

Изследване на ефектите на репелент срещу комари в малариен модел на Ross-Macdonald с две местообитания

изготвил: Калоян Стоилов

ръководител: Петър Рашков

Дипломна работа за образователна степен
магистър



Факултет по математика и информатика
Софийски Университет "Свети Климент Охридски"
2 март 2025 г.

Съдържание

1	Въведение	1
1.1	Малария	1
1.2	SIS модел на Ross-Macdonald	1
1.3	Модел на Ross-Macdonald с миграция	1
1.4	Модел на Ross-Macdonald с използване на репелент	2
1.5	Кооперативни(квазимонотонни) системи	2
2	Модел на Ross-Macdonald с две местообитания и репелент	2
3	Съществуване на решение и основни свойства	3
3.1	Липшицовост по фазови променливи	3
3.2	Ограниченост на решението	5
3.3	Кооперативност (квазимонотонност)	6
3.4	Неподвижни точки	6
3.5	Система на Marchaud/Peano	7
3.5.1	Линейно нарастване	7
4	Вариационна задача на Хамилтон-Якоби-Белман	7
5	Числено приближение на ядрото на допустимост	8
5.1	Еквивалентна задача	8
5.2	WENO	8
5.3	Дискретизация по времето	8
5.4	Симулация	8
	Литература	9

1 Въведение

1.1 Малария

1.2 SIS модел на Ross-Macdonald

Допусканията от DeLara!!!

Да се разкаже накратко от A short history of mathematical population dynamics

1.3 Модел на Ross-Macdonald с миграция

Разглежда се леко опростена форма на модела, предложен от [2]. Дадени са m местообитания с популации на комари и n популации с хора, като всяка от тях е с постоянен размер. Всяка от популациите си има своите съответни μ_j смъртности (комари) и γ_i скорости на оздравяване (хора). Комарите се приема, че не мигрират (което е разумно предположение с оглед **ЦИТАТ ДВИЖЕНИЕ КОМАРИ!!!**). Предполага се, че индивидите от всяка от популациите хора, пребивават в местообитанията на комарите за p_{ij} част от времето, $\sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$. Нека с $x_i(t)$ бележим броя заразени хора, а с $y_j(t)$ - заразени комари. При направените допускания, в момент t , в местообитание j съотношението на заразени към всички хора е:

$$(1) \quad \frac{\sum_{i=1}^n p_{ij} x_i(t)}{\sum_{i=1}^n p_{ij} N_i}$$

Ако b_j е броят на ухапвания за човек за единица време, a_j са ухапванията за комар за единица време, то като представим по два начина броя ухапвания в местообитание j :

$$(2) \quad a_j M_j = b_j \sum_{i=1}^n p_{ij} N_i \iff b_j = \frac{a_j M_j}{\sum_{i=1}^n p_{ij} N_i}$$

Модел за разпространението на заразата е следния:

1. В момент t заразените хора x_i се увеличават от ухапване на незаразен човек от заразени комари в различните местообитания, а намаляват пропорционално на броя си с коефициента на оздравяване. Заразяването моделираме по закона за масите, като коефициентът ще бъде b_j . Тогава може да се изрази $\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^m \beta_{vh} b_j p_{ij} (N_i - x_i(t)) \frac{I_j}{M_j} - \gamma_i x_i(t)$.
2. В момент t заразените комари y_j се увеличават от ухапване на заразен човек от незаразен комар в местообитание j , а намаляват пропорционално на броя си с коефициента на смъртност. Заразяването моделираме по закона за масите, като коефициентът ще бъде a_j . Достига се до $\dot{y}_j(t) = \beta_{hv} a_j (M_j - y_j(t)) \frac{\sum_{i=1}^n p_{ij} x_i(t)}{\sum_{i=1}^n p_{ij} N_i} - \mu_j y_j(t)$.

