# Избрани въпроси от хидродинамиката

Калоян Стоилов

9 юли 2022 г.

# I Гравитационни вълни

Хидродинамиката разглежда 3 вида вълни - повърхнинни, вътрешни и свивателни. И в трите случая вълните са предвижващи се флуидни трептения. При първия тип връщащи сили се оказват повърхностното напрежение и гравитацията, при вторите - само гравитацията, а при третите - от свиваемостта на флуида. Вълните на границата на въздух-вода са добър пример за повърхнинни вълни и се наричат водни вълни.

## I.1 Основни понятия

Нека разглеждаме координатна система с абсциса $x$ и ордината абсциса $z$. Синусуидална бягаща вълна се представя с уравнението

$$z(x,t) = A\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)\right] \tag{I.1}$$

Тук $A$ е амплитудата на вълната - най-голямото отдалечаване от положението. Ако фиксираме времето $t$, менейки $x$, то имаме следваща амплитуда при:

$$\frac{2\pi}{\lambda}((x+\lambda)-ct) = \frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)+2\pi$$

$\lambda$ е дължината на вълната - разстоянието между две съседни амплитуди. $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ е пространствената честота. $c$ се нарича фазова скорост, а $2\pi(x-ct)$ - фаза. Ако фиксираме $x$, то менейки $t$ получаваме прериодично движение нагоре-надолу. Ако в $x$ има гребен, то следващият ще настъпи, когато към аргумента на $\cos$ добавим $2\pi$. Но

$$\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)+2\pi = \frac{2\pi}{\lambda}(x-ct+\lambda) = \frac{2\pi}{\lambda}(x-c(t+\frac{\lambda}{c}))$$

Това води до $T=\frac{\lambda}{c}$ - период между двата гребена за фиксираната позиция. $\nu=\frac{1}{T}$ се нарича циклична честота, а $\omega=2\pi\nu=kc$ - радиална честота. Така може да сведем уравнението на вълната до:

$$z(x,t) = A\cos(kx-\omega t) \tag{I.2}$$

Гребените се предвижват по следния начин с времето:

$$k\xi-\omega t = 2n\pi, \quad \xi = \frac{\omega}{k}t+\frac{2n\pi}{k}$$

Така фазовата скорост $c$ се оказва точно скоростта с която се предвижва вълната в пространството за даден период от време. Ако $c$ зависи от вълновото число $k$ (или еквивалентно от дължината на вълната $\lambda$), то наричаме повърхностните вълни дисперсни.

## I.2 Групова скорост

Нека съберем синусоидални вълни с еднакви амплитуди и близки възлови числа. Тогава:

$$z(x,t) = A\cos(k_1x-\omega_1t)+A\cos(\delta k_2x-\omega_2t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x-\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos(kx-\omega t)$$

Въвели сме $\Delta k = k_2 - k_1$, $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, $k = \frac{k_1+k_2}{2}$, $\omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ Да разгледаме вълните, които в пространствен участък имат най-голяма амплитуда, т.е.:

$$\cos\left(\frac{\Delta k}{2}\xi - \frac{\Delta\omega}{2}t\right) \approx 1$$

$$\frac{\Delta k}{2}\xi - \frac{\Delta\omega}{2}t = n\pi$$

Скоростта с която се движат точките $\xi$ на максимална амплитуда е точно $\frac{\Delta\omega}{\Delta k}$. Това води до понятието групова скорост - $c_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$. Обвивката на вълните с максимална амплитуда в даден момент се движи като вълна със скорост $c_g$. Ако вълните не са дисперсни, то имаме, че:

$$c_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}ck}{\mathrm{d}k} = c$$

Тоест съвпада със фазовата скорост на отделните вълни. Пример за това са звуковите вълни. Ако пък разглеждаме вълни около повърхността, то може да се покаже, че $\omega^2 = gk$, тогава:

$$c_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}\sqrt{gk}}{\mathrm{d}k} = \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{k}} = \frac{c}{2}$$

