Решения на задачи по МКЕ 1

Калоян Стоилов

26 октомври 2021 г.

Задача 1. *Да се приложи МКЕ с мрежа с възли* $\frac{k}{3}, k = \overline{0,3}$

$$\begin{cases} -u'' = 1 \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Решение. *Всъщност за тази задача лесно може да намерим и аналитичното решение:*

$$\begin{aligned} -u'' = 1 &\implies u' = -x + a \implies u = -\frac{x^2}{2} + ax + b \\ -u(0) = 0 &\implies b = 0 \\ -u'(1) = 0 &\implies -\frac{2}{2} + a = 0 \implies a = 1 \\ \implies u(x) = -\frac{x^2}{2} + x \end{aligned}$$

За да приложим МКЕ, умножаваме двете страни по функция $v(x)$ *и интегрираме:*

$$\begin{gathered} -\int_0^1 u''(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 v(x)\mathrm{d}x \\ \int_0^1 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) = \int_0^1 v(x)\mathrm{d}x \\ \int_0^1 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 v(x)\mathrm{d}x \end{gathered}$$

За да подсигурим последното, ще е необходимо $v(0) = 0$*, т.е.* $v \in V = \{v \in H^1 | v(0) = 0\}$*. Билинейната форма за задачата ни е* $a(f,g) = \int_0^1 f'(x)g'(x)\mathrm{d}x$*, а* $F(v) = \int_0^1 v(x)\mathrm{d}x$*. Тъй като трябва* $v(0) = 0$*, то колибката* φ_0 *няма да участва в* V_h*, т.е.* $V_h =$

$span\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, *След проектиране в пространството V_h, където за базис взимаме познатите ни функции колибки, достигаме до системата:*

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Решението е $(q_1, q_2, q_3)^T = (\frac{5}{18}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2})^T$.

Задача 2. *Да се приложи МКЕ с мрежа с възли* $\frac{k}{3}, k = \overline{0,3}$

$$\begin{cases} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(c(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)\right) = \delta\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \quad , \quad c(x) = \begin{cases} 2, x < \frac{1}{3} \\ 4, x >= \frac{1}{3} \end{cases} \tag{3}$$

Решение. *За да приложим МКЕ, умножаваме двете страни по функция* $v(x)$ *и интегрираме:*

$$-\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(c(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)\right)v(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 v(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 c(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)v'(x)\mathrm{d}x - c(1)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(1)v(1) + c(0)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(0)v(0) = \int_0^1 v(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 c(x)u'(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 v(x)\mathrm{d}x$$

За да подсигурим последното, ще е необходимо $v(0) = 0$, *т.е.* $v \in V = \{v \in H^1 | v(0) = 0\}$, *съответно и* V_h *е като в предишната задача. Билинейната форма за задачата ни е* $a(f,g) = \int_0^1 c(x)f'(x)g'(x)\mathrm{d}x$, *а* $F(v) = \int_0^1 v(x)\mathrm{d}x$. *След проектиране в пространството* V_h, *където за базис взимаме познатите ни функции колибки, достигаме до системата:*

$$\begin{pmatrix} 18 & -12 & 0 \\ -12 & 24 & -12 \\ 0 & -12 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Повечето коефициенти се извеждат от предишната задача, но се умножават по 4, *т.к. в съответните интервали* $c(x) = 4$. *Коефициентът* $a(\varphi_1, \varphi_1)$ *се получава, като разбием интеграла на две части - отляво и отдясно на точката* $\frac{1}{3}$, *която е Решението е* $(q_1, q_2, q_3)^T = (\frac{1}{6}, \frac{5}{24}, \frac{5}{24})^T$.