Изследване на ефектите на репелент срещу комари в маларием модел на Ross-Macdonald с две местообитания

изготвил: Калоян Стоилов

ръководител: Петър Рашков

Дипломна работа за образователна степен магистър

Факултет по математика и информатика
Софийски Университет "Свети Климент Охридски"
28 март 2025 г.

Съдържание

I Въведение **1**
- I.1 Малария . . . 1
- I.2 SIS модел на Ross-Macdonald . . . 1
- I.3 Репродукционно число $\mathscr{R}_0$ . . . 3
- I.4 Кооперативни(квазимонотонни) системи . . . 3
- I.5 Модел на Ross-Macdonald с мобилност . . . 4
- I.6 Модел на Ross-Macdonald с използване на репелент . . . 5

II Модел на Ross-Macdonald с две местообитания и репелент **7**

III Съществуване на решение и основни свойства **10**
- III.1 Липшицовост по фазови променливи . . . 10
- III.2 Ограниченост на решението . . . 11
- III.3 Кооперативност (квазимонотонност) . . . 13
- III.4 Неразложимост . . . 14
- III.5 Силна вдлъбнатост . . . 14
- III.6 Неподвижни точки . . . 16

IV Вариационна задача на Хамилтон-Якоби-Белман **17**

V Числено приближение на ядрото на допустимост **18**
- V.1 Еквивалентна задача . . . 18
- V.2 WENO . . . 18
- V.3 Дискретизация по времето . . . 18
- V.4 Симулация . . . 18

Литература **19**

I Въведение

I.1 Малария

Разглеждат се само женските комари в популяцията, понеже те са хапещите. Комарите нямат имунна система и не оздравяват от маларийния плазмодий, откъдето заразени комари се отстраняват от популацията само чрез смъртност.

I.2 SIS модел на Ross-Macdonald

Основни факти за живота на Ronald Ross може да намерим в [1]. Ronald Ross е роден в Индия през 1857 г. Израства там, след което получава медицинско образование в Англия през 1888 г., а после започва изследване на маларията. През 1897 г. извършва експерименти върху птици. Намирайки паразита в слюнчестите жлези на комари от рода *Anopheles*, доказва, че маларията се предава чрез тяхното ухапване. След кратко завръщане за преподаване в Англия, обикаля по много места с цел лансиране борбата срещу комарите. Идеята, че намаляването на популацията комари би могло да премахне маларията, била посрешната с недоверие. През 1902 г. става носител на Нобеловата награда за физиология или медицина. Понеже през младините си изучава в свободното си време математика, решава да създаде модел през 1910 г. в книгата "The Prevention of Malaria". Модела изгражда на базата на две диференциални уравнения.

Фигура 1: Dr George Macdonald, 1903-1967

Фигура 2: Sir Ronald Ross, 1857-1932

Моделът прави следните допускания, които се пренасят и в неговите усложнения:

1. Човешката популация и популацията комари е постоянна.
2. Хората и комарите са разпределени равномерно в средата.
3. Смъртността от заразата се пренебрегва, както при хората, така и при комарите.
4. Веднъж заразени, комарите не се възстановяват.
5. Само податливи се заразяват.

6. Хората не придобиват никакъв имунитет.

$X(t)$ е броя заразени с малария хора в момент t. $Y(t)$ е броя заразени с малария комари в момент t. N е човешката популация. M е популацията от комари. γ е скоростта на оздравяване на хората. μ е скоростта на смъртност на комарите. b е честотата на ухапване на комарите. β_{vh} е константна вероятност за заразяване на здрав човек с патогена, когато бъде ухапан от заразен комар, а β_{hv} е константна вероятност за заразяване на здрав комар с патогена, когато ухапе заразен човек.

За интервал δt, заразените хора ще са $\beta_{vh} b Y(t) \frac{N-X(t)}{N} \delta t$, а възстановилите се заразени ще са $\gamma X(t) \delta t$, откъдето $\delta X(t) = \beta_{vh} b Y(t) \frac{N-X(t)}{X(t)} \delta t - \gamma X(t)$. За този интервал пък заразените комари ще са $\beta hv b(M - Y(t)) \frac{X(t)}{N} \delta t$, а от тях ще измрат $\mu Y(t) \delta t$. След деление на δt и граничен преход се достига до следния модел:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \beta_{vh}(N - x(t)) e^{-\mu\tau} b y(t) - \gamma x(t) \\ \dot{y}(t) &= \beta_{hv}(M - y(t)) b x(t) - \mu y(t) \end{aligned} \tag{1}$$

Изследвайки системата, веднага забелязва че една неподвижна точка е $(0,0)$, а открива, че епидемична е:

$$E^* = (X^*, Y^*) = \left(N \frac{1 - \frac{\gamma\mu N}{b^2 \beta_{vh} \beta_{hv} M}}{1 + \frac{\gamma N}{b \beta_{vh} M}}, M \frac{1 - \frac{\gamma\mu N}{b^2 \beta_{vh} \beta_{hv} M}}{1 + \frac{\mu}{b \beta_{hv}}} \right)$$

. Двете точки са с неотрицателни координати и това наистина представлява епидемична неподвижна точка на системата, стига да е изпълнено:

$$M > M^* = \frac{\gamma\mu N}{b^2 \beta_{vh} \beta_{hv}} \tag{2}$$

Така Ross показва, че не е необходимо да бъдат изтребени всички комари, за да се изкорени маларията, а само броят им да се сведе под M^*.

Прави заключението, че

> As a matter of fact all epidemiology, concerned as it is with the variation of disease from time to time or from place to place, must be considered mathematically, however many variables are implicated, if it is to be considered scientifically at all. To say that a disease depends upon certain factors is not to say much, until we can also form an estimate as to how largely each factor influences the whole result. And the mathematical method of treatment is really nothing but the application of careful reasoning to the problems at issue.

През следващата година публикува второ издание на "The Prevention of Malaria"и бива произведен в рицар. Ross почива през 1932.

В модела на Ross не се взима предвид явно факта, че не всеки заразѐн комар е заръзен, това неявно участва в β_{vh}. τ е инкубационният период на комарите. Така математическото очакване заразѐн комар да е станал заръзен може да се изрази като $e^{-\frac{\tau}{\text{ср. продължителност на живот}}}$. Но средната продължителност на живот на комарите е точно $\frac{1}{\mu}$, откъдето $e^{-\mu\tau} Y$ е броя заръзни комари. Така можеше да разложим $\beta_{vh} = \tilde{\beta}_{vh} e^{-\mu\tau}$, където $\tilde{\beta}_{vh}$ е същинската вероятност за заразяване на човек от комар. Това е направено в по-нататъшните модели.

