Решение на стационарна задача със самолетно крило

Калоян Стоилов

3 май 2022 г.

$$
\text{(D)} \qquad \begin{cases}
\frac{\partial N}{\partial t} - \Delta N - N(1 - \frac{N}{0.4}) + \frac{0.5NP}{0.5+N} = 0, \quad \text{в } \Omega \times J \\
\frac{\partial P}{\partial t} - \Delta P - \frac{0.5NP}{0.5+N} + 0.2P = 0, \quad \text{в } \Omega \times J \\
(n \cdot \nabla N) = (n \cdot \nabla P) = 0, \text{в } \partial\Omega \times J \\
N(x,y,0) = 0.3, \quad P(x,y,0) = 0.5, \text{в } [0.8,1]^2 \\
N(x,y,0) = P(x,y,0) = 0, \text{в } \partial\Omega \text{ при } t = 0
\end{cases}
$$

За да достигнем до вариационна формулировка, нека разгледаме за фиксиран момент $t \in J$ и умножим скаларно двете страни съответно по функции v и w. Ще приложим формулите за интегриране по части:

$$
\iint\limits_{\Omega} v\left(\frac{\partial N}{\partial t} - \Delta N - N(1 - \frac{N}{0.4}) + \frac{0.5NP}{0.5+N}\right) \mathrm{d}\Omega = 0
$$

$$
\iint\limits_{\Omega} v\frac{\partial N}{\partial t} \mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint\limits_{\Omega} vN \,\mathrm{d}\Omega
$$

$$
\iint\limits_{\Omega} v(-\Delta N) \,\mathrm{d}\Omega = \iint\limits_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla N \,\mathrm{d}\Omega - \int\limits_{\partial\Omega} v \cancelto{0}{(n \cdot \nabla N)} \mathrm{d}s
$$

$$
\iint\limits_{\Omega} w\left(\frac{\partial P}{\partial t} - \Delta P - \frac{0.5NP}{0.5+N} + 0.2P\right) \mathrm{d}\Omega = 0
$$

$$
\iint\limits_{\Omega} w\frac{\partial P}{\partial t} \mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint\limits_{\Omega} wP \,\mathrm{d}\Omega
$$

$$
\iint\limits_{\Omega} w(-\Delta P) \,\mathrm{d}\Omega = \iint\limits_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla P \,\mathrm{d}\Omega - \int\limits_{\partial\Omega} w \cancelto{0}{(n \cdot \nabla P)} \mathrm{d}s
$$

Имаме естествени гранични условия, откъдето няма условия над тестовите функции:

$$v, w \in H^1(\Omega)$$

Така достигнахме до вариационната задача:

(V) За всяко $t \in J$ търсим $N, P \in H^1(\Omega)$, такива че:

$$\forall v \in H^1(\Omega) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint\limits_{\Omega} vN \,\mathrm{d}\Omega - \iint\limits_{\Omega} vN \,\mathrm{d}\Omega + a(N, v) + b(N, v) + c(N, P, v) = 0 \right)$$

$$\forall w \in H^1(\Omega) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint\limits_{\Omega} wP \,\mathrm{d}\Omega + 0.2 \iint\limits_{\Omega} wP \,\mathrm{d}\Omega + a(P, w) - c(N, P, w) = 0 \right)$$

$$a(u, v) = \iint\limits_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \,\mathrm{d}\Omega, \quad b(N, v) = \iint\limits_{\Omega} v \frac{N^2}{0.4} \,\mathrm{d}\Omega, \quad c(N, P, v) = \iint\limits_{\Omega} v \frac{0.5NP}{0.5 + N} \,\mathrm{d}\Omega$$

Задачата на Риц-Гальоркин е:

(R-G)

За всяко $t \in J$ търсим $N_h, P_h \in H_h^1(\mathscr{K})$, такава че:

$$\forall v \in H_h^1(\mathscr{K} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint\limits_{\Omega} vN_h \,\mathrm{d}\Omega - \iint\limits_{\Omega} vN_h \,\mathrm{d}\Omega + a(N_h, v) + b(N_h, v) + c(N_h, P_h, v) = 0 \right)$$

$$\forall w \in H_h^1(\mathscr{K}) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint\limits_{\Omega} wP_h \,\mathrm{d}\Omega + 0.2 \iint\limits_{\Omega} wP_h \,\mathrm{d}\Omega + a(P_h, w) - c(N_h, P_h, w) = 0 \right)$$

Тук $\mathscr{K}$ е триангулацията. Както обикновено, нека базисните функции бележим φ_i. Тъй като тестовите функции са от едно пространство, то може да работим с един набор от базисни функции. Така съответно и матрици на маса/коравина ще бъдат същите и може да се преизползват.

