Числа на Лах

Калоян Стоилов

29 април 2021 г.

Числата на Лах за първи път се появяват 1954г. в труд на Иво Лах(Ivo Lah), словенски математик, живял 05.09.1896-23.03.1979. Имат връзка с числата на Стирлинг.

Подобно на числата на Стирлинг от първи род има числа на Лах със и без знак. Числата на Лах без знак обикновено се бележат:

$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor, \quad L(n,k), \quad \mathscr{L}_{n,k}.$$

Това са броят начини n-елементно множество да се разбие на k на брой непразни линейни наредби. Това е все едно броят начини от азбука с n букви да образуваме k думи без да повтаряме букви, общо използващи целия набор от букви.

За начални условия взимаме:

$$\begin{aligned}
&\left\lfloor {0 \atop 0} \right\rfloor = 1 \quad (\text{условно приемане})\\
&\left\lfloor {n \atop 0} \right\rfloor = 0, \;\; n > 0 \quad (\text{не се получава разбиване}),\\
&\left\lfloor {n \atop n} \right\rfloor = 1 \quad (\text{всяка буква е дума}),\\
&\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor = 0, \;\; n < k \quad (\text{не достигат букви}).
\end{aligned}$$

Твърдение 1. *Рекурентната формула, задаваща числата на Лах е:*

$$\left\lfloor {n+1 \atop k} \right\rfloor = (n+k) \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor + \left\lfloor {n \atop k-1} \right\rfloor.$$

Док. $n+1$-вият елемент или участва в някоя "предишна" дума (първото събираемо), или е сам (второто събираемо).

1. Нека имаме разбиване по линейни наредби, чиито дължини са съответно $i_1, ..., i_k$. Тогава може да поставим $n+1$-вият елемент или след някоя от тях или най-напред. Но това са съответно $i_1+1, ..., i_k+1$ начина. Тогава има $\sum_{j=0}^{k}(i_j+1) = n+k$.

2. Трябва да получим $k-1$ линейни наредби от останалите $(n+1)-1 = n$ елемента.

$\square$

Твърдение 2. *Може да се даде явна формула за числата на Лах. По-точно:*

$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor = \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}.$$

Док. Има $n!$ пермутации на n елемента. Думи може да получим, като на всяка пермутация между елементи сложим "разграничител така че да получим общо k думи, но местата между n-те елемента са $n-1$, а за да получим k думи ти трябват $k-1$ разграничителя, откъдето получаваме члена $\binom{n-1}{k-1}$. Така обаче достигнахме брой начини за наредена последователност от k думи, а се интересуваме само от това какви са те. Но за всяко множество от k думи има $k!$ техни пермутации, получени по посочения по-горе начин. $\square$

Нека с $L(n,k)$ бележим коефициента пред k-тия намаляващ факториел в "развитието"на n-тия растящ факториел, тоест:

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} L(n,k) x^{\underline{k}}$$

Ще отбележим, че това е възможно, тъй като отляво и отдясно се получават полиноми от n-та степен, а $x^{\underline{0}}, ..x^{\underline{n}}$ образуват базис за полиномите от n-та степен (или приемете това твърдение на доверие, или разгледайте връзката между числата на Стирлинг от втори род и падащите факториели).

Твърдение 3. *В сила е следното тъждество, даващо връзка между числата на Стирлинг от първи и втори род и* $L(n,k)$*:*

$$L(n,k) = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix}.$$

Док. Щом $s(n,k)$ е коефициента пред x^k в $x^{\underline{n}}$, то $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ е коефициента пред x^k в $x^{\overline{k}}$ (напр. разглеждане на $(-x)^{\underline{n}}$). Също така $x^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}}$. Използвайки и двете се получава:

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \sum_{i=0}^{k} \begin{Bmatrix} k \\ i \end{Bmatrix} x^{\underline{i}}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=k}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix} \right) x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix} \right) x^{\underline{k}}$$

За последното равенство използваме, че $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$ при $n < k$. □

Остава ни последното твърдение, а то е:

Твърдение 4.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = L(n,k).$$

Док. За да докажем, че двете "таблици" от числа са равносилно е достатъчно да проверим еднаквостта на началните условия и рекурентните уравнения.
Имаме, че:

$$L(0,0) = 1 \quad (x^{\overline{0}} = 1 = x^{\underline{0}},\ 1 = 1.x^0),$$
$$L(n,0) = 0,\ n > 0 \quad (\text{полиномът } x^{\overline{n}} \text{ е без свободен член, а } x^{\underline{0}} = 1.x^0),$$
$$L(n,n) = 1 \quad \left(\text{от сумата остава } \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n \\ n \end{Bmatrix} = 1.1 = 1\right),$$
$$L(n,k) = 0,\ n < k \quad (\text{полиномът } x^{\underline{k}} \text{ е с ненулев член пред } x^k).$$

