Решение на стационарна задача със самолетно крило

Калоян Стоилов

19 януари 2022 г.

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} \ddot{u} - \Delta u = 0, \quad \text{в } \Omega \times J \\ n \cdot \nabla u \,|_{\Gamma_N \times J} = 0 \\ u \,|_{\Gamma_D \times J} = 0.1 \sin(8\pi t) \\ u = \dot{u} = 0, \text{в } \Omega \text{ при } t = 0 \end{cases}$$

За да достигнем до вариационна формулировка, нека разгледаме за фиксиран момент $t \in J$ и умножим скаларно двете страни по функция v и приложим формула за интегриране по части:

$$\iint_\Omega v\ddot{u}\,\mathrm{d}\Omega - \iint_\Omega v\Delta u\,\mathrm{d}\Omega = 0$$

$$\iint_\Omega v\ddot{u}\,\mathrm{d}\Omega - \iint_\Omega v\left(\nabla \cdot \nabla u\right)\,\mathrm{d}\Omega = 0$$

$$\iint_\Omega v\ddot{u}\,\mathrm{d}\Omega + \iint_\Omega \nabla v \cdot \nabla u\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega} (n \cdot \nabla u)\, v\,\mathrm{d}s = 0$$

$$\iint_\Omega v\ddot{u}\,\mathrm{d}\Omega + \iint_\Omega \nabla v \cdot \nabla u\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma_N} \cancelto{0}{(n \cdot \nabla u)}\, v\,\mathrm{d}s + \int_{\Gamma_D} (n \cdot \nabla u)\, v\,\mathrm{d}s$$

$$\iint_\Omega v\ddot{u}\,\mathrm{d}\Omega + \iint_\Omega \nabla v \cdot \nabla u\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma_D} (n \cdot \nabla u)\, \cancelto{0}{v}\,\mathrm{d}s$$

$$\iint_\Omega v\ddot{u}\,\mathrm{d}\Omega + \iint_\Omega \nabla v \cdot \nabla u\,\mathrm{d}\Omega = 0$$

За да подсигурим последното съкращаване, ще е необходимо:

$$v \in V = \{v \in H^1(\Omega) \;|\; v\,|_{\Gamma_D} = 0\}$$

За момента ще смятаме все едно ГУ по Γ_D е хомогенно, а накрая ще вземем предвид, че не е. Така достигнахме до вариационната задача:

(V) За всяко $t \in J$ търсим $u \in V$, такава че:

$$\forall v \in V \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \iint\limits_{\Omega} vu \,\mathrm{d}\Omega + a(u,v) = 0 \right)$$

$$a(u,v) = \iint\limits_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \,\mathrm{d}\Omega$$

Билинейната форма за задачата ни е скаларно произведение и съответно може да приложим цялата теория. Задачата на Риц-Гальоркин е:

(R-G) За всяко $t \in J$ търсим $u_h \in V_h(\mathscr{K})$, такава че:

$$\forall v \in V_h(\mathscr{K}) \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \iint\limits_{\Omega} vu_h \,\mathrm{d}\Omega + a(u_h,v) = 0 \right)$$

След стандартните разписвания имаме:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} M^0 \mathbf{q} + M^1 \mathbf{q} = 0$$

$$M^0 \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{q}}{\mathrm{d}t^2} + M^1 \mathbf{q} = 0$$

$$M^0 = \begin{pmatrix} \iint\limits_{\Omega} \varphi_1 \varphi_1 \,\mathrm{d}\Omega & \dots & \iint\limits_{\Omega} \varphi_1 \varphi_n \,\mathrm{d}\Omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \iint\limits_{\Omega} \varphi_n \varphi_1 \,\mathrm{d}\Omega & \dots & \iint\limits_{\Omega} \varphi_n \varphi_n \end{pmatrix}, \quad M^1 = \begin{pmatrix} \iint\limits_{\Omega} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_1 \,\mathrm{d}\Omega & \dots & \iint\limits_{\Omega} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_n \,\mathrm{d}\Omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \iint\limits_{\Omega} \nabla\varphi_n \cdot \nabla\varphi_1 \,\mathrm{d}\Omega & \dots & \iint\limits_{\Omega} \nabla\varphi_n \cdot \nabla\varphi_n \end{pmatrix}$$

M^0, M^1 са сметнати като по лекции. В кода се възползваме от факта, че при линейна интерполация градиента на фунцкиите на формата $\nabla\Psi$ е константен. Тогава директно може да се пресметне интеграла за локалните матрици на коравина, който е лицето на стандартния триъгълник. Нормализираната система изглежда така:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} = -(M^0)^{-1} M^1 \mathbf{q} \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{p}(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

