Решение на стационарна задача със самолетно крило

Калоян Стоилов

28 април 2022 г.

(D)
$$
\begin{cases}
\frac{\partial N}{\partial t} - \Delta N - N(1-\frac{N}{0.4}) + \frac{0.5NP}{0.5+N} = 0, \quad \text{в } \Omega \times J \\
\frac{\partial P}{\partial t} - \Delta P - \frac{0.5NP}{0.5+N} + 0.2P = 0, \quad \text{в } \Omega \times J \\
(n \cdot \nabla N) = (n \cdot \nabla P) = 0, \text{в } \partial\Omega \times J \\
N(x,y,0) = 0.3, \quad P(x,y,0) = 0.5, \text{в } [0.8,1]^2 \\
N(x,y,0) = P(x,y,0) = 0, \text{в } \partial\Omega \text{ при } t = 0
\end{cases}
$$

За да достигнем до вариационна формулировка, нека разгледаме за фиксиран момент $t \in J$ и умножим скаларно двете страни съответно по функции v и w. Ще приложим формулите за интегриране по части:

$$\iint\limits_{\Omega} v\left(\frac{\partial N}{\partial t} - \Delta N - N(1-\frac{N}{0.4}) + \frac{0.5NP}{0.5+N}\right) \mathrm{d}\Omega = 0$$

$$\iint\limits_{\Omega} v\frac{\partial N}{\partial t}\,\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint\limits_{\Omega} vN\,\mathrm{d}\Omega$$

$$\iint\limits_{\Omega} v(-\Delta N)\,\mathrm{d}\Omega = \iint\limits_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla N\,\mathrm{d}\Omega - \int\limits_{\partial\Omega} v\,\cancelto{0}{(n\cdot\nabla N)}\,\mathrm{d}s$$

$$\iint\limits_{\Omega} w\left(\frac{\partial P}{\partial t} - \Delta P - \frac{0.5NP}{0.5+N} + 0.2P\right) \mathrm{d}\Omega = 0$$

$$\iint\limits_{\Omega} w\frac{\partial P}{\partial t}\,\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint\limits_{\Omega} wP\,\mathrm{d}\Omega$$

$$\iint\limits_{\Omega} w(-\Delta P)\,\mathrm{d}\Omega = \iint\limits_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla P\,\mathrm{d}\Omega - \int\limits_{\partial\Omega} w\,\cancelto{0}{(n\cdot\nabla P)}\,\mathrm{d}s$$

Имаме естествени гранични условия, откъдето няма условия над тестовите функции:

$$v, w \in H^1(\Omega)$$

Така достигнахме до вариационната задача:

(V) За всяко $t \in J$ търсим $N, P \in H^1(\Omega)$, такива че:

$$\forall v \in H^1(\Omega) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_\Omega vN \,\mathrm{d}\Omega - \iint_\Omega vN \,\mathrm{d}\Omega + a(N,v) + b(N,v) + c(N,P,v) = 0 \right)$$

$$\forall w \in H^1(\Omega) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_\Omega wP \,\mathrm{d}\Omega + 0.2 \iint_\Omega wP \,\mathrm{d}\Omega + a(P,w) - c(N,P,w) = 0 \right)$$

$$a(u,v) = \iint_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \,\mathrm{d}\Omega, \quad b(N,v) = \iint_\Omega v \frac{N^2}{0.4} \,\mathrm{d}\Omega, \quad c(N,P,v) = \iint_\Omega v \frac{0.5NP}{0.5+N} \,\mathrm{d}\Omega$$

Задачата на Риц-Гальоркин е:

(R-G)

За всяко $t \in J$ търсим $N_h, P_h \in H_h^1(\mathscr{K})$, такава че:

$$\forall v \in H_h^1(\mathscr{K} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_\Omega vN_h \,\mathrm{d}\Omega - \iint_\Omega vN_h \,\mathrm{d}\Omega + a(N_h,v) + b(N_h,v) + c(N_h,P_h,v) = 0 \right)$$

$$\forall w \in H_h^1(\mathscr{K}) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_\Omega wP_h \,\mathrm{d}\Omega + 0.2 \iint_\Omega wP_h \,\mathrm{d}\Omega + a(P_h,w) - c(N_h,P_h,w) = 0 \right)$$

Тук $\mathscr{K}$ е триангулацията. Както обикновено, нека базисните функции бележим φ_i. Тъй като тестовите функции са от едно пространство, то може да работим с един набор от базисни функции. Така съответно и матрици на маса/коравина ще бъдат същите и може да се преизползват.