След като се вземе предвид оценката за b_j , то системата има вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \beta_{vh} (N_i - x_i(t)) \sum_{j=1}^m \frac{p_{ij} a_j I_j}{\sum_{k=1}^m p_{kj} N_k} - \gamma_i x_i(t), \quad i = \overline{1, n} \\ \dot{y}_j(t) &= \beta_{hv} a_j (M_j - y_j(t)) \frac{\sum_{i=1}^n p_{ij} x_i(t)}{\sum_{i=1}^n p_{ij} N_i} - \mu_j y_j(t), \quad j = \overline{1, m} \end{aligned}$$

В [2] с помощта на **ЦИТАТ СМИТ СТАТИЯ И УЧЕБНИК!!!** се показва, че за системата е изпълнено точно едно от:

- $R_0 \leq 1$ и $\mathbf{0}$ е единствената равновесна точка и е глобално асимптотично устойчива.
- $R_0 > 1$ и $\mathbf{0}$ е неустойчива равновесна точка, като ако системата е неразложима, има единствена глобално асимптотично устойчива точка вътрешна за $\times_{i=1}^n [0, N_i] \times \times_{j=1}^m [0, M_j]$ (тоест маларията има ендемичен характер).

Тъй като R_0 не може да бъде получено в явен вид аналитично, останалата част от статията [2] разглежда различни аналитични оценки за R_0 и няколко симулации.

1.4 Модел на Ross-Macdonald с използване на репелент

Разглежда се модела от [4]. По същността си уравненията на модела са като на *Ross – Macdonald*, но с усложнението, че може с помощта на репеленти **ЦИТАТ РЕПЕЛЕНТИ!!!** да се намалят срещите на хора и комари, тоест има множител $(1 - \kappa u(t))$ в закона за действие на масите, където κ е ефективността на репелента, а пък $u(t)$ функция управление, задаващо пропорцията на хора предпазени с помощта на репелента. Разглежда се следния казус - възможно ли е всички заразени да бъдат хоспитализирани? Ако приемем, че има някакъв праг на заразените \bar{I} и търсим такова управление $u(t)$, че $\forall t > 0 (x(t) < \bar{I})$.

1.5 Кооперативни(квазимонотонни) системи

Кооперативните системи са [1]

2 Модел на Ross-Macdonald с две местообитания и репелент

Задачата която се изследва в дипломната работа е:

(Система 1)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \beta_{vh}(N_1 - x_1(t)) \left(\frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1(1 - \kappa u_1(t))y_1(t)}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} + \frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2(1 - \kappa u_1(t))y_2(t)}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} \right) - \gamma_1 x_1(t) \\ \dot{y}_1(t) &= \beta_{hv}a_1(M_1 - y_1(t)) \frac{p_{11}(1 - \kappa u_1(t))x_1(t) + p_{21}(1 - \kappa u_2(t))x_2(t)}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} - \mu_1 y_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \beta_{vh}(N_2 - x_2(t)) \left(\frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1(1 - \kappa u_2(t))y_1(t)}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} + \frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2(1 - \kappa u_2(t))y_2(t)}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} \right) - \gamma_2 x_2(t) \\ \dot{y}_2(t) &= \beta_{hv}a_2(M_2 - y_2(t)) \frac{p_{12}(1 - \kappa u_1(t))x_1(t) + p_{22}(1 - \kappa u_2(t))x_2(t)}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} - \mu_2 y_2(t)\end{aligned}$$

Това е обезразмерен модел, където са смесени моделите за миграция и за репелент против комари. t е времето, като ще разглеждаме само $t \in [0, \infty)$.

$x_1, x_2 \in [0, 1]$ са частта от заразени хора, а $y_1, y_2 \in [0, 1]$ - частта на заразените комари в локации 1 и 2 съответно.

$u_1 \in [0, \bar{u}_1], u_2 \in [0, \bar{u}_2]$ са управленията отговарящи за това каква част от хората от съответното местообитание са предпазени от репелента, като $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \leq 1$ отговарят за максималната предпазена част от населението, вследствие от производствената способност. Надолу се бележи $\mathcal{U} = [0, \bar{u}_1] \times [0, \bar{u}_2]$ $\kappa \in [0, 1]$ е константа, която представя ефективността на репелента (т.е. предполагаме че едно и също вещество/метод се използва и на двете места).

$p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22} \in [0, 0.5], p_{11} + p_{12} = 1, p_{21} + p_{22} = 1$ са константи, отговарящи за миграцията, като p_{ij} е частта от хора от i , които пребивават временно в j .

γ_1, γ_2 са смъртностите на хората, а μ_1, μ_2 - на комарите, които приемаме за константи.

τ е константа на средното време, за което комарите стават заразни.