Груповата скорост се оказва два пъти по-малка от тази на отделните вълни. Изразявайки $\omega, k$ по дефинициите им, то достигаме до формулата на Рейли:

$$c_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}\frac{2\pi c}{\lambda}}{\mathrm{d}\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\lambda \mathrm{d}c - c\mathrm{d}\lambda}{-\mathrm{d}\lambda} = c - \lambda\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\lambda} \tag{I.3}$$

Ако хвърлим камъче във водата се образуват вълни. В момент скоро след удара, движението на водата е трудно определимо. След време се образуват "типични"вълни с гребени и падини, но с меняща се дължина на вълната. Вече $A, \omega, k$ ще са функции на времето и пространството. Да разгледаме вълнов пакет описан чрез:

$$z(x,t) = A(x,t)\cos\theta(x,t)$$

Тук с $\theta(x,t)$ сме отбелязали локалната фаза, т.е. за фиксирани $k$ и $\omega$ - $\theta(x,t) = kx - \omega t$. При бавно променящ се пакет може да дефинираме $k$ и $\omega$ като производни на фазата по пространство/време:

$$k(x,t) = \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}, \quad \omega(x,t) = -\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t}$$

Допускайки достатъчна гладкост на $\theta$, то веднага достигаме до

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial x} = 0$$

Нека сега имаме дисперсни вълни и $\omega = \omega(k)$. Тогава използвайки диференциране на сложна функция:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + c_g\frac{\partial k}{\partial x} = 0 \tag{I.4}$$

Това е като материална производна, но при предвижване със скорост $c_g$. Обаче решението на уравнението лесно се вижда, че е $f(x - c_g(k)t)$, като $f$ се определя по начални условия. Тогава $k = const \iff x - c_g t = const$ ($c_g$ в такъв случай също би било константа). Така всяка дължина на вълната е свързана с по една права (от деф. на $k$). Наблюдавайки точка, движеща се с групова скорост $c_g$, то ще се наблюдава вълна с еднаква дължина. Това е кинематичният смисъл на груповата скорост.

## I.3 Поток на енергията

С вълновото движение се предава енергия от един обем на друг, т.е. енергията се изменя по пространството и по времето. Нека имаме вълна движеща се отляво надясно. Тя ще има потенциал от вида:

$$\Phi(x,z,t) = \frac{ag}{\omega}e^{kz}\sin(kx-\omega t) \tag{I.5}$$
$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{agk}{\omega}e^{kz}\cos(kx-\omega t) = a\omega e^{kz}\cos(kx-\omega t)$$

Тук използвахме $\omega^2 = gk$. Така трябва да пресметнем енергийния поток през равнина перпендикулярна на x. Трабва да разгледаме само действието на $p$ за някакъв период $\tau$. Да вземем някаква малка ивица по $z$ - $\Delta z$ и такава с дължина 1 по $y$. Интересуваме се от работата, извършена от налягането върху частта от равнината, заключена между тях за време $\Delta t$. За достатъчно малки $\Delta z$, може да приближим стойността на $p$, с тази в някоя точка от правоъгълника, например центъра. За преместването използваме скоростта на вълната $u$, отново оценена там. Така получаваме формула за работата от вида:

$$1\Delta z p(\xi,\zeta,t)u(\xi,\zeta,t)\Delta t$$

След граничен преход получаваме, че

$$A = \int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{\tau} pu\,\mathrm{d}z\mathrm{d}t \tag{I.6}$$

Но $\frac{p-p_0}{\rho} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - gz = age^{kz}\cos(kx-\omega t) - gz$. Сега може да изразим:

$$pu = a^2 g\omega\rho e^{2kz}\cos^2(kx-\omega t) + (p_0-\rho gz)a\omega e^{kz}\cos(kx-\omega t) \tag{I.7}$$

