Решение на стационарна задача със самолетно крило

Калоян Стоилов

19 януари 2022 г.

$$
\text{(D)} \qquad \begin{cases} \ddot{u} - \Delta u = 0, \quad \text{в } \Omega \times J \\ n \cdot \nabla u \,|_{\Gamma_N \times J} = 0 \\ u \,|_{\Gamma_D \times J} = 0.1 \sin(8\pi t) \\ u = \dot{u} = 0, \text{в } \Omega \text{ при } t = 0 \end{cases}
$$

За да достигнем до вариационна формулировка, нека разгледаме за фиксиран момент $t \in J$ и умножим скаларно двете страни по функция v и приложим формула за интегриране по части:

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{\Omega} v\ddot{u} \,\mathrm{d}\Omega - \iint\limits_{\Omega} v\Delta u \,\mathrm{d}\Omega &= 0 \\
\iint\limits_{\Omega} v\ddot{u} \,\mathrm{d}\Omega - \iint\limits_{\Omega} v\left(\nabla \cdot \nabla u\right) \mathrm{d}\Omega &= 0 \\
\iint\limits_{\Omega} v\ddot{u} \,\mathrm{d}\Omega + \iint\limits_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \,\mathrm{d}\Omega - \int\limits_{\partial\Omega} (n \cdot \nabla u)\, v \,\mathrm{d}s &= 0 \\
\iint\limits_{\Omega} v\ddot{u} \,\mathrm{d}\Omega + \iint\limits_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \,\mathrm{d}\Omega &= \int\limits_{\Gamma_N} \cancelto{0}{(n \cdot \nabla u)}\, v \,\mathrm{d}s + \int\limits_{\Gamma_D} (n \cdot \nabla u)\, v \,\mathrm{d}s \\
\iint\limits_{\Omega} v\ddot{u} \,\mathrm{d}\Omega + \iint\limits_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \,\mathrm{d}\Omega &= \int\limits_{\Gamma_D} (n \cdot \nabla u)\, \cancelto{0}{v} \,\mathrm{d}s \\
\iint\limits_{\Omega} v\ddot{u} \,\mathrm{d}\Omega + \iint\limits_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \,\mathrm{d}\Omega &= 0
\end{aligned}
$$

За да подсигурим последното съкращаване, ще е необходимо:

$$
v \in V = \{ v \in H^1(\Omega) \;\mid\; v \,|_{\Gamma_D} = 0 \}
$$

Така достигнахме до вариационната задача:

(V) За всяко $t \in J$ търсим $u \in V$, такава че:

$$\forall v \in V \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \iint\limits_{\Omega} vu \,\mathrm{d}\Omega + a(u,v) = 0 \right)$$

$$a(u,v) = \iint\limits_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \,\mathrm{d}\Omega$$

Билинейната форма за задачата ни е скаларно произведение и съответно може да приложим цялата теория. Задачата на Риц-Гальоркин е:

(R-G) За всяко $t \in J$ търсим $u_h \in V_h(\mathscr{K})$, такава че:

$$\forall v \in V_h(\mathscr{K}) \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \iint\limits_{\Omega} vu_h \,\mathrm{d}\Omega + a(u_h,v) = 0 \right)$$

След стандартните разписвания имаме:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} M^0 \mathbf{q} + M^1 \mathbf{q} = 0$$

$$M^0 \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{q}}{\mathrm{d}t^2} + M^1 \mathbf{q} = 0$$

$$M^0 = \begin{pmatrix} \iint\limits_{\Omega} \varphi_1 \varphi_1 \,\mathrm{d}\Omega & \dots & \iint\limits_{\Omega} \varphi_1 \varphi_n \,\mathrm{d}\Omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \iint\limits_{\Omega} \varphi_n \varphi_1 \,\mathrm{d}\Omega & \dots & \iint\limits_{\Omega} \varphi_n \varphi_n \end{pmatrix}, \quad M^1 = \begin{pmatrix} \iint\limits_{\Omega} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_1 \,\mathrm{d}\Omega & \dots & \iint\limits_{\Omega} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_n \,\mathrm{d}\Omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \iint\limits_{\Omega} \nabla\varphi_n \cdot \nabla\varphi_1 \,\mathrm{d}\Omega & \dots & \iint\limits_{\Omega} \nabla\varphi_n \cdot \nabla\varphi_n \end{pmatrix}$$

M^0, M^1 са сметнати като по лекции. В кода се възползваме от факта, че при линейна интерполация градиента на фунцкиите на формата $\boldsymbol{\nabla\Psi}$ е константен. Тогава директно може да се пресметне интеграла за локалните матрици на коравина, който е лицето на стандартния триъгълник. Нормализираната система изглежда така:

(D)
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} = -(M^0)^{-1} M^1 \mathbf{q} \end{cases}$$