

# Изследване на ефектите на човешката мобилност в малариен модел с две местообитания и употреба на репелент срещу комари

изготвил: Калоян Стоилов  
ръководител: Петър Рашков

Софийски университет  
"Свети Климент Охридски"



Факултет по математика и информатика

9 юли 2025 г.

# Съдържание

- 1 Въведение
- 2 Модел
- 3 Свойства на модела
- 4 Задача за здравна политика
- 5 Числени симулации

# Термини от епидемиологията

- Патоген е причинител на зараза (напр. вирус, бактерия, прион).
- Вектор е носител на патоген, който може да зарази други индивиди.
- S (Susceptible - Податливи) - податливи са тези, които не носят патогена и могат да бъдат заразени с него
- I (Infected - Заразени) - заразени са носители на патогена
- Заболяване има ендемичен характер, когато има (приблизително) константен ненулев брой заразени.

# Малария

Симптоми са периодичен пароксизъм(продължителни спазми, потене, треска), умора, главоболие, хепатомегалия (разрастнал се черен дроб), белодробен оток, анемия (намалено количество еритроцити), мозъчек оток, смърт.

Патогенът е един 4 вида от рода *Plasmodium* маларийни плазмодии, които са едноклетъчни еукариоти, т.е. едноклетъчни с ядро.

Интензивността на симптомите зависи от вида плазмодий.

В края на XIX век Ross доказва, че вектора на маларията са комарите от род *Anopheles*. В началото на XX век моделира маларията с две диференциални уравнения, като модела му е основа за моделирането на векторнопредавани заболявания и до днес.

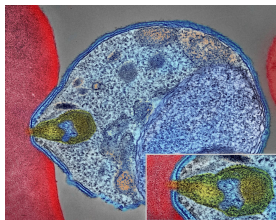
# Разпространение на маларията

Хората могат да оздравеят, като организмът им се прочисти от плазмодиите. Не развиват траен имунитет, но обикновено повторни заболявания се претърпяват по-лесно.

Комарите са насекоми и нямат имунна система, така че не могат да се предпазват от паразити.

Затова в моделите на Ross динамиката се описва чрез прехода между класове:

- $S \rightarrow I \rightarrow S$  (SIS) при хората
- $S \rightarrow I$  (SI) при комарите



Фигура 1: Оцветена снимка от електронен микроскоп на плазмодий нападащ еритроцит

# Допускания

- ❶ Човешката популация и популацията комари е постоянна, като са разпределени равномерно в местообитанията.
- ❷ Смъртността от заразата се пренебрегва, както при хората, така и при комарите.
- ❸ Веднъж заразени, комарите не се възстановяват.
- ❹ Само податливи се заразяват (няма свръхзаразяване).
- ❺ Хората не придобиват никакъв имунитет.
- ❻ Смъртността на комарите е независима от възрастта им и съответно продължителността им на живот е експоненциално разпределена.
- ❼ Разглежда се само предаването на патогена между хора и комари.
- ❽ Латентният период при комарите е константен.
- ❾ Мобилността на хората между местообитанията е константна.
- ❿ Репелентът има линеен ефект върху честотата на ухапванията върху предпазените с него и не увеличава тази върху непредпазените.

# Означения

Променлива	Описание
$t$	Време [ден]
$X_i$	Брой заразени жители
$Y_i$	Брой заразени комари
$u_i$	Пропорция защитени с репелент жители
Параметър	Описание
$\beta_{vh}$	Вероятност на прехвърляне на патогена от комар на човек
$\beta_{hv}$	Вероятност на прехвърляне на патогена от човек на комар
$a_i$	Честота на ухапвания [ден <sup>-1</sup> ]
$M_i$	Популация на женски комари
$\mu_i$	Смъртност на комари [ден <sup>-1</sup> ]
$\tau$	Инкубационен период при комарите [ден]
$N_i$	Човешка популация (население)
$\gamma_i$	Скорост на оздравяване на хора [ден <sup>-1</sup> ]
$p_{ij}$	Мобилност на хора от местообитание $i$ в $j$
$\kappa$	Ефективност на репелент
$\bar{u}_i$	Максимална възможна предпазена част жители с репелент
$\bar{l}_i$	Максимална част на заразени хора

