

Решение на стационарна задача със самолетно крило

Калоян Стоилов

17 януари 2022 г.

$$(D) \quad \begin{cases} -\Delta\Phi = 0, & \text{в } \Omega \\ n \cdot \nabla\Phi|_{\Gamma_{in}} = 1 \\ u|_{\Gamma_{out}} = 0 \\ n \cdot \nabla\Phi|_{\Gamma_{else}} = 0 \end{cases}$$

За да достигнем до вариационна формулировка, умножаваме скалярно двете страни по функция v и прилагаме формула за интегриране по части:

$$\begin{aligned} - \iint_{\Omega} v \Delta\Phi \, d\Omega &= 0 \\ - \iint_{\Omega} v (\nabla \cdot \nabla\Phi) \, d\Omega &= 0 \\ \iint_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla\Phi \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} (n \cdot \nabla\Phi) v \, ds &= 0 \\ \iint_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla\Phi \, d\Omega &= \int_{\Gamma_{in}} \cancel{(n \cdot \nabla\Phi)}^1 v \, ds + \int_{\Gamma_{out}} (n \cdot \nabla\Phi) v \, ds + \int_{\Gamma_{else}} \cancel{(n \cdot \nabla\Phi)}^0 v \, ds \\ \iint_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla\Phi \, d\Omega &= \int_{\Gamma_{in}} v \, ds + \int_{\Gamma_{out}} \cancel{(n \cdot \nabla\Phi)}^0 v \, ds \\ \iint_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla\Phi \, d\Omega &= \int_{\Gamma_{in}} v \, ds \end{aligned}$$

За да подсигури последното съкращаване, ще е необходимо:

$$v \in V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma_{out}} = 0\}$$

Така достигнахме до вариационната задача:

$$(V) \quad \text{Търсим } \Phi \in V, \text{ такава че: } \forall v \in V (a(\Phi, v) = F(v))$$

$$a(\Phi, v) = \iint_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \Phi \, d\Omega, \quad F(v) = \int_{\Gamma_{in}} v \, ds$$

Билинейната форма за задачата ни е скалярно произведение и съответно може да приложим цялата теория. Задачата на Риц-Галъоркин е:

$$(R-G) \quad \text{Търсим } \Phi_h \in V_h(\mathcal{K}), \text{ такава че: } \forall v \in V_h(\mathcal{K}) (a(\Phi_h, v) = F(v))$$

След стандартните разписвания имаме:

$$M^1 \mathbf{q} = \mathbf{b}$$

$$M^1 = \begin{pmatrix} \iint_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_1 \, d\Omega & \dots & \iint_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_n \, d\Omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \iint_{\Omega} \nabla \varphi_n \cdot \nabla \varphi_1 \, d\Omega & \dots & \iint_{\Omega} \nabla \varphi_n \cdot \nabla \varphi_n \, d\Omega \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \int_{\Gamma_{in}} \varphi_1 \, ds \\ \dots \\ \int_{\Gamma_{in}} \varphi_n \, ds \end{pmatrix}$$

M^1 е сметната като по лекции. В кода се възползваме от факта, че при линейна интерполация градиента на функциите на формата $\nabla \Psi$ е константен. Тогава директно може да се пресметне интеграла за локалните матрици на коравина, който е лицето на стандартния триъгълник. За \mathbf{b} правим следното наблюдение - ако i и j са съседни възли по Γ_{out} , то отсечката l от $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)^T$ до $\mathbf{r}_j = (x_j, y_j)^T$ е в $supp \varphi_i$ и $supp \varphi_j$. Нека разгледаме какво правим за φ_i :

$$[0, 1] \rightarrow (x, y)^T, \quad (x, y)^T \in l$$

$$x(t) = tx_i + (1-t)x_j, \quad y(t) = ty_i + (1-t)y_j$$

$$\frac{dx}{dt}(t) = x_i - x_j, \quad \frac{dy}{dt}(t) = y_i - y_j$$

$$\int_l \varphi_i \, ds = \int_0^1 (1-t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\| \int_0^1 (1-t) \, dt$$

$$= \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\| \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|}{2}$$

За получаването на $\int_{\Gamma_{in}} \varphi_i \, ds$ остава само да съберем тези изрази за всички гранични отсечки, на които възела i е край.