α_1, α_2 са константи, които бележат колко ухапвания на комари има за единица време.

β_{vh} е константната заразност, когато заразен комар ухапва човек, а β_{hv} е константната заразност, комар ухапва заразен човек. $\bar{I}_1, \bar{I}_2 \in [0, 1]$ са константи, отговарящи за максималната част от населението в съответното местообитание, което може да получи адекватна здравна помощ при заразяване с малария.

ИЗВЕЖДАНЕ НА МОДЕЛА!!!

Питаме се има ли такива управления u_1, u_2 , за които във всеки момент всички заразени да имат възможност да получат помощ от здравната система, т.е. :

$$(3) \quad \forall t > 0 (x_1(t) \leq \bar{I}_1 \wedge x_2(t) \leq \bar{I}_2)$$

Тъй като първоначалният брой заразени хора и комари влияят на развитието на системата ще търсим:

$$(4) \quad V(\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{u}}) = \{(x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0) | \exists \mathbf{u} ((\text{Система 1}) \text{ има решение} \wedge (3) \text{ е изпълнено})\}$$

$V(\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{u}})$ се нарича ядро на допустимост.

3 Съществуване на решение и основни свойства

Първо, отбелязваме, че ако е в сила $z, z' < C_z$ и $s, s' < C_s$, то е изпълнено:

$$\begin{aligned} |(C_z - z)s - (C_z - z')s'| &= |C_z s - z s - C_z s' + z' s' + z s' - z s'| = |C_z(s - s') - z(s - s') - s'(z - z')| \leq \\ &|C_z||s - s'| + |z||s - s'| + |s'||z - z'| \leq 2|C_z||s - s'| + |C_s||z - z'| \leq \max\{2|C_z|, |C_s|\}(|s - s'| + |z - z'|) \end{aligned}$$

3.1 Липшицовост по фазови променливи

Ще използваме това твърдение при дозателството на Липшицовата непрекъснатост на дясната страна по фазовите променливи x_1, y_1, x_2, y_2 . Взимаме произволни допустими двойки, тоест $(x_1, y_1, x_2, y_2), (x'_1, y'_1, x'_2, y'_2) \in \Omega$ и $(u_1, u_2), (u'_1, u'_2) \in [0, \bar{u}_1] \times [0, \bar{u}_2]$. Първо от неравенството на триъгълника имаме, че:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - \mathbf{F}(x'_1, y'_1, x'_2, y'_2, u'_1, u'_2)\| &\leq \\ |f_1(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - f_1(x'_1, y'_1, x'_2, y'_2, u'_1, u'_2)| &+ |g_2(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - g_2(x'_1, y'_1, x'_2, y'_2, u'_1, u'_2)| + \\ |g_1(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - g_1(x'_1, y'_1, x'_2, y'_2, u'_1, u'_2)| &+ |f_2(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - f_2(x'_1, y'_1, x'_2, y'_2, u'_1, u'_2)| \end{aligned}$$

Сега може неколkokратно да ползваме горната оценка за f_1 :

$$\begin{aligned} &\left| \beta_{vh}(N_1 - x_1) \left(\frac{a_1 p_{11} e^{-\mu_1 \tau} (1 - \kappa u_1) y_1}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} + \frac{a_2 p_{12} e^{-\mu_2 \tau} (1 - \kappa u_1) y_2}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} \right) - \gamma_1 x_1 - \right. \\ &\left. \beta_{vh}(N_1 - x'_1) \left(\frac{a_1 p_{11} e^{-\mu_1 \tau} (1 - \kappa u'_1) y'_1}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} + \frac{a_2 p_{12} e^{-\mu_2 \tau} (1 - \kappa u'_1) y'_2}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} \right) + \gamma_1 x'_1 \right| \leq \\ &\frac{\beta_{vh} a_1 p_{11} e^{-\mu_1 \tau}}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} |(N_1 - x_1)[(1 - \kappa u_1) y_1] - (N_1 - x'_1)[(1 - \kappa u'_1) y'_1]| + \\ &\frac{\beta_{vh} a_2 p_{12} e^{-\mu_2 \tau}}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} |(N_1 - x_1)[(1 - \kappa u_1) y_2] - (N_1 - x'_1)[(1 - \kappa u'_1) y'_2]| + \\ &\gamma_1 |x_1 - x'_1| \end{aligned}$$

