Избрани въпроси от хидродинамиката

Калоян Стоилов

9 юли 2022 г.

I Гравитационни вълни

Хидродинамиката разглежда 3 вида вълни - повърхнинни, вътрешни и свивателни. И в трите случая вълните са предвижващи се флуидни трептения. При първия тип връщащи сили се оказват повърхностното напрежение и гравитацията, при вторите - само гравитацията, а при третите - от свиваемостта на флуида. Вълните на границата на въздух-вода са добър пример за повърхнинни вълни и се наричат водни вълни.

I.1 Основни понятия

Нека разглеждаме координатна система с абсциса x и ордината абсциса z. Синусуидална бягаща вълна се представя с уравнението

$$z(x,t) = A\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)\right] \tag{I.1}$$

Тук A е амплитудата на вълната - най-голямото отдалечаване от положението. Ако фиксираме времето t, менейки x, то имаме следваща амплитуда при:

$$\frac{2\pi}{\lambda}((x+\lambda)-ct) = \frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)+2\pi \tag{I.2}$$

λ е дължината на вълната - разстоянието между две съседни амплитуди. $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ е пространствената честота. c се нарича фазова скорост, а $2\pi(x-ct)$ - фаза. Ако фиксираме x, то менейки t получаваме прериодично движение нагоре-надолу. Ако в x има пик, то следващият ще настъпи, когато към аргумента на $\cos$ добавим 2π. Но

$$\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)+2\pi = \frac{2\pi}{\lambda}(x-ct+\lambda) = \frac{2\pi}{\lambda}(x-c(t+\frac{\lambda}{c})) \tag{I.3}$$

Това води до $T = \frac{\lambda}{c}$ - период между двата пика за фиксираната позиция. $\nu = \frac{1}{T}$ се нарича циклична честота, а $\omega = 2\pi\nu = kc$ - радиална честота. Така може да сведем уравнението на вълната до:

$$z(x,t) = A\cos(kx-\omega t) \tag{I.4}$$

Пиковете се предвижват по следния начин с времето:

$$k\xi - \omega t = 2n\pi, \quad \xi = \frac{\omega}{k}t + \frac{2n\pi}{k} \tag{I.5}$$

Така фазовата скорост c се оказва точно скоростта с която се предвижва вълната в пространството за даден период от време. Ако c зависи от вълновото число k (или еквивалентно от дължината на вълната λ), то наричаме повърхностните вълни дисперсни.

I.2 Групова скорост

Нека съберем синусоидални вълни с еднакви амплитуди и близки възлови числа. Тогава:

$$z(x,t) = A\cos(k_1x-\omega_1 t) + A\cos(\delta k_2 x - \omega_2 t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos(kx-\omega t) \tag{I.6}$$

Въвели сме $\Delta k = k_2 - k_1$, $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, $k = \frac{k_1+k_2}{2}$, $\omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ Да разгледаме вълните, които в пространствен участък имат най-голяма амплитуда, т.е.:

$$\cos\left(\frac{\Delta k}{2}\xi - \frac{\Delta\omega}{2}t\right) \approx 1 \tag{I.7}$$

$$\frac{\Delta k}{2}\xi - \frac{\Delta\omega}{2}t = n\pi \tag{I.8}$$

Скоростта с която се движат точките ξ на максимална амплитуда е точно $\frac{\Delta\omega}{\Delta k}$. Това води до понятието групова скорост - $c_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$. Обвивката на вълните с максимална амплитуда в даден момент се движи като вълна със скорост c_g. Ако вълните не са дисперсивни, то имаме, че:

$$c_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}ck}{\mathrm{d}k} = c \tag{I.9}$$

Тоест съвпада със фазовата скорост на отделните вълни. Пример за това са звуковите вълни. Ако пък разглеждаме вълни около повърхността, то може да се покаже, че $\omega^2 = gk$, тогава:

$$c_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}\sqrt{gk}}{\mathrm{d}k} = \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{k}} = \frac{c}{2} \tag{I.10}$$

Груповата скорост се оказва два пъти по-малка от тази на отделните вълни. Изразявайки ω, k по дефинициите им, то достигаме до формулата на Рейли:

$$c_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}\frac{2\pi c}{\lambda}}{\mathrm{d}\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\lambda\mathrm{d}c - c\mathrm{d}\lambda}{-\mathrm{d}\lambda} = c - \lambda\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\lambda} \tag{I.11}$$

Литература

[1] Pijush Kundu, Ira M. Cohen, and David R. Dowling. “Fluid Mechanics”. English. In: 6th ed. Academic Press, 2016. Chap. 8.1, 8.5, pp. 350–353, 370–377. ISBN: 978-0-12-405935-1.

[2] Запрян Запрянов. **?**Хидродинамика**?** в: 1-е изд. Университетско издателство “Св. Климент Охридски“, 1996. гл. 5.10, 5.14, с. 276—282, 292—294. ISBN: 954-07-0633-5.