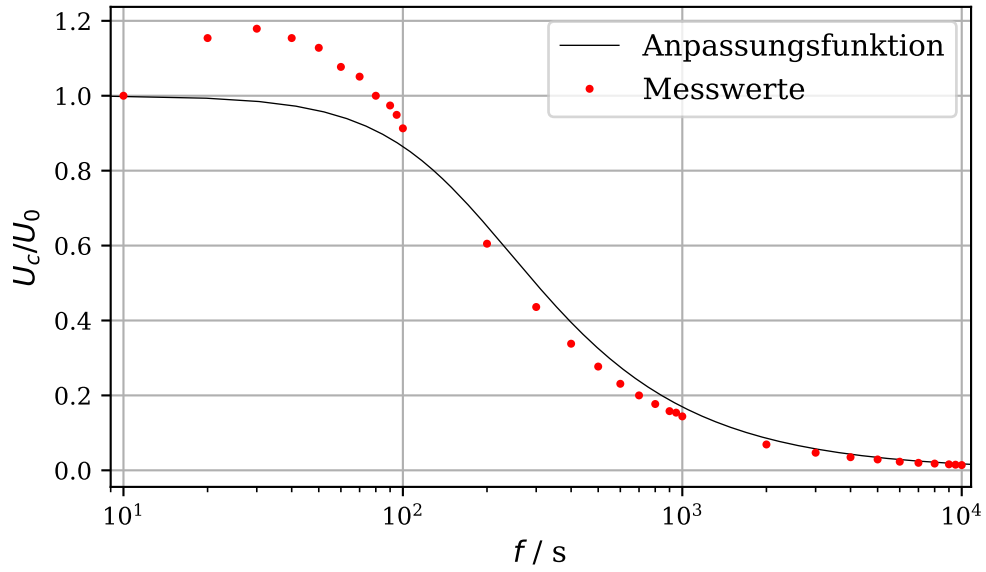


Abbildung 5: Kondensatorspannung in Abhängigkeit der Frequenz.

Die Ausgleichsgleichung hat folgende Gestalt

$$\frac{A(\omega)}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}},$$

was sich aus Gleichung (9) ergibt. U_0 beträgt hierbei 7.8 Volt. Da die Amplitude aus der Gleichung von der Kreisfrequenz abhängt, muss für die Ausgleichsrechnung noch ein Faktor 2π beachtet werden, auf Grund des Zusammenhangs

$$\omega = 2\pi f. \quad (13)$$

Somit wird der Graph durch

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + d^2 (2\pi f)^2}} \quad (14)$$

beschrieben. Der Parameter lautet:

$$d = RC = (-9.256 \pm 0.785) \cdot 10^{-4} s.$$

Tabelle 2: Gemessene Amplituden und Phasenverschiebung bei unterschiedlicher Frequenz.

f/Hz	U/V	a/s	T/s^{-1}	ϕ/rad	f/Hz	U/V	a/s	T/s^{-1}	ϕ/rad
10	7.8	0.00156	0.1	0.098	600	1.8	0.00036	0.0017	1.35
20	9	0.00144	0.05	0.181	700	1.56	0.00031	0.0014	1.138
30	9.2	0.0014	0.033	0.264	800	1.38	0.00028	0.0013	1.39
40	9	0.00134	0.025	0.337	900	1.24	0.00025	0.0011	1.4
50	8.8	0.00132	0.02	0.415	950	1.2	0.00024	0.0011	1.43
60	8.4	0.0013	0.017	0.49	1000	1.12	0.00022	0.001	1.41
70	8.2	0.00126	0.014	0.554	2000	0.54	0.00012	0.0005	1.47
80	7.8	0.00122	0.013	0.613	3000	0.36	0.00008	0.0003	1.52
90	7.6	0.00119	0.011	0.67	4000	0.28	0.00006	0.0003	1.52
95	7.4	0.00117	0.011	0.698	5000	0.22	0.000048	0.0002	1.52
100	7.12	0.00115	0.01	0.723	6000	0.18	0.00004	0.0002	1.54
200	4.72	0.00083	0.005	1.046	7000	0.16	0.000035	0.0001	1.52
300	3.4	0.00064	0.003	1.199	8000	0.14	0.00003	0.0001	1.5
400	2.64	0.0005	0.003	1.277	9000	0.12	0.000027	0.0001	1.55
500	2.16	0.00042	0.002	1.332	9500	0.12	0.000026	0.0001	1.53
10000	0.112	0.00002	0.0001	1.533					