Имаме, че $x_1, x'_1 \leq N_1$, $(1 - \kappa u_1)y_1, (1 - \kappa u_1)y'_1 \leq M_1$, $(1 - \kappa u_1)y_2, (1 - \kappa u_1)y'_2 \leq M_2$:

$$\begin{aligned} |(N_1 - x_1)[(1 - \kappa u_1)y_1] - (N_1 - x'_1)[(1 - \kappa u'_1)y'_1]| &\leq 2N_1|(1 - \kappa u_1)y_1 - (1 - \kappa u'_1)y'_1| + M_1|x_1 - x'_1| \leq \\ &2N_1(2|y_1 - y'_1| + M_1\kappa|u_1 - u'_1|) + M_1|x_1 - x'_1| \\ |(N_1 - x_1)[(1 - \kappa u_1)y_2] - (N_1 - x'_1)[(1 - \kappa u'_1)y'_2]| &\leq 2N_1|(1 - \kappa u_1)y_2 - (1 - \kappa u'_1)y'_2| + M_2|x_1 - x'_1| \leq \\ &2N_1(2|y_2 - y'_2| + M_2\kappa|u_1 - u'_1|) + M_2|x_1 - x'_1| \end{aligned}$$

Тук също ползвахме $1 - \kappa u_1, 1 - \kappa u'_1 \leq 1$, $y_1, y'_1 \leq M_1$, $y_2, y'_2 \leq M_2$. Така получихме оценка отгоре за първото събираемо

Тъй като видът на f_2 е същият с точност до индекси, то директно получаваме и оценка за третото събираемо.

Сега да разгледаме за g_1 :

$$\begin{aligned} &\left| \beta_{hv}a_1(M_1 - y_1) \frac{p_{11}(1 - \kappa u_1)x_1 + p_{21}(1 - \kappa u_2)x_2}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} - \mu_1 y_1 - \right. \\ &\left. \beta_{hv}a_1(M_1 - y'_1) \frac{p_{11}(1 - \kappa u'_1)x'_1 + p_{21}(1 - \kappa u'_2)x'_2}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} + \mu_1 y'_1 \right| \leq \\ &\frac{\beta_{hv}a_1 p_{11}}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} |(M_1 - y_1)[(1 - \kappa u_1)x_1] - (M_1 - y'_1)[(1 - \kappa u'_1)x'_1]| + \\ &\frac{\beta_{hv}a_1 p_{21}}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} |(M_1 - y_1)[(1 - \kappa u_2)x_2] - (M_1 - y'_1)[(1 - \kappa u'_2)x'_2]| + \\ &\mu_1 |y_1 - y'_1| \end{aligned}$$

Ограниченията са $y_1, y'_1 \leq M_1$, $(1 - \kappa u_1)x_1, (1 - \kappa u'_1)x'_1 \leq N_1$, $(1 - \kappa u_2)x_2, (1 - \kappa u'_2)x'_2 \leq N_2$:

$$\begin{aligned} |(M_1 - y_1)[(1 - \kappa u_1)x_1] - (M_1 - y'_1)[(1 - \kappa u'_1)x'_1]| &\leq 2M_1|(1 - \kappa u_1)x_1 - (1 - \kappa u'_1)x'_1| + N_1|y_1 - y'_1| \leq \\ &2M_1(2|x_1 - x'_1| + N_1\kappa|u_1 - u'_1|) + N_1|y_1 - y'_1| \\ |(M_1 - y_1)[(1 - \kappa u_2)x_2] - (M_1 - y'_1)[(1 - \kappa u'_2)x'_2]| &\leq 2M_1|(1 - \kappa u_2)x_2 - (1 - \kappa u'_2)x'_2| + N_2|y_1 - y'_1| \leq \\ &2M_1(2|x_2 - x'_2| + N_2\kappa|u_2 - u'_2|) + N_2|y_1 - y'_1| \end{aligned}$$

Тук също ползвахме $1 - \kappa u_1, 1 - \kappa u'_1, 1 - \kappa u_2, 1 - \kappa u'_2 \leq 1$, $x_1, x'_1 \leq M_1$, $x_2, x'_2 \leq M_2$. Така получихме оценка отгоре за второто събираемо

Тъй като видът на g_2 е същият с точност до индекси, то директно получаваме и оценка за четвъртото събираемо.

