Изследване на ефектите на репелент срещу комари в малариен модел на Ross-Macdonald с две местообитания

изготвил: Калоян Стоилов

ръководител: Петър Рашков

Дипломна работа за образователна степен магистър

Факултет по математика и информатика
Софийски Университет "Свети Климент Охридски"
24 март 2025 г.

Съдържание

I Въведение

I.1 Малария

I.2 SIS модел на Ross-Macdonald

Допусканията от DeLara!!!
Разглеждат се само женските комари в популяцията, понеже те са хапещите. Комарите нямат имунна система и не оздравяват от маларийния плазмодий, откъдето заразени комари се отстраняват от популацията само чрез смъртност. Да се разкаже накрратко от A short history of mathematical population dynamics

I.3 Модел на Ross-Macdonald с мобилност

Разглежда се леко опростена форма на модела, предложен от [2]. Дадени са m местообитания с популации на комари и n популации с хора, като всяка от тях е с постоянен размер. Всяка от популациите си има своите съответни μ_j смъртности (комари) и γ_i скорости на оздравяване (хора). Комарите се приема, че не мигрират (което е разумно предположение с оглед ЦИТАТ ДВИЖЕНИЕ КОМАРИ!!!). Предполага се, че индивидите от всяка от популациите хора, пребивават в местообитанията на комарите за p_{ij} част от времето, $\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$.
Нека с $x_i(t)$ бележим броя заразени хора, а с $y_j(t)$ - заразени комари. При направените допускания, в момент t, в местообитание j съотношението на заразени към всички хора е:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{ij} x_i(t)}{\sum_{i=1}^{n} p_{ij} N_i} \tag{1}$$

Ако b_j е броят на ухапвания за човек за единица време, a_j са ухапванията за комар за единица време, то като представим по два начина броя ухавпания в местообитание j:

$$a_j M_j = b_j \sum_{i=1}^{n} p_{ij} N_i \iff b_j = \frac{a_j M_j}{\sum_{i=1}^{n} p_{ij} N_i} \tag{2}$$

Модел за разпространението на заразата е следния:

1. В момент t заразените хора x_i се увеличават от ухапване на незаразен човек от заразени комари в различните местообитания, а намаляват пропорционално на броя си с коефициента на оздравяване. Заразяването моделираме по закона за масите, като коефициентът ще бъде b_j. Тогава може да се изрази $\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{m} \beta_{vh} b_j p_{ij} (N_i - x_i(t)) \frac{I_j}{M_j} - \gamma_i x_i(t)$.

2. В момент t заразените комари y_j се увеличават от ухапване на заразен човек от незаразен комар в местообитание j, а намаляват пропорционално на броя си с коефициента на смъртност. Заразяването моделираме по закона за масите, като коефициентът ще бъде a_j. Достига се до $\dot{y}_j(t) = \beta_{hv} a_j (M_j - y(t)) \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{ij} x_i(t)}{\sum_{i=1}^{n} p_{ij} N_i} - \mu_j y_j(t)$.

След като се вземе предвид оценката за b_j, то системата има вида:

$$\dot{x}_i(t) = \beta_{vh} (N_i - x_i(t)) \sum_{j=1}^{m} \frac{p_{ij} a_j I_j}{\sum_{k=1}^{n} p_{kj} N_k} - \gamma_i x_i(t), \quad i = \overline{1,n}$$

$$\dot{y}_j(t) = \beta_{hv} a_j (M_j - y(t)) \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{ij} x_i(t)}{\sum_{i=1}^{n} p_{ij} N_i} - \mu_j y_j(t), \quad j = \overline{1,m}$$

В [2] с помощта на ЦИТАТ СМИТ СТАТИЯ И УЧЕБНИК!!! се показва, че за системата е изпълнено точно едно от:

- $R_0 \leq 1$ и $\mathbf{0}$ е единствената равновесна точка и е глобално асимптотично устойчива.
- $R_0 > 1$ и $\mathbf{0}$ е неустойчива равновесна точка, като ако системата е неразложима, има единствена глобално асимптотично устойчива точка вътрешна за $\bigtimes_{i=1}^{n}[0, N_i] \times \bigtimes_{j=1}^{m}[0, M_j]$ (тоест маларията има ендемичен характер).

Тъй като R_0 не може да бъде получено в явен вид аналитично, останалата част от статията [2] разглежда различни аналитични оценки за R_0 и няколко симулации.

I.4 Модел на Ross-Macdonald с използване на репелент

Разглежда се модела от [4]. По същността си уравненията на модела са като на $Ross - Macdonald$, но с усложнението, че може с помощта на репеленти ЦИТАТ РЕПЕЛЕНТИ!!! да се намали честотата на ухапвания, тоест има множител $(1 - \kappa u(t))$ в закона за действие на масите, където κ е ефективността на репелента, а пък $u(t)$ функция управление, задаващо пропорцията на хора предпазени с помощтта на репелента. Разглежда се следния казус - възможно ли е всички заразени да бъдат хоспитализирани? Ако приемем, че има някакъв праг на заразените $\bar{I}$ и търсим такова управление $u(t)$, че $\forall t > 0(x(t) < \bar{I})$. Да се разпише едномерния модел с репелент!!!

