

Изследване на ефектите на репелент срещу комари в малариен модел на Ross-Macdonald с две местообитания

Каляян Стоилов

9 януари 2025 г.

Имаме системата:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \beta_{vh}(N_1 - x_1) \left(\frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1(1 - \kappa u_1)y_1}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} + \frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2(1 - \kappa u_1)y_2}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} \right) - \gamma_1 x_1 \\ \dot{y}_1(t) &= \beta_{hv}a_1(M_1 - y_1) \frac{p_{11}(1 - \kappa u_1)x_1 + p_{21}(1 - \kappa u_2)x_2}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} - \mu_1 y_1 \\ \dot{x}_2(t) &= \beta_{vh}(N_2 - x_2) \left(\frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1(1 - \kappa u_2)y_1}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} + \frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2(1 - \kappa u_2)y_2}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} \right) - \gamma_2 x_2 \\ \dot{y}_2(t) &= \beta_{hv}a_2(M_2 - y_2) \frac{p_{12}(1 - \kappa u_1)x_1 + p_{22}(1 - \kappa u_2)x_2}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} - \mu_2 y_2\end{aligned}$$

Първо, отбелязваме, че ако е в сила $z, z' < C_z$ и $s, s' < C_s$, то е изпълнено:

$$\begin{aligned}|(C_z - z)s - (C_z - z')s'| &= |C_z s - z s - C_z s' + z' s' + z s' - z s'| = |C_z(s - s') - z(s - s') - s'(z - z')| \leq \\ &|C_z||s - s'| + |z||s - s'| + |s'||z - z'| \leq 2|C_z||s - s'| + |C_s||z - z'| \leq \max\{2|C_z|, |C_s|\}(|s - s'| + |z - z'|)\end{aligned}$$

Ще използваме това твърдение при дозателството на Липшицовата непрекъснатост на дясната страна. Взимаме произволни допустими двойки $(x_1, y_1, x_2, y_2), (x'_1, y'_1, x'_2, y'_2) \in \Omega$ и $(u_1, u_2), (u'_1, u'_2) \in [0, \bar{u}_1] \times [0, \bar{u}_2]$. Първо от неравенството на триъгълника имаме, че:

$$\begin{aligned}\|F(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - F(x'_1, y'_1, x'_2, y'_2, u'_1, u'_2)\| &\leq \\ |f_1(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - f_1(x'_1, y'_1, x'_2, y'_2, u'_1, u'_2)| &+ |g_2(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - g_2(x'_1, y'_1, x'_2, y'_2, u'_1, u'_2)| + \\ |g_1(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - g_1(x'_1, y'_1, x'_2, y'_2, u'_1, u'_2)| &+ |f_2(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - f_2(x'_1, y'_1, x'_2, y'_2, u'_1, u'_2)|\end{aligned}$$

Сега може неколккратно да ползваме горната оценка за f_1 :

$$\begin{aligned}&\left| \beta_{vh}(N_1 - x_1) \left(\frac{a_1 p_{11} e^{-\mu_1 \tau} (1 - \kappa u_1) y_1}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} + \frac{a_2 p_{12} e^{-\mu_2 \tau} (1 - \kappa u_1) y_2}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} \right) - \gamma_1 x_1 - \right. \\ &\left. \beta_{vh}(N_1 - x'_1) \left(\frac{a_1 p_{11} e^{-\mu_1 \tau} (1 - \kappa u'_1) y'_1}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} + \frac{a_2 p_{12} e^{-\mu_2 \tau} (1 - \kappa u'_1) y'_2}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} \right) + \gamma_1 x'_1 \right| \leq \\ &\frac{\beta_{vh} a_1 p_{11} e^{-\mu_1 \tau}}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} |(N_1 - x_1)[(1 - \kappa u_1) y_1] - (N_1 - x'_1)[(1 - \kappa u'_1) y'_1]| + \\ &\frac{\beta_{vh} a_2 p_{12} e^{-\mu_2 \tau}}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} |(N_1 - x_1)[(1 - \kappa u_1) y_2] - (N_1 - x'_1)[(1 - \kappa u'_1) y'_2]| + \\ &\gamma_1 |x_1 - x'_1|\end{aligned}$$

Имаме, че $x_1, x'_1 \leq N_1$, $(1 - \kappa u_1)y_1, (1 - \kappa u_1)y'_1 \leq M_1$, $(1 - \kappa u_1)y_2, (1 - \kappa u_1)y'_2 \leq M_2$:

$$\begin{aligned} |(N_1 - x_1)[(1 - \kappa u_1)y_1] - (N_1 - x'_1)[(1 - \kappa u'_1)y'_1]| &\leq 2N_1|(1 - \kappa u_1)y_1 - (1 - \kappa u'_1)y'_1| + M_1|x_1 - x'_1| \leq \\ &2N_1(2|y_1 - y'_1| + M_1\kappa|u_1 - u'_1|) + M_1|x_1 - x'_1| \\ |(N_1 - x_1)[(1 - \kappa u_1)y_2] - (N_1 - x'_1)[(1 - \kappa u'_1)y'_2]| &\leq 2N_1|(1 - \kappa u_1)y_2 - (1 - \kappa u'_1)y'_2| + M_2|x_1 - x'_1| \leq \\ &2N_1(2|y_2 - y'_2| + M_2\kappa|u_1 - u'_1|) + M_2|x_1 - x'_1| \end{aligned}$$

Тук също ползвахме $1 - \kappa u_1, 1 - \kappa u'_1 \leq 1$, $y_1, y'_1 \leq M_1$, $y_2, y'_2 \leq M_2$. Така получихме оценка отгоре за първото събираемо

Тъй като видът на f_2 е същият с точност до индекси, то директно получаваме и оценка за третото събираемо.