M^0 е силно разредена и ще приближим $(M^0)^{-1}$ с $(\bar{M}^0)^{-1}$, където с $\bar{M}^0$ сме означили концентрираната матрица, съотвестваща на M^0. За решаване с подобреният метод на Ойлер, то:

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_{j+1} - \mathbf{Q}_j = \frac{\tau}{2}\left(\mathbf{P}_{j+1} + \mathbf{P}_j\right) \\ \mathbf{P}_{j+1} - \mathbf{P}_j = -\frac{\tau}{2}(M^0)^{-1}M^1\left(\mathbf{Q}_{j+1} + \mathbf{Q}_j\right) \\ \mathbf{Q}_0 = \mathbf{P}_0 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

За да се освободим от неявните пресмятания, може да направим следното:

$$\mathbf{Q}_{j+1} = \mathbf{Q}_j + \frac{\tau}{2}\left(2\mathbf{P}_j - \frac{\tau}{2}(M^0)^{-1}M^1\left(\mathbf{Q}_{j+1} + \mathbf{Q}_j\right)\right)$$

$$\mathbf{Q}_{j+1} + \frac{\tau^2}{4}(M^0)^{-1}M^1\mathbf{Q}_{j+1} = \mathbf{Q}_j - \frac{\tau^2}{4}(M^0)^{-1}M^1\mathbf{Q}_j + \frac{\tau}{2}2\mathbf{P}_j$$

$$\left(I + \frac{\tau^2}{4}(M^0)^{-1}M^1\right)\mathbf{Q}_{j+1} = \left(I - \frac{\tau^2}{4}(M^0)^{-1}M^1\right)\mathbf{Q}_j + \tau\mathbf{P}_j$$

$$\mathbf{Q}_{j+1} = \left(I + \frac{\tau^2}{4}(M^0)^{-1}M^1\right)^{-1}\left(I - \frac{\tau^2}{4}(M^0)^{-1}M^1\right)\mathbf{Q}_j + \tau\left(I + \frac{\tau^2}{4}(M^0)^{-1}M^1\right)^{-1}\mathbf{P}_j$$

$$\mathbf{Q}_{j+1} = (I+A)^{-1}(I-A)\mathbf{Q}_j + \tau(I+A)^{-1}\mathbf{P}_j, \quad A = \frac{\tau^2}{4}(M^0)^{-1}M^1$$

$$\mathbf{P}_{j+1} = \mathbf{P}_j - \frac{\tau}{2}(M^0)^{-1}M^1\left((I+A)^{-1}(I-A)\mathbf{Q}_j + \tau(I+A)^{-1}\mathbf{P}_j + \mathbf{Q}_j\right)$$

$$\mathbf{P}_{j+1} = \mathbf{P}_j - \frac{2}{\tau}A\left((I+A)^{-1}(I-A)\mathbf{Q}_j + \tau(I+A)^{-1}\mathbf{P}_j + \mathbf{Q}_j\right)$$

$$\mathbf{P}_{j+1} = \mathbf{P}_j - 2A(I+A)^{-1}\mathbf{P}_j - \frac{2}{\tau}A\left((I+A)^{-1}(I-A) + I\right)\mathbf{Q}_j$$

$$\mathbf{P}_{j+1} = \left(I - 2A(I+A)^{-1}\right)\mathbf{P}_j - \frac{2}{\tau}A\left((I+A)^{-1}(I-A) + I\right)\mathbf{Q}_j$$

Ако въведем означанията:

$$B = I - A, \quad C = (I+A)^{-1}, \quad D = I - 2AC,$$
$$E = CB, \quad F = -\frac{2}{\tau}A - \frac{2}{\tau}AE, \quad G = \tau C$$

Получаваме директната рекурентна зависимост:

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_{j+1} = E\mathbf{Q}_j + G\mathbf{P}_j \\ \mathbf{P}_{j+1} = F\mathbf{Q}_j + D\mathbf{P}_j \\ \mathbf{Q}_0 = \mathbf{P}_0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{S}_{j+1} = \left(\begin{array}{c|c} E & G \\ \hline F & D \end{array}\right)\mathbf{S}_j \\ \mathbf{S}_0 = 0 \end{cases}, \quad \mathbf{S}_j = \left(\begin{array}{c} \mathbf{Q}_j \\ \hline \mathbf{P}_j \end{array}\right) \tag{3}$$

Но през цялото време си затворихме очите, че условието на Дирихле не е хомогенно. Затова тук след всяка стъпка пресмятания, ще задаваме компонентите на $\mathbf{Q}_{j+1}$, съотвестващи на възлите по границата Γ_D да са $0.1\sin\left(8\pi t_{j+1}\right)$. За намирането на C може отново да концентрираме $I + A$.