

Избрани въпроси от хидродинамиката

Калоян Стоилов

9 юли 2022 г.

I Гравитационни вълни

Хидродинамиката разглежда 3 вида вълни - повърхнинни, вътрешни и свивателни. И в трите случая вълните са предвижващи се флуидни трептения. При първия тип въртящи сили се оказват повърхностното напрежение и гравитацията, при вторите - само гравитацията, а при третите - от свиваемостта на флуида. Вълните на границата на въздух-вода са добър пример за повърхнинни вълни и се наричат водни вълни.

I.1 Основни понятия

Нека разглеждаме координатна система с абсциса x и ордината абсциса z . Синусоидална бягаща вълна се представя с уравнението

$$(I.1) \quad z(x, t) = A \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) \right]$$

Тук A е амплитудата на вълната - най-голямото отдалечаване от положението. Ако фиксираме времето t , менейки x , то имаме следваща амплитуда при:

$$\frac{2\pi}{\lambda}((x + \lambda) - ct) = \frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) + 2\pi$$

λ е дължината на вълната - разстоянието между две съседни амплитуди. $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ е пространствената честота. c се нарича фазова скорост, а $2\pi(x - ct)$ - фаза. Ако фиксираме x , то менейки t получаваме прериодично движение нагоре-надолу. Ако в x има гребен, то следващият ще настъпи, когато към аргумента на \cos добавим 2π . Но

$$\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) + 2\pi = \frac{2\pi}{\lambda}(x - ct + \lambda) = \frac{2\pi}{\lambda}(x - c(t + \frac{\lambda}{c}))$$

Това води до $T = \frac{\lambda}{c}$ - период между двата гребена за фиксираната позиция. $\nu = \frac{1}{T}$ се нарича циклична честота, а $\omega = 2\pi\nu = kc$ - радиална честота. Така може да сведем уравнението на вълната до:

$$(I.2) \quad z(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

Гребените се предвижват по следния начин с времето:

$$k\xi - \omega t = 2n\pi, \quad \xi = \frac{\omega}{k}t + \frac{2n\pi}{k}$$

Така фазовата скорост c се оказва точно скоростта с която се предвижва вълната в пространството за даден период от време. Ако c зависи от вълновото число k (или еквивалентно от дължината на вълната λ), то наричаме повърхностните вълни дисперсни.

I.2 Грүпова скорост

Нека съберем синусоидални вълни с еднакви амплитуди и близки възлови числа. Тогава:

$$z(x, t) = A \cos(k_1 x - \omega_1 t) + A \cos(\delta k_2 x - \omega_2 t) = 2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right) \cos(kx - \omega t)$$

Въвели сме $\Delta k = k_2 - k_1$, $\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1$, $k = \frac{k_1 + k_2}{2}$, $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$. Да разгледаме вълните, които в пространствен участък имат най-голяма амплитуда, т.е.:

$$\cos\left(\frac{\Delta k}{2}\xi - \frac{\Delta \omega}{2}t\right) \approx 1$$

$$\frac{\Delta k}{2}\xi - \frac{\Delta \omega}{2}t = n\pi$$

Скоростта с която се движат точките ξ на максимална амплитуда е точно $\frac{\Delta \omega}{\Delta k}$. Това води до понятието групова скорост - $c_g = \frac{d\omega}{dk}$. Обвивката на вълните с максимална амплитуда в даден момент се движи като вълна със скорост c_g . Ако вълните не са дисперсни, то имаме, че:

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dc}{dk} = c$$

Тоест съвпада със фазовата скорост на отделните вълни. Пример за това са звуковите вълни. Ако пък разглеждаме вълни около повърхността, то може да се покаже, че $\omega^2 = gk$, тогава:

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\sqrt{gk}}{dk} = \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{k}} = \frac{c}{2}$$

Груповата скорост се оказва два пъти по-малка от тази на отделните вълни. Изразявайки ω, k по дефинициите им, то достига до формулата на Рейли:

$$(I.3) \quad c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\frac{2\pi c}{\lambda}}{d\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\lambda dc - c d\lambda}{-d\lambda} = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}$$

Ако хвърлим камъче във водата се образуват вълни. В момент скоро след удара, движението на водата е трудно определяемо. След време се образуват "типични" вълни с гребени и падини, но сменяща се дължина на вълната. Вече A, ω, k ще са функции на времето и пространството. Да разгледаме вълнов пакет описан чрез:

$$z(x, t) = A(x, t) \cos \theta(x, t)$$

Тук с $\theta(x, t)$ сме отбелязали локалната фаза, т.е. за фиксирани k и ω - $\theta(x, t) = kx - \omega t$. При бавно променящ се пакет може да дефинираме k и ω като производни на фазата по пространство/време:

$$k(x, t) = \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x}, \quad \omega(x, t) = -\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t}$$

