Изследване на ефектите на репелент срещу комари в маларием модел на Ross-Macdonald с две местообитания

изготвил: Калоян Стоилов

ръководител: Петър Рашков

Дипломна работа за образователна степен магистър

Факултет по математика и информатика
Софийски Университет "Свети Климент Охридски"
2 март 2025 г.

Съдържание

1 Въведение

1.1 Малария

1.2 SIS модел на Ross-Macdonald

Допусканията от DeLara!!!
Да се разкаже накрратко от A short history of mathematical population dynamics

1.3 Модел на Ross-Macdonald с миграция

Разглежда се леко опростена форма на модела, предложен от [2]. Дадени са m местообитания с популации на комари и n популации с хора, като всяка от тях е с постоянен размер. Всяка от популациите си има своите съответни μ_j смъртности (комари) и γ_i скорости на оздравяване (хора). Комарите се приема, че не мигрират (което е разумно предположение с оглед ЦИТАТ ДВИЖЕНИЕ КОМАРИ!!!). Предполага се, че индивидите от всяка от популациите хора, пребивават в местообитанията на комарите за p_{ij} част от времето, $\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$.
Нека с $x_i(t)$ бележим броя заразени хора, а с $y_j(t)$ - заразени комари. При направените допускания, в момент t, в местообитание j съотношението на заразени към всички хора е:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{ij} x_i(t)}{\sum_{i=1}^{n} p_{ij} N_i} \tag{1}$$

Ако b_j е броят на ухапвания за човек за единица време, a_j са ухапванията за комар за единица време, то като представим по два начина броя ухавпания в местообитание j:

$$a_j M_j = b_j \sum_{i=1}^{n} p_{ij} N_i \iff b_j = \frac{a_j M_j}{\sum_{i=1}^{n} p_{ij} N_i} \tag{2}$$

Модел за разпространението на заразата е следния:

1. В момент t заразените хора x_i се увеличават от ухапване на незаразен човек от заразени комари в различните местообитания, а намаляват пропорционално на броя си с коефициента на оздравяване. Заразяването моделираме по закона за масите, като коефициентът ще бъде b_j. Тогава може да се изрази $\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{m} \beta_{vh} b_j p_{ij} (N_i - x_i(t)) \frac{I_j}{M_j} - \gamma_i x_i(t)$.

2. В момент t заразените комари y_j се увеличават от ухапване на заразен човек от незаразен комар в местообитание j, а намаляват пропорционално на броя си с коефициента на смъртност. Заразяването моделираме по закона за масите, като коефициентът ще бъде a_j. Достига се до $\dot{y}_j(t) = \beta_{hv} a_j (M_j - y(t)) \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{ij} x_i(t)}{\sum_{i=1}^{n} p_{ij} N_i} - \mu_j y_j(t)$.

След като се вземе предвид оценката за b_j, то системата има вида:

$$\dot{x}_i(t) = \beta_{vh}(N_i - x_i(t)) \sum_{j=1}^{m} \frac{p_{ij} a_j I_j}{\sum_{k=1}^{n} p_{kj} N_k} - \gamma_i x_i(t), \quad i = \overline{1,n}$$

$$\dot{y}_j(t) = \beta_{hv} a_j (M_j - y(t)) \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{ij} x_i(t)}{\sum_{i=1}^{n} p_{ij} N_i} - \mu_j y_j(t), \quad j = \overline{1,m}$$

В [2] с помощта на ЦИТАТ СМИТ СТАТИЯ И УЧЕБНИК!!! се показва, че за системата е изпълнено точно едно от:

- $R_0 \leq 1$ и $\mathbf{0}$ е единствената равновесна точка и е глобално асимптотично устойчива.
- $R_0 > 1$ и $\mathbf{0}$ е неустойчива равновесна точка, като ако системата е неразложима, има единствена глобално асимптотично устойчива точка вътрешна за $\bigtimes_{i=1}^{n}[0, N_i] \times \bigtimes_{j=1}^{m}[0, M_j]$ (тоест маларията има ендемичен характер).

Тъй като R_0 не може да бъде получено в явен вид аналитично, останалата част от статията [2] разглежда различни аналитични оценки за R_0 и няколко симулации.

