Задача 1 относно обобщението на мярка на Лебег за $\mathbb{R}$

Калоян Стоилов

18 ноември 2024 г.

(а) Нека $\{I_k\}$ и $\{J_k\}$ са две разбивания. Трябва да проверим, че:

$$m_I(S) = \sum_{k=1}^{\infty} m(S \cap I_k) = \sum_{l=1}^{\infty} m(S \cap J_l) = m_J(S)$$

Понеже $S \subseteq \mathbb{R}$, то $S = S \cap \mathbb{R}$ и от $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} J_l$ следва:

$$S = S \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} S \cap I_k$$
$$S = S \cap \bigcup_{l=1}^{\infty} J_l = \bigcup_{l=1}^{\infty} S \cap J_l$$

Използвайки горните представяния на S, както и пълната адитивност на m за интервали и че интервалите от разбиванията имат само общи краища:

$$m_I(S) = \sum_{k=1}^{\infty} m(S \cap I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m((\bigcup_{l=1}^{\infty} S \cap J_l) \cap I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(\bigcup_{l=1}^{\infty} S \cap J_l \cap I_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} m(S \cap J_l \cap I_k) =$$
$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} m(S \cap J_l \cap I_k) = \sum_{l=1}^{\infty} m(\bigcup_{k=1}^{\infty} S \cap I_k \cap J_l) = \sum_{l=1}^{\infty} m((\bigcup_{k=1}^{\infty} S \cap I_k) \cap J_l) = \sum_{l=1}^{\infty} m(S \cap J_l) = m_J(S)$$

(б) Трябва да проверим трите точки от дефиницията на σ-алгебра:

- $\emptyset$ е измеримо, понеже всичките $\{\emptyset \cap I_k\}$ са измерими
- $S_1, S_2 ... \subseteq \mathbb{R}, \quad S_1, S_2 ...$- измерими $\Longrightarrow S_l \cap I_k$- измерими $\Longrightarrow \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} (S_l \cap I_k)$- измерими $\Longrightarrow$ $(\bigcup\limits_{l=1}^{\infty} S_l) \cap I_k$- измерими $\Longrightarrow \bigcup_{l=1}^{\infty} S_l$- измеримо
- $S \subseteq \mathbb{R}, \quad S$ - измеримо $\Longrightarrow \mathbb{R} \setminus S \subseteq \mathbb{R}, \{S \cap I_k\}$ - измерими $\Longrightarrow \{I_k \setminus (S \cap I_k)\}$ - измерими $\Longrightarrow$ $\{I_k \cap (\mathbb{R} \setminus S)\}$ - измерими $\Longrightarrow \mathbb{R} \setminus S$ - измеримо

(в) Ако имаме непресичащи се $\{S_l\}$ то:

$$m(\bigcup_{l=1}^{\infty} S_l) = \sum_{k=1}^{\infty} m((\bigcup_{l=1}^{\infty} S_l) \cap I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(\bigcup_{l=1}^{\infty} (S_l \cap I_k)) \overset{\text{адит. m}}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} m(S_l \cap I_k) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} m(S_l \cap I_k) = \sum_{l=1}^{\infty} m(S_l)$$

Безкрайните суми разменяхме от неотрицателността на мярката m и в този случай сходимост е еквивалента на абсолютна сходимост.