Задача 5 относно конволюцията в $\boldsymbol{L}(\mathbb{R}, \gtrdot)$

Калоян Стоилов

25 ноември 2024 г.

Надолу $f, g \in L(\mathbb{R}, \gtrdot)$. $(\mathbb{R}, m)$ е σ-крайно, понеже може да го представим като изброимо обединение от интервали с дължина 1. Тогава може да ползваме теоремите на Тонели и Фубини за $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, m \times m)$.

(а), (б), (в) Доказвайки (в), получаваме като следствие (б), понеже $h \in L((R), m) \iff |h| \in L(\mathbb{R}, m) \iff \|h\|_L < \infty$. Забелязваме, че:

$$\|h\|_L = \int_{\mathbb{R}} |h(x)| \mathrm{d}m(t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)g(t)| \mathrm{d}m(t) \mathrm{d}m(x) \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)||g(t)| \mathrm{d}m(t) \mathrm{d}m(x) \overset{\text{Тонели}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)| \mathrm{d}m(x) |g(t)| \mathrm{d}m(t) \overset{\text{упътване}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \mathrm{d}m(x) |g(t)| \mathrm{d}m(t) = \|f\|_L \int_{\mathbb{R}} |g(t)| \mathrm{d}m(t) = \|f\|_L \|g\|_L < \infty \cdot \infty = \infty$$

Наистина са изпълнени услиивята за теоремата на Фубини, понеже може да видим, че:

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} |f(x-t)g(t)| \mathrm{d}m(x) \times m(t) \overset{\text{Тонели}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)||g(t)| \mathrm{d}m(x) m(t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)| \mathrm{d}m(x) |g(t)| \mathrm{d}m(t) \overset{\text{вж. горе}}{<} \infty$$

Така имаме, че $|f(x-t)g(t)|$ е интегруема върху $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, откъдето проекцията ѝ $h(x)$ е интегруема върху $\mathbb{R}$ за почти всяко x, т.е. имаме и (а).