

Решение на стационарна задача със самолетно крило

Калоян Стоилов

22 януари 2022 г.

$$(D) \quad \begin{cases} \ddot{u} - \Delta u = 0, & \text{в } \Omega \times J \\ n \cdot \nabla u|_{\Gamma_N \times J} = 0 \\ u|_{\Gamma_D \times J} = 0.1 \sin(8\pi t) \\ u = \dot{u} = 0, & \text{в } \Omega \text{ при } t = 0 \end{cases}$$

За да достигнем до вариационна формулировка, нека разгледаме за фиксиран момент $t \in J$ и умножим скалярно двете страни по функция v и приложим формула за интегриране по части:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} v \ddot{u} \, d\Omega - \iint_{\Omega} v \Delta u \, d\Omega &= 0 \\ \iint_{\Omega} v \ddot{u} \, d\Omega - \iint_{\Omega} v (\nabla \cdot \nabla u) \, d\Omega &= 0 \\ \iint_{\Omega} v \ddot{u} \, d\Omega + \iint_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} (n \cdot \nabla u) v \, ds &= 0 \\ \iint_{\Omega} v \ddot{u} \, d\Omega + \iint_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, d\Omega &= \int_{\Gamma_N} \cancel{(n \cdot \nabla u)}^0 v \, ds + \int_{\Gamma_D} (n \cdot \nabla u) v \, ds \\ \iint_{\Omega} v \ddot{u} \, d\Omega + \iint_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, d\Omega &= \int_{\Gamma_D} (n \cdot \nabla u) \cancel{v}^0 \, ds \\ \iint_{\Omega} v \ddot{u} \, d\Omega + \iint_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, d\Omega &= 0 \end{aligned}$$

За да подсигурир последното съкращаване, ще е необходимо:

$$v \in V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma_D} = 0\}$$

За момента ще смятаме все едно Γ_U по Γ_D е хомогенно, а накрая ще вземем предвид, че не е. Така достигнахме до вариационната задача:

(V) За всяко $t \in J$ търсим $u \in V$, такава че:

$$\forall v \in V \left(\frac{d^2}{dt^2} \iint_{\Omega} vu \, d\Omega + a(u, v) = 0 \right)$$

$$a(u, v) = \iint_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, d\Omega$$

Билинейната форма за задачата ни е скалярно произведение и съответно може да приложим цялата теория. Задачата на Риц-Гальборкин е:

(R-G) За всяко $t \in J$ търсим $u_h \in V_h(\mathcal{K})$, такава че:

$$\forall v \in V_h(\mathcal{K}) \left(\frac{d^2}{dt^2} \iint_{\Omega} vu_h \, d\Omega + a(u_h, v) = 0 \right)$$

След стандартните разписвания имаме:

$$\frac{d^2}{dt^2} M^0 \mathbf{q} + M^1 \mathbf{q} = 0, \text{ т.е. } M^0 \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} + M^1 \mathbf{q} = 0$$

$$M^0 = \begin{pmatrix} \iint_{\Omega} \varphi_1 \varphi_1 \, d\Omega & \dots & \iint_{\Omega} \varphi_1 \varphi_n \, d\Omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \iint_{\Omega} \varphi_n \varphi_1 \, d\Omega & \dots & \iint_{\Omega} \varphi_n \varphi_n \, d\Omega \end{pmatrix}, \quad M^1 = \begin{pmatrix} \iint_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_1 \, d\Omega & \dots & \iint_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_n \, d\Omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \iint_{\Omega} \nabla \varphi_n \cdot \nabla \varphi_1 \, d\Omega & \dots & \iint_{\Omega} \nabla \varphi_n \cdot \nabla \varphi_n \, d\Omega \end{pmatrix}$$

M^0, M^1 са сметнати като по лекции. В кода се възползваме от факта, че при линейна интерполация градиента на функциите на формата $\nabla \Psi$ е константен. Тогава директно може да се пресметне интеграла за локалните матрици на коравина, който е лицето на стандартния триъгълник. Нормализираната система изглежда така:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} = -(M^0)^{-1} M^1 \mathbf{q} \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{p}(0) = 0 \end{cases}$$

M^0 е силно разрежена и ще приближим $(M^0)^{-1}$ с $(\bar{M}^0)^{-1}$, където с \bar{M}^0 сме означили концентрираната матрица, съответстваща на M^0 . За решаване с подобрения метод