За да проверим липшицовостта по фазовите променливи, то заместваме с $u_1 = 1'_1, u_2 = u'_2$ всичко и за цялата дясна страна е в сила:

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{F}(x_1, y_1, x_2, y_2, u'_1, u'_2) - \mathbf{F}(x'_1, y'_1, x'_2, y'_2, u'_1, u'_2)\| \leq \\ &\frac{\beta_{vh}a_1 p_{11} e^{-\mu_1 \tau}}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} (4N_1|y_1 - y'_1| + M_1|x_1 - x'_1|) + \frac{\beta_{vh}a_2 p_{12} e^{-\mu_2 \tau}}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} (4N_1|y_2 - y'_2| + M_1|x_1 - x'_1|) + \gamma_1|x_1 - x'_1| + \\ &\frac{\beta_{hv}a_1 p_{11}}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} (4M_1|x_1 - x'_1| + N_1|y_1 - y'_1|) + \frac{\beta_{hv}a_1 p_{21}}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} (4M_1|x_2 - x'_2| + N_2|y_1 - y'_1|) + \mu_1|y_1 - y'_1| + \\ &\frac{\beta_{vh}a_1 p_{21} e^{-\mu_1 \tau}}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} (4N_1|y_1 - y'_1| + M_1|x_1 - x'_1|) + \frac{\beta_{vh}a_2 p_{22} e^{-\mu_2 \tau}}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} (4N_1|y_2 - y'_2| + M_1|x_1 - x'_1|) + \gamma_2|x_2 - x'_2| + \\ &\frac{\beta_{hv}a_2 p_{12}}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} (4M_2|x_1 - x'_1| + N_1|y_2 - y'_2|) + \frac{\beta_{hv}a_2 p_{22}}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} (4M_2|x_2 - x'_2| + N_2|y_2 - y'_2|) + \mu_2|y_2 - y'_2| \leq \\ &C\|(x_1, y_1, x_2, y_2) - (x'_1, y'_1, x'_2, y'_2)\| \end{aligned}$$

Накрая се използват неравенства от вида $|x_1 - x'_1| \leq \|(x_1, y_1, x_2, y_2) - (x'_1, y'_1, x'_2, y'_2)\|$. Тогава, спрямо общата теория на диференциалните решения с управление, съществува единствено решение на (Система 1) за произволни t .

3.2 Ограниченост на решението

Да разгледаме множеството

$$(5) \quad X = \{0 \leq x_1 \leq N_1, 0 \leq y_1 \leq M_1, 0 \leq x_2 \leq N_2, 0 \leq y_2 \leq M_2\}$$

Началното условие е някъде в това множество, тъй като популациите са неотрицателни, а заразените индивиди не са над общата популация за съответната категория. Лесно може да се види, че е в сила:

$$(6) \quad (x_1(0), y_1(0), x_2(0), y_2(0)) \in X \implies \forall t > 0 ((x_1(t), y_1(t), x_2(t), y_2(t)) \in X)$$

Трябва да се покаже, че \mathbf{F} сочи към вътрешността на X , ако решението се намира по границата ∂X . Но това наистина е така, от:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t)|_{X \cap \{x_1(t)=0\}} &= \beta_{vh} N_1(t) \left(\frac{p_{11} e^{-\mu_1 \tau} a_1 (1 - \kappa u_1(t)) y_1(t)}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} + \frac{p_{12} e^{-\mu_2 \tau} a_2 (1 - \kappa u_1(t)) y_2(t)}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} \right) \geq 0 \\ \dot{x}_1(t)|_{X \cap \{x_1(t)=N_1\}} &= -\gamma_1 N_1 \leq 0 \\ \dot{y}_1(t)|_{X \cap \{y_1(t)=0\}} &= \beta_{hv} a_1 M_1 \frac{p_{11} (1 - \kappa u_1(t)) x_1(t) + p_{21} (1 - \kappa u_2(t)) x_2(t)}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} \geq 0 \\ \dot{y}_1(t)|_{X \cap \{y_1(t)=M_1\}} &= -\mu_1 M_1 = 0 \\ \dot{x}_2(t)|_{X \cap \{x_2(t)=0\}} &= \beta_{vh} N_2 \left(\frac{p_{21} e^{-\mu_1 \tau} a_1 (1 - \kappa u_2(t)) y_1(t)}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} + \frac{p_{22} e^{-\mu_2 \tau} a_2 (1 - \kappa u_2(t)) y_2(t)}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} \right) \geq 0 \\ \dot{x}_2(t)|_{X \cap \{x_2(t)=N_2\}} &= -\gamma_2 N_2 \leq 0 \\ \dot{y}_2(t)|_{X \cap \{y_2(t)=0\}} &= \beta_{hv} a_2 M_2 \frac{p_{12} (1 - \kappa u_1(t)) x_1(t) + p_{22} (1 - \kappa u_2(t)) x_2(t)}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} \geq 0 \\ \dot{y}_2(t)|_{X \cap \{y_2(t)=M_2\}} &= -\mu_2 M_2 \leq 0 \end{aligned}$$