Die Werte für ϕ wurden dabei mit Gleichung (6) berechnet, wobei b als Kehrwert der Frequenz berechnet wird.

3.3 Bestimmung der Zeitkonstanten durch die Phasenverschiebung zwischen Generator- und Kondensatorspannung

In diesem Auswertungsteil wird wie in 3.2 verfahren, nur dass die Phasenverschiebung gegen die Frequenz aufgetragen wird. Die dafür benötigten Werte sind in Tabelle (2) aufgelistet.

Aus Gleichung (16) ergibt sich der Ansatz für diesen Graphen:

$$y = \arctan(2\pi fd). \quad (15)$$

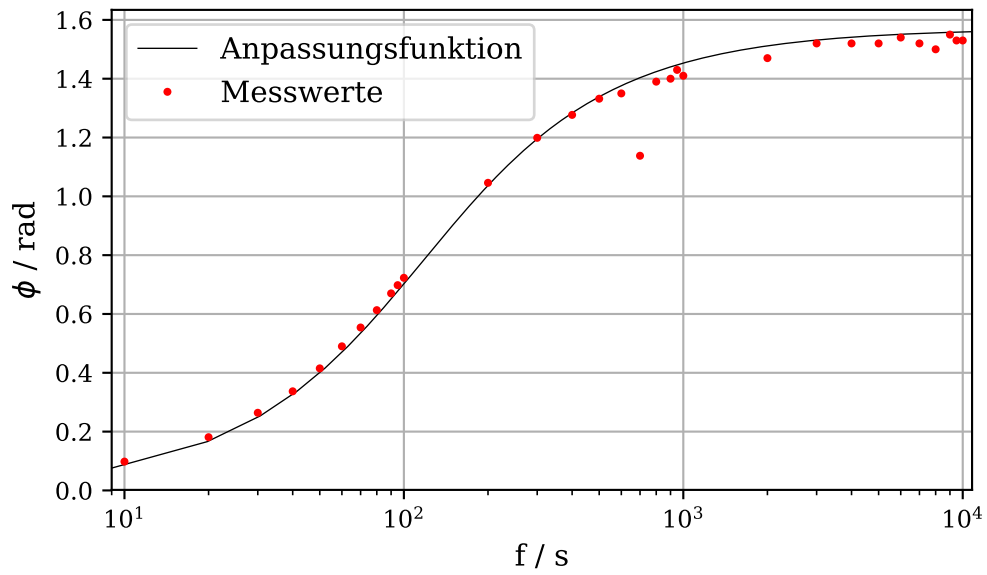


Abbildung 6: Phasenverschiebung in Abhängigkeit der Frequenz.

Die Zeitkonstante beträgt:

$$d = RC = (1.346 \pm 0.498) \cdot 10^{-3} s.$$

Die Relativamplitude U_c/U_0 wird gegen die Phasenverschiebung in einem Polarplot aufgetragen. Mit der Gleichung

$$\frac{A(f)}{U_0} = -\frac{\sin\phi}{2\pi fRC}$$

kann eine Kosinus-Abhängigkeit hergeleitet werden, da

$$\frac{\sin\phi}{\cos\phi} = -\omega RC$$

gilt. Dies führt auf

$$\frac{A(f)}{U_0} = \cos\phi. \quad (16)$$

Die Kurve dazu wird mit Python berechnet.