Нека с $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ бележим съответно векторите от приближените стойности на N и P

във възлите в момент t. След стандартните разписвания имаме:

$$\begin{cases} M^0\dot{\mathbf{q}} - M^0\mathbf{q} + M^1\mathbf{q} + \mathbf{b}(\mathbf{q}) + \mathbf{c}(\mathbf{q},\mathbf{p}) = 0 \\ M^0\dot{\mathbf{p}} + 0.2M^0\mathbf{p} + M^1\mathbf{p} - \mathbf{c}(\mathbf{q},\mathbf{p}) = 0 \end{cases}$$

$$M^0 = \begin{pmatrix} \iint\limits_{\Omega} \varphi_1\varphi_1 \,\mathrm{d}\Omega & \dots & \iint\limits_{\Omega} \varphi_1\varphi_n \,\mathrm{d}\Omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \iint\limits_{\Omega} \varphi_n\varphi_1 \,\mathrm{d}\Omega & \dots & \iint\limits_{\Omega} \varphi_n\varphi_n \,\mathrm{d}\Omega \end{pmatrix}, M^1 = \begin{pmatrix} \iint\limits_{\Omega} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_1 \,\mathrm{d}\Omega & \dots & \iint\limits_{\Omega} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_n \,\mathrm{d}\Omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \iint\limits_{\Omega} \nabla\varphi_n \cdot \nabla\varphi_1 \,\mathrm{d}\Omega & \dots & \iint\limits_{\Omega} \nabla\varphi_n \cdot \nabla\varphi_n \,\mathrm{d}\Omega \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{q}) = 2.5 \iint\limits_{\Omega} \varphi(\varphi\cdot\mathbf{q})^2 \,\mathrm{d}\Omega, \quad \mathbf{c}(\mathbf{q},\mathbf{p}) = 0.5 \iint\limits_{\Omega} \varphi \frac{(\varphi\cdot\mathbf{q})(\varphi\cdot\mathbf{p})}{0.5+\varphi\cdot\mathbf{q}} \,\mathrm{d}\Omega$$

M^0, M^1 могат да се сметнат като по лекции.

За $\mathbf{b}$ може да забележим следното:

$$b_i(\mathbf{q}) = 2.5 \iint\limits_{\Omega} \varphi(\varphi\cdot\mathbf{q})^2 \,\mathrm{d}\Omega = \sum_{\tau\subset \operatorname{supp}\varphi_i} 2.5 \iint\limits_{\tau} \varphi_i(\varphi\cdot\mathbf{q})^2 \,\mathrm{d}\tau =$$
$$2.5 \sum_{\tau\subset \operatorname{supp}\varphi_i} \sum_{j,k} q_j q_k \iint\limits_{\tau} \varphi_i\varphi_j\varphi_k \,\mathrm{d}\tau$$

Където последната сума е по индексите j,k на базисните функции за елемента τ. Вътрешният интеграл може да се сведе до интеграл по референтната област с фунцкиите на формата. Може да пресметнем (приближили) съответните интеграли и да ги запазим в един кубичен масив с размер по всеки индекс броя на функции на формата. Така при обхождане на всеки елемент може да добавяме съответните суми по различните индекси на $\mathbf{b}$. За $\mathbf{c}$ може да повторим само първата стъпка изцяло. За втората стъпка може да получим само "по-добре"разписана двойна сума, т.к. в знаменателя ще получим сума, зависеща от $\mathbf{q}$ и няма да използваме вече изчислени интеграли по фунцкии на формата.

Нека сега групираме $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$ в общ вектор $\mathbf{s}$. Да означим:

$$\tilde{M^0} = \left(\begin{array}{c|c} M^0 & O \\ \hline O & M^0 \end{array}\right), \quad \tilde{M^1} = \left(\begin{array}{c|c} M^1 & O \\ \hline O & M^1 \end{array}\right), \quad R = \left(\begin{array}{c|c} -M^0 & O \\ \hline O & 0.2M^0 \end{array}\right),$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}) = \left(\begin{array}{c} \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{s}) \\ \hline \mathbf{c}(\mathbf{s}) \end{array}\right), \quad \tilde{\mathbf{b}}(s_1,\dots,s_n,s_{n+1},\dots,s_{2n}) = \mathbf{b}(s_1,\dots,s_n)$$

Достигаме до следната система ОДУ от първи ред:

$$\tilde{M^0}\dot{\mathbf{s}} = -R\mathbf{s} - \tilde{M^1}\mathbf{s} - \mathbf{f}(\mathbf{s})$$

Дискретизираме по времето и използваме неявен метод на Ойлер. Тогава трябва да решим системата:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{M}^0(\mathbf{S}_{j+1} - \mathbf{S}_j) = -R\mathbf{S}_{j+1} - \tilde{M}^1\mathbf{S}_{j+1} - \mathbf{f}(\mathbf{S}_{j+1}) \\
&(\tilde{M}^0 + \tilde{M}^1 + R)\mathbf{S}_{j+1} + \mathbf{f}(\mathbf{S}_{j+1}) - \tilde{M}^0\mathbf{S}_j = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$