Решение на стационарна задача със самолетно крило

Калоян Стоилов

20 януари 2022 г.

$$
\text{(D)} \qquad \begin{cases} -\Delta\Phi = 0, \quad \text{в } \Omega \\ n \cdot \nabla\Phi \,|_{\Gamma_{in}} = 1 \\ u \,|_{\Gamma_{out}} = 0 \\ n \cdot \nabla\Phi \,|_{\Gamma_{else}} = 0 \end{cases}
$$

За да достигнем до вариационна формулировка, умножаваме скаларно двете страни по функция v и прилагаме формула за интегриране по части:

$$
\begin{aligned}
-\iint\limits_{\Omega} v\Delta\Phi \,\mathrm{d}\Omega &= 0 \\
-\iint\limits_{\Omega} v\left(\nabla\cdot\nabla\Phi\right)\mathrm{d}\Omega &= 0 \\
\iint\limits_{\Omega} \nabla v\cdot\nabla\Phi\,\mathrm{d}\Omega - \int\limits_{\partial\Omega} \left(n\cdot\nabla\Phi\right) v\,\mathrm{d}s &= 0 \\
\iint\limits_{\Omega} \nabla v\cdot\nabla\Phi\,\mathrm{d}\Omega &= \int\limits_{\Gamma_{in}} \cancelto{1}{\left(n\cdot\nabla\Phi\right)} v\,\mathrm{d}s + \int\limits_{\Gamma_{out}} \left(n\cdot\nabla\Phi\right) v\,\mathrm{d}s + \int\limits_{\Gamma_{else}} \cancelto{0}{\left(n\cdot\nabla\Phi\right)} v\,\mathrm{d}s \\
\iint\limits_{\Omega} \nabla v\cdot\nabla\Phi\,\mathrm{d}\Omega &= \int\limits_{\Gamma_{in}} v\,\mathrm{d}s + \int\limits_{\Gamma_{out}} \left(n\cdot\nabla\Phi\right) \cancelto{0}{v}\,\mathrm{d}s \\
\iint\limits_{\Omega} \nabla v\cdot\nabla\Phi\,\mathrm{d}\Omega &= \int\limits_{\Gamma_{in}} v\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

За да подсигурим последното съкращаване, ще е необходимо:

$$
v \in V = \{ v \in H^1(\Omega) \;\mid\; v\,|_{\Gamma_{out}} = 0 \}
$$

Така достигнахме до вариационната задача:

(V) Търсим $\Phi \in V$, такава че: $\forall v \in V\,(a(\Phi, v) = F(v))$

$$a(\Phi, v) = \iint\limits_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \Phi \,\mathrm{d}\Omega, \quad F(v) = \int\limits_{\Gamma_{in}} v \,\mathrm{d}s$$

Билинейната форма за задачата ни е скаларно произведение и съответно може да приложим цялата теория. Задачата на Риц-Гальоркин е:

(R-G) Търсим $\Phi_h \in V_h(\mathscr{K})$, такава че: $\forall v \in V_h(\mathscr{K})\,(a(\Phi_h, v) = F(v))$

След стандартните разписвания имаме:

$$M^1 \mathbf{q} = \mathbf{b}$$

$$M^1 = \begin{pmatrix} \iint\limits_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_1 \,\mathrm{d}\Omega & \dots & \iint\limits_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_n \,\mathrm{d}\Omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \iint\limits_{\Omega} \nabla \varphi_n \cdot \nabla \varphi_1 \,\mathrm{d}\Omega & \dots & \iint\limits_{\Omega} \nabla \varphi_n \cdot \nabla \varphi_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \int\limits_{\Gamma_{in}} \varphi_1 \,\mathrm{d}s \\ \dots \\ \int\limits_{\Gamma_{in}} \varphi_n \,\mathrm{d}s \end{pmatrix}$$

M^1 е сметната като по лекции. В кода се възползваме от факта, че при линейна интерполация градиента на фунцкиите на формата $\nabla \Psi$ е константен. Тогава директно може да се пресметне интеграла за локалните матрици на коравина, който е лицето на стандартния триъгълник. За $\mathbf{b}$ правим следното наблюдение - ако i и j са съседни възли по Γ_{out}, то отсечката l от $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)^T$ до $\mathbf{r}_j = (x_j, y_j)^T$ е в $supp\,\varphi_i$ и $supp\,\varphi_j$. Нека разгледаме какво правим за φ_i:

$$[0,1] \to (x,y)^T, \quad (x,y)^T \in l$$

$$x(t) = t x_i + (1-t) x_j, \quad y(t) = t y_i + (1-t) y_j$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = x_i - x_j, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = y_i - y_j$$

$$\int\limits_{l} \varphi_i \,\mathrm{d}s = \int\limits_{0}^{1} (1-t) \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} \,\mathrm{d}t = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\| \int\limits_{0}^{1} (1-t) \,\mathrm{d}t$$

$$= \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\| (1 - \frac{1}{2}) = \frac{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|}{2}$$

За получаването на $\int\limits_{\Gamma_{in}} \varphi_i \,\mathrm{d}s$ остава само да съберем тези изрази за всички гранични отсечки, на които възела i е край. Тъй като решението Φ е потенциал, то съответсващият му поток би бил $\pm \nabla \Phi$ (в зависимост от кои източници следваме). Тук $-\nabla \Phi$ изглежда повече приляга на задачата.