1.4 Модел на Ross-Macdonald с използване на репелент

Разглежда се модела от [4]. По същността си уравненията на модела са като на $Ross - Macdonald$, но с усложнението, че може с помощта на репеленти ЦИТАТ РЕПЕЛЕНТИ!!! да се намалят срещите на хора и комари, тоест има множител $(1 - \kappa u(t))$ в закона за действие на масите, където κ е ефективността на репелента, а пък $u(t)$ функция управление, задаващо пропорцията на хора предпазени с помощтта на репелента. Разглежда се следния казус - възможно ли е всички заразени да бъдат хоспитализирани? Ако приемем, че има някакъв праг на заразените $\bar{I}$ и търсим такова управление $u(t)$, че $\forall t > 0 (x(t) < \bar{I})$.

1.5 Кооперативни(квазимонотонни) системи

Кооперативните системи са [1]

2 Модел на Ross-Macdonald с две местообитания и репелент

Задачата която се изследва в дипломната работа е:

(Система 1)

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \beta_{vh}(N_1 - x_1(t))\left(\frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_1(t))y_1(t)}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} + \frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_1(t))y_2(t)}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2}\right) - \gamma_1 x_1(t) \\
\dot{y}_1(t) &= \beta_{hv}a_1(M_1 - y_1(t))\frac{p_{11}(1-\kappa u_1(t))x_1(t) + p_{21}(1-\kappa u_2(t))x_2(t)}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} - \mu_1 y_1(t) \\
\dot{x}_2(t) &= \beta_{vh}(N_2 - x_2(t))\left(\frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_2(t))y_1(t)}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} + \frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_2(t))y_2(t)}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2}\right) - \gamma_2 x_2(t) \\
\dot{y}_2(t) &= \beta_{hv}a_2(M_2 - y_2(t))\frac{p_{12}(1-\kappa u_1(t))x_1(t) + p_{22}(1-\kappa u_2(t))x_2(t)}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} - \mu_2 y_2(t)
\end{aligned}$$

Това е обезразмерен модел, където са смесини моделите за миграция и за репелент против комари.
t е времето, като ще разглеждаме само $t \in [0, \infty)$.
$x_1, x_2 \in [0,1]$ са частта от заразени хора, а $y_1, y_2 \in [0,1]$ - частта на заразените комари в локации 1 и 2 съответно.
$u_1 \in [0, \bar{u}_1], u_2 \in [0, \bar{u}_2]$ са управленията отговарящи за това каква част от хората от съответното местообитание са предпазени от репелента, като $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \leq 1$ отговарят за максималната предпазена част от населението, вследствие от производствената способност. Надолу се бележи $\mathcal{U} = [0, \bar{u}_1] \times [0, \bar{u}_2]$
$\kappa \in [0,1]$ е константа, която представя ефективността на репелента (т.е. предполагаме че едно и също вещество/метод се използва и на двете места).
$p_1 1, p_1 2, p_2 1, p_2 2 \in [0, 0.5]$, $p_1 1 + p_1 2 = 1, p_2 1 + p_2 2 = 1$ са константи, отговарящи за миграцията, като $p_i j$ е частта от хора от i, които пребивават временно в j.

γ_1, γ_2 са смъртностите на хората, а μ_1, μ_2 - на комарите, които приемаме за константи.
τ е константа на средното време, за което комарите стават заразни.
α_1, α_2 са константи, които бележат колко ухапвания на комари има за единица време.
β_{vh} е констатнтана заразност, когато заразен комар ухапва човек, а β_{hv} е констатнтана заразност, комар ухапва заразен човек. $\bar{I}_1, \bar{I}_2 \in [0,1]$ са константи, отговарящи за максималната част от населението в съответното местообитание, което може да получи адекватна здравна помощ при заразяване с малария.

ИЗВЕЖДАНЕ НА МОДЕЛА!!!