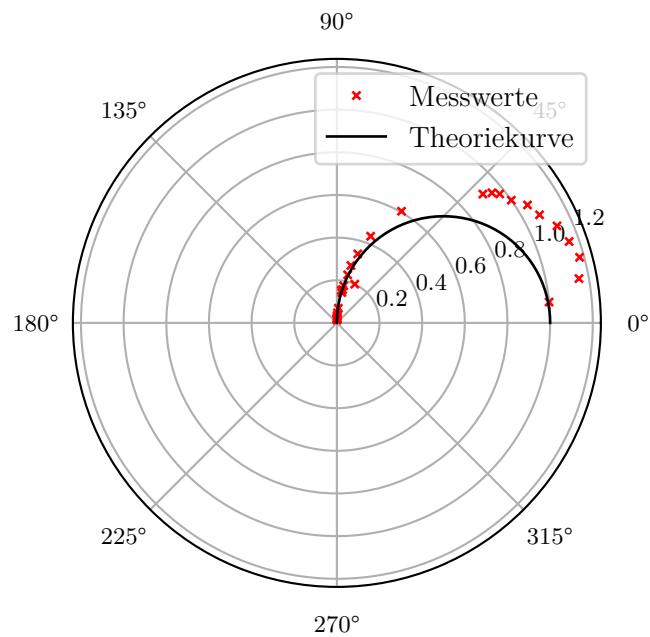


Abbildung 7: Abhängigkeit der Amplitude und Phase in einem Polarplot.

3.4 RC-Kreis als Integrator

Zuletzt wird geprüft, ob der RC-Kreis als Integrator arbeiten kann.

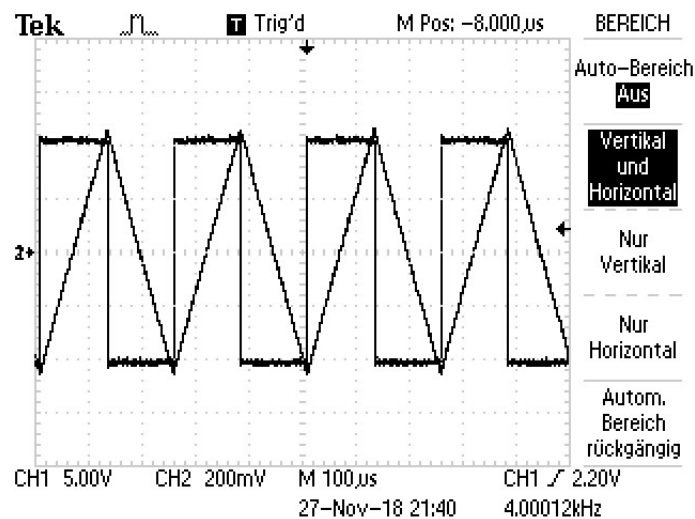


Abbildung 8: Darstellung der Rechteckspannung und ihrer Integrierten in einem Oskilloskop-Druck.

Wie zu erkennen ist, ist die Integrierte einer Rechteckspannung eine Dreieckspannung.

Folgende konstante Funktion

$$f(t) = \begin{cases} U & 0 < t < a \\ -U & a < t < 2a \end{cases}$$

liefert diese Stammfunktion:

$$F(t) = \begin{cases} Ut & 0 < t < a \\ -Ut & a < t < 2a. \end{cases}$$

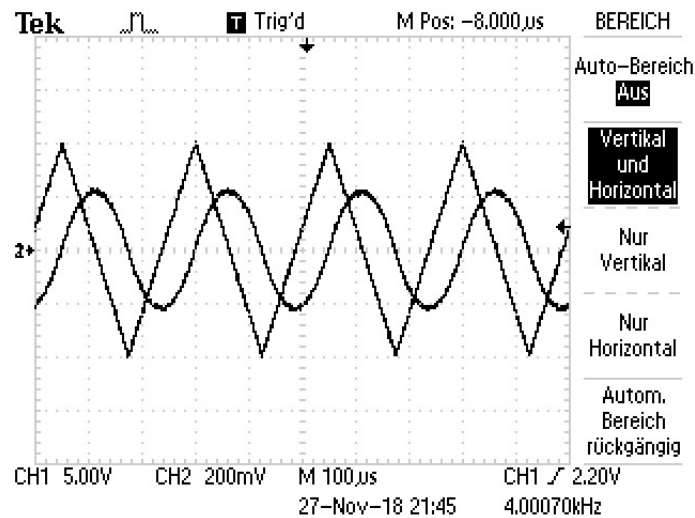


Abbildung 9: Darstellung der Dreiecksspannung und ihrer Integrierten in einem Oszilloskop-Druck.