ДА СЕ НАПИШЕ НЕЩО ЗА Macdonald

I.3 Репродукционно число $\mathscr{R}_0$

Оказва се, че в най-различни модели за разпространение на заразни болести има важен параметър $\mathscr{R}_0$, наричан репродукционно число, който носи смисъла на брой вторични случая на заразата, причинени от един първичен. За да може болестта да има ендемично състояние, то е необходимо $\mathscr{R}_0 > 1$, иначе броят заразени веднага щеше да намалее и съответно нямаше да има неподвижна точка, различна от $\mathbf{0}$.

За модела на Ross, репродукционното число може да бъде изведено лесно. Човек остава заразѐн (както и зара̀зен) средно $frac1\gamma$ време, а пък за единица време средно получава $\beta_{hv} b \frac{M}{N}$ ухапвания от комар, които предават патогена. Комар остава заразѐн за средно $frac1\mu$ време и хапе предавайки болестта $\beta_{vh} b$ пъти. Оттук достигаме до:

$$\mathscr{R}_0 = frac1\gamma \times \beta_{hv} b \frac{M}{N} \times frac1\mu \times \beta_{vh} b = \frac{b^2 \beta v h \beta_{hv} M}{\gamma \mu N} \tag{3}$$

Но от тази оценка веднага получаваме, че:

$$\mathscr{R}_0 > 1 \iff M > M^* = \frac{\gamma \mu N}{b^2 \beta_{vh} \beta_{hv}} \tag{4}$$

Но това е точно оценката на Ross 2.

Нека имаме $\mathbf{z}$ групи от заразени. $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Gz} = \mathscr{F}(\mathbf{z}) - \mathscr{V}(\mathbf{z})$, където $\mathscr{F}$ определя новите заразени, а $\mathscr{V}(\mathbf{z}) = \mathscr{V}^-(\mathbf{z}) - \mathscr{V}^+(\mathbf{z})$ е мобилността, която сме разделили на прииждащи и замиващи за съответните групи.

Дефиниция I.1 (М-матрица)**.** $A = (a_{ij})$ е М-матрица, ако $a_{ij} \le 0, i \ne j$ и собствените ѝ стойности имат неотрицателни реални части.

Теорема I.1. *При изпълнени следните условия:*

1. $\mathbf{z} \ge \mathbf{0} \implies \mathscr{V}(\mathbf{z}) \ge 0, \mathscr{V}^+(\mathbf{z}) \ge 0, \mathscr{V}^-(\mathbf{z}) \ge 0$
2. $z_i = 0 \implies \mathscr{V}_i^- = 0$
3. $\mathscr{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \mathscr{V}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
4. $\mathscr{F}(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \implies$ *всички собствени стойности на* $D\mathbf{F0}$ *са с отрицателна реална част*

в сила за репродукционното число е $\mathscr{R}_0 = \rho(FV^{-1})$*, където* ρ *е спектралния радиус, а* $F = D\mathscr{F}(\mathbf{0}), V = D\mathscr{V}(\mathbf{0})$*, където* $F \ge \mathscr{O}$*, а* V *е несингулярна М-матрица.*
Допълнително, $\mathbf{0}$ *е локално асимптотично устойчива, ако* $\mathscr{R}_0 < 1$ *и неустойчива, ако* $\mathscr{R}_0 > 1$.

F_{ij} е скоростта, с която индивид от група j заразява индивиди от група i, а V_{jk}^{-1} е средната продължителност на пребиваване на индивид от група k сред индивидите от група j, съответно $(FV^-1)_{ik}$ са средния брой новозаразени от i заради индивид от k.

I.4 Кооперативни(квазимонотонни) системи

Накратко ще се представят основите на кооперативните системи по учебник на Capasso [2].

Дефиниция I.2 (Съкратено означение)**.** $\mathbb{H} = \mathbb{R}_+^n$

Дефиниция I.3 ($\le$-сравнение на вектори)**.** Нека са дадени два вектора $\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{v} = (v_1,\cdots,v_n), \mathbf{w} = (w_1,\cdots,w_n)$. Дефинираме релацията $\le$ в $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ като:

$$\mathbf{v} \le \mathbf{w} \iff \forall i \in \{\overline{1,n}\}(v_i = w_i)$$

Нека е дадена динамичната система:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t,\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{f} \in C^1(J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), J \subset \mathbb{R} \text{ е интервал} \tag{5}$$

Дефиниция I.4 (Кооперативна система)**.** Системата 5 е кооперативна (или още квазимонотонна), ако

$$\forall t \in J \forall \mathbf{x} \in \mathbb{H} \forall i,j \in \{\overline{1,n}\} \left(i \neq j \implies \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \ge 0 \right) \tag{6}$$

С прости думи, кооперативните системи са динамични системи, при които променлива не може да доведе до понижаване на стойността на друга променлива. Името кооперативна произлиза от моделите за кооперативни междувидови отношения.

Дефиниция I.5 (Квазимонотонна матрица)**.** Матрица $A = (a_{ij})_{n \times n}$ е квазимонотонна, ако

$$\forall i,j \in \{\overline{1,n}\} \left(i \neq j \implies a_{ij} \ge 0 \right)$$

Теорема I.2. *(Perron-Frobenius) Ако A е квазимонотонна, то винаги има доминантна реална собствена стойност μ, на която съответства неотрицателен собствен вектор.*

Дефиниция I.6 ((Не-)разложима матрица)**.** Матрицата $A = (a_{ij})_{n \times n}$ е разложима, ако съществува пермутационна матрица P, с която:

$$PAP^T = \begin{pmatrix} B & C \\ \mathcal{O} & D \end{pmatrix}, \quad B, D \text{ - квадратни}$$

Матрици, които не са разложими се наричат неразложими.

Теорема I.3. *(Perron-Frobenius) Ако A е неразложима, то доминантната ѝ собствена стойност μ е проста и на нея отговаря положителен собствен вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{H}$.*

Теорема I.4. *Ако 5 е линейна (т.е. $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, A = (a_{ij})_{n \times n}$) система, то $\mathbb{H}$ е инвариантно. Допълнително, ако A е неразложима, то за кое да е $t > 0$ решението е във $int\mathbb{H}$, стига началното решение да е ненулево, т.е. $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$.*

Всъщност тук видяхме причината кооперативните системи да се наричат квазимонотонни - линейните кооперативни системи са тези с квазимонотонни матрици.