Нека с $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ бележим съответно векторите от приближените стойности на N и P

във възлите в момент t. След стандартните разписвания имаме:

$$\begin{cases} M^0\dot{\mathbf{q}} + M^1\mathbf{q} + 2.5B\mathbf{q} = 0 \\ M^0\dot{\mathbf{p}} + M^1\mathbf{p} + 0.2M^0\mathbf{p} + = 0 \end{cases}$$

$$M^0 = \begin{pmatrix} \iint\limits_\Omega \varphi_1\varphi_1 \,\mathrm{d}\Omega & \dots & \iint\limits_\Omega \varphi_1\varphi_n \,\mathrm{d}\Omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \iint\limits_\Omega \varphi_n\varphi_1 \,\mathrm{d}\Omega & \dots & \iint\limits_\Omega \varphi_n\varphi_n \,\mathrm{d}\Omega \end{pmatrix}, M^1 = \begin{pmatrix} \iint\limits_\Omega \nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi_1 \,\mathrm{d}\Omega & \dots & \iint\limits_\Omega \nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi_n \,\mathrm{d}\Omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \iint\limits_\Omega \nabla\varphi_n\cdot\nabla\varphi_1 \,\mathrm{d}\Omega & \dots & \iint\limits_\Omega \nabla\varphi_n\cdot\nabla\varphi_n \,\mathrm{d}\Omega \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \iint\limits_\Omega \varphi_1\varphi_1^2 \,\mathrm{d}\Omega & \dots & \iint\limits_\Omega \varphi_1\varphi_n^2 \,\mathrm{d}\Omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \iint\limits_\Omega \varphi_n\varphi_1^2 \,\mathrm{d}\Omega & \dots & \iint\limits_\Omega \varphi_n\varphi_n^2 \,\mathrm{d}\Omega \end{pmatrix}$$

M^0, M^1 могат да се сметнат като по лекции. За B аналогично може да използваме локални матрици. В кода се възползваме от факта, че при линейна интерполация градиента на фунцкиите на формата $\nabla\Psi$ е константен. Тогава директно може да се пресметне интеграла за локалните матрици на коравина, който е лицето на стандартния триъгълник. Интегралът за локалните матрици на масата също е константен. Нормализираната система изглежда така:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p} \\ (M^0)\dot{\mathbf{p}} = -M^1\mathbf{q} \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{p}(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left(\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & M^0 \end{array}\right)\dot{\mathbf{s}} = \left(\begin{array}{c|c} O & I \\ \hline -M^1 & O \end{array}\right)\mathbf{s} \\ \mathbf{s}(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} L\dot{\mathbf{s}} = R\mathbf{s} \\ \mathbf{s}(0) = 0 \end{cases} \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \hline \mathbf{P} \end{pmatrix}$$

Тук с I означихме единичната, а с O нулевата матрица. За решаване с подобрения метод на Ойлер, то:

$$\begin{cases} L\left(\mathbf{S}_{j+1} - \mathbf{S}_j\right) = \frac{\tau}{2}R\left(\mathbf{S}_{j+1} + \mathbf{S}_j\right) \\ \mathbf{S}_0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (L - \frac{\tau}{2}R)\mathbf{S}_{j+1} = (L + \frac{\tau}{2}R)\mathbf{S}_j \\ \mathbf{S}_0 = 0 \end{cases}$$

Но през цялото време си затворихме очите, че условието на Дирихле не е хомогенно. Затова тук на всяка стъпка, след решаване на системата, ще задаваме компонентите на $\mathbf{Q}_{j+1}$, съответстващи на възлите по границата Γ_D да са $0.1\sin\left(8\pi t_{j+1}\right)$. След като сме приключили с пресмятането на всички стъпки, искаме да вземем само първата половина на $\mathbf{S}$, т.к. тя отговаря за $\mathbf{Q}$.