Таблица 1: Таблица с променливи и параметри

# Първа форма на модела

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= \beta_{vh}(N_1 - X_1)(1 - \kappa u_1) \left( \frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau} a_1 Y_1}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} + \frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau} a_2 Y_2}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} \right) - \gamma_1 X_1 \\ \dot{X}_2 &= \beta_{vh}(N_2 - X_2)(1 - \kappa u_2) \left( \frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau} a_1 Y_1}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} + \frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau} a_2 Y_2}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} \right) - \gamma_2 X_2 \\ \dot{Y}_1 &= \beta_{hv} a_1 (M_1 - Y_1) \frac{p_{11}(1 - \kappa u_1)X_1 + p_{21}(1 - \kappa u_2)X_2}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} - \mu_1 Y_1 \\ \dot{Y}_2 &= \beta_{hv} a_2 (M_2 - Y_2) \frac{p_{12}(1 - \kappa u_1)X_1 + p_{22}(1 - \kappa u_2)X_2}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} - \mu_2 Y_2 \\ u_i &\in \mathcal{U}_i = \{u_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, \bar{u}_i] | u_i\text{-измерима}\}\end{aligned}\tag{1}$$

Моделът е развитие на тези на Bichara [11] (мобилност) и Rashkov [25] (репелент).



# Скалирана форма на модела

Моделът подлежи на скалиране на променливите чрез смяната  $(X_1, X_2, Y_1, Y_2) \rightarrow (\frac{X_1}{N_1}, \frac{X_2}{N_2}, \frac{Y_1}{M_1}, \frac{Y_2}{M_2}) = (x_1, x_2, y_1, y_2)$  и след полагания на коефициентите има вида:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (1 - x_1)(1 - \kappa u_1) (b_{11}y_1 + b_{12}y_2) - \gamma_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= (1 - x_2)(1 - \kappa u_2) (b_{21}y_1 + b_{22}y_2) - \gamma_2 x_2 \\ \dot{y}_1 &= (1 - y_1) (c_{11}(1 - \kappa u_1)x_1 + c_{12}(1 - \kappa u_2)x_2) - \mu_1 y_1 \\ \dot{y}_2 &= (1 - y_2) (c_{21}(1 - \kappa u_1)x_1 + c_{22}(1 - \kappa u_2)x_2) - \mu_2 y_2\end{aligned}\tag{2}$$

Надолу (2) ще се записва и във векторен вид по следния начин:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2)^T, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2)^T, \quad \mathbf{f} = (f_{x_1}, f_{x_2}, f_{y_1}, f_{y_2})^T\tag{3}$$

Или пък във вида:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})^T, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 = (x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)^T\tag{4}$$

## Допълнителни означения

Задачата се разглежда в  $\Omega = \{x_i \in [0, 1], y_i \in [0, 1]\} = \{z \in [0, 1]^4\}$ .

Означаваме  $U = [0, \bar{u}_1] \times [0, \bar{u}_2]$ ,  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ .

Нека  $\bar{l}_i \in [0, 1]$  - максималната част от населението в съответното местообитание, което може да получи адекватна здравна помощ при заразяване с малария.

Означаваме  $\bar{l} = (\bar{l}_1, \bar{l}_2)^T$   $\mathcal{J} = [0, \bar{l}_1] \times [0, \bar{l}_2] \times [0, 1] \times [0, 1]$ .

## Твърдение

*Съществува единствено решение на (2).*

Доказва се с Липшицовост на  $\mathbf{f}$  по  $\mathbf{z}$ . Сметката се основава на свойства на нормата (хомогенност и неравенство на триъгълника) и е дълга, затова тук се пропуска.

## Твърдение

*$\Omega$  е положително инвариантно за (2).*

Доказва се с теоремата на Nagumo, че  $\mathbf{f}|_{\partial\Omega}$  е насочен към  $\Omega$ .

$$\begin{aligned} f_{x_1}|_{\Omega \cap \{x_1=0\}} &= (1 - \kappa u_1)(b_{11}y_1 + b_{12}y_2) \geq 0, & f_{x_1}|_{\Omega \cap \{x_1=1\}} &= -\gamma_1 < 0 \\ f_{x_2}|_{\Omega \cap \{x_2=0\}} &= (1 - \kappa u_2)(b_{21}y_1 + b_{22}y_2) \geq 0, & f_{x_2}|_{\Omega \cap \{x_2=1\}} &= -\gamma_2 < 0 \\ f_{y_1}|_{\Omega \cap \{y_1=0\}} &= c_{11}(1 - \kappa u_1)x_1 + c_{12}(1 - \kappa u_2)x_2 \geq 0 & f_{y_1}|_{\Omega \cap \{y_1=1\}} &= -\mu_1 < 0 \\ f_{y_2}|_{\Omega \cap \{y_2=0\}} &= c_{21}(1 - \kappa u_1)x_1 + c_{22}(1 - \kappa u_2)x_2 \geq 0 & f_{y_2}|_{\Omega \cap \{y_2=1\}} &= -\mu_2 < 0 \end{aligned}$$