на Ойлер, то:

$$(2) \quad \begin{cases} \mathbf{Q}_{j+1} - \mathbf{Q}_j = \frac{\tau}{2} (\mathbf{P}_{j+1} + \mathbf{P}_j) \\ \mathbf{P}_{j+1} - \mathbf{P}_j = -\frac{\tau}{2} (M^0)^{-1} M^1 (\mathbf{Q}_{j+1} + \mathbf{Q}_j) \\ \mathbf{Q}_0 = \mathbf{P}_0 = 0 \end{cases}$$

За да се освободим от неявните пресмятания, може да направим следното:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{j+1} &= \mathbf{Q}_j + \frac{\tau}{2} \left(2\mathbf{P}_j - \frac{\tau}{2} (M^0)^{-1} M^1 (\mathbf{Q}_{j+1} + \mathbf{Q}_j) \right) \\ \mathbf{Q}_{j+1} + \frac{\tau^2}{4} (M^0)^{-1} M^1 \mathbf{Q}_{j+1} &= \mathbf{Q}_j - \frac{\tau^2}{4} (M^0)^{-1} M^1 \mathbf{Q}_j + \frac{\tau}{2} 2\mathbf{P}_j \\ \left(I + \frac{\tau^2}{4} (M^0)^{-1} M^1 \right) \mathbf{Q}_{j+1} &= \left(I - \frac{\tau^2}{4} (M^0)^{-1} M^1 \right) \mathbf{Q}_j + \tau \mathbf{P}_j \\ \mathbf{Q}_{j+1} &= \left(I + \frac{\tau^2}{4} (M^0)^{-1} M^1 \right)^{-1} \left(I - \frac{\tau^2}{4} (M^0)^{-1} M^1 \right) \mathbf{Q}_j + \tau \left(I + \frac{\tau^2}{4} (M^0)^{-1} M^1 \right)^{-1} \mathbf{P}_j \\ \mathbf{Q}_{j+1} &= (I + A)^{-1} (I - A) \mathbf{Q}_j + \tau (I + A)^{-1} \mathbf{P}_j, \quad A = \frac{\tau^2}{4} (M^0)^{-1} M^1 \\ \mathbf{P}_{j+1} &= \mathbf{P}_j - \frac{\tau}{2} (M^0)^{-1} M^1 \left((I + A)^{-1} (I - A) \mathbf{Q}_j + \tau (I + A)^{-1} \mathbf{P}_j + \mathbf{Q}_j \right) \\ \mathbf{P}_{j+1} &= \mathbf{P}_j - \frac{2}{\tau} A \left((I + A)^{-1} (I - A) \mathbf{Q}_j + \tau (I + A)^{-1} \mathbf{P}_j + \mathbf{Q}_j \right) \\ \mathbf{P}_{j+1} &= \mathbf{P}_j - 2A (I + A)^{-1} \mathbf{P}_j - \frac{2}{\tau} A \left((I + A)^{-1} (I - A) + I \right) \mathbf{Q}_j \\ \mathbf{P}_{j+1} &= \left(I - 2A (I + A)^{-1} \right) \mathbf{P}_j - \frac{2}{\tau} A \left((I + A)^{-1} (I - A) + I \right) \mathbf{Q}_j \end{aligned}$$

Ако въведем означенията:

$$\begin{aligned} B &= I - A, \quad C = (I + A)^{-1}, \quad D = I - 2AC, \\ E &= CB, \quad F = -\frac{2}{\tau} A - \frac{2}{\tau} AE, \quad G = \tau C \end{aligned}$$

Получаваме директната рекурентна зависимост:

$$(3) \quad \begin{cases} \mathbf{Q}_{j+1} = E\mathbf{Q}_j + G\mathbf{P}_j \\ \mathbf{P}_{j+1} = F\mathbf{Q}_j + D\mathbf{P}_j \\ \mathbf{Q}_0 = \mathbf{P}_0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{S}_{j+1} = \left(\begin{array}{c|c} E & G \\ F & D \end{array} \right) \mathbf{S}_j \\ \mathbf{S}_0 = 0 \end{cases}, \quad \mathbf{S}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_j \\ \mathbf{P}_j \end{pmatrix}$$

Но през цялото време си затворихме очите, че условието на Дирихле не е хомогенно. Затова тук след всяка стъпка пресмятания, ще задаваме компонентите на \mathbf{Q}_{j+1} , съответстващи на възлите по границата Γ_D да са $0.1 \sin(8\pi t_{j+1})$. За намирането на C може отново да концентрираме $I + A$.