Ако перпендикулярната равнина, която разглеждаме е точно $Oyz$, то по нея $x=0$. Използвайки четността на cos, както и $\int_0^\tau \cos^2\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{\tau}{2}$ и $\int_0^\tau \cos\omega t\,\mathrm{d}t = 0$, то:

$$A = \int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{\tau} pu\,\mathrm{d}z\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{\tau} a^2 g\omega\rho e^{2kz}\cos^2\omega t + (p_0-\rho gz)a\omega e^{kz}\cos\omega t\,\mathrm{d}z\mathrm{d}t = \tag{I.8}$$
$$\int_{-\infty}^{0}\left(a^2 g\omega\rho e^{2kz}\int_0^\tau \cos^2\omega t\,\mathrm{d}t + (p_0-\rho gz)a\omega e^{kz}\int_0^\tau \cos\omega t\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}z =$$
$$\int_{-\infty}^{0} a^2 g\omega\rho e^{2kz}\frac{\tau}{2}\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\frac{\tau}{2}\int_{z=-\infty}^{z=0}\frac{a^2g^2\rho}{\omega}e^{2kz}\mathrm{d}(2kz) = \frac{a^2g^2\rho\tau}{4\omega}$$

Работата за единица време е $A_1 = \frac{a^2g^2\rho}{4\omega}$. Тя може да бъде разписана така:

$$A_1 = \frac{\rho g a^2}{4}\frac{g}{\omega} = \frac{\rho g a^2}{4}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{\rho g a^2}{2}\frac{c}{2} = Ec_g \tag{I.9}$$

Така пълната енертия на вълните се пренася със скорост, равна на груповата.

# II Хидродинамична неустойчивост

Общата идея на понятието устойчивост е при малки смущения на някакво първоначално/равновесно състояние, с времето да не настъпят големи изменения спрямо него. В хидродинамиката неустойчивостта се наблюдава под формата на хаотични, привидно произволни изменения в потока, наречени турбуленция. Идеята на изследването на неустойчивостта е да се предвиди настъпването на промяна от ламинарен към турбулентен поток.

## II.1 Метод на нормалните моди

Линейният анализ на устойчивостта допуска съществуването на синусоидални смущения на някакво базово/първоначално/равновесно състояние. Например поток, успореден на $x$, но менящ се с $z$. Към този поток прилагаме смущение от вида:

$$u(x,y,z,t) = \hat{u}(z)e^{ikx+imy+\sigma t} = \hat{u}(z)e^{i\|mathbfK\|(\mathbf{e}_K\cdot\mathbf{x}-ct)} \tag{II.1}$$

Физически величини се получават от реалната част. $\hat{u}(z)$ е комплексна амплитуда, $\mathbf{K}=(k,m,0)$ е вълновото число на смущението, $\mathbf{e}_K = \frac{\mathbf{K}}{\|\mathbf{K}\|}$. $\mathbf{x}=(x,y,z)$, $c$ - комплексна фазова скорост, $\sigma$ - времеви темп на растежа. В случая в експонентата участват $x,y,t$, защото коефициентите в диференциалните уравнения, определящи смущенията са не зависят от тях. Ако допуснем, че потокът е неограничен по $x$ и $y$, то $k$ и $m$ ще трябва да са реални. Така ще трябва $\sigma, c$ да са комплексни, за да са изпълнени гранични условия за $x,y$ в безкрайност.

Ако $Re(\sigma)$ или $Im(c)$ са положителни за някоя стойност на вълновото число, то системата е неустойчива към неини смущения.

- $Re(\sigma)<0$ или $Im(c)<0$ влекат устойчив поток.
- $Re(\sigma)=0$ или $Im(c)=0$ влекат неутрално устойчив поток.
- $Re(\sigma)>0$ или $Im(c)>0$ влекат неустойчив поток.

При метода на нормалните моди, всяка мода е независима и се разглежда отделно. Гранично състояние - когато сме на прага на устойчивост/неустойчивост, т.е. $Re(\sigma)=Im(c)=0$. Ако $Im(\sigma)\neq 0$ или $Re(c)\neq 0$, то неустойчивостта се проявява като блягащи осцилации с растяща амплитуда. В другия случай, при неустойчивост се наблюдават вторични потоци.