# Свойства на модела

## Твърдение

*Системата (2) е кооперативна, т.е. Якобианът ѝ има неотрицателни компоненти извън главния диагонал.*

## Твърдение

*Системата (2) е силно вдлъбната, т.е. за Якобианът  $Df$  е в сила  $0 < z_1 < z_2 \implies Df(z_2) < Df(z_1)$ .*

## Твърдение

*Системата (2) е неразложима, т.е. ненулевите компоненти на Якобиана образуват матрица на съседство на силно свързан ориентиран граф.*

## Якобиан на (2)

Якобианът за системата (2) може да се представи във вида:

$$D\mathbf{f}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{x_1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{x_1}}{\partial x_2} & \frac{\partial f_{x_1}}{\partial y_1} & \frac{\partial f_{x_1}}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_{x_2}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{x_2}}{\partial x_2} & \frac{\partial f_{x_2}}{\partial y_1} & \frac{\partial f_{x_2}}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_{y_1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial x_2} & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial y_1} & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_{y_2}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{y_2}}{\partial x_2} & \frac{\partial f_{y_2}}{\partial y_1} & \frac{\partial f_{y_2}}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f_{x_1}}{\partial x_1} = -(1 - \kappa u_1)(b_{11}y_1 + b_{12}y_2) - \gamma_1 < 0, \quad \frac{\partial f_{x_1}}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_{x_1}}{\partial y_1} = (1 - x_1)(1 - \kappa u_1)b_{11} \geq 0, \quad \frac{\partial f_{x_1}}{\partial y_2} = (1 - x_1)(1 - \kappa u_1)b_{12} \geq 0$$

$\vdots$

## Твърдение

*За система (2) при фиксирано  $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{u} = \text{const}$  е в сила точно едно от:*

- ❶  *$\mathbf{0}$  е единствена равновесна точка (глобално асимптотично устойчива).*
- ❷  *$\mathbf{0}$  е неустойчива равновесна точка и съществува точно една друга равновесна точка  $\mathbf{E}^* = (x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*)$  (глобално асимптотично устойчива).*

Твърдението се доказва с помощта на изведените свойства на (2).

# Задача за здравна политика

Питаме се има ли такива управления  $\mathbf{u}$ , за които във всеки момент всички заразени да имат възможност да получат помощ от здравната система, т.е. :

$$\forall t \geq 0 (x_1(t) \leq \bar{l}_1 \wedge x_2(t) \leq \bar{l}_2) \iff \forall t \geq 0 (\mathbf{x}(t) \in \mathcal{J}) \quad (5)$$

Тъй като първоначалният брой заразени хора и комари влияят на развитието на системата ще търсим **ядрото на слаба инвариантност на Белман**:

$$V(\bar{\mathbf{l}}, \bar{\mathbf{u}}) = \{\mathbf{z}_0 \text{ начално условие} | \exists \mathbf{u}((2) \text{ има решение} \wedge (5) \text{ е изпълнено})\} \quad (6)$$

$\mathbf{0}$  е равновесна за (2) - за нея винаги е изпълнено (5), т.е.  $\mathbf{0} \in V(\bar{\mathbf{l}}, \bar{\mathbf{u}})$ .

Ако  $\mathbf{z}_0 \notin \mathcal{J}$ , то (5) не е изпълнено и съответно  $\mathbf{z}_0 \notin V(\bar{\mathbf{l}}, \bar{\mathbf{u}})$ , т.е.

$$V(\bar{\mathbf{l}}, \bar{\mathbf{u}}) \subseteq \mathcal{J}.$$

# Тривиални случаи за $V(\bar{l}, \bar{u})$

## Твърдение

Ако съществува  $\mathbf{E}^* = (x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*)^T$  за  $\mathbf{u}(t) \equiv \bar{\mathbf{u}}$ , като  $x_1^* > \bar{l}_1$  или  $x_2^* > \bar{l}_2$ , то ядрото на слаба инвариантност на Белман е тривиалното, т.е.  $V(\bar{l}, \bar{u}) = \{0\}$ .

Доказва се с кооперативността и непрекъснатостта на решението на (2).