Така началните условия съвпадат. За проверка на рекурентната зависимост използваме равенството от по-рано:

$$
\begin{aligned}
&L(n+1,k) \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix} \quad \text{(прилагаме Тв. 3)} \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \left(n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ j-1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix} \quad \text{(от рекурентната зависимост на } \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\text{)} \\
&= n \sum_{j=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix} + \sum_{j=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n \\ j-1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix} \\
&= n \begin{bmatrix} n \\ n+1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n+1 \\ k \end{Bmatrix} + n \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ k \end{Bmatrix} + \sum_{j=1}^{n+1} \begin{bmatrix} n \\ j-1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix} \\
&= n \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix} + \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} j+1 \\ k \end{Bmatrix} \quad \text{(от условията над числата на Стирлинг)} \\
&= n \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix} + \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \left(k \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} j \\ k-1 \end{Bmatrix} \right) \quad \text{(от рекурентната зависимост на } \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}\text{)} \\
&= (n+k) \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix} + \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} j \\ k-1 \end{Bmatrix} \\
&= (n+k)L(n,k) + L(n,k-1)
\end{aligned}
$$

Сега отчитаме Тв. 1 и явно рекурентата зависимост е същата. И тъй двете "таблици" съвпадат. □

Ето и началната част от таблицата на числата на Лах без знак:

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	6	6	1	0	0	0	0	0	0
4	0	24	36	12	1	0	0	0	0	0
5	0	120	240	120	20	1	0	0	0	0
6	0	720	1800	1200	300	30	1	0	0	0
7	0	5040	15120	12600	4200	630	42	1	0	0
8	0	40320	141120	141120	58800	11760	1176	56	1	0
9	0	362880	1451520	1693440	846720	211680	28224	2016	72	1

Някои интересни наблюдения:

$$\begin{aligned}
&\left\lfloor {n \atop 1} \right\rfloor = n! \quad \text{(очевидно)},\\
&\left\lfloor {n \atop n-1} \right\rfloor = \sum_{i=0}^{n-1} 2i = n(n-1) \quad \text{(проста индукция с рекурентата зависимост)},\\
&\left\lfloor {n \atop \lfloor\sqrt{n}\rfloor} \right\rfloor = \max_k \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor \quad \text{(предположение, проверено до n=3000)},\\
&\left\lfloor {n^2-1 \atop \lfloor\sqrt{n^2-1}\rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor {n^2-1 \atop \lfloor\sqrt{n^2-1}\rfloor+1} \right\rfloor, \; n>1 \quad \text{(доказано долу)}
\end{aligned}$$

Твърдение 5.

$$\left\lfloor {n^2-1 \atop \lfloor\sqrt{n^2-1}\rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor {n^2-1 \atop \lfloor\sqrt{n^2-1}\rfloor+1} \right\rfloor, \; n>1$$

Док. Знаем, че n^2 е точен квадрат, чийто корен е цялото число n. Но тогава n^2-1 ще бъде с корен между тези на $(n-1)^2$=n^2-2n+1 и n^2 (понеже $2n-1>1$), но тогава цялата му част ще е $n-1$. Получаваме:

$$\begin{aligned}
&\left\lfloor {n^2-1 \atop \lfloor\sqrt{n^2-1}\rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor {n^2-1 \atop n-1} \right\rfloor = \frac{(n^2-1)!(n^2-2)!}{(n-1)!(n-2)!(n^2-n)!} \quad \text{(отляво)}\\
&\left\lfloor {n^2-1 \atop \lfloor\sqrt{n^2-1}\rfloor+1} \right\rfloor = \left\lfloor {n^2-1 \atop n} \right\rfloor = \frac{(n^2-1)!(n^2-2)!}{n!(n-1)!(n^2-n-1)!} \quad \text{(отдясно)}
\end{aligned}$$

Тяхното отношение е:

$$\frac{\frac{(n^2-1)!(n^2-2)!}{(n-1)!(n-2)!(n^2-n)!}}{\frac{(n^2-1)!(n^2-2)!}{n!(n-1)!(n^2-n-1)!}} = \frac{n!(n-1)!(n^2-n-1)!}{(n-1)!(n-2)!(n^2-n)!} = \frac{n(n-1)}{n^2-n} = 1 \quad \text{(и тъй те са равни)}$$

□

Числата на Лах със знак нямат стандартно означение. Дефинират се като $(-1)^n \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$. Оказва се, че те се явяват като коефициенти пред x^{-n-k} при n-тата производна на $e^{\frac{1}{x}}$, разделена на $e^{\frac{1}{x}}$.[Вижте тук]