Изследване на ефектите на репелент срещу комари в малариен модел на Ross-Macdonald с две местообитания

Калоян Стоилов

Дипломна работа за образователна степен магистър

Факултет по математика и информатика
Софийски Университет "Свети Климент Охридски"

26 януари 2025 г.

Съдържание

1 Съществуване на решение

Имаме системата:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \beta_{vh}(N_1 - x_1)\left(\frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_1)y_1}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} + \frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_1)y_2}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2}\right) - \gamma_1 x_1\\
\dot{y}_1(t) &= \beta_{hv}a_1(M_1 - y_1)\frac{p_{11}(1-\kappa u_1)x_1 + p_{21}(1-\kappa u_2)x_2}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} - \mu_1 y_1\\
\dot{x}_2(t) &= \beta_{vh}(N_2 - x_2)\left(\frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_2)y_1}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} + \frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_2)y_2}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2}\right) - \gamma_2 x_2\\
\dot{y}_2(t) &= \beta_{hv}a_2(M_2 - y_2)\frac{p_{12}(1-\kappa u_1)x_1 + p_{22}(1-\kappa u_2)x_2}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} - \mu_2 y_2
\end{aligned}$$

Първо, отбелязваме, че ако е в сила $z, z' < C_z$ и $s, s' < C_s$, то е изпълнено:

$$\begin{aligned}
&|(C_z - z)s - (C_z - z')s'| = |C_z s - zs - C_z s' + z's' + zs' - zs'| = |C_z(s - s') - z(s - s') - s'(z - z')| \le\\
&|C_z||s - s'| + |z||s - s'| + |s'||z - z'| \le 2|C_z||s - s'| + |C_s||z - z'| \le \max\{2|C_z|, |C_s|\}(|s - s'| + |z - z'|)
\end{aligned}$$

Ще използваме това твърдение при дозателството на Липшицовата непрекъснатост на дясната страна. Взимаме произволни допустими двойки $(x_1, y_1, x_2, y_2), (x_1', y_1', x_2', y_2') \in \Omega$ и $(u_1, u_2), (u_1', u_2') \in [0, \bar{u}_1] \times [0, \bar{u}_2]$. Първо от неравенството на триъгълника имаме, че:

$$\begin{aligned}
&\|F(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - F(x_1', y_1', x_2', y_2', u_1', u_2')\| \le\\
&|f_1(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - f_1(x_1', y_1', x_2', y_2', u_1', u_2')| + |g_2(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - g_2(x_1', y_1', x_2', y_2', u_1', u_2')| +\\
&|g_1(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - g_1(x_1', y_1', x_2', y_2', u_1', u_2')| + |f_2(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - f_2(x_1', y_1', x_2', y_2', u_1', u_2')|
\end{aligned}$$

Сега може неколкократно да ползваме горната оценка за f_1:

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\beta_{vh}(N_1 - x_1)\left(\frac{a_1 p_{11}e^{-\mu_1\tau}(1-\kappa u_1)y_1}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} + \frac{a_2 p_{12}e^{-\mu_2\tau}(1-\kappa u_1)y_2}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2}\right) - \gamma_1 x_1 -\\
&\beta_{vh}(N_1 - x_1')\left(\frac{a_1 p_{11}e^{-\mu_1\tau}(1-\kappa u_1')y_1'}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} + \frac{a_2 p_{12}e^{-\mu_2\tau}(1-\kappa u_1')y_2'}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2}\right) + \gamma_1 x_1'\Bigg| \le\\
&\frac{\beta_{vh}a_1 p_{11}e^{-\mu_1\tau}}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2}\big|(N_1 - x_1)[(1-\kappa u_1)y_1] - (N_1 - x_1')[(1-\kappa u_1')y_1']\big| +\\
&\frac{\beta_{vh}a_2 p_{12}e^{-\mu_2\tau}}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2}\big|(N_1 - x_1)[(1-\kappa u_1)y_2] - (N_1 - x_1')[(1-\kappa u_1')y_2']\big| +\\
&\gamma_1|x_1 - x_1'|
\end{aligned}$$

Имаме, че $x_1, x_1' \le N_1, \quad (1-\kappa u_1)y_1, (1-\kappa u_1)y_1' \le M_1, \quad (1-\kappa u_1)y_2, (1-\kappa u_1)y_2' \le M_2$:

$$\begin{aligned}
&\big|(N_1 - x_1)[(1-\kappa u_1)y_1] - (N_1 - x_1')[(1-\kappa u_1')y_1']\big| \le 2N_1|(1-\kappa u_1)y_1 - (1-\kappa u_1')y_1'| + M_1|x_1 - x_1'| \le\\
&2N_1(2|y_1 - y_1'| + M_1\kappa|u_1 - u_1'|) + M_1|x_1 - x_1'|\\
&\big|(N_1 - x_1)[(1-\kappa u_1)y_2] - (N_1 - x_1')[(1-\kappa u_1')y_2']\big| \le 2N_1|(1-\kappa u_1)y_2 - (1-\kappa u_1')y_2'| + M_2|x_1 - x_1'| \le\\
&2N_1(2|y_2 - y_2'| + M_2\kappa|u_1 - u_1'|) + M_2|x_1 - x_1'|
\end{aligned}$$

Тук също ползвахме $1 - \kappa u_1, 1 - \kappa u_1' \le 1, \quad y_1, y_1' \le M_1, \quad y_2, y_2' \le M_2$. Така получихе оценка отгоре за първото събираемо
Тъй като видът на f_2 е същият с точност до индекси, то директно получаваме и оценка за третото

събираемо.