Теорема I.5 (Сравнение на решения)**.** *Нека $\mathbf{f},\mathbf{g} \in C^1(int\mathbb{H}, \mathbb{R}^n)$ са такива, че системите $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ са кооперативни, $\mathbf{f} \le \mathbf{g}$ и $\mathbf{x}_0 \le \mathbf{y}_0$. Тогава $\forall t > 0(\mathbf{x}(t) \le \mathbf{y}(t))$.*

I.5 Модел на Ross-Macdonald с мобилност

Разглежда се леко опростена форма на модела, предложен от Bichara [3]. Дадени са m местообитания с популации на комари и n популации с хора, като всяка от тях е с постоянен размер. Всяка от популациите си има своите съответни μ_j смъртности (комари) и γ_i скорости на оздравяване (хора). Комарите се приема, че не мигрират (което е разумно предположение с оглед ЦИТАТ ДВИЖЕНИЕ

КОМАРИ!!!). Предполага се, че индивидите от всяка от популациите хора, пребивават в местообитанията на комарите за p_{ij} част от времето, $\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$.
Нека с $x_i(t)$ бележим броя заразени хора, а с $y_j(t)$ - заразени комари. При направените допускания, в момент t, в местообитание j съотношението на заразени към всички хора е:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{ij} x_i(t)}{\sum_{i=1}^{n} p_{ij} N_i} \tag{7}$$

Ако b_j е броят на ухапвания за човек за единица време, a_j са ухапванията за комар за единица време, то като представим по два начина броя ухавпания в местообитание j:

$$a_j M_j = b_j \sum_{i=1}^{n} p_{ij} N_i \iff b_j = \frac{a_j M_j}{\sum_{i=1}^{n} p_{ij} N_i} \tag{8}$$

Модел за разпространението на заразата е следния:

1. В момент t заразените хора x_i се увеличават от ухапване на незаразен човек от заразени комари в различните местообитания, а намаляват пропорционално на броя си с коефициента на оздравяване. Заразяването моделираме по закона за масите, като коефициентът ще бъде b_j. Тогава може да се изрази $\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{m} \beta_{vh} b_j p_{ij} (N_i - x_i(t)) \frac{I_j}{M_j} - \gamma_i x_i(t)$.

2. В момент t заразените комари y_j се увеличават от ухапване на заразен човек от незаразен комар в местообитание j, а намаляват пропорционално на броя си с коефициента на смъртност. Заразяването моделираме по закона за масите, като коефициентът ще бъде a_j. Достига се до $\dot{y}_j(t) = \beta_{hv} a_j (M_j - y(t)) \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{ij} x_i(t)}{\sum_{i=1}^{n} p_{ij} N_i} - \mu_j y_j(t)$.

След като се вземе предвид оценката за b_j, то системата има вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \beta_{vh} (N_i - x_i(t)) \sum_{j=1}^{m} \frac{p_{ij} a_j I_j}{\sum_{k=1}^{n} p_{kj} N_k} - \gamma_i x_i(t), \quad i = \overline{1,n} \\ \dot{y}_j(t) &= \beta_{hv} a_j (M_j - y(t)) \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{ij} x_i(t)}{\sum_{i=1}^{n} p_{ij} N_i} - \mu_j y_j(t), \quad j = \overline{1,m} \end{aligned} \tag{9}$$

В [3] с помощта на резултати за кооперативни системи на Smith в [7] се показва, че за системата е изпълнено точно едно от:

- $\mathscr{R}_0 \leq 1$ и $\mathbf{0}$ е единствената равновесна точка и е глобално асимптотично устойчива.
- $\mathscr{R}_0 > 1$ и $\mathbf{0}$ е неустойчива равновесна точка, като ако системата е неразложима, има единствена глобално асимптотично устойчива точка вътрешна за $\bigtimes_{i=1}^{n} [0, N_i] \times \bigtimes_{j=1}^{m} [0, M_j]$ (тоест маларията има ендемичен характер).

Тъй като $\mathscr{R}_0$ не може да бъде получено в явен вид аналитично, останалата част от статията [3] разглежда различни аналитични оценки за $\mathscr{R}_0$ и няколко симулации.

I.6 Модел на Ross-Macdonald с използване на репелент

Разглежда се модела от [5]. По същността си уравненията на модела са като на $Ross - Macdonald$, но с усложнението, че може с помощта на репеленти ЦИТАТ РЕПЕЛЕНТИ!!! да се намали честотата на ухапвания, тоест има множител $(1-\kappa u(t))$ в закона за действие на масите, където κ е ефективността на репелента, а пък $u(t)$ функция управление, задаващо пропорцията на хора предпазени с помощтта на репелента. Разглежда се следния казус - възможно ли е всички заразени да бъдат хоспитализирани? Ако приемем, че има някакъв праг на заразените $\bar{I}$ и търсим такова управление $u(t)$, че $\forall t > 0 (x(t) < \bar{I})$.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \beta_{vh}(N - x(t))e^{-\mu\tau}a(1-\kappa u(t))y(t) - \gamma x(t) \\ \dot{y}(t) &= \beta_{hv}(M - y(t))a(1-\kappa u(t))x(t) - \mu y(t) \end{aligned} \tag{10}$$

Да се разпише едномерния модел с репелент!!!

II Модел на Ross-Macdonald с две местообитания и репелент

Задачата която се изследва в дипломната работа е:

$$
(11)\quad
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \beta_{vh}(N_1 - x_1(t))\left(\frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_1(t))y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} + \frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_1(t))y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right) - \gamma_1 x_1(t)\\
\dot{y}_1(t) &= \beta_{hv}a_1(M_1 - y_1(t))\frac{p_{11}(1-\kappa u_1(t))x_1(t) + p_{21}(1-\kappa u_2(t))x_2(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} - \mu_1 y_1(t)\\
\dot{x}_2(t) &= \beta_{vh}(N_2 - x_2(t))\left(\frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_2(t))y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} + \frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_2(t))y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right) - \gamma_2 x_2(t)\\
\dot{y}_2(t) &= \beta_{hv}a_2(M_2 - y_2(t))\frac{p_{12}(1-\kappa u_1(t))x_1(t) + p_{22}(1-\kappa u_2(t))x_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2} - \mu_2 y_2(t)
\end{aligned}
$$

Това е модел обендинение на моделите за мобилност и за репелент против комари. t е времето, като ще разглеждаме само $t \in [0, \infty)$.
$x_1, x_2 \in [0, N_i]$ са броят заразени хора, а $y_1, y_2 \in [0, M_i]$ - броят заразени комари в локации 1 и 2 съответно.
$u_1 \in [0, \bar{u}_1], u_2 \in [0, \bar{u}_2]$ са управленията отговарящи за това каква част от хората от съответното местообитание са предпазени от репелента, като $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \leq 1$ отговарят за максималната предпазена част от населението, вследствие от производствената способност. Надолу се бележи $\mathcal{U} = [0, \bar{u}_1] \times [0, \bar{u}_2]$ и $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$
$\kappa \in [0, 1]$ е константа, която представя ефективността на репелента (т.е. предполагаме че едно и също вещество/метод се използва и на двете места).
$p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22} \in [0, 0.5]$, $p_{11} + p_{12} = 1, p_{21} + p_{22} = 1$ са константи, отговарящи за мобилността, като p_{ij} е частта от хора от i, които пребивават временно в j.
γ_1, γ_2 са скоростите на оздравяване на хората, а μ_1, μ_2 - скоростите на смъртност на комарите, които приемаме за константи.
τ е константа на средното време, за което комарите стават заразни.
α_1, α_2 са константи, които бележат колко ухапвания на комари има за единица време.
β_{vh} е константна вероятност за заразяване на здрав човек с патогена, когато бъде ухапан от заразен комар, а β_{hv} е константна вероятност за заразяване на здрав комар с патогена, когато ухапе заразен човек.

