Задача 4 относно функциите с ограничена вариация и крайните борелови знакопроменливи мерки

Калоян Стоилов

5 декември 2024 г.

Нека фиксираме $a, b \in \mathscr{R}$. С $\mathscr{B}[a,b]$ бележим σ-алгебрата от борелови подмножества на интервала $[a,b]$. Бореловите (знакопроменливи) мерки върху $[a,b]$ са (знакопременливите) мерки върху $\mathscr{B}[a,b]$.
От лекцията за мярка и интеграл на Лебег-Стилтес, може за дадена монотонно-растяща функция $r : [a,b] \to \mathbb{R}$ да дефинираме предмярка $\rho_0(r) : [a,b] \to [0,\infty)$. Чрез $\rho_0(r)$ дефинираме $\rho^*(r)$, откъдето и мярката на Лебег-Стилтес $\rho(r)$. Тя е крайна, понеже $\rho(r)([a,b]) = r(b) - r(a)$.
Чрез нея дефинираме интеграла на Лебег-Стилтес $\int_a^b f \mathrm{d}\rho(r) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}r(x)$. Нека $g \in BV[a,b]$, която може да представим по теоремата на Жордан като $g = \varphi - \psi$, с φ, ψ монотонно растящи. Оттук дефинираме интеграл на Лебег-Стилтес за g като $\int_a^b f \mathrm{d}g(x) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}phi(x) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}psi(x)$. Фиксираме тези означения надолу. Нека дефинираме $\rho(g) = \rho(\varphi) - \rho(\psi)$. $\rho(g)$ е крайна знакопроменлива мярка върху $\mathscr{B}[a,b]$, защото:

- $\rho(g)(\emptyset) = \rho(\varphi)(\emptyset) - \rho(\psi)(\emptyset) = 0 - 0 = 0$
- $S_1, S_2 \ldots \in \mathscr{B}[a,b], \quad S_i \cap S_j = \emptyset, i \neq j \implies \rho(g)(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n) = \rho(\varphi)(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n) - \rho(\psi)(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(\varphi)(S_n) - \sum_{n=1}^{\infty} \rho(\psi)(S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(\varphi)(S_n) - \rho(\psi)(S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(g)(S_n)$
- $\rho([a,b]) = \rho(\varphi)([a,b]) - \rho(\psi)([a,b]) < \infty$

Така получихме, че:

$$\begin{aligned} \int_a^b f \mathrm{d}\rho(g) = \int_a^b f \,\mathrm{d}(\rho(\varphi) - \rho(\psi)) = \int_a^b f \mathrm{d}\rho(\varphi) - \int_a^b f \mathrm{d}\rho(\psi) = \\ \int_a^b f(x)\mathrm{d}\varphi(x) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}\psi(x) = \int_a^b f \mathrm{d}g(x) \end{aligned} \tag{1}$$

Така показахме, че от фунцкия с ограничена вариация, може да дефинираме крайна борелова знакопроменлива мярка и интегралът за нея да съвпада с интеграла на Лебег-Стилтес за функцията.

Нека сега разгледаме разсъжденията в обратната посока и да е дадена някаква крайна борелова знакопроменлива мярка ν върху $\mathscr{B}[a,b]$. Тогава от теоремата на Жордан съществуват ν^+, ν^-, които са $[a,b]$-положителни. Дефинираме функции $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \nu^+([a,x]), \psi(x) = \nu^-([a,x])$. Така от свойствата на мярката, веднага се вижда, че функциите са монотонно растящи. Ако дефинираме $g = \varphi - \psi$, получаваме че $g \in BV[a,b]$. За да получим (1) в обратната посока, ще трябва да покажем, че за интервали I от четирите вида $\rho_0(\varphi)(I) = \nu^+(I)$ и $\rho_0(\psi)(I) = \nu^-(I)$, понеже ρ_0 поражда ρ, а μ^+, μ^- са породени от себе си. Доказателството и за двете е аналогично, така че нека покажем за φ:

- $\rho_0(\varphi)([\alpha,\beta]) = \varphi_+(\beta) - \varphi_-(\alpha) = \lim\limits_{x\to\beta+} \varphi(x) - \lim\limits_{x\to\alpha-} \varphi(x) =$
  $\lim\limits_{x\to\beta+} \nu^+([a,x]) - \lim\limits_{x\to\alpha-} \nu^+([a,x]) = \nu^+([a,\beta]) - \nu^+([a,\alpha)) = \nu^+([\alpha,\beta])$
- $\rho_0(\varphi)((\alpha,\beta]) = \varphi_+(\beta) - \varphi_+(\alpha) = \lim\limits_{x\to\beta+} \varphi(x) - \lim\limits_{x\to\alpha+} \varphi(x) =$
  $\lim\limits_{x\to\beta+} \nu^+([a,x]) - \lim\limits_{x\to\alpha+} \nu^+([a,x]) = \nu^+([a,\beta]) - \nu^+([a,\alpha]) = \nu^+((\alpha,\beta])$
- $\rho_0(\varphi)([\alpha,\beta)) = \varphi_-(\beta) - \varphi_-(\alpha) = \lim\limits_{x\to\beta-} \varphi(x) - \lim\limits_{x\to\alpha-} \varphi(x) =$
  $\lim\limits_{x\to\beta-} \nu^+([a,x]) - \lim\limits_{x\to\alpha-} \nu^+([a,x]) = \nu^+([a,\beta)) - \nu^+([a,\alpha)) = \nu^+([\alpha,\beta))$
- $\rho_0(\varphi)((\alpha,\beta)) = \varphi_-(\beta) - \varphi_+(\alpha) = \lim\limits_{x\to\beta-} \varphi(x) - \lim\limits_{x\to\alpha+} \varphi(x) =$
  $\lim\limits_{x\to\beta-} \nu^+([a,x]) - \lim\limits_{x\to\alpha+} \nu^+([a,x]) = \nu^+([a,\beta)) - \nu^+([a,\alpha]) = \nu^+((\alpha,\beta))$

Границите могат да се преформулират като изборимо обединение на $[a,\gamma-\frac{1}{n}]$ или изброимо сечение на $[a,\gamma+\frac{1}{n}]$, и от свойствата на мярката получаваме равносилните представяния.
След аналогичните разсъждения за ψ получаваме, че:

$$\int_a^b f \mathrm{d}g(x) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}\varphi(x) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}\psi(x) = \int_a^b f\mathrm{d}\rho(\varphi) - \int_a^b f\mathrm{d}\rho(\psi) = \int_a^b f\mathrm{d}\nu^+ - \int_a^b f\mathrm{d}\nu^- \tag{2}$$
$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\big(\nu^+ - \nu^-\big) = \int_a^b f\mathrm{d}\nu$$

С други думи, от крайна борелова знакопроменлива мярка дефинирахме функция с органичена вариация и интегралът на Лебег-Стилтес за нея съвпада с интеграла за мярката.