I.5 Кооперативни(квазимонотонни) системи

Кооперативните системи са [1]

II Модел на Ross-Macdonald с две местообитания и репелент

Задачата която се изследва в дипломната работа е:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \beta_{vh}(N_1 - x_1(t))\left(\frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_1(t))y_1(t)}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} + \frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_1(t))y_2(t)}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2}\right) - \gamma_1 x_1(t)\\
\dot{y}_1(t) &= \beta_{hv}a_1(M_1 - y_1(t))\frac{p_{11}(1-\kappa u_1(t))x_1(t) + p_{21}(1-\kappa u_2(t))x_2(t)}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} - \mu_1 y_1(t)\\
\dot{x}_2(t) &= \beta_{vh}(N_2 - x_2(t))\left(\frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_2(t))y_1(t)}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} + \frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_2(t))y_2(t)}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2}\right) - \gamma_2 x_2(t)\\
\dot{y}_2(t) &= \beta_{hv}a_2(M_2 - y_2(t))\frac{p_{12}(1-\kappa u_1(t))x_1(t) + p_{22}(1-\kappa u_2(t))x_2(t)}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} - \mu_2 y_2(t)
\end{aligned} \tag{3}$$

Това е модел обендинение на моделите за мобилност и за репелент против комари. t е времето, като ще разглеждаме само $t \in [0, \infty)$.
$x_1, x_2 \in [0, N_i]$ са броят заразени хора, а $y_1, y_2 \in [0, M_i]$ - броят заразени комари в локации 1 и 2 съответно.
$u_1 \in [0, \bar{u}_1], u_2 \in [0, \bar{u}_2]$ са управленията отговарящи за това каква част от хората от съответното местообитание са предпазени от репелента, като $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \leq 1$ отговарят за максималната предпазена част от населението, вследствие от производствената способност. Надолу се бележи $\mathcal{U} = [0, \bar{u}_1] \times [0, \bar{u}_2]$ и $math\bar{b}fu = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$
$\kappa \in [0, 1]$ е константа, която представя ефективността на репелента (т.е. предполагаме че едно и също вещество/метод се използва и на двете места).
$p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22} \in [0, 0.5]$, $p_{11} + p_{12} = 1, p_{21} + p_{22} = 1$ са константи, отговарящи за мобилността, като p_{ij} е частта от хора от i, които пребивават временно в j.
γ_1, γ_2 са скоростите на оздравяване на хората, а μ_1, μ_2 - скоростите на смъртност на комарите, които приемаме за константи.
τ е константа на средното време, за което комарите стават заразни.
α_1, α_2 са константи, които бележат колко ухапвания на комари има за единица време.
β_{vh} е констатнтана вероятност за заразяване на здрав човек с патогена, когато бъде ухапан от заразен комар, а β_{hv} е констатнтана вероятност за заразяване на здрав комар с патогена, когато ухапе заразен човек.

ИЗВЕЖДАНЕ НА МОДЕЛА!!!

Моделът подлежи на обезразмеряване чрез смяната $(x_1, y_1, x_2, y_2) \rightarrow (\frac{x_1}{N_1}, \frac{y_1}{M_1}, \frac{x_2}{N_2}, \frac{y_2}{M_2})$. След това достигаме до:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \beta_{vh}(1 - x_1(t))\left(\frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_1(t))M_1 y_1(t)}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} + \frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_1(t))M_2 y_2(t)}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2}\right) - \gamma_1 x_1(t)\\
\dot{y}_1(t) &= \beta_{hv}a_1(1 - y_1(t))\frac{p_{11}(1-\kappa u_1(t))N_1 x_1(t) + p_{21}(1-\kappa u_2(t))N_2 x_2(t)}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} - \mu_1 y_1(t)\\
\dot{x}_2(t) &= \beta_{vh}(1 - x_2(t))\left(\frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_2(t))M_1 y_1(t)}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} + \frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_2(t))M_2 y_2(t)}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2}\right) - \gamma_2 x_2(t)\\
\dot{y}_2(t) &= \beta_{hv}a_2(1 - y_2(t))\frac{p_{12}(1-\kappa u_1(t))N_1 x_1(t) + p_{22}(1-\kappa u_2(t))N_2 x_2(t)}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} - \mu_2 y_2(t)
\end{aligned} \tag{4}$$

