Решение на стационарна задача със самолетно крило

Калоян Стоилов

31 януари 2022 г.

$$
\text{(D)} \qquad \begin{cases} \ddot{u} - \Delta u = 0, \quad \text{в } \Omega \times J \\ n \cdot \nabla u \,|_{\Gamma_N \times J} = 0 \\ u \,|_{\Gamma_D \times J} = 0.1 \sin(8\pi t) \\ u = \dot{u} = 0, \text{в } \Omega \text{ при } t = 0 \end{cases}
$$

За да достигнем до вариационна формулировка, нека разгледаме за фиксиран момент $t \in J$ и умножим скаларно двете страни по функция v и приложим формула за интегриране по части:

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{\Omega} v\ddot{u} \, \mathrm{d}\Omega - \iint\limits_{\Omega} v\Delta u \, \mathrm{d}\Omega &= 0 \\
\iint\limits_{\Omega} v\ddot{u} \, \mathrm{d}\Omega - \iint\limits_{\Omega} v \left(\nabla \cdot \nabla u\right) \mathrm{d}\Omega &= 0 \\
\iint\limits_{\Omega} v\ddot{u} \, \mathrm{d}\Omega + \iint\limits_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, \mathrm{d}\Omega - \int\limits_{\partial\Omega} (n \cdot \nabla u) \, v \, \mathrm{d}s &= 0 \\
\iint\limits_{\Omega} v\ddot{u} \, \mathrm{d}\Omega + \iint\limits_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, \mathrm{d}\Omega &= \int\limits_{\Gamma_N} \cancelto{0}{(n \cdot \nabla u)} \, v \, \mathrm{d}s + \int\limits_{\Gamma_D} (n \cdot \nabla u) \, v \, \mathrm{d}s \\
\iint\limits_{\Omega} v\ddot{u} \, \mathrm{d}\Omega + \iint\limits_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, \mathrm{d}\Omega &= \int\limits_{\Gamma_D} (n \cdot \nabla u) \, \cancelto{0}{v} \, \mathrm{d}s \\
\iint\limits_{\Omega} v\ddot{u} \, \mathrm{d}\Omega + \iint\limits_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, \mathrm{d}\Omega &= 0
\end{aligned}
$$

За да подсигурим последното съкращаване, ще е необходимо:

$$
v \in V = \{ v \in H^1(\Omega) \;\mid\; v \,|_{\Gamma_D} = 0 \}
$$

За момента ще смятаме все едно ГУ по $\boldsymbol{\Gamma}_D$ е хомогенно, а накрая ще вземем предвид, че не е. Така достигнахме до вариационната задача:

(V) За всяко $t \in J$ търсим $u \in V$, такава че:

$$\forall v \in V \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \iint\limits_{\Omega} vu \,\mathrm{d}\Omega + a(u,v) = 0 \right)$$

$$a(u,v) = \iint\limits_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \,\mathrm{d}\Omega$$

Билинейната форма за задачата ни е скаларно произведение и съответно може да приложим цялата теория. Задачата на Риц-Гальоркин е:

(R-G) За всяко $t \in J$ търсим $u_h \in V_h(\mathscr{K})$, такава че:

$$\forall v \in V_h(\mathscr{K}) \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \iint\limits_{\Omega} vu_h \,\mathrm{d}\Omega + a(u_h,v) = 0 \right)$$

Тук $\mathscr{K}$ е триангулацията. След стандартните разписвания имаме:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} M^0 \mathbf{q} + M^1 \mathbf{q} = 0, \text{ т.е.} \quad M^0 \ddot{\mathbf{q}} + M^1 \mathbf{q} = 0$$

$$M^0 = \begin{pmatrix} \iint\limits_{\Omega} \varphi_1 \varphi_1 \,\mathrm{d}\Omega & \dots & \iint\limits_{\Omega} \varphi_1 \varphi_n \,\mathrm{d}\Omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \iint\limits_{\Omega} \varphi_n \varphi_1 \,\mathrm{d}\Omega & \dots & \iint\limits_{\Omega} \varphi_n \varphi_n \,\mathrm{d}\Omega \end{pmatrix}, M^1 = \begin{pmatrix} \iint\limits_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_1 \,\mathrm{d}\Omega & \dots & \iint\limits_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_n \,\mathrm{d}\Omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \iint\limits_{\Omega} \nabla \varphi_n \cdot \nabla \varphi_1 \,\mathrm{d}\Omega & \dots & \iint\limits_{\Omega} \nabla \varphi_n \cdot \nabla \varphi_n \,\mathrm{d}\Omega \end{pmatrix}$$

M^0, M^1 са сметнати като по лекции. В кода се възползваме от факта, че при линейна интерполация градиента на фунцкиите на формата $\boldsymbol{\nabla\Psi}$ е константен. Тогава директно може да се пресметне интеграла за локалните матрици на коравина, който е лицето на стандартния триъгълник. Интегралът за локалните матрици на масата също е константен. Нормализираната система изглежда така:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p} \\ (M^0)\dot{\mathbf{p}} = -M^1 \mathbf{q} \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{p}(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left(\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & M^0 \end{array} \right) \dot{\mathbf{s}} = \left(\begin{array}{c|c} O & I \\ \hline -M^1 & O \end{array} \right) \mathbf{s} \\ \mathbf{s}(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} L\dot{\mathbf{s}} = R\mathbf{s} \\ \mathbf{s}(0) = 0 \end{cases} \quad \mathbf{s} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{Q} \\ \hline \mathbf{P} \end{array} \right)$$

Тук с $\boldsymbol{I}$ означихме единичната, а с $\boldsymbol{O}$ нулевата матрица. За решаване с подобрения метод на Ойлер, то:

$$\begin{cases} L\left(\mathbf{S}_{j+1} - \mathbf{S}_j\right) = \frac{\tau}{2} R \left(\mathbf{S}_{j+1} + \mathbf{S}_j\right) \\ \mathbf{S}_0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (L - \frac{\tau}{2}R)\mathbf{S}_{j+1} = (L + \frac{\tau}{2}R)\mathbf{S}_j \\ \mathbf{S}_0 = 0 \end{cases}$$

Но през цялото време си затворихме очите, че условието на Дирихле не е хомогенно. Затова тук на всяка стъпка, след решаване на системата, ще задаваме компонентите на $\mathbf{Q}_{j+1}$, съответстващи на възлите по границата Γ_D да са $0.1\sin\left(8\pi t_{j+1}\right)$. След като сме приключили с пресмятането на всички стъпки, искаме да вземем само първата половина на $\mathbf{S}$, т.к. тя отговаря за $\mathbf{Q}$.