Сега да разгледаме за g_1:

$$\begin{aligned}
&\Big|\beta_{hv}a_1(M_1-y_1)\frac{p_{11}(1-\kappa u_1)x_1+p_{21}(1-\kappa u_2)x_2}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}-\mu_1 y_1-\\
&\beta_{hv}a_1(M_1-y_1')\frac{p_{11}(1-\kappa u_1')x_1'+p_{21}(1-\kappa u_2')x_2'}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}+\mu_1 y_1'\Big|\le\\
&\frac{\beta_{hv}a_1p_{11}}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}\big|(M_1-y_1)[(1-\kappa u_1)x_1]-(M_1-y_1')[(1-\kappa u_1')x_1']\big|+\\
&\frac{\beta_{hv}a_1p_{21}}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}\big|(M_1-y_1)[(1-\kappa u_2)x_2]-(M_1-y_1')[(1-\kappa u_2')x_2']\big|+\\
&\mu_1|y_1-y_1'|
\end{aligned}$$

Ограниченията са $y_1, y_1' \le M_1, \quad (1-\kappa u_1)x_1, (1-\kappa u_1')x_1' \le N_1, \quad (1-\kappa u_2)x_2, (1-\kappa u_2')x_2' \le N_2$:

$$\begin{aligned}
&\big|(M_1-y_1)[(1-\kappa u_1)x_1]-(M_1-y_1')[(1-\kappa u_1')x_1']\big|\le 2M_1|(1-\kappa u_1)x_1-(1-\kappa u_1')x_1'|+N_1|y_1-y_1'|\le\\
&2M_1(2|x_1-x_1'|+N_1\kappa|u_1-u_1'|)+N_1|y_1-y_1'|\\
&\big|(M_1-y_1)[(1-\kappa u_2)x_2]-(M_1-y_1')[(1-\kappa u_2')x_2']\big|\le 2M_1|(1-\kappa u_2)x_2-(1-\kappa u_2')x_2'|+N_2|y_1-y_1'|\\
&2M_1(2|x_2-x_2'|+N_2\kappa|u_2-u_2'|)+N_2|y_1-y_1'|
\end{aligned}$$

Тук също ползвахме $1-\kappa u_1, 1-\kappa u_1', 1-\kappa u_2, 1-\kappa u_2' \le 1, \quad x_1, x_1' \le M_1, \quad x_2, x_2' \le M_2$. Така получихе оценка отгоре за второто събираемо
Тъй като видът на g_2 е същият с точност до индекси, то директно получаваме и оценка за четвъртото събираемо.
Тогава заместваме всичко и за цялата дясна страна е в сила:

$$\begin{aligned}
&\|F(x_1,y_1,x_2,y_2,u_1,u_2)-F(x_1',y_1',x_2',y_2',u_1',u_2')\|\le\\
&\frac{\beta_{vh}a_1p_{11}e^{-\mu_1\tau}}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}(2N_1(2|y_1-y_1'|+M_1\kappa|u_1-u_1'|)+M_1|x_1-x_1'|)+\\
&\frac{\beta_{vh}a_2p_{12}e^{-\mu_2\tau}}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}(2N_1(2|y_2-y_2'|+M_2\kappa|u_1-u_1'|)+M_1|x_1-x_1'|)+\gamma_1|x_1-x_1'|+\\
&\frac{\beta_{hv}a_1p_{11}}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}(2M_1(2|x_1-x_1'|+N_1\kappa|u_1-u_1'|)+N_1|y_1-y_1'|)+\\
&\frac{\beta_{hv}a_1p_{21}}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}(2M_1(2|x_2-x_2'|+N_2\kappa|u_2-u_2'|)+N_2|y_1-y_1'|)+\mu_1|y_1-y_1'|+\\
&\frac{\beta_{vh}a_1p_{21}e^{-\mu_1\tau}}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}(2N_1(2|y_1-y_1'|+M_1\kappa|u_1-u_1'|)+M_1|x_1-x_1'|)+\\
&\frac{\beta_{vh}a_2p_{22}e^{-\mu_2\tau}}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}(2N_1(2|y_2-y_2'|+M_2\kappa|u_1-u_1'|)+M_1|x_1-x_1'|)+\gamma_2|x_2-x_2'|+\\
&\frac{\beta_{hv}a_2p_{12}}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}(2M_2(2|x_1-x_1'|+N_1\kappa|u_1-u_1'|)+N_1|y_2-y_2'|)+\\
&\frac{\beta_{hv}a_2p_{22}}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}(2M_2(2|x_2-x_2'|+N_2\kappa|u_2-u_2'|)+N_2|y_2-y_2'|)+\mu_2|y_2-y_2'|\le
\end{aligned}$$

[3] [1] [2]

Литература

[1] Vincenzo Capasso. Англ. В: *Mathematical Structures of Epidemic Systems*. 2-е изд. Springer, 2008. Гл. 2.2.4, 2.3.1.2.4, 4.3.3, с. 16, 27—30, 115. ISBN: 978-3-540-56526-0.

[2] Stanley Osher & Ronald Fedkiw. Англ. В: *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. 1-е изд. Springer, 2003. Гл. I-II.3, с. 1—41. ISBN: 978-0-387-95482-1.

[3] Peter Rashkov. “INSERT TITLE”. Англ. В: *Journal* (1 ян. 2019).