## Твърдение

Ако (5) е изпълнено за решението на система (2) с  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$  и начално условие  $\mathbf{z}_0 = (\xi_1, \xi_2, 1, 1)^T$ , то  $\Xi = [0, \xi_1] \times [0, \xi_2] \times [0, 1]^2 \subseteq V(\bar{l}, \bar{u})$ .  
Ако е изпълнено за  $\xi_i = \bar{l}_i$ , то ядрото на слаба инвариантност на Белман е максималното, т.е.  $V(\bar{l}, \bar{u}) = \mathcal{I}$ .

Доказва се с кооперативността на (2).



# Преформулировка на (6) като вариационна задача

Дефинираме значна функция на разстоянието  $\Gamma$  до  $\partial\mathcal{J}$ :

$$\Gamma(\mathbf{z}) = \begin{cases} \inf_{\mathbf{z}' \in \mathcal{J}} |\mathbf{z} - \mathbf{z}'|, & \mathbf{z} \in \Omega \setminus \mathcal{J} \\ -\inf_{\mathbf{z}' \in \Omega \setminus \mathcal{J}} |\mathbf{z} - \mathbf{z}'|, & \mathbf{z} \in \mathcal{J} \end{cases} \quad (7)$$

Фиксираме  $\lambda > L > 0$  ( $L$  - константата на Липшиц за (2)) и въвеждаме функция на Белман  $v$ :

$$v(\mathbf{z}_0) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \sup_{t \in (0, +\infty)} e^{-\lambda t} \Gamma(\mathbf{z}(t; \mathbf{z}_0; u)) \quad (8)$$

Ако започнем с  $\mathbf{z}_0 \notin V(\bar{\mathbf{l}}, \bar{\mathbf{u}})$ , то  $v(\mathbf{z}_0) > 0$  и обратното.

Ако започнем с  $\mathbf{z}_0 \in V(\bar{\mathbf{l}}, \bar{\mathbf{u}})$ , то  $v(\mathbf{z}_0) \leq 0$  и обратното.

$$V(\bar{\mathbf{l}}, \bar{\mathbf{u}}) = \{\mathbf{z}_0 \in \Omega | v(\mathbf{z}_0) \leq 0\}, \quad \partial V(\bar{\mathbf{l}}, \bar{\mathbf{u}}) = \{\mathbf{z}_0 \in \Omega | v(\mathbf{z}_0) = 0\}$$

# Уравнение на Хамилтон-Якоби-Белман

В сила е принцип за динамично програмиране:

$$v(z_0) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \max \{ e^{-\lambda t} v(z_0), \sup_{s \in (0, t]} e^{-\lambda t} \Gamma(z(s; z_0; u)) \} \quad (9)$$

Може да се покаже, че  $v$  е вискозното решение на **уравнението на Хамилтон-Якоби-Белман**:

$$\begin{aligned} \min \{ \lambda v(z) + \mathcal{H}(z, \nabla v), v(z) - \Gamma(z) \} &= 0, \quad z \in \mathbb{R}^4 \\ \mathcal{H}(z, w) &= \max_{u \in U} \langle -f(z, u), w \rangle \end{aligned} \quad (10)$$

$$\mathcal{H}(z, \nabla v) =$$

$$\begin{aligned} & [\gamma_1 x_1 - (1 - x_1) (b_{11} y_1 + b_{12} y_2)] \frac{\partial v}{\partial x_1} + [\gamma_2 x_2 - (1 - x_2) (b_{21} y_1 + b_{22} y_2)] \frac{\partial v}{\partial x_2} \\ & + [\mu_1 y_1 - (1 - y_1) (c_{11} x_1 + c_{12} x_2)] \frac{\partial v}{\partial y_1} + [\mu_2 y_2 - (1 - y_2) (c_{21} x_1 + c_{22} x_2)] \frac{\partial v}{\partial y_2} \\ & \max \left\{ 0, \kappa \bar{u}_1 (1 - x_1) (b_{11} y_1 + b_{12} y_2) \frac{\partial v}{\partial x_1} + c_{11} \kappa \bar{u}_1 x_1 (1 - y_1) \frac{\partial v}{\partial y_1} + c_{21} \bar{u}_1 x_1 (1 - y_2) \frac{\partial v}{\partial y_2} \right\} + \\ & \max \left\{ 0, \kappa \bar{u}_2 (1 - x_2) (b_{21} y_1 + b_{22} y_2) \frac{\partial v}{\partial x_2} + c_{12} \bar{u}_2 x_2 (1 - y_1) \frac{\partial v}{\partial y_1} + c_{22} \bar{u}_2 x_2 (1 - y_2) \frac{\partial v}{\partial y_2} \right\} \end{aligned}$$

# Числено решение на уравнението на Х-Я-Б

Диференциалното уравнение се разглежда като стационарно решение на диференциална задача с добавено числено време само в околност на  $\mathcal{J}$ . Началното условие взимаме  $v_0 = \Gamma$ .