Моделът подлежи на обезразмеряване чрез смяната $(x_1, y_1, x_2, y_2) \to (\frac{x_1}{N_1}, \frac{y_1}{M_1}, \frac{x_2}{N_2}, \frac{y_2}{M_2})$. След това достигаме до:

$$
(12)\quad
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \beta_{vh}(1 - x_1(t))\left(\frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_1(t))M_1y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} + \frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_1(t))M_2y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right) - \gamma_1 x_1(t)\\
\dot{y}_1(t) &= \beta_{hv}a_1(1 - y_1(t))\frac{p_{11}(1-\kappa u_1(t))N_1x_1(t) + p_{21}(1-\kappa u_2(t))N_2x_2(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} - \mu_1 y_1(t)\\
\dot{x}_2(t) &= \beta_{vh}(1 - x_2(t))\left(\frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_2(t))M_1y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} + \frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_2(t))M_2y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right) - \gamma_2 x_2(t)\\
\dot{y}_2(t) &= \beta_{hv}a_2(1 - y_2(t))\frac{p_{12}(1-\kappa u_1(t))N_1x_1(t) + p_{22}(1-\kappa u_2(t))N_2x_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2} - \mu_2 y_2(t)
\end{aligned}
$$

Таблица 1: Таблица с параметри на модела

Параметър	Описание	Мерни единици
β_{hv}	Вероятност на прехвърляне на патогена от човек на комар	безразмерен
β_{vh}	Вероятност на прехвърляне на патогена от комар на човек	безразмерен
a_i	Честота на ухапвания	ден$^{-1}$
M_i	Популация на женски комари	комар
μ_i	Смъртност на комари	ден$^{-1}$
τ	Инкубационен период при комарите	ден
N_i	Човешка популация	човек
γ_i	Скорост на оздравяване на хора	ден$^{-1}$
p_{ij}	Мобилност на хора от местообитание i в j	безразмерна
κ	Ефективност на репелент	безразмерен
$\bar{u}_i$	Максимална възможна предпазена част хора с репелента	безразмерен
$\bar{I}_i$	Максимална част на заразени хора	безразмерен

В този модел за улеснение на по-нататъшни изрази може да направим полагането:

$$
\begin{aligned}
b_{11} &= \beta_{vh}\frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1M_1}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}\\
b_{12} &= \beta_{vh}\frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2M_2}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\\
b_{21} &= \beta_{vh}\frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_2(t))M_1}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}\\
b_{22} &= \beta_{vh}\frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_2(t))M_2}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\\
c_{11} &= \beta_{hv}a_1\frac{p_{11}N_1}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}\\
c_{11} &= \beta_{hv}a_1\frac{p_{21}N_2}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}\\
c_{21} &= \beta_{hv}a_2\frac{p_{12}N_1}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}\\
c_{22} &= \beta_{hv}a_2\frac{p_{22}N_2}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Крайният вид на обезразмерения модел е:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \beta_{vh}(1-x_1(t))(1-\kappa u_1(t))\left(b_{11}y_1(t)+b_{12}y_2(t)\right)-\gamma_1x_1(t)\\
\dot{y}_1(t) &= (1-y_1(t))\left(c_{11}(1-\kappa u_1(t))x_1(t)+c_{12}(1-\kappa u_2(t))x_2(t)\right)-\mu_1y_1(t)\\
\dot{x}_2(t) &= \beta_{vh}(1-x_2(t))(1-\kappa u_2(t))\left(b_{21}y_1(t)+b_{22}y_2(t)\right)-\gamma_2x_2(t)\\
\dot{y}_2(t) &= (1-y_2(t))\left(c_{21}(1-\kappa u_1(t))x_1(t)+c_{22}(1-\kappa u_2(t))x_2(t)\right)-\mu_2y_2(t)
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Нека $\bar{I}_1, \bar{I}_2 \in [0,1]$ са константи, отговарящи за максималната част от населението в съответното местообитание, което може да получи адекватна здравна помощ при заразяване с малария. Питаме се има ли такива управления $u_1(t), u_2(t)$, за които във всеки момент всички заразени да имат възможност да получат помощ от здравната система, т.е. :

$$\forall t>0(x_1(t)\le \bar{I}_1 \wedge x_2(t)\le \bar{I}_2) \tag{15}$$

Тъй като първоначалният брой заразени хора и комари влияят на развитието на системата ще търсим:

(16) $$V(\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{u}}) = \{(x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0) | \exists \mathbf{u} ((11) \text{ има решение} \wedge (15) \text{ е изпълнено})\}$$

$V(\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{u}})$ се нарича ядро на слаба инвариантност на Белман.

III Съществуване на решение и основни свойства

Първо, отбелязваме, че ако е в сила $z, z' < C_z$ и $s, s' < C_s$, то е изпълнено:

$$|(C_z - z)s - (C_z - z')s'| = |C_z s - zs - C_z s' + z's' + zs' - zs'| = |C_z(s - s') - z(s - s') - s'(z - z')| \leq$$
$$|C_z||s - s'| + |z||s - s'| + |s'||z - z'| \leq 2|C_z||s - s'| + |C_s||z - z'| \leq \max\{2|C_z|, |C_s|\}(|s - s'| + |z - z'|)$$