Допускайки достатъчна гладкост на θ , то веднага достига до

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$$

Нека сега имаме дисперсни вълни и $\omega = \omega(k)$. Тогава използвайки диференциране на сложна функция:

$$(I.4) \quad \frac{\partial k}{\partial t} + c_g \frac{\partial k}{\partial x} = 0$$

Това е като материална производна, но при предвижване със скорост c_g . Обаче решението на уравнението лесно се вижда, че е $f(x - c_g(k)t)$, като f се определя по начални условия. Тогава $k = \text{const} \iff x - c_g t = \text{const}$ (c_g в такъв случай също би било константа). Така всяка дължина на вълната е свързана с по една права (от деф. на k). Наблюдавайки точка, движеща се с групова скорост c_g , то ще се наблюдава вълна с еднаква дължина. Това е кинематичният смисъл на груповата скорост.

I.3 Поток на енергията

С вълновото движение се предава енергия от един обем на друг, т.е. енергията се изменя по пространството и по времето. Нека имаме вълна движеща се отляво надясно. Тя ще има потенциал от вида:

$$(I.5) \quad \begin{aligned} \Phi(x, z, t) &= \frac{ag}{\omega} e^{kz} \sin(kx - \omega t) \\ u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{agk}{\omega} e^{kz} \cos(kx - \omega t) = a\omega e^{kz} \cos(kx - \omega t) \end{aligned}$$

Тук използвахме $\omega^2 = gk$. Така трябва да пресметнем енергийния поток през равнина перпендикулярна на x . Трябва да разгледаме само действието на p за някакъв период τ . Да вземем някаква малка ивица по z - Δz и такава с дължина 1 по y . Интересуваме се от работата, извършена от налягането върху частта от равнината, заключена между тях за време Δt . За достатъчно малки Δz , може да приближим стойността на p , с тази в някоя точка от правоъгълника, например центъра. За преместването използваме скоростта на вълната u , отново оценена там. Така получаваме формула за работата от вида:

$$1 \Delta z p(\xi, \zeta, t) u(\xi, \zeta, t) \Delta t$$

След граничен преход получаваме, че

$$(I.6) \quad A = \int_{-\infty}^0 \int_0^{\tau} p u \, dz \, dt$$

Но $\frac{p-p_0}{\rho} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - gz = a g e^{kz} \cos(kx - \omega t) - gz$. Сега може да изразим:

$$(I.7) \quad p u = a^2 g \omega \rho e^{2kz} \cos^2(kx - \omega t) + (p_0 - \rho g z) a \omega e^{kz} \cos(kx - \omega t)$$

Ако перпендикулярната равнина, която разглеждаме е точно Oyz , то по нея $x = 0$. Използвайки четността на \cos , както и $\int_0^{\tau} \cos^2 \omega t \, dt = \frac{\tau}{2}$ и $\int_0^{\tau} \cos \omega t \, dt = 0$, то:

$$(I.8) \quad \begin{aligned} A &= \int_{-\infty}^0 \int_0^{\tau} p u \, dz \, dt = \int_{-\infty}^0 \int_0^{\tau} a^2 g \omega \rho e^{2kz} \cos^2 \omega t + (p_0 - \rho g z) a \omega e^{kz} \cos \omega t \, dz \, dt = \\ &= \int_{-\infty}^0 \left(a^2 g \omega \rho e^{2kz} \int_0^{\tau} \cos^2 \omega t \, dt + (p_0 - \rho g z) a \omega e^{kz} \int_0^{\tau} \cos \omega t \, dt \right) dz = \\ &= \int_{-\infty}^0 a^2 g \omega \rho e^{2kz} \frac{\tau}{2} dz = \frac{1}{2} \frac{\tau}{2} \int_{z=-\infty}^{z=0} \frac{a^2 g^2 \rho}{\omega} e^{2kz} d(2kz) = \frac{a^2 g^2 \rho \tau}{4\omega} \end{aligned}$$

Работата за единица време е $A_1 = \frac{a^2 g^2 \rho}{4\omega}$. Тя може да бъде разписана така:

$$(I.9) \quad A_1 = \frac{\rho g a^2}{4} \frac{g}{\omega} = \frac{\rho g a^2}{4} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{\rho g a^2}{2} \frac{c}{2} = E c_g$$

Така пълната енергия на вълните се пренася със скорост, равна на груповата.

II Хидродинамична неустойчивост

Общата идея на понятието устойчивост е при малки смущения на някакво първоначално/равновесно състояние, с времето да не настъпят големи изменения спрямо него. В хидродинамиката неустойчивостта се наблюдава под формата на хаотични, привидно произволни изменения в потока, наречени турбуленция. Идеята на изследването на неустойчивостта е да се предвиди настъпването на промяна от ламинарен към турбулентен поток.