Питаме се има ли такива управления u_1, u_2, за които във всеки момент всички заразени да имат възможност да получат помощ от здравната система, т.е. :

$$\forall t > 0 (x_1(t) \le \bar{I}_1 \wedge x_2(t) \le \bar{I}_2) \tag{3}$$

Тъй като първоначалният брой заразени хора и комари влияят на развитието на системата ще търсим:

$$V(\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{u}}) = \{(x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0) | \exists \mathbf{u}((\text{Система 1) има решение} \wedge (3) \text{ е изпълнено})\} \tag{4}$$

$V(\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{u}})$ се нарича ядро на допустимост.

3 Съществуване на решение и основни свойства

Първо, отбелязваме, че ако е в сила $z, z' < C_z$ и $s, s' < C_s$, то е изпълнено:

$$|(C_z - z)s - (C_z - z')s'| = |C_z s - zs - C_z s' + z's' + zs' - zs'| = |C_z(s - s') - z(s - s') - s'(z - z')| \le$$
$$|C_z||s - s'| + |z||s - s'| + |s'||z - z'| \le 2|C_z||s - s'| + |C_s||z - z'| \le \max\{2|C_z|, |C_s|\}(|s - s'| + |z - z'|)$$

3.1 Липшицовост по фазови променливи

Ще използваме това твърдение при дозателството на Липшицовата непрекъснатост на дясната страна по фазовите променливи x_1, y_1, x_2, y_2. Взимаме произволни допустими двойки, тоест $(x_1, y_1, x_2, y_2), (x_1', y_1', x_2', y_2') \in \Omega$ и $(u_1, u_2), (u_1', u_2') \in [0, \bar{u}_1] \times [0, \bar{u}_2]$. Първо от неравенството на триъгълника имаме, че:

$$\|\mathbf{F}(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - \mathbf{F}(x_1', y_1', x_2', y_2', u_1', u_2')\| \le$$
$$|f_1(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - f_1(x_1', y_1', x_2', y_2', u_1', u_2')| + |g_2(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - g_2(x_1', y_1', x_2', y_2', u_1', u_2')| +$$
$$|g_1(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - g_1(x_1', y_1', x_2', y_2', u_1', u_2')| + |f_2(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - f_2(x_1', y_1', x_2', y_2', u_1', u_2')|$$

Сега може неколкократно да ползваме горната оценка за f_1:

$$\Bigg|\beta_{vh}(N_1 - x_1)\left(\frac{a_1 p_{11} e^{-\mu_1 \tau}(1 - \kappa u_1) y_1}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} + \frac{a_2 p_{12} e^{-\mu_2 \tau}(1 - \kappa u_1) y_2}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2}\right) - \gamma_1 x_1 -$$
$$\beta_{vh}(N_1 - x_1')\left(\frac{a_1 p_{11} e^{-\mu_1 \tau}(1 - \kappa u_1') y_1'}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} + \frac{a_2 p_{12} e^{-\mu_2 \tau}(1 - \kappa u_1') y_2'}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2}\right) + \gamma_1 x_1'\Bigg| \le$$
$$\frac{\beta_{vh} a_1 p_{11} e^{-\mu_1 \tau}}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2}\left|(N_1 - x_1)[(1 - \kappa u_1) y_1] - (N_1 - x_1')[(1 - \kappa u_1') y_1']\right| +$$
$$\frac{\beta_{vh} a_2 p_{12} e^{-\mu_2 \tau}}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2}\left|(N_1 - x_1)[(1 - \kappa u_1) y_2] - (N_1 - x_1')[(1 - \kappa u_1') y_2']\right| +$$
$$\gamma_1 |x_1 - x_1'|$$

Имаме, че $x_1, x_1' \le N_1, \quad (1-\kappa u_1)y_1, (1-\kappa u_1)y_1' \le M_1, \quad (1-\kappa u_1)y_2, (1-\kappa u_1)y_2' \le M_2$:

$$\left|(N_1-x_1)[(1-\kappa u_1)y_1] - (N_1-x_1')[(1-\kappa u_1')y_1']\right| \le 2N_1|(1-\kappa u_1)y_1 - (1-\kappa u_1')y_1'| + M_1|x_1-x_1'| \le$$
$$2N_1(2|y_1-y_1'| + M_1\kappa|u_1-u_1'|) + M_1|x_1-x_1'|$$
$$\left|(N_1-x_1)[(1-\kappa u_1)y_2] - (N_1-x_1')[(1-\kappa u_1')y_2']\right| \le 2N_1|(1-\kappa u_1)y_2 - (1-\kappa u_1')y_2'| + M_2|x_1-x_1'| \le$$
$$2N_1(2|y_2-y_2'| + M_2\kappa|u_1-u_1'|) + M_2|x_1-x_1'|$$