Чрез WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) метода се получават по-точни приближения за разлика напред и назад  $v_{\eta}^{\pm}$  на производните  $\frac{\partial v}{\partial \eta}$ ,  $\eta = x_1, x_2, y_1, y_2$ .

Численият Хамилтонян от вида Lax-Friedrichs  $\hat{\mathcal{H}}$  е:

$$\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \left( \mathbf{z}, \frac{v_{x_1}^+ + v_{x_1}^-}{2}, \frac{v_{x_2}^+ + v_{x_2}^-}{2}, \frac{v_{y_1}^+ + v_{y_1}^-}{2}, \frac{v_{y_2}^+ + v_{y_2}^-}{2} \right) - \sum_{\eta=x_1, x_2, y_1, y_2} \alpha^{\eta} \frac{v_{\eta}^+ - v_{\eta}^-}{2} \quad (12)$$

Множителите  $\alpha^{\eta}$  са от вида:

$$\begin{aligned} \alpha^{x_1} &= \max \left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w_1}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \right|, \quad \alpha^{x_2} = \max \left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w_2}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \right|, \\ \alpha^{y_1} &= \max \left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w_3}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \right|, \quad \alpha^{y_2} = \max \left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w_4}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \right| \end{aligned} \quad (13)$$

## Числено решение на уравнението на Х-Я-Б

Използваната дискретизацията по пространството е равномерна със стъпки  $h_\eta$ ,  $\eta = x_1, x_2, y_1, y_2$ .

Използваната дискретизация по времето е равномерна със стъпка  $\tau$  и по него се апроксимира с подобрения метод на Ойлер.

За да може методът да е TVD трябва да е изпълнено условието на Courant-Friedrichs-Lewy:

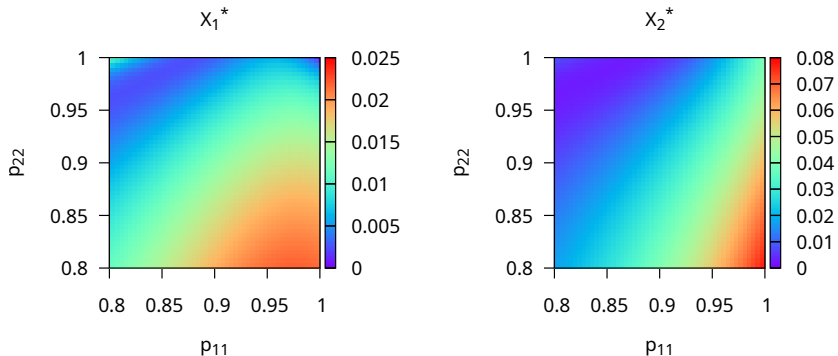
$$\tau \max \left( \frac{\left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w_1} \right|}{h_{x_1}} + \frac{\left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w_2} \right|}{h_{x_2}} + \frac{\left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w_3} \right|}{h_{y_1}} + \frac{\left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w_4} \right|}{h_{y_2}} \right) < 1 \quad (14)$$

# Стойности на параметри

Параметър	Набор 1		Набор 2		Набор 3	
	М. 1	М. 2	М. 1	М. 2	М. 1	М. 2
$\beta_{vh}$		0.5		0.5		0.5
$\beta_{hv}$		0.1		0.1		0.1
$a_i$	0.12	0.18	0.158	0.159	0.15	0.24
$M_i$	$6 \times 10^7$	$1.6 \times 10^8$	7320950	4695340	7320950	4695340
$\mu_i$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{15}$	0.032	0.046	0.0397	0.0335
$\tau$		10		10		10
$N_i$	$8 \times 10^6$	$2 \times 10^7$	9377980	4467650	755440	3945290
$\gamma_i$		$\frac{1}{14}$	0.0627	0.0576	0.0735	0.0622
$\rho_{ij}$			различни ( $p_{i1} + p_{i2} = 1$ )			
$\kappa$		0.44		0.37		0.38
$\bar{u}_i$	0.15	0.3	0.39	0.12	0.35	0.3
$\bar{l}_i$	0.1	0.14	0.065	0.12	0.09	0.09