Сега да разгледаме за g_1 :

$$\begin{aligned} &\left| \beta_{hv}a_1(M_1 - y_1) \frac{p_{11}(1 - \kappa u_1)x_1 + p_{21}(1 - \kappa u_2)x_2}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} - \mu_1 y_1 - \right. \\ &\left. \beta_{hv}a_1(M_1 - y'_1) \frac{p_{11}(1 - \kappa u'_1)x'_1 + p_{21}(1 - \kappa u'_2)x'_2}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} + \mu_1 y'_1 \right| \leq \\ &\frac{\beta_{hv}a_1 p_{11}}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} |(M_1 - y_1)[(1 - \kappa u_1)x_1] - (M_1 - y'_1)[(1 - \kappa u'_1)x'_1]| + \\ &\frac{\beta_{hv}a_1 p_{21}}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} |(M_1 - y_1)[(1 - \kappa u_2)x_2] - (M_1 - y'_1)[(1 - \kappa u'_2)x'_2]| + \\ &\mu_1 |y_1 - y'_1| \end{aligned}$$

Ограниченията са $y_1, y'_1 \leq M_1$, $(1 - \kappa u_1)x_1, (1 - \kappa u'_1)x'_1 \leq N_1$, $(1 - \kappa u_2)x_2, (1 - \kappa u'_2)x'_2 \leq N_2$:

$$\begin{aligned} |(M_1 - y_1)[(1 - \kappa u_1)x_1] - (M_1 - y'_1)[(1 - \kappa u'_1)x'_1]| &\leq 2M_1|(1 - \kappa u_1)x_1 - (1 - \kappa u'_1)x'_1| + N_1|y_1 - y'_1| \leq \\ &2M_1(2|x_1 - x'_1| + N_1\kappa|u_1 - u'_1|) + N_1|y_1 - y'_1| \\ |(M_1 - y_1)[(1 - \kappa u_2)x_2] - (M_1 - y'_1)[(1 - \kappa u'_2)x'_2]| &\leq 2M_1|(1 - \kappa u_2)x_2 - (1 - \kappa u'_2)x'_2| + N_2|y_1 - y'_1| \\ &2M_1(2|x_2 - x'_2| + N_2\kappa|u_2 - u'_2|) + N_2|y_1 - y'_1| \end{aligned}$$

Тук също ползвахме $1 - \kappa u_1, 1 - \kappa u'_1, 1 - \kappa u_2, 1 - \kappa u'_2 \leq 1$, $x_1, x'_1 \leq M_1$, $x_2, x'_2 \leq M_2$. Така получихме оценка отгоре за второто събираемо

Тъй като видът на g_2 е същият с точност до индекси, то директно получаваме и оценка за третото събираемо.

Тогава заместваме всичко и за цялата дясна страна е в сила:

$$\begin{aligned}
& \|F(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - F(x'_1, y'_1, x'_2, y'_2, u'_1, u'_2)\| \leq \\
& \frac{\beta_{vh} a_1 p_{11} e^{-\mu_1 \tau}}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} (2N_1 (2|y_1 - y'_1| + M_1 \kappa |u_1 - u'_1|) + M_1 |x_1 - x'_1|) + \\
& \frac{\beta_{vh} a_2 p_{12} e^{-\mu_2 \tau}}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} (2N_1 (2|y_2 - y'_2| + M_2 \kappa |u_1 - u'_1|) + M_1 |x_1 - x'_1|) + \gamma_1 |x_1 - x'_1| + \\
& \frac{\beta_{hv} a_1 p_{11}}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} (2M_1 (2|x_1 - x'_1| + N_1 \kappa |u_1 - u'_1|) + N_1 |y_1 - y'_1|) + \\
& \frac{\beta_{hv} a_1 p_{21}}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} (2M_1 (2|x_2 - x'_2| + N_2 \kappa |u_2 - u'_2|) + N_2 |y_1 - y'_1|) + \mu_1 |y_1 - y'_1| + \\
& \frac{\beta_{vh} a_1 p_{21} e^{-\mu_1 \tau}}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} (2N_1 (2|y_1 - y'_1| + M_1 \kappa |u_1 - u'_1|) + M_1 |x_1 - x'_1|) + \\
& \frac{\beta_{vh} a_2 p_{22} e^{-\mu_2 \tau}}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} (2N_1 (2|y_2 - y'_2| + M_2 \kappa |u_1 - u'_1|) + M_1 |x_1 - x'_1|) + \gamma_2 |x_2 - x'_2| + \\
& \frac{\beta_{hv} a_2 p_{12}}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} (2M_2 (2|x_1 - x'_1| + N_1 \kappa |u_1 - u'_1|) + N_1 |y_2 - y'_2|) + \\
& \frac{\beta_{hv} a_2 p_{22}}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} (2M_2 (2|x_2 - x'_2| + N_2 \kappa |u_2 - u'_2|) + N_2 |y_2 - y'_2|) + \mu_2 |y_2 - y'_2| \leq
\end{aligned}$$