Изследване на ефектите на репелент срещу комари в маларием модел на Ross-Macdonald с две местообитания

изготвил: Калоян Стоилов

ръководител: Петър Рашков

Дипломна работа за образователна степен магистър

Факултет по математика и информатика
Софийски Университет "Свети Климент Охридски"
13 февруари 2025 г.

Съдържание

1 Въведение

1.1 Малария

1.2 SIS модел на Ross-Macdonald

1.3 Модел на Ross-Macdonald с миграция

[2]

1.4 Модел на Ross-Macdonald с използване на репелент

[4]

1.5 Квазилинейни системи

[1]

2 Модел на Ross-Macdonald с две местообитания и репелент

Задачата която се изследва в дипломната работа е:

(Система 1)

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \beta_{vh}(N_1 - x_1(t))\left(\frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_1(t))y_1(t)}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} + \frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_1(t))y_2(t)}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2}\right) - \gamma_1 x_1(t)\\
\dot{y}_1(t) &= \beta_{hv}a_1(M_1 - y_1(t))\frac{p_{11}(1-\kappa u_1(t))x_1(t) + p_{21}(1-\kappa u_2(t))x_2(t)}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} - \mu_1 y_1(t)\\
\dot{x}_2(t) &= \beta_{vh}(N_2 - x_2(t))\left(\frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_2(t))y_1(t)}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} + \frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_2(t))y_2(t)}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2}\right) - \gamma_2 x_2(t)\\
\dot{y}_2(t) &= \beta_{hv}a_2(M_2 - y_2(t))\frac{p_{12}(1-\kappa u_1(t))x_1(t) + p_{22}(1-\kappa u_2(t))x_2(t)}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} - \mu_2 y_2(t)
\end{aligned}
$$

Това е обезразмерен модел, където са смесини моделите за миграция и за репелент против комари. t е времето, като ще разглеждаме само $t \in [0, \inf)$.
$x_1, x_2 \in [0,1]$ са частта от заразени хора, а $y_1, y_2 \in [0,1]$ - частта на заразените комари в локации 1 и 2 съответно.
$u_1 \in [0, \bar{u}_1], u_2 \in [0, \bar{u}_2]$ са управленията отговарящи за това каква част от хората от съответното местообитание са предпазени от репелента, като $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \leq 1$ отговарят за максималната предпазена част от населението, вследствие от производствената способност. Надолу се бележи $\mathcal{U} = [0, \bar{u}_1] \times [0, \bar{u}_2]$
$\kappa \in [0,1]$ е константа, която представя ефективността на репелента (т.е. предполагаме че едно и също вещество/метод се използва и на двете места).
$p_1 1, p_1 2, p_2 1, p_2 2 \in [0, 0.5]$, $p_1 1 + p_1 2 = 1, p_2 1 + p_2 2 = 1$ са константи, отговарящи за миграцията, като $p_i j$ е частта от хора от i, които пребивават временно в j.
γ_1, γ_2 са смъртностите на хората, а μ_1, μ_2 - на комарите, които приемаме за константи.
τ е константа на средното време, за което комарите стават заразни.
α_1, α_2 са константи, които бележат колко ухапвания на комари има за единица време.
β_{vh} е констатнтана заразност, когато заразен комар ухапва човек, а β_{hv} е констатнтана заразност,

комар ухапва заразен човек. $\bar{I}_1, \bar{I}_2 \in [0,1]$ са константи, отговарящи за максималната част от населението в съответното местообитание, което може да получи адекватна здравна помощ при заразяване с малария.

ИЗВЕЖДАНЕ НА МОДЕЛА!!!

Питаме се има ли такива управления u_1, u_2, за които във всеки момент всички заразени да имат възможност да получат помощ от здравната система, т.е. :

(1) $$\forall t > 0 (x_1(t) \le \bar{I}_1 \wedge x_2(t) \le \bar{I}_2)$$

Тъй като първоначалният брой заразени хора и комари влияят на развитието на системата ще търсим:

(2) $$V(\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{u}}) = \{(x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0) | \exists \mathbf{u}((\text{Система 1}) \text{ има решение} \wedge (1) \text{ е изпълнено})\}$$

$V(\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{u}})$ се нарича ядро на допустимост.