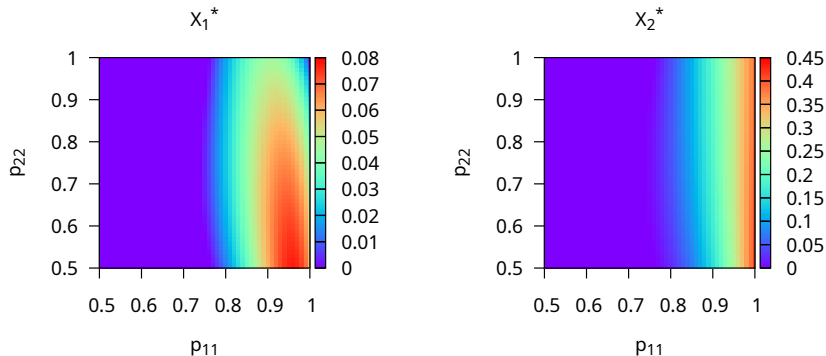
Таблица 2: Таблица със стойностите на параметрите от таблица 1 за числени симулации

# Числени симулации на равновесните точки



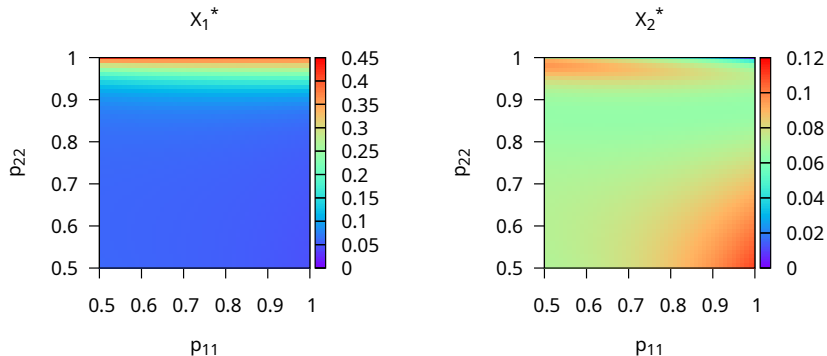
Фигура 2: Равновесните точки на (2)  
с параметрите от набор 1 от таблица 2

# Числени симулации на равновесните точки



Фигура 3: Равновесните точки на (2)  
с параметрите от набор 2 от таблица 2

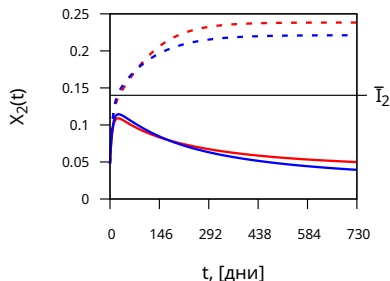
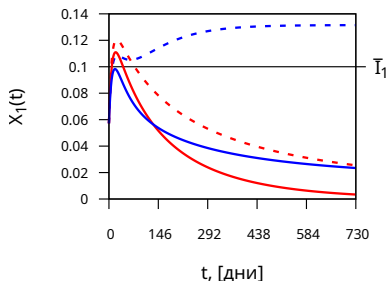
# Числени симулации на равновесните точки



Фигура 4: Равновесните точки на (2)  
с параметрите от набор 3 от таблица 2



# Числени симулации на решението

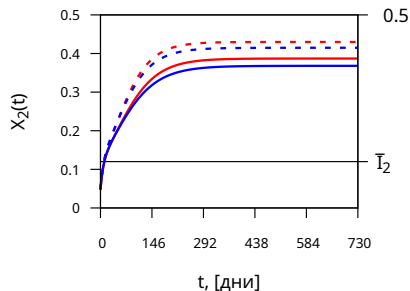
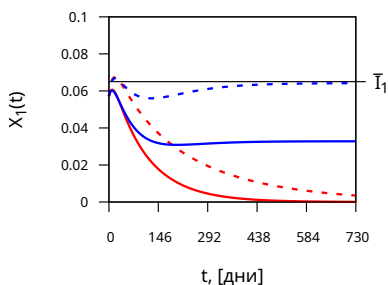


Фигура 5: Решението на (2) с параметрите от набор 1 таблица 2 и  $z_0 = (0.0572, 0.048, 0.052, 0.044)^T$ .

Пунктирано: без употреба на репелент ( $u(t) \equiv 0$ ), плътно: максимална употреба на репелент ( $u(t) \equiv \bar{u}$ ).