Тук също ползвахме $1-\kappa u_1, 1-\kappa u_1' \le 1, \quad y_1, y_1' \le M_1, \quad y_2, y_2' \le M_2$. Така получихе оценка отгоре за първото събираемо

Тъй като видът на f_2 е същият с точност до индекси, то директно получаваме и оценка за третото събираемо.

Сега да разгледаме за g_1:

$$\left|\beta_{hv}a_1(M_1-y_1)\frac{p_{11}(1-\kappa u_1)x_1 + p_{21}(1-\kappa u_2)x_2}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} - \mu_1 y_1 - \right.$$
$$\left.\beta_{hv}a_1(M_1-y_1')\frac{p_{11}(1-\kappa u_1')x_1' + p_{21}(1-\kappa u_2')x_2'}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} + \mu_1 y_1'\right| \le$$
$$\frac{\beta_{hv}a_1p_{11}}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}\left|(M_1-y_1)[(1-\kappa u_1)x_1] - (M_1-y_1')[(1-\kappa u_1')x_1']\right| +$$
$$\frac{\beta_{hv}a_1p_{21}}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}\left|(M_1-y_1)[(1-\kappa u_2)x_2] - (M_1-y_1')[(1-\kappa u_2')x_2']\right| +$$
$$\mu_1|y_1-y_1'|$$

Ограниченията са $y_1, y_1' \le M_1, \quad (1-\kappa u_1)x_1, (1-\kappa u_1')x_1' \le N_1, \quad (1-\kappa u_2)x_2, (1-\kappa u_2')x_2' \le N_2$:

$$\left|(M_1-y_1)[(1-\kappa u_1)x_1] - (M_1-y_1')[(1-\kappa u_1')x_1']\right| \le 2M_1|(1-\kappa u_1)x_1 - (1-\kappa u_1')x_1'| + N_1|y_1-y_1'| \le$$
$$2M_1(2|x_1-x_1'| + N_1\kappa|u_1-u_1'|) + N_1|y_1-y_1'|$$
$$\left|(M_1-y_1)[(1-\kappa u_2)x_2] - (M_1-y_1')[(1-\kappa u_2')x_2']\right| \le 2M_1|(1-\kappa u_2)x_2 - (1-\kappa u_2')x_2'| + N_2|y_1-y_1'|$$
$$2M_1(2|x_2-x_2'| + N_2\kappa|u_2-u_2'|) + N_2|y_1-y_1'|$$

Тук също ползвахме $1-\kappa u_1, 1-\kappa u_1', 1-\kappa u_2, 1-\kappa u_2' \le 1, \quad x_1, x_1' \le M_1, \quad x_2, x_2' \le M_2$. Така получихе оценка отгоре за второто събираемо

Тъй като видът на g_2 е същият с точност до индекси, то директно получаваме и оценка за четвъртото събираемо.

За да проверим липшицовостта по фазовите променливи, то заместваме с $u_1 = 1_1', u_2 = u_2'$ всичко и за цялата дясна страна е в сила:

$$\|\mathbf{F}(x_1,y_1,x_2,y_2,u_1',u_2') - \mathbf{F}(x_1',y_1',x_2',y_2',u_1',u_2')\| \le$$
$$\frac{\beta_{vh}a_1p_{11}e^{-\mu_1\tau}}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}(4N_1|y_1-y_1'| + M_1|x_1-x_1'|) + \frac{\beta_{vh}a_2p_{12}e^{-\mu_2\tau}}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}(4N_1|y_2-y_2'| + M_1|x_1-x_1'|) + \gamma_1|x_1-x_1'| +$$
$$\frac{\beta_{hv}a_1p_{11}}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}(4M_1|x_1-x_1'| + N_1|y_1-y_1'|) + \frac{\beta_{hv}a_1p_{21}}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}(4M_1|x_2-x_2'| + N_2|y_1-y_1'|) + \mu_1|y_1-y_1'| +$$
$$\frac{\beta_{vh}a_1p_{21}e^{-\mu_1\tau}}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}(4N_1|y_1-y_1'| + M_1|x_1-x_1'|) + \frac{\beta_{vh}a_2p_{22}e^{-\mu_2\tau}}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}(4N_1|y_2-y_2'| + M_1|x_1-x_1'|) + \gamma_2|x_2-x_2'| +$$
$$\frac{\beta_{hv}a_2p_{12}}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}(4M_2|x_1-x_1'| + N_1|y_2-y_2'|) + \frac{\beta_{hv}a_2p_{22}}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}(4M_2|x_2-x_2'| + N_2|y_2-y_2'|) + \mu_2|y_2-y_2'| \le$$
$$C\|(x_1,y_1,x_2,y_2) - (x_1',y_1',x_2',y_2')\|$$

Накрая се използват неравенства от вида $|x_1 - x_1'| \leq \|(x_1, y_1, x_2, y_2) - (x_1', y_1', x_2', y_2')\|$. Тогава, спрямо общата теория на диференциалните решения с управление, съществува единствено решение на (Система 1) за произволни t.

3.2 Ограниченост на решението

Да разгледаме множеството

$$X = \{0 \leq x_1 \leq N_1, 0 \leq y_1 \leq M_1, 0 \leq x_2 \leq N_2, 0 \leq y_2 \leq M_2\} \tag{5}$$

Началното условие е някъде в това множество, тъй като популациите са неотрицателни, а заразените индивиди не са над общата популация за съответната категория. Лесно може да се види, че е в сила:

$$(x_1(0), y_1(0), x_2(0), y_2(0)) \in X \implies \forall t > 0\,((x_1(0), y_1(0), x_2(0), y_2(0)) \in X) \tag{6}$$

Трябва да се покаже, че $\mathbf{F}$ сочи към вътрешността на X, ако решението се намира по границата ∂X. Но това наистина е така, от:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t)|_{X\cap\{x_1(t)=0\}} = \beta_{vh} N_1(t)\left(\frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_1(t))y_1(t)}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} + \frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_1(t))y_2(t)}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2}\right) \geq 0\\
&\dot{x}_1(t)|_{X\cap\{x_1(t)=N_1\}} = -\gamma_1 N_1 < 0\\
&\dot{y}_1(t)|_{X\cap\{y_1(t)=0\}} = \beta_{hv} a_1 M_1 \frac{p_{11}(1-\kappa u_1(t))x_1(t) + p_{21}(1-\kappa u_2(t))x_2(t)}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} \geq 0\\
&\dot{y}_1(t)|_{X\cap\{y_1(t)=M_1\}} = -\mu_1 M_1 < 0\\
&\dot{x}_2(t)|_{X\cap\{x_2(t)=0\}} = \beta_{vh} N_2\left(\frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_2(t))y_1(t)}{p_{11}N_1 + p_{21}N_2} + \frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_2(t))y_2(t)}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2}\right) \geq 0\\
&\dot{x}_2(t)|_{X\cap\{x_2(t)=N_2\}} = -\gamma_2 N_2 < 0\\
&\dot{y}_2(t)|_{X\cap\{y_2(t)=0\}} = \beta_{hv} a_2 M_2 \frac{p_{12}(1-\kappa u_1(t))x_1(t) + p_{22}(1-\kappa u_2(t))x_2(t)}{p_{12}N_1 + p_{22}N_2} \geq 0\\
&\dot{y}_2(t)|_{X\cap\{y_2(t)=M_2\}} = -\mu_2 M_2 < 0
\end{aligned}$$

3.3 Кооперативност (квазимонотонност)