III.1 Липшицовост по фазови променливи

Ще използваме това твърдение при дозателството на Липшицовата непрекъснатост на дясната страна по фазовите променливи x_1, y_1, x_2, y_2. Взимаме произволни допустими двойки, тоест $(x_1, y_1, x_2, y_2), (x_1', y_1', x_2', y_2') \in \Omega$ и $(u_1, u_2), (u_1', u_2') \in [0, \bar{u}_1] \times [0, \bar{u}_2]$. Първо от неравенството на триъгълника имаме, че:

$$\|\mathbf{F}(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - \mathbf{F}(x_1', y_1', x_2', y_2', u_1', u_2')\| \leq$$
$$|f_1(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - f_1(x_1', y_1', x_2', y_2', u_1', u_2')| + |g_2(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - g_2(x_1', y_1', x_2', y_2', u_1', u_2')| +$$
$$|g_1(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - g_1(x_1', y_1', x_2', y_2', u_1', u_2')| + |f_2(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - f_2(x_1', y_1', x_2', y_2', u_1', u_2')|$$

Сега може неколкократно да ползваме горната оценка за f_1:

$$\Bigg|\beta_{vh}(N_1 - x_1)\left(\frac{a_1 p_{11} e^{-\mu_1\tau}(1 - \kappa u_1)y_1}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} + \frac{a_2 p_{12} e^{-\mu_2\tau}(1 - \kappa u_1)y_2}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2}\right) - \gamma_1 x_1 -$$
$$\beta_{vh}(N_1 - x_1')\left(\frac{a_1 p_{11} e^{-\mu_1\tau}(1 - \kappa u_1')y_1'}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} + \frac{a_2 p_{12} e^{-\mu_2\tau}(1 - \kappa u_1')y_2'}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2}\right) + \gamma_1 x_1'\Bigg| \leq$$
$$\frac{\beta_{vh} a_1 p_{11} e^{-\mu_1\tau}}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2}\left|(N_1 - x_1)[(1 - \kappa u_1)y_1] - (N_1 - x_1')[(1 - \kappa u_1')y_1']\right| +$$
$$\frac{\beta_{vh} a_2 p_{12} e^{-\mu_2\tau}}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2}\left|(N_1 - x_1)[(1 - \kappa u_1)y_2] - (N_1 - x_1')[(1 - \kappa u_1')y_2']\right| +$$
$$\gamma_1|x_1 - x_1'|$$

Имаме, че $x_1, x_1' \leq N_1, \quad (1 - \kappa u_1)y_1, (1 - \kappa u_1)y_1' \leq M_1, \quad (1 - \kappa u_1)y_2, (1 - \kappa u_1)y_2' \leq M_2$:

$$\left|(N_1 - x_1)[(1 - \kappa u_1)y_1] - (N_1 - x_1')[(1 - \kappa u_1')y_1']\right| \leq 2N_1|(1 - \kappa u_1)y_1 - (1 - \kappa u_1')y_1'| + M_1|x_1 - x_1'| \leq$$
$$2N_1(2|y_1 - y_1'| + M_1\kappa|u_1 - u_1'|) + M_1|x_1 - x_1'|$$
$$\left|(N_1 - x_1)[(1 - \kappa u_1)y_2] - (N_1 - x_1')[(1 - \kappa u_1')y_2']\right| \leq 2N_1|(1 - \kappa u_1)y_2 - (1 - \kappa u_1')y_2'| + M_2|x_1 - x_1'| \leq$$
$$2N_1(2|y_2 - y_2'| + M_2\kappa|u_1 - u_1'|) + M_2|x_1 - x_1'|$$

Тук също ползвахме $1 - \kappa u_1, 1 - \kappa u_1' \leq 1, \quad y_1, y_1' \leq M_1, \quad y_2, y_2' \leq M_2$. Така получихе оценка отгоре за първото събираемо

Тъй като видът на f_2 е същият с точност до индекси, то директно получаваме и оценка за третото събираемо.

Сега да разгледаме за g_1:

$$\Big|\beta_{hv}a_1(M_1-y_1)\frac{p_{11}(1-\kappa u_1)x_1+p_{21}(1-\kappa u_2)x_2}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}-\mu_1 y_1-$$
$$\beta_{hv}a_1(M_1-y_1')\frac{p_{11}(1-\kappa u_1')x_1'+p_{21}(1-\kappa u_2')x_2'}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}+\mu_1 y_1'\Big|\leq$$
$$\frac{\beta_{hv}a_1p_{11}}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}\left|(M_1-y_1)[(1-\kappa u_1)x_1]-(M_1-y_1')[(1-\kappa u_1')x_1']\right|+$$
$$\frac{\beta_{hv}a_1p_{21}}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}\left|(M_1-y_1)[(1-\kappa u_2)x_2]-(M_1-y_1')[(1-\kappa u_2')x_2']\right|+$$
$$\mu_1|y_1-y_1'|$$

Ограниченията са $y_1,y_1'\leq M_1,\quad (1-\kappa u_1)x_1,(1-\kappa u_1')x_1'\leq N_1,\quad (1-\kappa u_2)x_2,(1-\kappa u_2')x_2'\leq N_2$:

$$\left|(M_1-y_1)[(1-\kappa u_1)x_1]-(M_1-y_1')[(1-\kappa u_1')x_1']\right|\leq 2M_1|(1-\kappa u_1)x_1-(1-\kappa u_1')x_1'|+N_1|y_1-y_1'|\leq$$
$$2M_1(2|x_1-x_1'|+N_1\kappa|u_1-u_1'|)+N_1|y_1-y_1'|$$
$$\left|(M_1-y_1)[(1-\kappa u_2)x_2]-(M_1-y_1')[(1-\kappa u_2')x_2']\right|\leq 2M_1|(1-\kappa u_2)x_2-(1-\kappa u_2')x_2'|+N_2|y_1-y_1'|$$
$$2M_1(2|x_2-x_2'|+N_2\kappa|u_2-u_2'|)+N_2|y_1-y_1'|$$

Тук също ползвахме $1-\kappa u_1,1-\kappa u_1',1-\kappa u_2,1-\kappa u_2'\leq 1,\quad x_1,x_1'\leq M_1,\quad x_2,x_2'\leq M_2$. Така получихе оценка отгоре за второто събираемо
Тъй като видът на g_2 е същият с точност до индекси, то директно получаваме и оценка за четвъртото събираемо.
За да проверим липшицовостта по фазовите променливи, то заместваме с $u_1=1_1',u_2=u_2'$ всичко и за цялата дясна страна е в сила:

$$\|\mathbf{F}(x_1,y_1,x_2,y_2,u_1',u_2')-\mathbf{F}(x_1',y_1',x_2',y_2',u_1',u_2')\|\leq$$
$$\frac{\beta_{vh}a_1p_{11}e^{-\mu_1\tau}}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}(4N_1|y_1-y_1'|+M_1|x_1-x_1'|)+\frac{\beta_{vh}a_2p_{12}e^{-\mu_2\tau}}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}(4N_1|y_2-y_2'|+M_1|x_1-x_1'|)+\gamma_1|x_1-x_1'|+$$
$$\frac{\beta_{hv}a_1p_{11}}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}(4M_1|x_1-x_1'|+N_1|y_1-y_1'|)+\frac{\beta_{hv}a_1p_{21}}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}(4M_1|x_2-x_2'|+N_2|y_1-y_1'|)+\mu_1|y_1-y_1'|+$$
$$\frac{\beta_{vh}a_1p_{21}e^{-\mu_1\tau}}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}(4N_1|y_1-y_1'|+M_1|x_1-x_1'|)+\frac{\beta_{vh}a_2p_{22}e^{-\mu_2\tau}}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}(4N_1|y_2-y_2'|+M_1|x_1-x_1'|)+\gamma_2|x_2-x_2'|+$$
$$\frac{\beta_{hv}a_2p_{12}}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}(4M_2|x_1-x_1'|+N_1|y_2-y_2'|)+\frac{\beta_{hv}a_2p_{22}}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}(4M_2|x_2-x_2'|+N_2|y_2-y_2'|)+\mu_2|y_2-y_2'|\leq$$
$$C\|(x_1,y_1,x_2,y_2)-(x_1',y_1',x_2',y_2')\|$$

Накрая се използват неравенства от вида $|x_1-x_1'|\leq\|(x_1,y_1,x_2,y_2)-(x_1',y_1',x_2',y_2')\|$. Тогава, спрямо общата теория на диференциалните решения с управление, съществува единствено решение на (11) за произволни t.

III.2 Ограниченост на решението

Да разгледаме множеството

$$\Omega=\{0\leq x_1\leq N_1,0\leq y_1\leq M_1,0\leq x_2\leq N_2,0\leq y_2\leq M_2\} \tag{17}$$

Началното условие е някъде в това множество, тъй като популациите са неотрицателни, а заразените индивиди не са над общата популация за съответната категория. Лесно може да се види, че е в сила:

$$(x_1(0), y_1(0), x_2(0), y_2(0)) \in \Omega \implies \forall t > 0\,((x_1(0), y_1(0), x_2(0), y_2(0)) \in \Omega) \tag{18}$$

Трябва да се покаже, че **F** сочи към вътрешността на Ω, ако решението се намира по границата $\partial\Omega$. Но това наистина е така, от:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t)|_{\Omega\cap\{x_1(t)=0\}} &= \beta_{vh}N_1(t)\left(\frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_1(t))y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}+\frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_1(t))y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right)\geq 0\\
\dot{x}_1(t)|_{\Omega\cap\{x_1(t)=N_1\}} &= -\gamma_1 N_1 < 0\\
\dot{y}_1(t)|_{\Omega\cap\{y_1(t)=0\}} &= \beta_{hv}a_1M_1\frac{p_{11}(1-\kappa u_1(t))x_1(t)+p_{21}(1-\kappa u_2(t))x_2(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}\geq 0\\
\dot{y}_1(t)|_{\Omega\cap\{y_1(t)=M_1\}} &= -\mu_1 M_1 < 0\\
\dot{x}_2(t)|_{\Omega\cap\{x_2(t)=0\}} &= \beta_{vh}N_2\left(\frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_2(t))y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}+\frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_2(t))y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right)\geq 0\\
\dot{x}_2(t)|_{\Omega\cap\{x_2(t)=N_2\}} &= -\gamma_2 N_2 < 0\\
\dot{y}_2(t)|_{\Omega\cap\{y_2(t)=0\}} &= \beta_{hv}a_2M_2\frac{p_{12}(1-\kappa u_1(t))x_1(t)+p_{22}(1-\kappa u_2(t))x_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\geq 0\\
\dot{y}_2(t)|_{\Omega\cap\{y_2(t)=M_2\}} &= -\mu_2 M_2 < 0
\end{aligned}$$

III.3 Кооперативност (квазимонотонност)

Доказваме квазимонотонността по дефиницията ДЕФИНИЦИЯ!!! Матрицата на Якоби $\mathbf{DF}(x_1, y_1, x_2, y_2)(t)$ ще ни трябав и натам, затова нека я изведем изцяло:

$$\mathbf{DF}(x_1,y_1,x_2,y_2)(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_{x_1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_{x_1}}{\partial y_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_{x_1}}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathbf{F}_{x_1}}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{y_1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_{y_1}}{\partial y_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_{y_1}}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathbf{F}_{y_1}}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{x_2}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_{x_2}}{\partial y_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_{x_2}}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathbf{F}_{x_2}}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{y_2}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_{y_2}}{\partial y_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_{y_2}}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathbf{F}_{y_2}}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{x_1}}{\partial x_1} = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} = -\beta_{vh}\left(\frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_1(t))y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} + \frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_1(t))y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right) - \gamma_1 < 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{x_1}}{\partial y_1} = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial y_1} = \beta_{vh}(N_1 - x_1(t))\frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_1(t))}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{x_1}}{\partial x_2} = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{x_1}}{\partial y_2} = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial y_2} = \beta_{vh}(N_1 - x_1(t))\frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_1(t))}{p_{12}N_1+p_{22}N_2} \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{y_1}}{\partial x_1} = \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial x_1} = \beta_{hv}a_1(M_1 - y_1(t))\frac{p_{11}(1-\kappa u_1(t))}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{y_1}}{\partial y_1} = \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_1} = -\beta_{hv}a_1\frac{p_{11}(1-\kappa u_1(t))x_1(t)+p_{21}(1-\kappa u_2(t))x_2(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} - \mu_1 < 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{y_1}}{\partial x_2} = \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial x_2} = \beta_{hv}a_1(M_1 - y_1(t))\frac{p_{21}(1-\kappa u_2(t))}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{y_1}}{\partial y_2} = \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_2} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{x_2}}{\partial x_1} = \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{x_2}}{\partial y_1} = \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial y_1} = \beta_{vh}(N_2 - x_2(t))\frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_2(t))}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{x_2}}{\partial x_2} = \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} = -\beta_{vh}\left(\frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_2(t))y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} + \frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_2(t))y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right) - \gamma_2 < 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{x_2}}{\partial y_2} = \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial y_2} = \beta_{vh}(N_2 - x_2(t))\frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_2(t))}{p_{12}N_1+p_{22}N_2} \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{y_2}}{\partial x_1} = \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial x_1} = \beta_{hv}a_2(M_2 - y_2(t))\frac{p_{12}(1-\kappa u_1(t))}{p_{12}N_1+p_{22}N_2} \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{y_12}}{\partial y_1} = \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial y_1} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{y_2}}{\partial x_2} = \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial x_2} = \beta_{hv}a_2(M_2 - y_2(t))\frac{p_{22}(1-\kappa u_2(t))}{p_{12}N_1+p_{22}N_2} \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{y_2}}{\partial y_2} = \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial y_2} = -\beta_{hv}a_2\frac{p_{12}(1-\kappa u_1(t))x_1(t)+p_{22}(1-\kappa u_2(t))x_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2} - \mu_2 < 0$$

Извън главния диагонал има само неотрицателни елементи, тогава системата е кооперативна.