Червено: без мобилност ( $p_{11} = p_{22} = 1$ ), синьо: с мобилност ( $p_{11} = p_{22} = 0.85$ )

# Числени симулации на решението

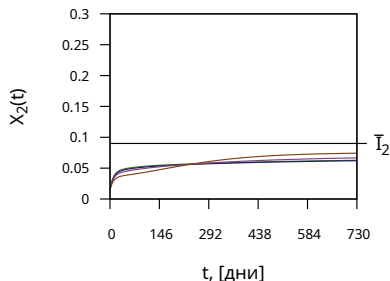
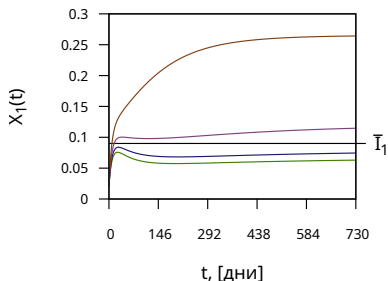


Фигура 6: Решението на (2) с параметрите от набор 2 от таблица 2 и  $z_0 = (0.0572, 0.048, 0.052, 0.044)^T$ .

Пунктирано: без употреба на репелент ( $u(t) \equiv 0$ ), плътно: максимална употреба на репелент ( $u(t) \equiv \bar{u}$ ).

Червено: без мобилност ( $p_{11} = p_{22} = 1$ ), синьо: с мобилност ( $p_{11} = 0.99, p_{22} = 0.9$ ).

# Числени симулации на решението



Фигура 7: Решението на (2) с параметрите от набор 3 от таблица 2 и  $z_0 = (0.02, 0.015, 0.04, 0.03)^T$ , максимална употреба на репелент ( $u(t) \equiv \bar{u}$ ). За четирите криви е фиксирано  $p_{11} = 0.93$ , а  $p_{22}$  е различно.

Зелено: много висока мобилност ( $p_{22} = 0.85$ ), синьо: висока мобилност ( $p_{22} = 0.88$ ), лилаво: средна мобилност ( $p_{22} = 0.92$ ), кафяво: ниска мобилност ( $p_{22} = 0.97$ ).

# Числено приближение на $V(\bar{l}, \bar{u})$

$p_{11} \backslash p_{22}$	0.8	0.85	0.9	0.95
0.95	3.427	3.447	3.467	3.486
0.9	3.468	3.487	3.507	3.527
0.85	3.498	3.517	3.536	3.554
0.8	3.519	3.540	3.559	3.580

Таблица 3: 4-мерната мярка на ядрото на слаба инвариантност на Белман  $V(\bar{l}, \bar{u})$  за различни стойности на мобилността с параметрите от набор 1 от таблица 2. Стойността при случая без мобилност е взета за референтна.

- [1] WHO Executive Board 141. “Eradication of malaria: report by the Secretariat”. In: *World Health Organization* (2017). URL: <https://iris.who.int/handle/10665/273662>.
- [2] Folashade Agosto et al. “How Do Interventions Impact Malaria Dynamics Between Neighboring Countries? A Case Study with Botswana and Zimbabwe”. In: *Using Mathematics to Understand Biological Complexity: From Cells to Populations*. Springer, 2021. ISBN: 978-3-030-57129-0. DOI: 10.1007/978-3-030-57129-0\_5.
- [3] Charalambos D. Aliprantis and Kim C. Border. *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker’s Guide*. Springer, 2006. ISBN: 978-3-540-29586-0.
- [4] Albert Altarovici, Olivier Bokanowski, and Hasnaa Zidani. “A general Hamilton-Jacobi framework for non-linear state-constrained control problems”. In: *ESAIM: COCV* 19.2 (2013). DOI: 10.1051/cocv/2012011.

- [5] Mohamed Assellaou et al. “A Hamilton-Jacobi-Bellman approach for the optimal control of an abort landing problem”. In: *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*. 2016. DOI: 10.1109/CDC.2016.7798815.
- [6] Mohamed Assellaou et al. “Value function and optimal trajectories for a maximum running cost control problem with state constraints. Application to an abort landing problem”. In: *ESAIM: M2AN* 52.1 (2018). DOI: 10.1051/m2an/2017064.
- [7] Jean-Pierre Aubin. *Viability Theory*. Birkhäuser, 1991. ISBN: 978-0-8176-4910-4.
- [8] Nicolas Bacaër. *A short history of mathematical population dynamics*. Springer, 2011. ISBN: 978-0-85729-114-1.
- [9] Martino Bardi and Italo Capuzzo-Dolcetta. *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*. Birkhäuser, 1997. ISBN: 978-0-8176-4754-4.