В този модел за улеснение на по-нататъшни изрази може да направим полагането:

$$
\begin{aligned}
b_{11} &= \beta_{vh}\frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1M_1}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}\\
b_{12} &= \beta_{vh}\frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2M_2}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\\
b_{21} &= \beta_{vh}\frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_2(t))M_1}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}\\
b_{22} &= \beta_{vh}\frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_2(t))M_2}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\\
c_{11} &= \beta_{hv}a_1\frac{p_{11}N_1}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}\\
c_{11} &= \beta_{hv}a_1\frac{p_{21}N_2}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}\\
c_{21} &= \beta_{hv}a_2\frac{p_{12}N_1}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}\\
c_{22} &= \beta_{hv}a_2\frac{p_{22}N_2}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Крайният вид на обезразмерения модел е:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \beta_{vh}(1-x_1(t))(1-\kappa u_1(t))\left(b_{11}y_1(t)+b_{12}y_2(t)\right)-\gamma_1x_1(t)\\
\dot{y}_1(t) &= (1-y_1(t))\left(c_{11}(1-\kappa u_1(t))x_1(t)+c_{12}(1-\kappa u_2(t))x_2(t)\right)-\mu_1y_1(t)\\
\dot{x}_2(t) &= \beta_{vh}(1-x_2(t))(1-\kappa u_2(t))\left(b_{21}y_1(t)+b_{22}y_2(t)\right)-\gamma_2x_2(t)\\
\dot{y}_2(t) &= (1-y_2(t))\left(c_{21}(1-\kappa u_1(t))x_1(t)+c_{22}(1-\kappa u_2(t))x_2(t)\right)-\mu_2y_2(t)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Нека $\bar{I}_1, \bar{I}_2 \in [0,1]$ са константи, отговарящи за максималната част от населението в съответното местообитание, което може да получи адекватна здравна помощ при заразяване с малария. Питаме се има ли такива управления $u_1(t), u_2(t)$, за които във всеки момент всички заразени да имат възможност да получат помощ от здравната система, т.е. :

$$
\forall t > 0 (x_1(t) \le \bar{I}_1 \wedge x_2(t) \le \bar{I}_2)
\tag{7}
$$

Тъй като първоначалният брой заразени хора и комари влияят на развитието на системата ще търсим:

$$
V(\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{u}}) = \{(x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0) | \exists \mathbf{u} ((3) \text{ има решение} \wedge (7) \text{ е изпълнено})\}
\tag{8}
$$

$V(\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{u}})$ се нарича ядро на слаба инвариантност на Белман.

III Съществуване на решение и основни свойства

Първо, отбелязваме, че ако е в сила $z, z' < C_z$ и $s, s' < C_s$, то е изпълнено:

$$|(C_z - z)s - (C_z - z')s'| = |C_z s - zs - C_z s' + z's' + zs' - zs'| = |C_z(s - s') - z(s - s') - s'(z - z')| \leq$$
$$|C_z||s - s'| + |z||s - s'| + |s'||z - z'| \leq 2|C_z||s - s'| + |C_s||z - z'| \leq \max\{2|C_z|, |C_s|\}(|s - s'| + |z - z'|)$$

III.1 Липшицовост по фазови променливи

Ще използваме това твърдение при дозателството на Липшицовата непрекъснатост на дясната страна по фазовите променливи x_1, y_1, x_2, y_2. Взимаме произволни допустими двойки, тоест $(x_1, y_1, x_2, y_2), (x_1', y_1', x_2', y_2') \in \Omega$ и $(u_1, u_2), (u_1', u_2') \in [0, \bar{u}_1] \times [0, \bar{u}_2]$. Първо от неравенството на триъгълника имаме, че:

$$\|\mathbf{F}(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - \mathbf{F}(x_1', y_1', x_2', y_2', u_1', u_2')\| \leq$$
$$|f_1(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - f_1(x_1', y_1', x_2', y_2', u_1', u_2')| + |g_2(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - g_2(x_1', y_1', x_2', y_2', u_1', u_2')| +$$
$$|g_1(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - g_1(x_1', y_1', x_2', y_2', u_1', u_2')| + |f_2(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - f_2(x_1', y_1', x_2', y_2', u_1', u_2')|$$

Сега може неколкократно да ползваме горната оценка за f_1:

$$\left|\beta_{vh}(N_1 - x_1)\left(\frac{a_1 p_{11} e^{-\mu_1 \tau}(1 - \kappa u_1)y_1}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} + \frac{a_2 p_{12} e^{-\mu_2 \tau}(1 - \kappa u_1)y_2}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2}\right) - \gamma_1 x_1 - \right.$$
$$\left. \beta_{vh}(N_1 - x_1')\left(\frac{a_1 p_{11} e^{-\mu_1 \tau}(1 - \kappa u_1')y_1'}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} + \frac{a_2 p_{12} e^{-\mu_2 \tau}(1 - \kappa u_1')y_2'}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2}\right) + \gamma_1 x_1'\right| \leq$$
$$\frac{\beta_{vh} a_1 p_{11} e^{-\mu_1 \tau}}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2}\left|(N_1 - x_1)[(1 - \kappa u_1)y_1] - (N_1 - x_1')[(1 - \kappa u_1')y_1']\right| +$$
$$\frac{\beta_{vh} a_2 p_{12} e^{-\mu_2 \tau}}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2}\left|(N_1 - x_1)[(1 - \kappa u_1)y_2] - (N_1 - x_1')[(1 - \kappa u_1')y_2']\right| +$$
$$\gamma_1 |x_1 - x_1'|$$