Доказваме квазимонотонността по дефиницията ДЕФИНИЦИЯ!!! Матрицата на Якоби $\mathbf{DF}(x_1, y_1, x_2, y_2)(t)$ ще ни трябав и натам, затова нека я изведем изцяло:

$$\mathbf{DF}(x_1,y_1,x_2,y_2)(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_{x_1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_{x_1}}{\partial y_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_{x_1}}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathbf{F}_{x_1}}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{y_1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_{y_1}}{\partial y_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_{y_1}}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathbf{F}_{y_1}}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{x_2}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_{x_2}}{\partial y_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_{x_2}}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathbf{F}_{x_2}}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{y_2}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_{y_2}}{\partial y_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_{y_2}}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathbf{F}_{y_2}}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{x_1}}{\partial x_1} = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} = -\beta_{vh}\left(\frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_1)y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} + \frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_1)y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right) - \gamma_1 < 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{x_1}}{\partial y_1} = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial y_1} = \beta_{vh}(N_1 - x_1(t))\frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_1(t))}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{x_1}}{\partial x_2} = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{x_1}}{\partial y_2} = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial y_2} = \beta_{vh}(N_1 - x_1(t))\frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_1(t))}{p_{12}N_1+p_{22}N_2} \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{y_1}}{\partial y_1} = \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial x_1} = \beta_{hv}a_1(M_1 - y_1(t))\frac{p_{11}(1-\kappa u_1(t))}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{y_1}}{\partial y_1} = \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_1} = -\beta_{hv}a_1\frac{p_{11}(1-\kappa u_1)x_1(t)+p_{21}(1-\kappa u_2)x_2(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} - \mu_1 < 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{y_1}}{\partial x_2} = \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial x_2} = \beta_{hv}a_1(M_1 - y_1(t))\frac{p_{21}(1-\kappa u_2(t))}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{y_1}}{\partial y_2} = \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_2} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{x_2}}{\partial x_1} = \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{x_2}}{\partial y_1} = \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial y_1} = \beta_{vh}(N_2 - x_2(t))\frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_2(t))}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{x_2}}{\partial x_2} = \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} = -\beta_{vh}\left(\frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1(1-\kappa u_2)y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} + \frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_2)y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right) - \gamma_2 < 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{x_2}}{\partial y_2} = \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial y_2} = \beta_{vh}(N_2 - x_2(t))\frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2(1-\kappa u_2(t))}{p_{12}N_1+p_{22}N_2} \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{y_2}}{\partial x_1} = \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial x_1} = \beta_{hv}a_2(M_2 - y_2(t))\frac{p_{12}(1-\kappa u_1(t))}{p_{12}N_1+p_{22}N_2} \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{y_12}}{\partial y_1} = \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial y_1} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{y_2}}{\partial x_2} = \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial x_2} = \beta_{hv}a_2(M_2 - y_2(t))\frac{p_{22}(1-\kappa u_2(t))}{p_{12}N_1+p_{22}N_2} \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{y_2}}{\partial y_2} = \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial y_2} = -\beta_{hv}a_2\frac{p_{12}(1-\kappa u_1)x_1(t)+p_{22}(1-\kappa u_2)x_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2} - \mu_2 < 0$$

Извън главния диагонал има само неотрицателни елементи, тогава системата е кооперативна.

3.4 Неподвижни точки

Да разгледаме $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}$. Веднага се вижда, че $\mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{0}$ е тривиалната неподвижна точка на системата. Сега разглеждаме за фиксирано укравление $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{u}$.

Ще използваме теоремата на Смит за автономни системи.

При $R_0 \leq 1$, $\mathbf{0}$ е единствена устойчива неподвижна точка, а при $R_0 > 1$, то $\mathbf{0}$ е неустойчива неподвижна точка и съществува точно една друга устойчива, намираща се във вътрешността на X.

3.5 Система на Marchaud/Peano

За да има търсената задача решение, то трябва ядрото на допустимост (4) да съществува и да не е празно. От ЦИТАТ!!! за съществуването е необходимо да покажем, че $\mathscr{F}(\mathbf{z}(t)) = (F)(\mathbf{z}(t), U)$ е изображение на Marchaud/Peano.

$\mathscr{F}$ е изображение на Marchaud/Peano, ако е нетривиално, отгоре полунепрекъснато, с компактни изпъкнали образи и с линейно нарастване.