3 Съществуване на решение и основни свойства

Първо, отбелязваме, че ако е в сила $z, z' < C_z$ и $s, s' < C_s$, то е изпълнено:

$$|(C_z - z)s - (C_z - z')s'| = |C_z s - zs - C_z s' + z's' + zs' - zs'| = |C_z(s - s') - z(s - s') - s'(z - z')| \le$$
$$|C_z||s - s'| + |z||s - s'| + |s'||z - z'| \le 2|C_z||s - s'| + |C_s||z - z'| \le \max\{2|C_z|, |C_s|\}(|s - s'| + |z - z'|)$$

3.1 Липшицовост по фазови променливи

Ще използваме това твърдение при дозателството на Липшицовата непрекъснатост на дясната страна по фазовите променливи x_1, y_1, x_2, y_2. Взимаме произволни допустими двойки, тоест $(x_1, y_1, x_2, y_2), (x_1', y_1', x_2', y_2') \in \Omega$ и $(u_1, u_2), (u_1', u_2') \in [0, \bar{u}_1] \times [0, \bar{u}_2]$. Първо от неравенството на триъгълника имаме, че:

$$\|\mathbf{F}(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - \mathbf{F}(x_1', y_1', x_2', y_2', u_1', u_2')\| \le$$
$$|f_1(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - f_1(x_1', y_1', x_2', y_2', u_1', u_2')| + |g_2(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - g_2(x_1', y_1', x_2', y_2', u_1', u_2')| +$$
$$|g_1(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - g_1(x_1', y_1', x_2', y_2', u_1', u_2')| + |f_2(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - f_2(x_1', y_1', x_2', y_2', u_1', u_2')|$$

Сега може неколкократно да ползваме горната оценка за f_1:

$$\Bigg|\beta_{vh}(N_1 - x_1)\left(\frac{a_1 p_{11} e^{-\mu_1 \tau}(1 - \kappa u_1) y_1}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} + \frac{a_2 p_{12} e^{-\mu_2 \tau}(1 - \kappa u_1) y_2}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2}\right) - \gamma_1 x_1 -$$
$$\beta_{vh}(N_1 - x_1')\left(\frac{a_1 p_{11} e^{-\mu_1 \tau}(1 - \kappa u_1') y_1'}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} + \frac{a_2 p_{12} e^{-\mu_2 \tau}(1 - \kappa u_1') y_2'}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2}\right) + \gamma_1 x_1'\Bigg| \le$$
$$\frac{\beta_{vh} a_1 p_{11} e^{-\mu_1 \tau}}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2}\left|(N_1 - x_1)[(1 - \kappa u_1) y_1] - (N_1 - x_1')[(1 - \kappa u_1') y_1']\right| +$$
$$\frac{\beta_{vh} a_2 p_{12} e^{-\mu_2 \tau}}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2}\left|(N_1 - x_1)[(1 - \kappa u_1) y_2] - (N_1 - x_1')[(1 - \kappa u_1') y_2']\right| +$$
$$\gamma_1 |x_1 - x_1'|$$

Имаме, че $x_1, x_1' \le N_1, \quad (1 - \kappa u_1) y_1, (1 - \kappa u_1) y_1' \le M_1, \quad (1 - \kappa u_1) y_2, (1 - \kappa u_1) y_2' \le M_2$:

$$\left|(N_1 - x_1)[(1 - \kappa u_1) y_1] - (N_1 - x_1')[(1 - \kappa u_1') y_1']\right| \le 2N_1 |(1 - \kappa u_1) y_1 - (1 - \kappa u_1') y_1'| + M_1 |x_1 - x_1'| \le$$
$$2N_1(2|y_1 - y_1'| + M_1 \kappa |u_1 - u_1'|) + M_1 |x_1 - x_1'|$$
$$\left|(N_1 - x_1)[(1 - \kappa u_1) y_2] - (N_1 - x_1')[(1 - \kappa u_1') y_2']\right| \le 2N_1 |(1 - \kappa u_1) y_2 - (1 - \kappa u_1') y_2'| + M_2 |x_1 - x_1'| \le$$
$$2N_1(2|y_2 - y_2'| + M_2 \kappa |u_1 - u_1'|) + M_2 |x_1 - x_1'|$$