Имаме, че $x_1, x_1' \leq N_1, \quad (1 - \kappa u_1)y_1, (1 - \kappa u_1)y_1' \leq M_1, \quad (1 - \kappa u_1)y_2, (1 - \kappa u_1)y_2' \leq M_2$:

$$\left|(N_1 - x_1)[(1 - \kappa u_1)y_1] - (N_1 - x_1')[(1 - \kappa u_1')y_1']\right| \leq 2N_1|(1 - \kappa u_1)y_1 - (1 - \kappa u_1')y_1'| + M_1|x_1 - x_1'| \leq$$
$$2N_1(2|y_1 - y_1'| + M_1\kappa|u_1 - u_1'|) + M_1|x_1 - x_1'|$$
$$\left|(N_1 - x_1)[(1 - \kappa u_1)y_2] - (N_1 - x_1')[(1 - \kappa u_1')y_2']\right| \leq 2N_1|(1 - \kappa u_1)y_2 - (1 - \kappa u_1')y_2'| + M_2|x_1 - x_1'| \leq$$
$$2N_1(2|y_2 - y_2'| + M_2\kappa|u_1 - u_1'|) + M_2|x_1 - x_1'|$$

Тук също ползвахме $1 - \kappa u_1, 1 - \kappa u_1' \leq 1, \quad y_1, y_1' \leq M_1, \quad y_2, y_2' \leq M_2$. Така получихе оценка отгоре за първото събираемо
Тъй като видът на f_2 е същият с точност до индекси, то директно получаваме и оценка за третото събираемо.

Сега да разгледаме за g_1:

$$\Big|\beta_{hv} a_1 (M_1 - y_1) \frac{p_{11}(1-\kappa u_1)x_1 + p_{21}(1-\kappa u_2)x_2}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} - \mu_1 y_1 -$$
$$\beta_{hv} a_1 (M_1 - y_1') \frac{p_{11}(1-\kappa u_1')x_1' + p_{21}(1-\kappa u_2')x_2'}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} + \mu_1 y_1'\Big| \le$$
$$\frac{\beta_{hv} a_1 p_{11}}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2}\big|(M_1 - y_1)[(1-\kappa u_1)x_1] - (M_1 - y_1')[(1-\kappa u_1')x_1']\big| +$$
$$\frac{\beta_{hv} a_1 p_{21}}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2}\big|(M_1 - y_1)[(1-\kappa u_2)x_2] - (M_1 - y_1')[(1-\kappa u_2')x_2']\big| +$$
$$\mu_1 |y_1 - y_1'|$$

Ограниченията са $y_1, y_1' \le M_1, \quad (1-\kappa u_1)x_1, (1-\kappa u_1')x_1' \le N_1, \quad (1-\kappa u_2)x_2, (1-\kappa u_2')x_2' \le N_2$:

$$\big|(M_1 - y_1)[(1-\kappa u_1)x_1] - (M_1 - y_1')[(1-\kappa u_1')x_1']\big| \le 2M_1|(1-\kappa u_1)x_1 - (1-\kappa u_1')x_1'| + N_1|y_1 - y_1'| \le$$
$$2M_1(2|x_1 - x_1'| + N_1\kappa|u_1 - u_1'|) + N_1|y_1 - y_1'|$$
$$\big|(M_1 - y_1)[(1-\kappa u_2)x_2] - (M_1 - y_1')[(1-\kappa u_2')x_2']\big| \le 2M_1|(1-\kappa u_2)x_2 - (1-\kappa u_2')x_2'| + N_2|y_1 - y_1'|$$
$$2M_1(2|x_2 - x_2'| + N_2\kappa|u_2 - u_2'|) + N_2|y_1 - y_1'|$$

Тук също ползвахме $1-\kappa u_1, 1-\kappa u_1', 1-\kappa u_2, 1-\kappa u_2' \le 1, \quad x_1, x_1' \le M_1, \quad x_2, x_2' \le M_2$. Така получихе оценка отгоре за второто събираемо
Тъй като видът на g_2 е същият с точност до индекси, то директно получаваме и оценка за четвъртото събираемо.
За да проверим липшицовостта по фазовите променливи, то заместваме с $u_1 = 1_1', u_2 = u_2'$ всичко и за цялата дясна страна е в сила:

$$\|\mathbf{F}(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1', u_2') - \mathbf{F}(x_1', y_1', x_2', y_2', u_1', u_2')\| \le$$
$$\frac{\beta_{vh} a_1 p_{11} e^{-\mu_1\tau}}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2}(4N_1|y_1 - y_1'| + M_1|x_1 - x_1'|) + \frac{\beta_{vh} a_2 p_{12} e^{-\mu_2\tau}}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2}(4N_1|y_2 - y_2'| + M_1|x_1 - x_1'|) + \gamma_1|x_1 - x_1'| +$$
$$\frac{\beta_{hv} a_1 p_{11}}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2}(4M_1|x_1 - x_1'| + N_1|y_1 - y_1'|) + \frac{\beta_{hv} a_1 p_{21}}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2}(4M_1|x_2 - x_2'| + N_2|y_1 - y_1'|) + \mu_1|y_1 - y_1'| +$$
$$\frac{\beta_{vh} a_1 p_{21} e^{-\mu_1\tau}}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2}(4N_1|y_1 - y_1'| + M_1|x_1 - x_1'|) + \frac{\beta_{vh} a_2 p_{22} e^{-\mu_2\tau}}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2}(4N_1|y_2 - y_2'| + M_1|x_1 - x_1'|) + \gamma_2|x_2 - x_2'| +$$
$$\frac{\beta_{hv} a_2 p_{12}}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2}(4M_2|x_1 - x_1'| + N_1|y_2 - y_2'|) + \frac{\beta_{hv} a_2 p_{22}}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2}(4M_2|x_2 - x_2'| + N_2|y_2 - y_2'|) + \mu_2|y_2 - y_2'| \le$$
$$C\|(x_1, y_1, x_2, y_2) - (x_1', y_1', x_2', y_2')\|$$

Накрая се използват неравенства от вида $|x_1 - x_1'| \le \|(x_1, y_1, x_2, y_2) - (x_1', y_1', x_2', y_2')\|$. Тогава, спрямо общата теория на диференциалните решения с управление, съществува единствено решение на (3) за произволни t.

III.2 Ограниченост на решението

Да разгледаме множеството

$$\Omega = \{0 \le x_1 \le N_1, 0 \le y_1 \le M_1, 0 \le x_2 \le N_2, 0 \le y_2 \le M_2\} \tag{9}$$

Началното условие е някъде в това множество, тъй като популациите са неотрицателни, а заразените индивиди не са над общата популация за съответната категория. Лесно може да се види, че е в сила:

(10) $$(x_1(0), y_1(0), x_2(0), y_2(0)) \in \Omega \implies \forall t > 0\,((x_1(0), y_1(0), x_2(0), y_2(0)) \in \Omega)$$

Трябва да се покаже, че **F** сочи към вътрешността на Ω, ако решението се намира по границата $\partial\Omega$. Но това наистина е така, от:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t)|_{\Omega\cap\{x_1(t)=0\}} = \beta_{vh} N_1(t)\left(\frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_1(t))y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} + \frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_1(t))y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right) \geq 0\\
&\dot{x}_1(t)|_{\Omega\cap\{x_1(t)=N_1\}} = -\gamma_1 N_1 < 0\\
&\dot{y}_1(t)|_{\Omega\cap\{y_1(t)=0\}} = \beta_{hv} a_1 M_1 \frac{p_{11}(1-\kappa u_1(t))x_1(t) + p_{21}(1-\kappa u_2(t))x_2(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} \geq 0\\
&\dot{y}_1(t)|_{\Omega\cap\{y_1(t)=M_1\}} = -\mu_1 M_1 < 0\\
&\dot{x}_2(t)|_{\Omega\cap\{x_2(t)=0\}} = \beta_{vh} N_2\left(\frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_2(t))y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} + \frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_2(t))y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right) \geq 0\\
&\dot{x}_2(t)|_{\Omega\cap\{x_2(t)=N_2\}} = -\gamma_2 N_2 < 0\\
&\dot{y}_2(t)|_{\Omega\cap\{y_2(t)=0\}} = \beta_{hv} a_2 M_2 \frac{p_{12}(1-\kappa u_1(t))x_1(t) + p_{22}(1-\kappa u_2(t))x_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2} \geq 0\\
&\dot{y}_2(t)|_{\Omega\cap\{y_2(t)=M_2\}} = -\mu_2 M_2 < 0
\end{aligned}$$

III.3 Кооперативност (квазимонотонност)

Доказваме квазимонотонността по дефиницията ДЕФИНИЦИЯ!!! Матрицата на Якоби $\mathbf{DF}(x_1, y_1, x_2, y_2)(t)$ ще ни трябав и натам, затова нека я изведем изцяло:

$$\mathbf{DF}(x_1,y_1,x_2,y_2)(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_{x_1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_{x_1}}{\partial y_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_{x_1}}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathbf{F}_{x_1}}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{y_1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_{y_1}}{\partial y_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_{y_1}}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathbf{F}_{y_1}}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{x_2}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_{x_2}}{\partial y_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_{x_2}}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathbf{F}_{x_2}}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{y_2}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_{y_2}}{\partial y_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_{y_2}}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathbf{F}_{y_2}}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{x_1}}{\partial x_1} = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} = -\beta_{vh}\left(\frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_1(t))y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} + \frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_1(t))y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right) - \gamma_1 < 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{x_1}}{\partial y_1} = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial y_1} = \beta_{vh}(N_1 - x_1(t))\frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_1(t))}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{x_1}}{\partial x_2} = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{x_1}}{\partial y_2} = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial y_2} = \beta_{vh}(N_1 - x_1(t))\frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_1(t))}{p_{12}N_1+p_{22}N_2} \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{y_1}}{\partial x_1} = \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial x_1} = \beta_{hv}a_1(M_1 - y_1(t))\frac{p_{11}(1-\kappa u_1(t))}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{y_1}}{\partial y_1} = \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_1} = -\beta_{hv}a_1\frac{p_{11}(1-\kappa u_1(t))x_1(t) + p_{21}(1-\kappa u_2(t))x_2(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} - \mu_1 < 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{y_1}}{\partial x_2} = \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial x_2} = \beta_{hv}a_1(M_1 - y_1(t))\frac{p_{21}(1-\kappa u_2(t))}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{y_1}}{\partial y_2} = \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_2} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{x_2}}{\partial x_1} = \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{x_2}}{\partial y_1} = \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial y_1} = \beta_{vh}(N_2 - x_2(t))\frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_2(t))}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{x_2}}{\partial x_2} = \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} = -\beta_{vh}\left(\frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_2(t))y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} + \frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_2(t))y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right) - \gamma_2 < 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{x_2}}{\partial y_2} = \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial y_2} = \beta_{vh}(N_2 - x_2(t))\frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_2(t))}{p_{12}N_1+p_{22}N_2} \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{y_2}}{\partial x_1} = \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial x_1} = \beta_{hv}a_2(M_2 - y_2(t))\frac{p_{12}(1-\kappa u_1(t))}{p_{12}N_1+p_{22}N_2} \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{y_12}}{\partial y_1} = \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial y_1} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{y_2}}{\partial x_2} = \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial x_2} = \beta_{hv}a_2(M_2 - y_2(t))\frac{p_{22}(1-\kappa u_2(t))}{p_{12}N_1+p_{22}N_2} \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{y_2}}{\partial y_2} = \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial y_2} = -\beta_{hv}a_2\frac{p_{12}(1-\kappa u_1(t))x_1(t) + p_{22}(1-\kappa u_2(t))x_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2} - \mu_2 < 0$$

Извън главния диагонал има само неотрицателни елементи, тогава системата е кооперативна.

III.4 Неразложимост

Използваме теорема 3.2.1 от [5], която гласи:

Теорема III.1. *Матрица* $A = (a_{ij})$ *е неразложима точно когато ориентираният граф* $G = (V, E)$, *с върхове* $V = \{1, \cdots, n\}$ *и ребра* $E = \{(i, j) | a_{ij} \neq 0\}$, *е силно свързан.*

Твърдение III.2. *Якобианът на системата* 3 *е неразложим.*

Доказателство. Заместваме ненулевите елементи на $\mathbf{DF}$ с 1. Така получаваме графа с матрица на съседство D:

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \mathrm{D}^3 = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 7 \end{pmatrix} > \mathcal{O} \tag{11}$$

Тъй графа има 4 върха, с матрицата на съседство повдигната на 3-та степен виждаме кои върхове са свързани помежду си и кои не (тъй като ще получим информация за свързаните компоненти, от факта че всеки прост път е с дължина не по-голяма от 3). Тъй като има единствена свързана компонента, то графът е свързан.Спрямо $III.1$ откъдето $\mathbf{DF}$ е неразложима. ■

III.5 Силна вдлъбнатост

Твърдение III.3. *Системата е силно вдлъбната, т.е.* $\mathbf{0} < \mathbf{z}_1 < \mathbf{z}_2 \implies \mathbf{DF}(\mathbf{z}_2) < \mathbf{DF}(\mathbf{z}_1)$