Стига параметрите ни да не са всички нулеви, то $\mathscr{F}$ е нетривиално.
От факта, че $\mathbf{F}$ е непрекъснато по всяка компонента (а даже и диференцируемо), то е и отгоре полунепрекъснато, откъдето и $\mathscr{F}$ е.
X е затворено и ограничено, а е крайномерно, съответно е компактно. Аналогично за U. Тогава и $X \times U$ е компактно. Директно от дефинициите на X, U те също така са изпъкнали, тоест $X \times U$ е изпъкнало. Вече видяхме, че X положително инвариантно за системата. Тогава образите на $\mathscr{F}$ ще са в $X \times U$, с други думи са компактни и изпъкнали.

3.5.1 Линейно нарастване

За да покажем линейното нарастване, да забележим, че $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Тогава може да запишем:

$$
\begin{aligned}
&\|\mathbf{F}(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2)\| = \|\mathbf{F}(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - \mathbf{0}\| = \|\mathbf{F}(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, u_2) - \mathbf{F}(\mathbf{0})\| = \\
&\frac{\beta_{vh} a_1 p_{11} e^{-\mu_1 \tau}}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} (2N_1(2|y_1| + M_1 \kappa |u_1|) + M_1 |x_1|) + \\
&\frac{\beta_{vh} a_2 p_{12} e^{-\mu_2 \tau}}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} (2N_1(2|y_2| + M_2 \kappa |u_1|) + M_1 |x_1|) + \gamma_1 |x_1| + \\
&\frac{\beta_{hv} a_1 p_{11}}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} (2M_1(2|x_1| + N_1 \kappa |u_1|) + N_1 |y_1|) + \\
&\frac{\beta_{hv} a_1 p_{21}}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} (2M_1(2|x_2| + N_2 \kappa |u_2|) + N_2 |y_1|) + \mu_1 |y_1| + \\
&\frac{\beta_{vh} a_1 p_{21} e^{-\mu_1 \tau}}{p_{11} N_1 + p_{21} N_2} (2N_1(2|y_1| + M_1 \kappa |u_1|) + M_1 |x_1|) + \\
&\frac{\beta_{vh} a_2 p_{22} e^{-\mu_2 \tau}}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} (2N_1(2|y_2| + M_2 \kappa |u_1|) + M_1 |x_1|) + \gamma_2 |x_2| + \\
&\frac{\beta_{hv} a_2 p_{12}}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} (2M_2(2|x_1| + N_1 \kappa |u_1|) + N_1 |y_2|) + \\
&\frac{\beta_{hv} a_2 p_{22}}{p_{12} N_1 + p_{22} N_2} (2M_2(2|x_2| + N_2 \kappa |u_2|) + N_2 |y_2|) + \mu_2 |y_2| \leq \\
&\tilde{C}_1 |u_1| + \tilde{C}_2 |u_2| + \tilde{C}_3 \|(x_1, y_1, x_2, y_2)\| \leq \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 + \tilde{C}_3 \|(x_1, y_1, x_2, y_2)\| \leq \tilde{C}(1 + \|(x_1, y_1, x_2, y_2)\|)
\end{aligned}
$$

Така $V(\bar{\mathbf{I}},\bar{\mathbf{u}})$ съществува. Веднага може да видим, че $V(\bar{\mathbf{I}},\bar{\mathbf{u}}) \neq \emptyset$, понеже $\mathbf{0}$ е неподвижна точка за кое да е управление и следователно $\mathbf{0} \in V(\bar{\mathbf{I}},\bar{\mathbf{u}})$.