Тук също ползвахме $1-\kappa u_1, 1-\kappa u'_1 \leq 1, \quad y_1, y'_1 \leq M_1, \quad y_2, y'_2 \leq M_2$. Така получихе оценка отгоре за първото събираемо
Тъй като видът на f_2 е същият с точност до индекси, то директно получаваме и оценка за третото събираемо.

Сега да разгледаме за g_1:

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\beta_{hv}a_1(M_1-y_1)\frac{p_{11}(1-\kappa u_1)x_1+p_{21}(1-\kappa u_2)x_2}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}-\mu_1 y_1-\\
&\beta_{hv}a_1(M_1-y'_1)\frac{p_{11}(1-\kappa u'_1)x'_1+p_{21}(1-\kappa u'_2)x'_2}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}+\mu_1 y'_1\Bigg| \leq\\
&\frac{\beta_{hv}a_1p_{11}}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}\left|(M_1-y_1)[(1-\kappa u_1)x_1]-(M_1-y'_1)[(1-\kappa u'_1)x'_1]\right|+\\
&\frac{\beta_{hv}a_1p_{21}}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}\left|(M_1-y_1)[(1-\kappa u_2)x_2]-(M_1-y'_1)[(1-\kappa u'_2)x'_2]\right|+\\
&\mu_1|y_1-y'_1|
\end{aligned}$$

Ограниченията са $y_1, y'_1 \leq M_1, \quad (1-\kappa u_1)x_1, (1-\kappa u'_1)x'_1 \leq N_1, \quad (1-\kappa u_2)x_2, (1-\kappa u'_2)x'_2 \leq N_2$:

$$\begin{aligned}
&\left|(M_1-y_1)[(1-\kappa u_1)x_1]-(M_1-y'_1)[(1-\kappa u'_1)x'_1]\right| \leq 2M_1|(1-\kappa u_1)x_1-(1-\kappa u'_1)x'_1|+N_1|y_1-y'_1| \leq\\
&2M_1(2|x_1-x'_1|+N_1\kappa|u_1-u'_1|)+N_1|y_1-y'_1|\\
&\left|(M_1-y_1)[(1-\kappa u_2)x_2]-(M_1-y'_1)[(1-\kappa u'_2)x'_2]\right| \leq 2M_1|(1-\kappa u_2)x_2-(1-\kappa u'_2)x'_2|+N_2|y_1-y'_1|\\
&2M_1(2|x_2-x'_2|+N_2\kappa|u_2-u'_2|)+N_2|y_1-y'_1|
\end{aligned}$$

Тук също ползвахме $1-\kappa u_1, 1-\kappa u'_1, 1-\kappa u_2, 1-\kappa u'_2 \leq 1, \quad x_1, x'_1 \leq M_1, \quad x_2, x'_2 \leq M_2$. Така получихе оценка отгоре за второто събираемо
Тъй като видът на g_2 е същият с точност до индекси, то директно получаваме и оценка за четвъртото събираемо.
За да проверим липшицовостта по фазовите променливи, то заместваме с $u_1 = 1'_1, u_2 = u'_2$ всичко и за цялата дясна страна е в сила:

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{F}(x_1,y_1,x_2,y_2,u'_1,u'_2)-\mathbf{F}(x'_1,y'_1,x'_2,y'_2,u'_1,u'_2)\| \leq\\
&\frac{\beta_{vh}a_1p_{11}e^{-\mu_1\tau}}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}(4N_1|y_1-y'_1|+M_1|x_1-x'_1|)+\frac{\beta_{vh}a_2p_{12}e^{-\mu_2\tau}}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}(4N_1|y_2-y'_2|+M_1|x_1-x'_1|)+\gamma_1|x_1-x'_1|+\\
&\frac{\beta_{hv}a_1p_{11}}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}(4M_1|x_1-x'_1|+N_1|y_1-y'_1|)+\frac{\beta_{hv}a_1p_{21}}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}(4M_1|x_2-x'_2|+N_2|y_1-y'_1|)+\mu_1|y_1-y'_1|+\\
&\frac{\beta_{vh}a_1p_{21}e^{-\mu_1\tau}}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}(4N_1|y_1-y'_1|+M_1|x_1-x'_1|)+\frac{\beta_{vh}a_2p_{22}e^{-\mu_2\tau}}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}(4N_1|y_2-y'_2|+M_1|x_1-x'_1|)+\gamma_2|x_2-x'_2|+\\
&\frac{\beta_{hv}a_2p_{12}}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}(4M_2|x_1-x'_1|+N_1|y_2-y'_2|)+\frac{\beta_{hv}a_2p_{22}}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}(4M_2|x_2-x'_2|+N_2|y_2-y'_2|)+\mu_2|y_2-y'_2| \leq\\
&C\|(x_1,y_1,x_2,y_2)-(x'_1,y'_1,x'_2,y'_2)\|
\end{aligned}$$

Накрая се използват неравенства от вида $|x_1-x'_1| \leq \|(x_1,y_1,x_2,y_2)-(x'_1,y'_1,x'_2,y'_2)\|$. Тогава съществува решение на (Система 1) за произволни t.

3.2 Ограниченост на решението

3.3 Линейно нарастване

За да покажем линейния растеж, да забележим, че $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Тогава може да запишем:

$$
\begin{aligned}
&\|\mathbf{F}(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2)\| = \|\mathbf{F}(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - \mathbf{0}\| = \|\mathbf{F}(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - \mathbf{F}(\mathbf{0})\| = \\
&\frac{\beta_{vh} a_1 p_{11} e^{-\mu_1 \tau}}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} (2N_1(2|y_1| + M_1 \kappa |u_1|) + M_1 |x_1|) + \\
&\frac{\beta_{vh} a_2 p_{12} e^{-\mu_2 \tau}}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} (2N_1(2|y_2| + M_2 \kappa |u_1|) + M_1 |x_1|) + \gamma_1 |x_1| + \\
&\frac{\beta_{hv} a_1 p_{11}}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} (2M_1(2|x_1| + N_1 \kappa |u_1|) + N_1 |y_1|) + \\
&\frac{\beta_{hv} a_1 p_{21}}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} (2M_1(2|x_2| + N_2 \kappa |u_2|) + N_2 |y_1|) + \mu_1 |y_1| + \\
&\frac{\beta_{vh} a_1 p_{21} e^{-\mu_1 \tau}}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} (2N_1(2|y_1| + M_1 \kappa |u_1|) + M_1 |x_1|) + \\
&\frac{\beta_{vh} a_2 p_{22} e^{-\mu_2 \tau}}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} (2N_1(2|y_2| + M_2 \kappa |u_1|) + M_1 |x_1|) + \gamma_2 |x_2| + \\
&\frac{\beta_{hv} a_2 p_{12}}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} (2M_2(2|x_1| + N_1 \kappa |u_1|) + N_1 |y_2|) + \\
&\frac{\beta_{hv} a_2 p_{22}}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} (2M_2(2|x_2| + N_2 \kappa |u_2|) + N_2 |y_2|) + \mu_2 |y_2| \leq \\
&\tilde{C}_1 |u_1| + \tilde{C}_2 |u_2| + \tilde{C}_3 \|(x_1, y_1, x_2, y_2)\| \leq \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 + \tilde{C}_3 \|(x_1, y_1, x_2, y_2)\| \\
&\tilde{C}(1 + \|(x_1, y_1, x_2, y_2)\|)
\end{aligned}
$$