Доказателство. Достатъчно условие за това е всяка компонента на $\mathbf{DF}$ да е нерастяща функция по всички променливи, като за поне една от тях да е намаляваща. Това може да проверим с производни по различните променливи:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial x_1 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial x_1 \partial y_1} = -\beta_{vh} \frac{p_{11} e^{-\mu_1 \tau} a_1 (1 - \kappa u_1(t))}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} < 0, \\
&\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial x_1 \partial y_2} = -\beta_{vh} \frac{p_{12} e^{-\mu_2 \tau} a_2 (1 - \kappa u_1(t))}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} < 0 \\
&\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial y_1 \partial x_1} = -\beta_{vh} \frac{p_{11} e^{-\mu_1 \tau} a_1 (1 - \kappa u_1(t))}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial y_1 \partial y_1} = 0, \\
&\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial y_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial y_1 \partial y_2} = 0 \\
&\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial x_2 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial x_2 \partial y_1} = 0, \\
&\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial x_2 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial x_2 \partial y_2} = 0 \\
&\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial y_2 \partial x_1} = -\beta_{vh} \frac{p_{12} e^{-\mu_2 \tau} a_2 (1 - \kappa u_1(t))}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial y_2 \partial y_1} = 0, \\
&\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial y_2 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial y_2 \partial y_2} = 0 \\
&\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial x_1 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial x_1 \partial y_1} = -\beta_{hv} a_1 \frac{p_{11} (1 - \kappa u_1(t))}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} < 0,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial x_1 \partial y_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial y_1 \partial x_1} = -\beta_{hv} a_1 \frac{p_{11}(1-\kappa u_1(t))}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial y_1 \partial y_1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial y_1 \partial x_2} = -\beta_{hv} a_1 \frac{p_{21}(1-\kappa u_2(t))x_2(t)}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial y_1 \partial y_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial x_2 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial x_2 \partial y_1} = -\beta_{hv} a_1 \frac{p_{21}(1-\kappa u_2(t))}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} < 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial x_2 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial x_2 \partial y_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial y_2 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial y_2 \partial y_1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial y_2 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial y_2 \partial y_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial x_1 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial x_1 \partial y_1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial x_1 \partial y_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial y_1 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial y_1 \partial y_1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial y_1 \partial x_2} = -\beta_{vh} \frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau} a_1(1-\kappa u_2(t))}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial y_1 \partial y_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial x_2 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial x_2 \partial y_1} = -\beta_{vh} \frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau} a_1(1-\kappa u_2(t))}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} < 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial x_2 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial x_2 \partial y_2} = -\beta_{vh} \frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau} a_2(1-\kappa u_2(t))}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} < 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial y_2 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial y_2 \partial y_1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial y_2 \partial x_2} = -\beta_{vh} \frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau} a_2(1-\kappa u_2(t))}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial y_2 \partial y_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial x_1 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial x_1 \partial y_1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial x_1 \partial y_2} = -\beta_{hv} a_2 \frac{p_{12}(1-\kappa u_1(t))}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} < 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial y_1 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial y_1 \partial y_1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial y_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial y_1 \partial y_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial x_2 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial x_2 \partial y_1} = 0,$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial x_2 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial x_2 \partial y_2} = -\beta_{hv} a_2 \frac{p_{22}(1-\kappa u_2(t))}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} < 0 \\
&\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial y_2 \partial x_1} = -\beta_{hv} a_2 \frac{p_{12}(1-\kappa u_1(t))}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial y_2 \partial y_1} = 0, \\
&\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial y_2 \partial x_2} = -\beta_{hv} a_2 \frac{p_{22}(1-\kappa u_2(t))}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial y_2 \partial y_2} = 0
\end{aligned}
$$

Така достатъчното условие е изпълнено и системата притежава силна вдлъбнатост. ■

III.6 Неподвижни точки

Системата е силно нелинейна и с голяма размерност, откъдето не е възможно да бъдат изведени аналитични изрази за равновесните точки, различни от тривиалната ($\mathbf{0}$). С помощта на теорията на кооперативните системи може да получим техния брой.

Да разгледаме константно управление $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u} = const$. Веднага се вижда, че $\mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{0}$ е тривиалната неподвижна точка на системата. Сега разглеждаме за фиксирано управление $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{u}$.

Ще използваме теоремата на Smith за автономни системи. Видя се, че системата е кооперативна, с неразложима матрица на Якоби и е силно вдлъбната. Тогава имаме всички условия от ЦИТАТ Smith!!! . При $R_0(\mathbf{u}) \leq 1$, $\mathbf{0}$ е единствена устойчива неподвижна точка, а при $R_0(\mathbf{u}) > 1$, то $\mathbf{0}$ е неустойчива неподвижна точка и съществува точно една друга устойчива, намираща се във вътрешността на Ω.

Във случая $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}$, то ако имаме ендемична точка $\mathbf{E}^*$ и $E_1^* > \bar{I}_1 \vee E_3^* > \bar{I}_2$, то търсената от нас задача няма решение. Наистина, всяка друга система $\mathbf{u}(t)$ мяжорира тази, а тук поне от някъде нататък траекторията злиза извън желаното множество. Но тогава и за всяка друга система траекторията ще излезе от него, тоест не можем да намерим каквото и да било управление, за което във всеки момент заразените и в двете области хора да са под желаните прагове.

Обратната посока не е ясна. В случая $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$, то ако липсва ендемична точка, решението ще клони към $\mathbf{0}$, но не е ясно дали винаги се намира в желаното множество, или по някакъв начин се нгъва и клони излизайки от него.

При $R_0 \leq 1$, $\mathbf{0}$ е единствена устойчива неподвижна точка, а при $R_0 > 1$, то $\mathbf{0}$ е неустойчива неподвижна точка и съществува точно една друга устойчива, намираща се във вътрешността на Ω.