II.1 Метод на нормалните моди

Линейният анализ на устойчивостта допуска съществуването на синусоидални смущения на някакво базово/първоначално/равновесно състояние. Например поток, успореден на x , номенящ се с z . Към този поток прилагаме смущение от вида:

$$(II.1) \quad u(x, y, z, t) = \hat{u}(z) e^{ikx + imy + \sigma t} = \hat{u}(z) e^{i\|\mathbf{K}\|(\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{x} - ct)}$$

Физически величини се получават от реалната част. $\hat{u}(z)$ е комплексна амплитуда, $\mathbf{K} = (k, m, 0)$ е вълновото число на смущението, $\mathbf{e}_K = \frac{\mathbf{K}}{\|\mathbf{K}\|}$. $\mathbf{x} = (x, y, z)$, c - комплексна фазова скорост, σ - времеви темп на растежа. В случая в експонентата участват x, y, t , защото коефициентите в диференциалните уравнения, определящи смущенията са не зависят от тях. Ако допуснем, че потокът е неограничен по x и y , то k и m ще трябва да са реални. Така ще трябва σ, c да са комплексни, за да са изпълнени гранични условия за x, y в безкрайност.

Ако $Re(\sigma)$ или $Im(c)$ са положителни за някоя стойност на вълновото число, то системата е неустойчива към нейни смущения.

- $Re(\sigma) < 0$ или $Im(c) < 0$ влекат устойчив поток.
- $Re(\sigma) = 0$ или $Im(c) = 0$ влекат неутрално устойчив поток.
- $Re(\sigma) > 0$ или $Im(c) > 0$ влекат неустойчив поток.

При метода на нормалните моди, всяка мода е независима и се разглежда отделно. Гранично състояние - когато сме на прага на устойчивост/неустойчивост, т.е. $Re(\sigma) = Im(c) = 0$. Ако $Im(\sigma) \neq 0$ или $Re(c) \neq 0$, то неустойчивостта се проявява като блягащи осцилации с растяща амплитуда. В другия случай, при неустойчивост се наблюдават вторични потоци.

II.2 Теорема на Скуайър и уравнение на Ор-Зомерфелд

Разглеждаме хомогенен (т.е. $\rho = const$) вискозен флуид в 3 пространствени измерения. Нека имаме основен поток насочен по x , като се изменя по y , тъй че $\mathbf{V} = (U(y), 0, 0)$. Разбиваме общия поток на сума от поток и пертурбация.

$$\tilde{\mathbf{u}} = (U + u, v, w), \quad \tilde{p} = P + p$$

Тогава от уравненията на Навие-Стокс

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (U + u) \frac{\partial U + u}{\partial x} + v \frac{\partial U + u}{\partial y} + w \frac{\partial U + u}{\partial z} &= - \frac{\partial P + p}{\partial x} + \nu \Delta(U + u) \\ - \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta U &= 0 \end{aligned}$$

След изваждане на второто от първото и пренебрегване на нелинейни спрямо U членове

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta(u)$$

Аналогично може да изведем за другите две компоненти:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta(v) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta(w) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0\end{aligned}$$

Уравненията са линейни и коефициентите им зависят само от y , откъдето решенията ще са от вида:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \hat{\mathbf{u}}(y) e^{i(kx+mz-ct)} \\ p &= \hat{p}(y) e^{i(kx+mz-ct)}\end{aligned}$$

Компонентите на вълновото число k и m трябва да са реални, докато фазовата скорост $c = c_r + ic_i$. Това води до аналогичния запис:

$$\begin{aligned}\text{(II.2)} \quad \mathbf{u} &= \hat{\mathbf{u}}(y) e^{kc_i t} e^{i(kx+mz-kc_r t)} \\ p &= \hat{p}(y) e^{kc_i t} e^{i(kx+mz-kc_r t)}\end{aligned}$$

Ако фиксираме x, z , то пертурбацията извършва осцилации с честота kc_r , като имаме устойчивост за $c_i < 0$ и неустойчивост за $c_i > 0$. Сега остава да заместим в уравненията. Да припомним, че Re е числото на Рейнолдс и се дефинира като $\text{Re} = \frac{U_0 L}{\nu}$ за някакви характеристични скорост U_0 и дължина L . Достигаме до:

$$\begin{aligned}\text{(II.3)} \quad ik(U - c)\hat{u} + \hat{v} \frac{dU}{dy} &= -ikp + \frac{U_0 L}{\text{Re}} \left[\frac{d^2 \hat{u}}{dy^2} - (k^2 + m^2)\hat{u} \right] \\ ik(U - c)\hat{v} &= -\frac{d\hat{p}}{dy} + \frac{U_0 L}{\text{Re}} \left[\frac{d^2 \hat{v}}{dy^2} - (k^2 + m^2)\hat{v} \right] \\ ik(U - c)\hat{w} &= -imp + \frac{U_0 L}{\text{Re}} \left[\frac{d^2 \hat{w}}{dy^2} - (k^2 + m^2)\hat{w} \right] \\ ik\hat{u} + \frac{d\hat{v}}{dy} + im\hat{w} &= 0\end{aligned}$$