3.4 Квазилинейност

4 Вариационна задача на Хамилтон-Якоби-Белман

За намиране на ядрото на допустимост (2) се подхожда със задачата на Хамилтон-Якоби-Белман за минимизация на функционал, като v е фунцкията на стойността. Опитваме се да решим:

$$
\min\{\lambda v(x_1, y_1, x_2, y_2) + \mathcal{H}(x_1, y_1, x_2, y_2, \nabla v), v(x_1, y_1, x_2, y_2) - \Gamma(x_1, y_1, x_2, y_2)\} = 0 \tag{3}
$$

Хамилтонянът е дефиниран чрез производна по направлението ∇v, като:

$$
\mathcal{H}(x_1, y_1, x_2, y_2, \nabla v) = -\max_{u \in \mathcal{U}} \langle \mathbf{F}(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2), \nabla v \rangle \tag{4}
$$

Използвайки вида на $\mathbf{F}$, след групиране по части зависещи/независещи от управлението, получаваме:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(x_1,y_1,x_2,y_2,\boldsymbol{\nabla} v) = &\left[\gamma_1 x_1(t) - \beta_{vh}(N_1 - x_1(t))\left(\frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} + \frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right)\right]\frac{\partial v}{\partial x_1} + \\
&\left[\mu_1 y_1(t) - \beta_{hv}a_1(M_1 - y_1(t))\frac{p_{11}x_1(t)+p_{21}x_2(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}\right]\frac{\partial v}{\partial y_1} + \\
&\left[\gamma_2 x_2(t) - \beta_{vh}(N_2 - x_2(t))\left(\frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} + \frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right)\right]\frac{\partial v}{\partial x_2} + \\
&\left[\mu_2 y_2(t) - \beta_{hv}a_2(M_2 - y_2(t))\frac{p_{12}x_1(t)+p_{22}x_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right]\frac{\partial v}{\partial y_2} + \\
&\max\left\{0, \beta_{vh}(N_1 - x_1(t))\kappa\bar{u}_1\left(\frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} + \frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right)\frac{\partial v}{\partial x_1}\right\} + \\
&\max\left\{0, \beta_{hv}a_1(M_1 - y_1(t))\kappa\frac{p_{11}\bar{u}_1x_1(t)+p_{21}\bar{u}_2x_2(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}\frac{\partial v}{\partial y_1}\right\} + \\
&\max\left\{0, \beta_{vh}(N_2 - x_2(t))\kappa\bar{u}_2\left(\frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} + \frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right)\frac{\partial v}{\partial x_2}\right\} + \\
&\max\left\{0, \beta_{hv}a_1(M_2 - y_2(t))\kappa\frac{p_{12}\bar{u}_1x_1(t)+p_{22}\bar{u}_2x_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\frac{\partial v}{\partial y_2}\right\}
\end{aligned}$$

5 Числено приближение на ядрото на допустимост

5.1 Еквивалентна задача

[3]

5.2 WENO

[3]

5.3 Симулация

Литература

[1] Vincenzo Capasso. Англ. В: *Mathematical Structures of Epidemic Systems*. 2-е изд. Springer, 2008. Гл. 2.2.4, 2.3.1.2.4, 4.3.3, с. 16, 27—30, 115. ISBN: 978-3-540-56526-0.

[2] Derdei Bichara & Carlos Castillo-Chavez. “Vector-borne diseases models with residence times – A Lagrangian perspective”. Англ. В: *Mathematical Biosciences* (10 сент. 2016).

[3] Stanley Osher & Ronald Fedkiw. Англ. В: *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. 1-е изд. Springer, 2003. Гл. I-II.3, с. 1—41. ISBN: 978-0-387-95482-1.

[4] Peter Rashkov. “INSERT TITLE”. Англ. В: *Journal* (1 ян. 2019).