Ендемичната точка (когато съществува) може да бъде намерена приблизително по два начина. П ървият е да се пусне числена симулация на системата и когато решението вече не се мени значително, то знаем, че сме в околност на епидемичната точка, откъдето може да я преближим с решението в съответния момент. Другият начин е да се реши числено нелинейната система, получена когато се занулят левите страни на 3. Полученото решение ще е равновесна точка (но може да получим и $\mathbf{0}$). Варирайки първоначалното приближение, ще получим и приближение на ендемичната точка.

IV Вариационна задача на Хамилтон-Якоби-Белман

За намиране на ядрото на допустимост (8) се подхожда със задачата на Хамилтон-Якоби-Белман за минимизация на функционал, като v е фунцкията на стойността. Опитваме се да решим:

$$\min\{\lambda v(x_1,y_1,x_2,y_2)+\mathcal{H}(x_1,y_1,x_2,y_2,\boldsymbol{\nabla} v), v(x_1,y_1,x_2,y_2)-\Gamma(x_1,y_1,x_2,y_2)\}=0 \tag{12}$$

Хамилтонянът е дефиниран чрез производна по направлението $\boldsymbol{\nabla} v$, като:

$$\mathcal{H}(x_1,y_1,x_2,y_2,\boldsymbol{\nabla} v)=-\max_{u\in\mathcal{U}}\langle \mathbf{F}(x_1,y_1,x_2,y_2,u_1,u_2),\boldsymbol{\nabla} v\rangle \tag{13}$$

Използвайки вида на $\mathbf{F}$, след групиране по части зависещи/независещи от управлението, получаваме:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(x_1,y_1,x_2,y_2,\boldsymbol{\nabla} v)=&\left[\gamma_1 x_1(t)-\beta_{vh}(N_1-x_1(t))\left(\frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}+\frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right)\right]\frac{\partial v}{\partial x_1}+\\
&\left[\mu_1 y_1(t)-\beta_{hv}a_1(M_1-y_1(t))\frac{p_{11}x_1(t)+p_{21}x_2(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}\right]\frac{\partial v}{\partial y_1}+\\
&\left[\gamma_2 x_2(t)-\beta_{vh}(N_2-x_2(t))\left(\frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}+\frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right)\right]\frac{\partial v}{\partial x_2}+\\
&\left[\mu_2 y_2(t)-\beta_{hv}a_2(M_2-y_2(t))\frac{p_{12}x_1(t)+p_{22}x_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right]\frac{\partial v}{\partial y_2}+\\
&\max\left\{0,\beta_{vh}(N_1-x_1(t))\kappa\bar{u}_1\left(\frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}+\frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right)\frac{\partial v}{\partial x_1}\right\}+\\
&\max\left\{0,\beta_{hv}a_1(M_1-y_1(t))\kappa\frac{p_{11}\bar{u}_1x_1(t)+p_{21}\bar{u}_2x_2(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}\frac{\partial v}{\partial y_1}\right\}+\\
&\max\left\{0,\beta_{vh}(N_2-x_2(t))\kappa\bar{u}_2\left(\frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}+\frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right)\frac{\partial v}{\partial x_2}\right\}+\\
&\max\left\{0,\beta_{hv}a_1(M_2-y_2(t))\kappa\frac{p_{12}\bar{u}_1x_1(t)+p_{22}\bar{u}_2x_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\frac{\partial v}{\partial y_2}\right\}
\end{aligned}$$

V Числено приближение на ядрото на допустимост

V.1 Еквивалентна задача

[3]

V.2 WENO

За численото пресмятане на задачата се използва дискретизация по пространството по метода Weighted Essentially Non-Oscillatory (WENO) за приближаване, което е от ред $O(h^5)$. [3]

V.3 Дискретизация по времето

Отново по Osher, дискретизираме по времето с подобрения метод на Ойлер, който е добре известно е от ред $O(\tau^2)$. [3]

V.4 Симулация

Литература

[1] Vincenzo Capasso. Англ. В: *Mathematical Structures of Epidemic Systems*. 2-е изд. Springer, 2008. Гл. 2.2.4, 2.3.1.2.4, 4.3.3, с. 16, 27—30, 115. ISBN: 978-3-540-56526-0.

[2] Derdei Bichara & Carlos Castillo-Chavez. "Vector-borne diseases models with residence times – A Lagrangian perspective". Англ. В: *Mathematical Biosciences* (10 сент. 2016).

[3] Stanley Osher & Ronald Fedkiw. Англ. В: *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. 1-е изд. Springer, 2003. Гл. I-II.3, с. 1—41. ISBN: 978-0-387-95482-1.

[4] Peter Rashkov. "INSERT TITLE". Англ. В: *Journal* (1 ян. 2019).

[5] Richard A. Brualdi & Herbert J. Ryser. Англ. В: *Combinatorial Matrix Theory*. 1-е изд. Encyclopedia of Mathematics and its Applications №39. Cambridge University Press, 1991. Гл. 3.2, с. 55—56. ISBN: 978-0-521-32265-2.