III.4 Неразложимост

Използваме теорема 3.2.1 от [6], която гласи:

Теорема III.1. *Матрица $A = (a_{ij})$ е неразложима точно когато ориентираният граф $G = (V, E)$, с върхове $V = \{1, \cdots, n\}$ и ребра $E = \{(i, j)|a_{ij} \neq 0\}$, е силно свързан.*

Твърдение III.2. *Якобианът на системата* 11 *е неразложим.*

Доказателство. Заместваме ненулевите елементи на $\mathbf{DF}$ с 1. Така получаваме графа с матрица на съседство D:

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \mathrm{D}^3 = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 7 \end{pmatrix} > \mathcal{O} \tag{19}$$

Тъй графа има 4 върха, с матрицата на съседство повдигната на 3-та степен виждаме кои върхове са свързани помежду си и кои не (тъй като ще получим информация за свързаните компоненти, от факта че всеки прост път е с дължина не по-голяма от 3). Понеже има единствена свързана компонента, то графът е силно свързан. Спрямо $III.1$ откъдето $\mathbf{DF}$ е неразложима. ■

III.5 Силна вдлъбнатост

Твърдение III.3. *Системата е силно вдлъбната, т.е.* $\mathbf{0} < \mathbf{z}_1 < \mathbf{z}_2 \implies \mathrm{D}\mathbf{F}(\mathbf{z}_2) < \mathrm{D}\mathbf{F}(\mathbf{z}_1)$

Доказателство. Достатъчно условие за това е всяка компонента на $\mathbf{DF}$ да е нерастяща функция по всички променливи, като за поне една от тях да е намаляваща. Това може да проверим с производни по различните променливи:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial x_1 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial x_1 \partial y_1} = -\beta_{vh} \frac{p_{11} e^{-\mu_1 \tau} a_1 (1 - \kappa u_1(t))}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} < 0, \\
&\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial x_1 \partial y_2} = -\beta_{vh} \frac{p_{12} e^{-\mu_2 \tau} a_2 (1 - \kappa u_1(t))}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} < 0 \\
&\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial y_1 \partial x_1} = -\beta_{vh} \frac{p_{11} e^{-\mu_1 \tau} a_1 (1 - \kappa u_1(t))}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial y_1 \partial y_1} = 0, \\
&\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial y_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial y_1 \partial y_2} = 0 \\
&\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial x_2 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial x_2 \partial y_1} = 0, \\
&\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial x_2 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial x_2 \partial y_2} = 0 \\
&\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial y_2 \partial x_1} = -\beta_{vh} \frac{p_{12} e^{-\mu_2 \tau} a_2 (1 - \kappa u_1(t))}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial y_2 \partial y_1} = 0, \\
&\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial y_2 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_1}}{\partial y_2 \partial y_2} = 0 \\
&\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial x_1 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial x_1 \partial y_1} = -\beta_{hv} a_1 \frac{p_{11} (1 - \kappa u_1(t))}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} < 0,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial x_1 \partial y_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial y_1 \partial x_1} = -\beta_{hv} a_1 \frac{p_{11}(1-\kappa u_1(t))}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial y_1 \partial y_1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial y_1 \partial x_2} = -\beta_{hv} a_1 \frac{p_{21}(1-\kappa u_2(t))x_2(t)}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial y_1 \partial y_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial x_2 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial x_2 \partial y_1} = -\beta_{hv} a_1 \frac{p_{21}(1-\kappa u_2(t))}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} < 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial x_2 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial x_2 \partial y_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial y_2 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial y_2 \partial y_1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial y_2 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_1}}{\partial y_2 \partial y_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial x_1 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial x_1 \partial y_1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial x_1 \partial y_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial y_1 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial y_1 \partial y_1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial y_1 \partial x_2} = -\beta_{vh} \frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau} a_1(1-\kappa u_2(t))}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial y_1 \partial y_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial x_2 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial x_2 \partial y_1} = -\beta_{vh} \frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau} a_1(1-\kappa u_2(t))}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} < 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial x_2 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial x_2 \partial y_2} = -\beta_{vh} \frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau} a_2(1-\kappa u_2(t))}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} < 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial y_2 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial y_2 \partial y_1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial y_2 \partial x_2} = -\beta_{vh} \frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau} a_2(1-\kappa u_2(t))}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{x_2}}{\partial y_2 \partial y_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial x_1 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial x_1 \partial y_1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial x_1 \partial y_2} = -\beta_{hv} a_2 \frac{p_{12}(1-\kappa u_1(t))}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} < 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial y_1 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial y_1 \partial y_1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial y_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial y_1 \partial y_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial x_2 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial x_2 \partial y_1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial x_2 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial x_2 \partial y_2} = -\beta_{hv} a_2 \frac{p_{22}(1-\kappa u_2(t))}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} < 0$$
$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial y_2 \partial x_1} = -\beta_{hv} a_2 \frac{p_{12}(1-\kappa u_1(t))}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial y_2 \partial y_1} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial y_2 \partial x_2} = -\beta_{hv} a_2 \frac{p_{22}(1-\kappa u_2(t))}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{y_2}}{\partial y_2 \partial y_2} = 0$$

Така достатъчното условие е изпълнено и системата притежава силна вдлъбнатост. ■

III.6 Неподвижни точки

Системата е силно нелинейна и с голяма размерност, откъдето не е възможно да бъдат изведени аналитични изрази за равновесните точки, различни от тривиалната ($\mathbf{0}$). С помощта на теорията на кооперативните системи може да получим техния брой.

Да разгледаме константно управление $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u} = const$. Веднага се вижда, че $\mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{0}$ е тривиалната неподвижна точка на системата. Сега разглеждаме за фиксирано управление $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{u}$.

Ще използваме теоремата на Smith за автономни системи. Видя се, че системата е кооперативна, с неразложима матрица на Якоби и е силно вдлъбната. Тогава имаме всички условия от ЦИТАТ Smith!!! . При $R_0(\mathbf{u}) \leq 1$, $\mathbf{0}$ е единствена устойчива неподвижна точка, а при $R_0(\mathbf{u}) > 1$, то $\mathbf{0}$ е неустойчива неподвижна точка и съществува точно една друга устойчива, намираща се във вътрешността на Ω.