## II.2 Теорема на Скуайър и уравнение на Ор-Зомерфелд

Разглеждаме хомогенен (т.е. $\rho = const$) вискозен флуид в 3 пространствени измерения. Нека имаме основен поток насочен по $x$, като се изменя по $y$, тъй че $\mathbf{V}=(U(y),0,0)$. Разбиваме общия поток на сума от поток и пертурбация.

$$\tilde{\mathbf{u}} = (U+u, v, w), \quad \tilde{p} = P+p$$

Тогава от уравненията на Навие-Стокс

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (U+u)\frac{\partial U+u}{\partial x} + v\frac{\partial U+u}{\partial y} + w\frac{\partial U+u}{\partial z} = -\frac{\partial P+p}{\partial x} + \nu\Delta(U+u)$$
$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\Delta U = 0$$

След изваждане на второто от първото и пренебрегване на нелинейни спрямо $U$ членове

$$\frac{\partial u}{\partial t}+U\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\Delta(u)$$

Аналогично може да изведем за другите две компоненти:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t}+U\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\Delta(v)\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+U\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\Delta(w)\\
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0
\end{aligned}$$

Уравненията са линейни и коефициентите им зависят само от $y$, откъдето решенията ще са от вида:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}=\mathbf{u}\hat{(y)}e^{i(kx+mz-kct)}\\
&p=\hat{p}(y)e^{i(kx+mz-kct)}
\end{aligned}$$

Компонентите на вълновото число $k$ и $m$ трябва да са реални, докато фазовата скорост $c=c_r+ic_i$. Това води до аналогичния запис:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}(y)e^{kc_it}e^{i(kx+mz-kc_rt)}\\
&p=\hat{p}(y)e^{kc_it}e^{i(kx+mz-kc_rt)}
\end{aligned}\tag{II.2}$$

Ако фиксираме $x,z$, то пертурбацията извършва осцилации с честота $kc_r$, като имаме устойчивост за $c_i<0$ и неустойчивост за $c_i>0$. Сега остава да заместим в уравненията. Да припомним, че $\mathrm{Re}$ е числото на Рейнолдс и се дефинира като $\mathrm{Re}=\frac{U_0L}{\nu}$ за някакви характеристични скорост $U_0$ и дължина $L$. Достигаме до:

$$\begin{aligned}
&ik(U-c)\hat{u}+\hat{v}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}=-ikp+\frac{U_0L}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\mathrm{d}^2\hat{u}}{\mathrm{d}y^2}-(k^2+m^2)\hat{u}\right]\\
&ik(U-c)\hat{v}=-\frac{\mathrm{d}\hat{p}}{\mathrm{d}y}+\frac{U_0L}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\mathrm{d}^2\hat{v}}{\mathrm{d}y^2}-(k^2+m^2)\hat{v}\right]\\
&ik(U-c)\hat{w}=-imp+\frac{U_0L}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\mathrm{d}^2\hat{w}}{\mathrm{d}y^2}-(k^2+m^2)\hat{w}\right]\\
&ik\hat{u}+\frac{\mathrm{d}\hat{v}}{\mathrm{d}y}+im\hat{w}=0
\end{aligned}\tag{II.3}$$

**Теорема 1** (Теорема на Скуайър)**.** *За всяко тримерно неустойчиво смущение съществува по-неустойчиво двумерно смущение.*

*Доказателство.* Прилагаме тъй наречената трансформация на Скуайър:

$$\begin{aligned}
&\bar{k}=\sqrt{k^2+m^2},\quad \bar{k}\bar{u}=k\hat{u}+m\hat{w}\\
&\frac{\bar{p}}{\bar{k}}=\frac{\hat{p}}{k},\quad \bar{k}\bar{\mathrm{Re}}=k\mathrm{Re}\\
&\bar{c}=c,\quad \bar{v}=\hat{v}
\end{aligned}$$

