

# Решение на стационарна задача със самолетно крило

Калоян Стоилов

3 май 2022 г.

$$(D) \quad \begin{cases} \frac{\partial N}{\partial t} - \Delta N - N(1 - \frac{N}{0.4}) + \frac{0.5NP}{0.5+N} = 0, & \text{в } \Omega \times J \\ \frac{\partial P}{\partial t} - \Delta P - \frac{0.5NP}{0.5+N} + 0.2P = 0, & \text{в } \Omega \times J \\ (n \cdot \nabla N) = (n \cdot \nabla P) = 0, & \text{в } \partial\Omega \times J \\ N(x, y, 0) = 0.3, \quad P(x, y, 0) = 0.5, & \text{в } [0.8, 1]^2 \\ N(x, y, 0) = P(x, y, 0) = 0, & \text{в } \partial\Omega \text{ при } t = 0 \end{cases}$$

За да достигнем до вариационна формулировка, нека разгледаме за фиксиран момент  $t \in J$  и умножим скалярно двете страни съответно по функции  $v$  и  $w$ . Ще приложим формулите за интегриране по части:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} v \left( \frac{\partial N}{\partial t} - \Delta N - N(1 - \frac{N}{0.4}) + \frac{0.5NP}{0.5+N} \right) d\Omega &= 0 \\ \iint_{\Omega} v \frac{\partial N}{\partial t} d\Omega &= \frac{d}{dt} \iint_{\Omega} vN d\Omega \\ \iint_{\Omega} v(-\Delta N) d\Omega &= \iint_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla N d\Omega - \int_{\partial\Omega} v \cancel{(n \cdot \nabla N)}^0 ds \\ \iint_{\Omega} w \left( \frac{\partial P}{\partial t} - \Delta P - \frac{0.5NP}{0.5+N} + 0.2P \right) d\Omega &= 0 \\ \iint_{\Omega} w \frac{\partial P}{\partial t} d\Omega &= \frac{d}{dt} \iint_{\Omega} wP d\Omega \\ \iint_{\Omega} w(-\Delta P) d\Omega &= \iint_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla P d\Omega - \int_{\partial\Omega} w \cancel{(n \cdot \nabla P)}^0 ds \end{aligned}$$

Имаме естествени гранични условия, откъдето няма условия над тестовите функции:

$$v, w \in H^1(\Omega)$$

Така достигнахме до вариационната задача:

(V) За всяко  $t \in J$  търсим  $N, P \in H^1(\Omega)$ , такива че:

$$\begin{aligned} \forall v \in H^1(\Omega) & \left( \frac{d}{dt} \iint_{\Omega} v N \, d\Omega - \iint_{\Omega} v N \, d\Omega + a(N, v) + b(N, v) + c(N, P, v) = 0 \right) \\ \forall w \in H^1(\Omega) & \left( \frac{d}{dt} \iint_{\Omega} w P \, d\Omega + 0.2 \iint_{\Omega} w P \, d\Omega + a(P, w) - c(N, P, w) = 0 \right) \\ a(u, v) &= \iint_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, d\Omega, \quad b(N, v) = \iint_{\Omega} v \frac{N^2}{0.4} \, d\Omega, \quad c(N, P, v) = \iint_{\Omega} v \frac{0.5NP}{0.5+N} \, d\Omega \end{aligned}$$

Задачата на Риц-Гальборкин е:

(R-G)

За всяко  $t \in J$  търсим  $N_h, P_h \in H_h^1(\mathcal{K})$ , такава че:

$$\begin{aligned} \forall v \in H_h^1(\mathcal{K}) & \left( \frac{d}{dt} \iint_{\Omega} v N_h \, d\Omega - \iint_{\Omega} v N_h \, d\Omega + a(N_h, v) + b(N_h, v) + c(N_h, P_h, v) = 0 \right) \\ \forall w \in H_h^1(\mathcal{K}) & \left( \frac{d}{dt} \iint_{\Omega} w P_h \, d\Omega + 0.2 \iint_{\Omega} w P_h \, d\Omega + a(P_h, w) - c(N_h, P_h, w) = 0 \right) \end{aligned}$$

Тук  $\mathcal{K}$  е триангулацията. Както обикновено, нека базисните функции бележим  $\boldsymbol{\varphi}_i$ . Тъй като тестовите функции са от едно пространство, то може да работим с един набор от базисни функции. Така съответно и матрици на маса/коравина ще бъдат същите и може да се преизползват.