Във случая $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}$, то ако имаме ендемична точка $\mathbf{E}^*$ и $E_1^* > \bar{I}_1 \vee E_3^* > \bar{I}_2$, то търсената от нас задача няма решение. Наистина, всяка друга система $\mathbf{u}(t)$ мяжорира тази, а тук поне от някъде нататък траекторията злиза извън желаното множество. Но тогава и за всяка друга система траекторията ще излезе от него, тоест не можем да намерим каквото и да било управление, за което във всеки момент заразените и в двете области хора да са под желаните прагове.

Обратната посока не е ясна. В случая $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$, то ако липсва ендемична точка, решението ще клони към $\mathbf{0}$, но не е ясно дали винаги се намира в желаното множество, или по някакъв начин се нгъва и клони излизайки от него.

При $R_0 \leq 1$, $\mathbf{0}$ е единствена устойчива неподвижна точка, а при $R_0 > 1$, то $\mathbf{0}$ е неустойчива неподвижна точка и съществува точно една друга устойчива, намираща се във вътрешността на Ω.

Ендемичната точка (когато съществува) може да бъде намерена приблизително по два начина. П ървият е да се пусне числена симулация на системата и когато решението вече не се мени значително, то знаем, че сме в околност на епидемичната точка, откъдето може да я преближим с решението в съответния момент. Другият начин е да се реши числено нелинейната система, получена когато се занулят левите страни на 11. Полученото решение ще е равновесна точка (но може да получим и $\mathbf{0}$). Варирайки първоначалното приближение, ще получим и приближение на ендемичната точка.

IV Вариационна задача на Хамилтон-Якоби-Белман

За намиране на ядрото на допустимост (16) се подхожда със задачата на Хамилтон-Якоби-Белман за минимизация на функционал, като v е фунцкията на стойността. Опитваме се да решим:

$$\min\{\lambda v(x_1,y_1,x_2,y_2)+\mathcal{H}(x_1,y_1,x_2,y_2,\boldsymbol{\nabla} v), v(x_1,y_1,x_2,y_2)-\Gamma(x_1,y_1,x_2,y_2)\}=0 \tag{20}$$

Хамилтонянът е дефиниран чрез производна по направлението $\boldsymbol{\nabla} v$, като:

$$\mathcal{H}(x_1,y_1,x_2,y_2,\boldsymbol{\nabla} v)=-\max_{u\in\mathcal{U}}\langle \mathbf{F}(x_1,y_1,x_2,y_2,u_1,u_2),\boldsymbol{\nabla} v\rangle \tag{21}$$

Използвайки вида на $\mathbf{F}$, след групиране по части зависещи/независещи от управлението, получаваме:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(x_1,y_1,x_2,y_2,\boldsymbol{\nabla} v)=&\left[\gamma_1 x_1(t)-\beta_{vh}(N_1-x_1(t))\left(\frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}+\frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right)\right]\frac{\partial v}{\partial x_1}+\\
&\left[\mu_1 y_1(t)-\beta_{hv}a_1(M_1-y_1(t))\frac{p_{11}x_1(t)+p_{21}x_2(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}\right]\frac{\partial v}{\partial y_1}+\\
&\left[\gamma_2 x_2(t)-\beta_{vh}(N_2-x_2(t))\left(\frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}+\frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right)\right]\frac{\partial v}{\partial x_2}+\\
&\left[\mu_2 y_2(t)-\beta_{hv}a_2(M_2-y_2(t))\frac{p_{12}x_1(t)+p_{22}x_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right]\frac{\partial v}{\partial y_2}+\\
&\max\left\{0,\beta_{vh}(N_1-x_1(t))\kappa\bar{u}_1\left(\frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}+\frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right)\frac{\partial v}{\partial x_1}\right\}+\\
&\max\left\{0,\beta_{hv}a_1(M_1-y_1(t))\kappa\frac{p_{11}\bar{u}_1x_1(t)+p_{21}\bar{u}_2x_2(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}\frac{\partial v}{\partial y_1}\right\}+\\
&\max\left\{0,\beta_{vh}(N_2-x_2(t))\kappa\bar{u}_2\left(\frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}+\frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right)\frac{\partial v}{\partial x_2}\right\}+\\
&\max\left\{0,\beta_{hv}a_1(M_2-y_2(t))\kappa\frac{p_{12}\bar{u}_1x_1(t)+p_{22}\bar{u}_2x_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\frac{\partial v}{\partial y_2}\right\}
\end{aligned}$$

V Числено приближение на ядрото на допустимост

V.1 Еквивалентна задача

[4]

V.2 WENO

За численото пресмятане на задачата се използва дискретизация по пространството по метода Weighted Essentially Non-Oscillatory (WENO) за приближаване, което е от ред $O(h^5)$. [4]

V.3 Дискретизация по времето

Отново по Osher, дискретизираме по времето с подобрения метод на Ойлер, който е добре известно е от ред $O(\tau^2)$. [4]

V.4 Симулация

Литература

[1] Nicolas Bacaër. Англ. В: *A short history of mathematical population dynamics*. 1-е изд. Springer, 2011. Гл. 12, с. 65—69. ISBN: 978-0-85729-114-1.

[2] Vincenzo Capasso. Англ. В: *Mathematical Structures of Epidemic Systems*. 2-е изд. Springer, 2008. Гл. 2.2.4, 2.3.1.2.4, 4.3.3, A.4, с. 16, 27—30, 115, 229—235. ISBN: 978-3-540-56526-0.

[3] Derdei Bichara & Carlos Castillo-Chavez. “Vector-borne diseases models with residence times – A Lagrangian perspective”. Англ. В: *Mathematical Biosciences* (10 септ. 2016).

[4] Stanley Osher & Ronald Fedkiw. Англ. В: *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. 1-е изд. Springer, 2003. Гл. I-II.3, с. 1—41. ISBN: 978-0-387-95482-1.

[5] Peter Rashkov. “INSERT TITLE”. Англ. В: *Journal* (1 ян. 2019).

[6] Richard A. Brualdi & Herbert J. Ryser. Англ. В: *Combinatorial Matrix Theory*. 1-е изд. Encyclopedia of Mathematics and its Applications №39. Cambridge University Press, 1991. Гл. 3.2, с. 55—56. ISBN: 978-0-521-32265-2.

[7] Hal L. Smith. “Cooperative Systems of Differential Equations with Concave Nonlinearities”. В: *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications* 18.10 (1986), с. 1037—1052. ISSN: 0362-546X. DOI: https://doi.org/10.1016/0362-546X(86)90087-8. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0362546X86900878.