Решение на стационарна задача със самолетно крило

Калоян Стоилов

23 януари 2022 г.

(D) $$\begin{cases} \ddot{u} - \Delta u = 0, \quad \text{в } \Omega \times J \\ n \cdot \nabla u \,|_{\Gamma_N \times J} = 0 \\ u \,|_{\Gamma_D \times J} = 0.1 \sin(8\pi t) \\ u = \dot{u} = 0, \text{в } \Omega \text{ при } t = 0 \end{cases}$$

За да достигнем до вариационна формулировка, нека разгледаме за фиксиран момент $t \in J$ и умножим скаларно двете страни по функция v и приложим формула за интегриране по части:

$$\iint_\Omega v\ddot{u}\,\mathrm{d}\Omega - \iint_\Omega v\Delta u\,\mathrm{d}\Omega = 0$$

$$\iint_\Omega v\ddot{u}\,\mathrm{d}\Omega - \iint_\Omega v\,(\nabla \cdot \nabla u)\,\mathrm{d}\Omega = 0$$

$$\iint_\Omega v\ddot{u}\,\mathrm{d}\Omega + \iint_\Omega \nabla v \cdot \nabla u\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega} (n \cdot \nabla u)\,v\,\mathrm{d}s = 0$$

$$\iint_\Omega v\ddot{u}\,\mathrm{d}\Omega + \iint_\Omega \nabla v \cdot \nabla u\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma_N} \cancelto{0}{(n \cdot \nabla u)}\,v\,\mathrm{d}s + \int_{\Gamma_D} (n \cdot \nabla u)\,v\,\mathrm{d}s$$

$$\iint_\Omega v\ddot{u}\,\mathrm{d}\Omega + \iint_\Omega \nabla v \cdot \nabla u\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma_D} (n \cdot \nabla u)\,\cancelto{0}{v}\,\mathrm{d}s$$

$$\iint_\Omega v\ddot{u}\,\mathrm{d}\Omega + \iint_\Omega \nabla v \cdot \nabla u\,\mathrm{d}\Omega = 0$$

За да подсигурим последното съкращаване, ще е необходимо:

$$v \in V = \{v \in H^1(\Omega) \;\mid\; v\,|_{\Gamma_D} = 0\}$$

За момента ще смятаме все едно ГУ по Γ_D е хомогенно, а накрая ще вземем предвид, че не е. Така достигнахме до вариационната задача:

(V) За всяко $t \in J$ търсим $u \in V$, такава че:

$$\forall v \in V \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \iint\limits_{\Omega} vu \,\mathrm{d}\Omega + a(u,v) = 0 \right)$$

$$a(u,v) = \iint\limits_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \,\mathrm{d}\Omega$$

Билинейната форма за задачата ни е скаларно произведение и съответно може да приложим цялата теория. Задачата на Риц-Гальоркин е:

(R-G) За всяко $t \in J$ търсим $u_h \in V_h(\mathscr{K})$, такава че:

$$\forall v \in V_h(\mathscr{K}) \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \iint\limits_{\Omega} vu_h \,\mathrm{d}\Omega + a(u_h,v) = 0 \right)$$

След стандартните разписвания имаме:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} M^0 \mathbf{q} + M^1 \mathbf{q} = 0, \text{т.е.} M^0 \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{q}}{\mathrm{d}t^2} + M^1 \mathbf{q} = 0$$

$$M^0 = \begin{pmatrix} \iint\limits_{\Omega} \varphi_1 \varphi_1 \,\mathrm{d}\Omega & \dots & \iint\limits_{\Omega} \varphi_1 \varphi_n \,\mathrm{d}\Omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \iint\limits_{\Omega} \varphi_n \varphi_1 \,\mathrm{d}\Omega & \dots & \iint\limits_{\Omega} \varphi_n \varphi_n \,\mathrm{d}\Omega \end{pmatrix}, M^1 = \begin{pmatrix} \iint\limits_{\Omega} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_1 \,\mathrm{d}\Omega & \dots & \iint\limits_{\Omega} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_n \,\mathrm{d}\Omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \iint\limits_{\Omega} \nabla\varphi_n \cdot \nabla\varphi_1 \,\mathrm{d}\Omega & \dots & \iint\limits_{\Omega} \nabla\varphi_n \cdot \nabla\varphi_n \,\mathrm{d}\Omega \end{pmatrix}$$

M^0, M^1 са сметнати като по лекции. В кода се възползваме от факта, че при линейна интерполация градиента на фунцкиите на формата $\nabla\Psi$ е константен. Тогава директно може да се пресметне интеграла за локалните матрици на коравина, който е лицето на стандартния триъгълник. Нормализираната система изглежда така:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} = -(M^0)^{-1} M^1 \mathbf{q} \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{p}(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{\mathbf{s}} = \left(\begin{array}{c|c} O & I \\ \hline -(M^0)^{-1} M^1 & O \end{array} \right) \mathbf{s} = A\mathbf{s} \\ \mathbf{s}(0) = 0 \end{cases}, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \hline \mathbf{P} \end{pmatrix}$$

M^0 е силно разредена и ще приближим $(M^0)^{-1}$ с $(\bar{M}^0)^{-1}$, където с $\bar{M}^0$ сме означили концентрираната матрица, съотвестваща на M^0. За решаване с подобрения метод на Ойлер, то:

$$\begin{cases} \mathbf{S}_{j+1} - \mathbf{S}_j = \frac{\tau}{2} A \left(\mathbf{S}_{j+1} + \mathbf{S}_j \right) \\ \mathbf{S}_0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (I - \frac{\tau}{2} A) \mathbf{S}_{j+1} = (I + \frac{\tau}{2} A) \mathbf{S}_j \\ \mathbf{S}_0 = 0 \end{cases}$$

Т.е. получаваме, че $\begin{cases} \mathbf{S}_{j+1} = (I - \frac{\tau}{2} A)^{-1} (I + \frac{\tau}{2} A) \mathbf{S}_j \\ \mathbf{S}_0 = 0 \end{cases}$

Но през цялото време си затворихме очите, че условието на Дирихле не е хомогенно. Затова тук след всяка стъпка пресмятания, ще задаваме компонентите на $\mathbf{Q}_{j+1}$, съответстващи на възлите по границата Γ_D да са $0.1 \sin\big(8\pi t_{j+1}\big)$. За намирането на $(I - \frac{\tau}{2} A)^{-1}$ може отново да концентрираме.