

Решения на задачи по МКЕ 1

Калоян Стоилов

25 октомври 2021 г.

Задача 1. Да се приложи МКЕ с мрежа с възли $\frac{k}{3}, k = \overline{0, 3}$

$$\begin{cases} -u'' = 1 \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Решение. Всъщност за тази задача лесно може да намерим и аналитичното решение:

$$\begin{aligned} -u'' = 1 &\implies u' = -x + a \implies u = -\frac{x^2}{2} + ax + b \\ -u(0) = 0 &\implies b = 0 \\ -u'(1) = 0 &\implies -\frac{2}{2} + a = 0 \implies a = 1 \\ \implies u(x) &= -\frac{x^2}{2} + x \end{aligned}$$

За да приложим МКЕ, умножаваме двете страни по функция $v(x)$ и интегрираме:

$$\begin{aligned} -\int_0^1 u''(x)v(x)dx &= \int_0^1 v(x)dx \\ \int_0^1 u'(x)v'(x)dx - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) &= \int_0^1 v(x)dx \\ \int_0^1 u'(x)v'(x)dx &= \int_0^1 v(x)dx \end{aligned}$$

За да подсигурием последното, ще е необходимо $v(0) = 0$, т.е. $v \in V = \{v \in H^1 | v(0) = 0\}$. Билинейната форма за задачата ни е $a(f, g) =$

$\int_0^1 f'(x)g'(x)dx$, а $F(v) = \int_0^1 v(x)dx$. След проектиране в пространството V_h , където за базис взимаме познатите ни функции колибки, достигахме до системата:

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Решението е $(q_1, q_2, q_3)^T = (\frac{5}{18}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2})^T$.

Задача 2. Да се приложи МКЕ с мрежа с възли $\frac{k}{3}, k = \overline{0, 3}$

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(c(x)\frac{du}{dx}(x)\right) = \delta\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases}, \quad c(x) = \begin{cases} 2, x < \frac{1}{3} \\ 4, x \geq \frac{1}{3} \end{cases} \quad (3)$$

Решение. За да приложим МКЕ, умножаваме двете страни по функция $v(x)$ и интегрираме:

$$\begin{aligned} -\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(c(x)\frac{du}{dx}(x)\right)v(x)dx &= \int_0^1 v(x)dx \\ \int_0^1 c(x)\frac{du}{dx}(x)v'(x)dx - c(1)\frac{du}{dx}(1)v(1) + c(0)\frac{du}{dx}(0)v(0) &= \int_0^1 v(x)dx \\ \int_0^1 c(x)u'(x)v'(x)dx &= \int_0^1 v(x)dx \end{aligned}$$

За да подсигурирм последното, ще е необходимо $v(0) = 0$, т.е. $v \in V = \{v \in H^1 | v(0) = 0\}$. Билинейната форма за задачата ни е $a(f, g) = \int_0^1 c(x)f'(x)g'(x)dx$, а $F(v) = \int_0^1 v(x)dx$. След проектиране в пространството V_h , където за базис взимаме познатите ни функции колибки, достигахме до системата:

$$\begin{pmatrix} 18 & -12 & 0 \\ -12 & 24 & -12 \\ 0 & -12 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Повечето коефициенти се извеждат от предишната задача, но се умножават по 4, т.к. в съответните интервали $c(x) = 4$. Коефициентът $a(\varphi_1, \varphi_1)$ се получава, като разбием интеграла на две части - отляво и отдясно на точката $\frac{1}{3}$, която е Решението е $(q_1, q_2, q_3)^T = (\frac{1}{6}, \frac{5}{24}, \frac{5}{24})^T$.