Bei einer Dreiecksspannung ist eine quadratische Funktion die Integrierte. Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} Ux & 0 < x < a \\ -Ux & a < x < 2a \end{cases}$$

ergibt integriert:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot Ux^2 & 0 < x < a \\ -\frac{1}{2} \cdot Ux^2 & a < x < 2a. \end{cases}$$

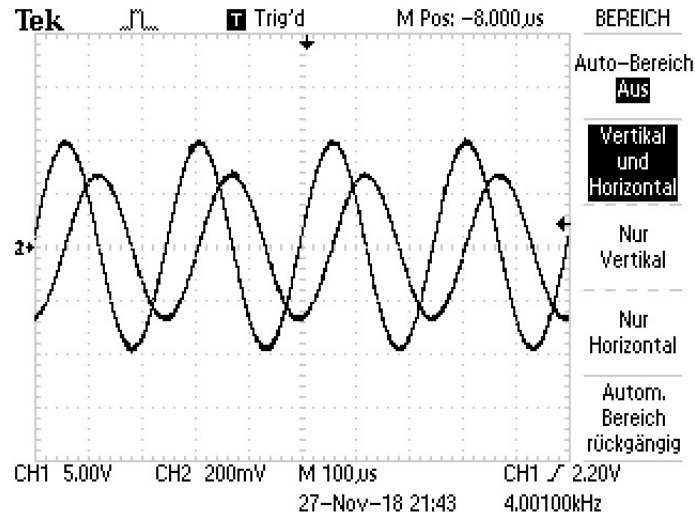


Abbildung 10: Darstellung der Sinusspannung und ihrer Integrierten in einem Oszilloskop-Druck.

Eine Kosinusspannung ist die Integrierte der Sinusspannung. Die Stammfunktion einer Sinusfunktion lautet

$$F(x) = -U \cdot \cos(x).$$

4 Diskussion

Die Zeitkonstanten, welche mit dem Entladevorgang ermittelt wurde und mit der Phasenverschiebung, also $RC_1 = (1.21 \pm 0.04) \cdot 10^{-3}s$ und $RC_2 = (1.346 \pm 0.498) \cdot 10^{-3}s$, haben eine prozentuale Abweichung von ca. 11 Prozent. Die Anpassungsfunktionen liegen nah an den Messwerten, weshalb diese Methode nicht allzu fehleranfällig war, bis auf systematische Fehler, wie ungenaues Ablesen der Werte auf dem Oszilloskop. Der mit der frequenzabhängigen Amplitude ermittelte Wert, $RC_3 = (-9.256 \pm 0.785) \cdot 10^{-4}s$ ist negativ, was physikalisch unlogisch ist, und weicht um ca. 176 Prozent von RC_1 und um ca. 169 Prozent von RC_2 ab. Hier ist also von einem großen systematischen Fehler auszugehen. Die Messwerte liegen relativ weit ober- bzw. unterhalb der Ausgleichsgeraden, was dem oben Gesagten zustimmt. Desweiteren decken sich Polarplot und Messwerte nicht. Auch bei diesem Graphen wurde die Amplitude aufgetragen. Somit unterliegt die Messung der frequenzabhängigen Amplitude starken Fehlern.

Die Integrierten der drei angelegten Spannungen, Dreiecks-, Rechtecks-, und Sinusspannung, entsprechen den erwarteten Spannungsformen. Somit dient der RC-Kreis als Integrator.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch 353, Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. 30. Nov. 2018. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V353.pdf>.