3.3 Кооперативност (квазимоноотонност)

Доказваме квазимоноотонността по дефиницията **ДЕФИНИЦИЯ!!!**

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial y_1} &= \beta_{vh}(N_1 - x_1(t)) \frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1(1 - \kappa u_1(t))}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} \geq 0 \\
 \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} &= 0 \\
 \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial y_2} &= \beta_{vh}(N_1 - x_1(t)) \frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2(1 - \kappa u_1(t))}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} \geq 0 \\
 \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial x_1} &= \beta_{hv}a_1(M_1 - y_1(t)) \frac{p_{11}(1 - \kappa u_1(t))}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} \geq 0 \\
 \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial x_2} &= \beta_{hv}a_1(M_1 - y_1(t)) \frac{p_{21}(1 - \kappa u_2(t))}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} \geq 0 \\
 \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_2} &= 0 \\
 \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} &= 0 \\
 \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial y_1} &= \beta_{vh}(N_2 - x_2(t)) \frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1(1 - \kappa u_2(t))}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} \geq 0 \\
 \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial y_2} &= \beta_{vh}(N_2 - x_2(t)) \frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2(1 - \kappa u_2(t))}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} \geq 0 \\
 \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial x_1} &= \beta_{hv}a_2(M_2 - y_2(t)) \frac{p_{12}(1 - \kappa u_1(t))}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} \geq 0 \\
 \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial y_1} &= 0 \\
 \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial x_2} &= \beta_{hv}a_2(M_2 - y_2(t)) \frac{p_{22}(1 - \kappa u_2(t))}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} \geq 0
 \end{aligned}$$

3.4 Неподвижни точки

Да разгледаме $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}$. Веднага се вижда, че $\mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{0}$ е тривиалната неподвижна точка на системата. Сега разглеждаме за фиксирано управление $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{u}$.

Ще използваме теоремата на Смит за автономни системи. Да изведем матрицата на Якоби $\mathbf{DF}(x_1, y_1, x_2, y_2)(t)$:

$$\mathbf{DF}(x_1, y_1, x_2, y_2)(t) =$$

$$\begin{pmatrix}
 -\beta_{vh} \left(\frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_1)y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} + \frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_1)y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2} \right) - \gamma_1 & \beta_{vh}(N_1 - x_1(t)) \frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_1)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} & 0 & 0 \\
 \beta_{hv}a_1(M_1 - y_1(t)) \frac{p_{11}(1-\kappa u_1)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} & -\beta_{hv}a_1 \frac{p_{11}(1-\kappa u_1)x_1(t)+p_{21}(1-\kappa u_2)x_2(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} - \mu_1 & 0 & 0 \\
 0 & \beta_{vh}(N_2 - x_2(t)) \frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_2)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} & 0 & -\beta_{vh} \left(\frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_1)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} + \frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_1)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2} \right) \\
 \beta_{hv}a_2(M_2 - y_2(t)) \frac{p_{12}(1-\kappa u_1)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2} & 0 & 0 & \beta_{hv}a_2(M_2 - y_2(t)) \frac{p_{12}(1-\kappa u_1)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}
 \end{pmatrix}$$

При $R_0 \leq 1$, $\mathbf{0}$ е единствена устойчива неподвижна точка, а при $R_0 > 1$, то $\mathbf{0}$ е неустойчива неподвижна точка и съществува точно една друга устойчива, намираща се във вътрешността на X .