4 Вариационна задача на Хамилтон-Якоби-Белман

За намиране на ядрото на допустимост (4) се подхожда със задачата на Хамилтон-Якоби-Белман за минимизация на функционал, като v е фунцкията на стойността. Опитваме се да решим:

$$\min\{\lambda v(x_1,y_1,x_2,y_2)+\mathcal{H}(x_1,y_1,x_2,y_2,\boldsymbol{\nabla} v), v(x_1,y_1,x_2,y_2)-\Gamma(x_1,y_1,x_2,y_2)\} = 0 \tag{7}$$

Хамилтонянът е дефиниран чрез производна по направлението $\boldsymbol{\nabla} v$, като:

$$\mathcal{H}(x_1,y_1,x_2,y_2,\boldsymbol{\nabla} v) = -\max_{u\in\mathcal{U}}\langle \mathbf{F}(x_1,y_1,x_2,y_2,u_1,u_2), \boldsymbol{\nabla} v\rangle \tag{8}$$

Използвайки вида на $\mathbf{F}$, след групиране по части зависещи/независещи от управлението, получаваме:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(x_1,y_1,x_2,y_2,\boldsymbol{\nabla} v) = &\left[\gamma_1 x_1(t) - \beta_{vh}(N_1 - x_1(t))\left(\frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1 y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} + \frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2 y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right)\right]\frac{\partial v}{\partial x_1}+\\
&\left[\mu_1 y_1(t) - \beta_{hv}a_1(M_1 - y_1(t))\frac{p_{11}x_1(t)+p_{21}x_2(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}\right]\frac{\partial v}{\partial y_1}+\\
&\left[\gamma_2 x_2(t) - \beta_{vh}(N_2 - x_2(t))\left(\frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1 y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} + \frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2 y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right)\right]\frac{\partial v}{\partial x_2}+\\
&\left[\mu_2 y_2(t) - \beta_{hv}a_2(M_2 - y_2(t))\frac{p_{12}x_1(t)+p_{22}x_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right]\frac{\partial v}{\partial y_2}+\\
&\max\left\{0, \beta_{vh}(N_1 - x_1(t))\kappa\bar{u}_1\left(\frac{p_{11}e^{-\mu_1\tau}a_1 y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} + \frac{p_{12}e^{-\mu_2\tau}a_2 y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right)\frac{\partial v}{\partial x_1}\right\}+\\
&\max\left\{0, \beta_{hv}a_1(M_1 - y_1(t))\kappa\frac{p_{11}\bar{u}_1 x_1(t)+p_{21}\bar{u}_2 x_2(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2}\frac{\partial v}{\partial y_1}\right\}+\\
&\max\left\{0, \beta_{vh}(N_2 - x_2(t))\kappa\bar{u}_2\left(\frac{p_{21}e^{-\mu_1\tau}a_1 y_1(t)}{p_{11}N_1+p_{21}N_2} + \frac{p_{22}e^{-\mu_2\tau}a_2 y_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\right)\frac{\partial v}{\partial x_2}\right\}+\\
&\max\left\{0, \beta_{hv}a_1(M_2 - y_2(t))\kappa\frac{p_{12}\bar{u}_1 x_1(t)+p_{22}\bar{u}_2 x_2(t)}{p_{12}N_1+p_{22}N_2}\frac{\partial v}{\partial y_2}\right\}
\end{aligned}$$

5 Числено приближение на ядрото на допустимост

5.1 Еквивалентна задача

[3]

5.2 WENO

За численото пресмятане на задачата се използва дискретизация по пространството по метода Weighted Essentially Non-Oscillatory (WENO) за приближаване, което е от ред $O(h^5)$. [3]

5.3 Дискретизация по времето

Отново по Osher, дискретизираме по времето с подобрения метод на Ойлер, който е добре известно е от ред $O(\tau^2)$. [3]

5.4 Симулация

Литература

[1] Vincenzo Capasso. Англ. В: *Mathematical Structures of Epidemic Systems*. 2-е изд. Springer, 2008. Гл. 2.2.4, 2.3.1.2.4, 4.3.3, с. 16, 27—30, 115. ISBN: 978-3-540-56526-0.

[2] Derdei Bichara & Carlos Castillo-Chavez. “Vector-borne diseases models with residence times – A Lagrangian perspective”. Англ. В: *Mathematical Biosciences* (10 септ. 2016).

[3] Stanley Osher & Ronald Fedkiw. Англ. В: *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. 1-е изд. Springer, 2003. Гл. I-II.3, с. 1—41. ISBN: 978-0-387-95482-1.

[4] Peter Rashkov. “INSERT TITLE”. Англ. В: *Journal* (1 ян. 2019).