Нека с  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$  бележим съответно векторите от приближените стойности на  $N$  и  $P$

във възлите в момент  $t$ . След стандартните разписвания имаме:

$$\begin{cases} M^0 \dot{\mathbf{q}} - M^0 \mathbf{q} + M^1 \mathbf{q} + \mathbf{b}(\mathbf{q}) + \mathbf{c}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{0} \\ M^0 \dot{\mathbf{p}} + 0.2M^0 \mathbf{p} + M^1 \mathbf{p} - \mathbf{c}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$M^0 = \begin{pmatrix} \iint_{\Omega} \varphi_1 \varphi_1 d\Omega & \dots & \iint_{\Omega} \varphi_1 \varphi_n d\Omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \iint_{\Omega} \varphi_n \varphi_1 d\Omega & \dots & \iint_{\Omega} \varphi_n \varphi_n d\Omega \end{pmatrix}, M^1 = \begin{pmatrix} \iint_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_1 d\Omega & \dots & \iint_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_n d\Omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \iint_{\Omega} \nabla \varphi_n \cdot \nabla \varphi_1 d\Omega & \dots & \iint_{\Omega} \nabla \varphi_n \cdot \nabla \varphi_n d\Omega \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{q}) = 2.5 \iint_{\Omega} \varphi(\varphi \cdot \mathbf{q})^2 d\Omega, \quad \mathbf{c}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = 0.5 \iint_{\Omega} \varphi \frac{(\varphi \cdot \mathbf{q})(\varphi \cdot \mathbf{p})}{0.5 + \varphi \cdot \mathbf{q}} d\Omega$$

$M^0, M^1$  могат да се сметнат като по лекции.

За  $\mathbf{b}$  може да забележим следното:

$$b_i(\mathbf{q}) = 2.5 \iint_{\Omega} \varphi(\varphi \cdot \mathbf{q})^2 d\Omega = \sum_{\tau \in \text{supp } \varphi_i} 2.5 \iint_{\tau} \varphi_i(\varphi \cdot \mathbf{q})^2 d\tau =$$

$$2.5 \sum_{\tau \in \text{supp } \varphi_i} \sum_{j,k} q_j q_k \iint_{\tau} \varphi_i \varphi_j \varphi_k d\tau$$

Където последната сума е по индексите  $j, k$  на базисните функции за елемента  $\tau$ . Вътрешният интеграл може да се сведе до интеграл по референтната област с функциите на формата. Може да пресметнем (приблизихи) съответните интеграли и да ги запазим в един кубичен масив с размер по всеки индекс броя на функции на формата. Така при обхождане на всеки елемент може да добавяме съответните суми по различните индекси на  $\mathbf{b}$ . За  $\mathbf{c}$  може да повторим само първата стъпка изцяло. За втората стъпка може да получим само "по-добре" разписана двойна сума, т.к. в знаменателя ще получим сума, зависеща от  $\mathbf{q}$  и няма да използваме вече изчислени интеграли по функции на формата.

Нека сега групираме  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$  в общ вектор  $\mathbf{s}$ . Да означим:

$$\tilde{M}^0 = \left( \begin{array}{c|c} M^0 & O \\ \hline O & M^0 \end{array} \right), \quad \tilde{M}^1 = \left( \begin{array}{c|c} M^1 & O \\ \hline O & M^1 \end{array} \right), \quad R = \left( \begin{array}{c|c} -M^0 & O \\ \hline O & 0.2M^0 \end{array} \right),$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}) = \left( \begin{array}{c} \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{s}) \\ \mathbf{c}(\mathbf{s}) \end{array} \right), \quad \tilde{\mathbf{b}}(s_1, \dots, s_n, s_{n+1}, \dots, s_{2n}) = \mathbf{b}(s_1, \dots, s_n)$$

Достигахме до следната система ОДУ от първи ред:

$$\tilde{M}^0 \dot{\mathbf{s}} = -R\mathbf{s} - \tilde{M}^1 \mathbf{s} - \mathbf{f}(\mathbf{s})$$

Дискретизираме по времето и използваме неявен метод на Ойлер. Тогава трябва да решим системата:

$$\begin{aligned}\tilde{M}^0(\mathbf{S}_{j+1} - \mathbf{S}_j) &= -R\mathbf{S}_{j+1} - \tilde{M}^1\mathbf{S}_{j+1} - \mathbf{f}(\mathbf{S}_{j+1}) \\ (\tilde{M}^0 + \tilde{M}^1 + R)\mathbf{S}_{j+1} + \mathbf{f}(\mathbf{S}_{j+1}) - \tilde{M}^0\mathbf{S}_j &= \mathbf{0}\end{aligned}$$