3.5 Система на Marchaud/Peano

За да има търсената задача решение, то трябва ядрото на допустимост (4) да съществува и да не е празно. От **ЦИТАТ!!!** за съществуването е необходимо да покажем, че $\mathcal{F}(\mathbf{z}(t)) = (F)(\mathbf{z}(t), U)$ е изображение на Marchaud/Peano.

\mathcal{F} е изображение на Marchaud/Peano, ако е нетривиално, отгоре полунепрекъснато, с компактни изпъкнали образи и с линейно нарастване.

Стига параметрите ни да не са всички нулеви, то \mathcal{F} е нетривиално.

От факта, че \mathbf{F} е непрекъснато по всяка компонента (а даже и диференцируемо), то е и отгоре полунепрекъснато, откъдето и \mathcal{F} е.

X е затворено и ограничено, а е крайномерно, съответно е компактно. Аналогично за U . Тогава и $X \times U$ е компактно. Директно от дефинициите на X , U те също така са изпъкнали, тоест $X \times U$ е изпъкнало. Вече видяхме, че X положително инвариантно за системата. Тогава образите на \mathcal{F} ще са в $X \times U$, с други думи са компактни и изпъкнали.

3.5.1 Линейно нарастване

За да покажем линейното нарастване, да забележим, че $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Тогава може да запишем:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2)\| &= \|\mathbf{F}(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - \mathbf{0}\| = \|\mathbf{F}(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - \mathbf{F}(\mathbf{0})\| = \\ &= \frac{\beta_{vh}a_1p_{11}e^{-\mu_1\tau}}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2}(2N_1(2|y_1| + M_1\kappa|u_1|) + M_1|x_1|) + \\ &+ \frac{\beta_{vh}a_2p_{12}e^{-\mu_2\tau}}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2}(2N_1(2|y_2| + M_2\kappa|u_1|) + M_1|x_1|) + \gamma_1|x_1| + \\ &+ \frac{\beta_{hv}a_1p_{11}}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2}(2M_1(2|x_1| + N_1\kappa|u_1|) + N_1|y_1|) + \\ &+ \frac{\beta_{hv}a_1p_{21}}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2}(2M_1(2|x_2| + N_2\kappa|u_2|) + N_2|y_1|) + \mu_1|y_1| + \\ &+ \frac{\beta_{vh}a_1p_{21}e^{-\mu_1\tau}}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2}(2N_1(2|y_1| + M_1\kappa|u_1|) + M_1|x_1|) + \\ &+ \frac{\beta_{vh}a_2p_{22}e^{-\mu_2\tau}}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2}(2N_1(2|y_2| + M_2\kappa|u_1|) + M_1|x_1|) + \gamma_2|x_2| + \\ &+ \frac{\beta_{hv}a_2p_{12}}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2}(2M_2(2|x_1| + N_1\kappa|u_1|) + N_1|y_2|) + \\ &+ \frac{\beta_{hv}a_2p_{22}}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2}(2M_2(2|x_2| + N_2\kappa|u_2|) + N_2|y_2|) + \mu_2|y_2| \leq \\ &\tilde{C}_1|u_1| + \tilde{C}_2|u_2| + \tilde{C}_3\|(x_1, y_1, x_2, y_2)\| \leq \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 + \tilde{C}_3\|(x_1, y_1, x_2, y_2)\| \leq \tilde{C}(1 + \|(x_1, y_1, x_2, y_2)\|) \end{aligned}$$

Така $V(\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{u}})$ съществува. Веднага може да видим, че $V(\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{u}}) \neq \emptyset$, понеже $\mathbf{0}$ е неподвижна точка за кое да е управление и следователно $\mathbf{0} \in V(\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{u}})$.