Теорема 1 (Теорема на Скуайър). *За всяко тримерно неустойчиво смущение съществува по-неустойчиво двумерно смущение.*

Доказателство. Прилагаме тъй наречената трансформация на Скуайър:

$$\begin{aligned}\bar{k} &= \sqrt{k^2 + m^2}, \quad \bar{k}\bar{u} = k\hat{u} + m\hat{w} \\ \frac{\bar{p}}{\bar{k}} &= \frac{\hat{p}}{k}, \quad \bar{k}\bar{\text{Re}} = k\text{Re} \\ \bar{c} &= c, \quad \bar{v} = \hat{v}\end{aligned}$$

Когато $m \neq 0$, то $\bar{\text{Re}} < \text{Re}$. Събираме първото и третото от по-рано получените уравнения:

$$(II.4) \quad \begin{aligned} i\bar{k}(U-c)\bar{u} + \bar{v}\frac{dU}{dy} &= -i\bar{k}\bar{p} + \frac{U_0L}{\bar{\text{Re}}} \left[\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} - \bar{k}^2\bar{u} \right] \\ i\bar{k}(U-c)\bar{v} &= -\frac{d\bar{p}}{dy} + \frac{U_0L}{\bar{\text{Re}}} \left[\frac{d^2\bar{v}}{dy^2} - \bar{k}^2\bar{v} \right] \\ i\bar{k}\bar{u} + \frac{d\bar{v}}{dy} &= 0 \end{aligned}$$

Тъй като $\bar{\text{Re}} < \text{Re}$, то за този двумерен поток критичното число на Рейнолдс, където започва неустойчивостта, ще бъде достигнато преди това за тримерния. \square

Интерпретацията е следната. Тримерното смущение е вълна, разпространяваща се косо на равновесния поток. При правилна промяна на координатната система (x да сочи в тази посока), то само по новата ос x равновесния поток въздейства на смущението. Така е достатъчно да разглеждаме $m = \hat{\omega} = 0$.

В новия двумерен поток е вече може да дефинираме функция на тока $\psi(x, y, t)$. След прилагане на метода на нормалните моди:

$$(II.5) \quad \begin{aligned} u &= \hat{u}(y)e^{ik(x-ct)} \\ v &= \hat{v}(y)e^{ik(x-ct)} \\ \psi &= \hat{\psi}(y)e^{ik(x-ct)} \end{aligned}$$

Лесно може да видим, че $\hat{u} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y}$ и $\hat{v} = -ik\hat{\psi}$. Сега от първото уравнение за двумерния поток може да изразим p и да заместим във второто. Използваме и тези формули и достигаем до ОДУ от четвърти ред спрямо $\hat{\psi}$, което е известно като уравнение на Ор-Зомерфелд:

$$(II.6) \quad (U-c)\left(\frac{d^2\hat{\psi}}{dy^2} - k^2\hat{\psi}\right) - \frac{d^2U}{dy^2}\hat{\psi} = \frac{v}{ik}\left(\frac{d^4\hat{\psi}}{dy^4} - 2k^2\frac{d^2\hat{\psi}}{dy^2} + k^4\hat{\psi}\right)$$

За гранични условия имаме 2 варианта:

- Ограничени между някакви y_1 и y_2 несмутени потоци:

$$\hat{\psi}|_{y=y_1} = \hat{\psi}|_{y=y_2} = \frac{d\hat{\psi}}{dy}|_{y=y_1} = \frac{d\hat{\psi}}{dy}|_{y=y_2} = 0$$

- Неограничени несмутени потоци. За тях трябва приложените смущения да изчезват, отдалечавайки се от началото на координатната система:

$$\hat{\psi}|_{y=\infty} = \frac{d\hat{\psi}}{dy}|_{y=\infty} = 0$$

Аналитични решения или тяхни свойства са намерени само за много прости потоци. Това практически е уравнение за вихъра.

Литература

- [1] Pijush Kundu, Ira M. Cohen, and David R. Dowling. “Fluid Mechanics”. English. In: 6th ed. Academic Press, 2016. Chap. 8.1, 8.5, 11.2, 11.8, pp. 350–353, 370–377, 536–537, 570–572. ISBN: 978-0-12-405935-1.
- [2] Запрян Запрянов. “Хидродинамика” в: 1-е изд. Университетско издателство “Св. Климент Охридски“, 1996. гл. 5.10, 5.14, 9.1, с. 276–282, 292–294, 454–457. ISBN: 954-07-0633-5.