Когато $m \neq 0$, то $\bar{\mathrm{Re}} < \mathrm{Re}$. Събираме първото и третото от по-рано получените уравнения:

$$\begin{aligned}
&i\bar{k}(U-c)\bar{u} + \bar{v}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y} = -i\bar{k}\bar{p} + \frac{U_0 L}{\bar{\mathrm{Re}}}\left[\frac{\mathrm{d}^2\bar{u}}{\mathrm{d}y^2} - \bar{k}^2\bar{u}\right] \\
&i\bar{k}(U-c)\bar{v} = -\frac{\mathrm{d}\hat{p}}{\mathrm{d}y} + \frac{U_0 L}{\bar{\mathrm{Re}}}\left[\frac{\mathrm{d}^2\bar{v}}{\mathrm{d}y^2} - \bar{k}\bar{v}\right] \\
&i\bar{k}\bar{u} + \frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}y} = 0
\end{aligned} \tag{II.4}$$

Тъй като $\bar{\mathrm{Re}} < \mathrm{Re}$, то за този двумерен поток критичното число на Рейнолдс, където започва неустойчивостта, ще бъде достигнато преди това за тримерния. □

Интерпретацията е следната. Тримерното смущение е вълна, разпространяваща се косо на равновесния поток. При правилна промяна на координатната система ($x$ да сочи в тази посока), то само по новата ос $x$ равновесния поток въздейства на смущението. Така е достатъчно да разглеждаме $m = \hat{\omega} = 0$.

В новия двумерен поток е вече може да дефинираме фунцкия на тока $\psi(x,y,t)$. След прилагане на метода на нормалните моди:

$$\begin{aligned}
u &= \hat{u}(y)e^{ik(x-ct)} \\
v &= \hat{v}(y)e^{ik(x-ct)} \\
\psi &= \hat{\psi}(y)e^{ik(x-ct)}
\end{aligned} \tag{II.5}$$

Лесно може да видим, че $\hat{u} = \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial y}$ и $\hat{v} = -ik\hat{\psi}$. Сега от първото уравнение за двумерния поток може да изразим $p$ и да заместим във второто. Използваме и тези формули и достигаме до ОДУ от четвърти ред спрямо $\hat{\psi}$, което е известно като уравнение на Ор-Зомерфелд:

$$(U-c)\left(\frac{\mathrm{d}^2\hat{\psi}}{\mathrm{d}y^2} - k^2\hat{\psi}\right) - \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}y^2}\hat{\psi} = \frac{\nu}{ik}\left(\frac{\mathrm{d}^4\hat{\psi}}{\mathrm{d}y^4} - 2k^2\frac{\mathrm{d}^2\hat{\psi}}{\mathrm{d}y^2} + k^4\hat{\psi}\right) \tag{II.6}$$

За гранични условия имаме 2 варианта:

- Ограничени между някакви $y_1$ и $y_2$ несмутени потоци:

$$\hat{\psi}|_{y=y_1} = \hat{\psi}|_{y=y_2} = \frac{\mathrm{d}\hat{\psi}}{\mathrm{d}y}|_{y=y_1} = \frac{\mathrm{d}\hat{\psi}}{\mathrm{d}y}|_{y=y_2} = 0$$

- Неограничени несмутени потоци. За тях трябва приложените смущения да изчезват, отдалечавайки се от началото на координатната система:

$$\hat{\psi}|_{y=\infty} = \frac{\mathrm{d}\hat{\psi}}{\mathrm{d}y}|_{y=\infty} = 0$$

Аналитични решения или тяхни свойства са намерени само за много прости потоци. Това практически е уравнение за вихъра.

# Литература


[1] Pijush Kundu, Ira M. Cohen, and David R. Dowling. "Fluid Mechanics". English. In: 6th ed. Academic Press, 2016. Chap. 8.1, 8.5, pp. 350–353, 370–377. ISBN: 978-0-12-405935-1.

[2] Запрян Запрянов. **?**Хидродинамика**?** в: 1-е изд. Университетско издателство "Св. Климент Охридски", 1996. гл. 5.10, 5.14, с. 276—282, 292—294. ISBN: 954-07-0633-5.