4 Вариационна задача на Хамилтон-Якоби-Белман

За намиране на ядрото на допустимост (4) се подхожда със задачата на Хамилтон-Якоби-Белман за минимизация на функционал, като v е функцията на стойността. Опитваме се да решим:

$$(7) \quad \min\{\lambda v(x_1, y_1, x_2, y_2) + \mathcal{H}(x_1, y_1, x_2, y_2, \nabla v), v(x_1, y_1, x_2, y_2) - \Gamma(x_1, y_1, x_2, y_2)\} = 0$$

Хамилтониянт е дефиниран чрез производна по направлението ∇v , като:

$$(8) \quad \mathcal{H}(x_1, y_1, x_2, y_2, \nabla v) = -\max_{u \in \mathcal{U}} \langle \mathbf{F}(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2), \nabla v \rangle$$

Използвайки вида на \mathbf{F} , след групиране по части зависещи/независещи от управлението, получаваме:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x_1, y_1, x_2, y_2, \nabla v) = & \left[\gamma_1 x_1(t) - \beta_{vh}(N_1 - x_1(t)) \left(\frac{p_{11} e^{-\mu_1 \tau} a_1 y_1(t)}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} + \frac{p_{12} e^{-\mu_2 \tau} a_2 y_2(t)}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} \right) \right] \frac{\partial v}{\partial x_1} + \\ & \left[\mu_1 y_1(t) - \beta_{hv} a_1 (M_1 - y_1(t)) \frac{p_{11} x_1(t) + p_{21} x_2(t)}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} \right] \frac{\partial v}{\partial y_1} + \\ & \left[\gamma_2 x_2(t) - \beta_{vh}(N_2 - x_2(t)) \left(\frac{p_{21} e^{-\mu_1 \tau} a_1 y_1(t)}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} + \frac{p_{22} e^{-\mu_2 \tau} a_2 y_2(t)}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} \right) \right] \frac{\partial v}{\partial x_2} + \\ & \left[\mu_2 y_2(t) - \beta_{hv} a_2 (M_2 - y_2(t)) \frac{p_{12} x_1(t) + p_{22} x_2(t)}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} \right] \frac{\partial v}{\partial y_2} + \\ & \max \left\{ 0, \beta_{vh}(N_1 - x_1(t)) \kappa \bar{u}_1 \left(\frac{p_{11} e^{-\mu_1 \tau} a_1 y_1(t)}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} + \frac{p_{12} e^{-\mu_2 \tau} a_2 y_2(t)}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} \right) \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\} + \\ & \max \left\{ 0, \beta_{hv} a_1 (M_1 - y_1(t)) \kappa \frac{p_{11} \bar{u}_1 x_1(t) + p_{21} \bar{u}_2 x_2(t)}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} \frac{\partial v}{\partial y_1} \right\} + \\ & \max \left\{ 0, \beta_{vh}(N_2 - x_2(t)) \kappa \bar{u}_2 \left(\frac{p_{21} e^{-\mu_1 \tau} a_1 y_1(t)}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} + \frac{p_{22} e^{-\mu_2 \tau} a_2 y_2(t)}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} \right) \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\} + \\ & \max \left\{ 0, \beta_{hv} a_2 (M_2 - y_2(t)) \kappa \frac{p_{12} \bar{u}_1 x_1(t) + p_{22} \bar{u}_2 x_2(t)}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} \frac{\partial v}{\partial y_2} \right\} \end{aligned}$$

5 Числено приближение на ядрото на допустимост

5.1 Еквивалентна задача

[3]

5.2 WENO

За численото пресмятане на задачата се използва дискретизация по пространството по метода Weighted Essentially Non-Oscillatory (WENO) за приближаване, което е от ред $O(h^5)$. [3]

5.3 Дискретизация по времето

Отново по Osher, дискретизираме по времето с подобрения метод на Ойлер, който е добре известно е от ред $O(\tau^2)$. [3]

5.4 Симулация

Литература

- [1] Vincenzo Capasso. АНГЛ. В: *Mathematical Structures of Epidemic Systems*. 2-е изд. Springer, 2008. Гл. 2.2.4, 2.3.1.2.4, 4.3.3, с. 16, 27—30, 115. ISBN: 978-3-540-56526-0.
- [2] Derdei Bichara & Carlos Castillo-Chavez. “Vector-borne diseases models with residence times – A Lagrangian perspective”. АНГЛ. В: *Mathematical Biosciences* (10 септ. 2016).
- [3] Stanley Osher & Ronald Fedkiw. АНГЛ. В: *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. 1-е изд. Springer, 2003. Гл. I-II.3, с. 1—41. ISBN: 978-0-387-95482-1.
- [4] Peter Rashkov. “INSERT TITLE”. АНГЛ. В: *Journal* (1 ян. 2019).