- [10] Samuel Baron, ed. *Medical Microbiology*. University of Texas Medical Branch at Galveston, 1996. ISBN: 978-0-963-11721-2. URL: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/books/NBK7627/>.
- [11] Derdei Bichara and Carlos Castillo-Chavez. “Vector-borne diseases models with residence times – A Lagrangian perspective”. In: *Mathematical Biosciences* (Sept. 10, 2016).
- [12] Richard A. Brualdi and Herbert J. Ryser. Vol. Combinatorial Matrix Theory. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1991. ISBN: 978-0-521-32265-2.
- [13] Vincenzo Capasso. *Mathematical Structures of Epidemic Systems*. Springer, 2008. ISBN: 978-3-540-56526-0.
- [14] Cécile Carrère and Hasnaa Zidani. “Stability and reachability analysis for a controlled heterogeneous population of cells”. In: *Optimal Control Applications and Methods* 41.5 (2020). DOI: 10.1002/oca.2627.

- [15] C. Cosner et al. “The effects of human movement on the persistence of vector-borne diseases”. In: *Journal of Theoretical Biology* 258.4 (2009). DOI: 10.1016/j.jtbi.2009.02.016.
- [16] Michel De Lara and Lilian Sofia Sepulveda Salcedo. “Viable control of an epidemiological model”. In: *Mathematical Biosciences* 280 (2016). DOI: 10.1016/j.mbs.2016.07.010.
- [17] Odo Diekmann, J. A. P. Heesterbeek, and J. A. J. Metz. “On the definition and the computation of the basic reproduction ratio  $R_0$  in models for infectious diseases in heterogeneous populations”. In: *Journal of Mathematical Biology* 28.4 (1990). DOI: 10.1007/BF00178324.
- [18] Pauline van den Driessche and James Watmough. “Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission”. In: *Mathematical Biosciences* 180.1 (2002). DOI: 10.1016/S0025-5564(02)00108-6.



- [19] Armin R. W. Elbers, C. J. M. Koenraad, and Rudy Meiswinkel. “Mosquitoes and Culicoides biting midges: vector range and the influence of climate change”. In: *Rev Sci Tech* 34.1 (2015). DOI: 10.20506/rst.34.1.2349.
- [20] Ana Marija Grancarić, Lea Botteri, and Peyman Ghaffari. “Combating invasive mosquitoes by textiles and paints”. In: *AUTEX2019 World Textile Conference on Textiles at the Crossroads*. 2019. URL: <https://openjournals.ugent.be/autex/article/id/63741/>.
- [21] Jack K. Hale. *Ordinary differential equations*. Krieger Publishing Company, 1980. ISBN: 978-0-898-74011-0.
- [22] Stanley Osher and Ronald Fedkiw. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer, 2003. ISBN: 978-0-387-95482-1.

- [23] Olivia Prosper, Nick Ruktanonchai, and Maia Martcheva. “Assessing the role of spatial heterogeneity and human movement in malaria dynamics and control”. In: *Journal of Theoretical Biology* 303 (2012). DOI: 10.1016/j.jtbi.2012.02.010.
- [24] Peter Rashkov. “A model for a vector-borne disease with control based on mosquito repellents: A viability analysis”. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 498.1 (2021). DOI: 10.1016/j.jmaa.2021.124958.
- [25] Peter Rashkov. “Modeling repellent-based interventions for control of vector-borne diseases with constraints on extent and duration”. In: *Mathematical biosciences and engineering : MBE* 19.4 (2022). DOI: 10.3934/mbe.2022185.

- [26] Nick W. Ruktanonchai, David L. Smith, and Patrick De Leenheer. “Parasite sources and sinks in a patched Ross–Macdonald malaria model with human and mosquito movement: Implications for control”. In: *Mathematical Biosciences* 279 (2016). DOI: 10.1016/j.mbs.2016.06.012.
- [27] David L. Smith et al. “Ross, Macdonald, and a theory for the dynamics and control of mosquito-transmitted pathogens”. In: *PLoS Pathog* 8.4 (2012). DOI: 10.1371/journal.ppat.1002588.
- [28] Hal L. Smith. “Cooperative Systems of Differential Equations with Concave Nonlinearities”. In: *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications* 18.10 (1986). DOI: 10.1016/0362-546X(86)90087-8.

**Благодаря за вниманието**