Избрани въпроси от хидродинамиката

Калоян Стоилов

11 февруари 2022 г.

I Изменение на количеството на движение

Количеството движение или още - импулс в механиката на твърди тела се нарича $\mathbf{K} = m\mathbf{v}$ (често се бележи с p, но при нас това е налягането). Вторият закон на Нютон гласи, че скоростта на изменение на импулса е равно на равнодействащата сила $\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{K}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = m\dot{\mathbf{v}}$. Законът е в сила за тела, непроменящи масата си.

I.1 Масови и повърхностни сили

Нека τ е обем от флуид с маса M. Масовата сила е действащата на флуида в обема сила, която не зависи от взаимодействието с други части на флуида. Нека $\mathbf{F}_M$ е главния вектор на силите (т.е. равнодействащата сила), действащи на флуида във τ. Средна масова сила, действаща върху маса M се нарича $F_{avg} = \frac{\mathbf{F}_M}{M}$. Масова сила $\mathbf{F}$ в точка B, наричаме

$$\mathbf{F} = \lim_{\tau \to \{B\}} F_{avg} = \lim_{\tau \to \{B\}} \frac{\mathbf{F}_M}{M} \tag{1}$$

Ако знаем $\mathbf{F}$ в коя да е точка от τ, то може да получим $\mathbf{F}_M$. Наистина, нека $\Delta\tau$ е обем с маса $\Delta m = \rho\Delta\tau$, на който действа $\mathbf{F}_a vg \Delta m$. Разбивайки τ на такива обеми, може да съберем всички такива сили и след граничен преход получаваме:

$$\mathbf{F}_M = \iiint\limits_{\tau} \mathbf{F}\mathrm{d}m = \iiint\limits_{\tau} \rho\mathbf{F}\mathrm{d}\tau \tag{2}$$

Нека обемът е ограничен от повърхнина S. Флуидът извън τ, действа на този във τ през S чрез повърхностни сили. Нека приближим част от повърхнината с равнинна част ΔS с нормала $\mathbf{n}$, а главния вектор на силите, действащи ѝ е ΔF_S^n. Средното напрежение, действащо на площта е $\mathbf{t}_{avg}^n = \frac{\Delta \mathbf{F}_S^n}{\Delta S}$. Напрежение $\mathbf{t}^n$ на повърхностни сили, действащи в точка B, наричаме

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta S \to \{B\}} \mathbf{t}_{avg}^n = \lim_{\Delta S \to \{B\}} \frac{\Delta F_S^n}{\Delta S} \tag{3}$$

Отново сумираме всички такива сили за S и след граничен преход главният вектор на повърхностните сили е:

$$\mathbf{F}_S = \iint\limits_{S} \mathrm{d}\mathbf{F}_S^n = \iint\limits_{S} \mathbf{t}^n \mathrm{d}S \tag{4}$$

I.2 Интегрална форма на закона за изменение на количеството на движение

В малък обем $\Delta\tau$ с маса $\rho\Delta\tau$ ще имаме импулс $\Delta\mathbf{K} = \rho\mathbf{v}\Delta\tau$. Така количеството движение на флуида ще бъде

(5)
$$\mathbf{K} = \iiint\limits_{\tau} \mathrm{d}\mathbf{K} = \iiint\limits_{\tau} \rho\mathbf{v}\mathrm{d}\tau$$

Тъй като силите, действащи на τ или са масови, или повърхностни, то вторият закон на Нютон придобива вида:

(6)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_{\tau} \rho\mathbf{v}\mathrm{d}\tau = \iiint\limits_{\tau} \rho\mathbf{F}\mathrm{d}\tau + \iint\limits_{S} \mathbf{t}^{n}\mathrm{d}S$$

Не бива да забравяме, че и самият обем τ се мени с времето. Тогава ще имаме

(7)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_{\tau} \rho\mathbf{v}\mathrm{d}\tau = \iiint\limits_{\tau} \frac{\mathrm{d}\rho\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} + \rho\mathbf{v}\nabla\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}\tau$$

Така получаваме интегралната форма на закона за изменение на количеството движение

(8)
$$\iiint\limits_{\tau} \frac{\mathrm{d}\rho\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} + \rho\mathbf{v}\nabla\cdot\mathbf{v} - \rho\mathbf{F}\mathrm{d}\tau = \iint\limits_{S} \mathbf{t}^{n}\mathrm{d}S$$

I.3 Изменение на интегрално количество

Нека Q бъде някаква величина - скаларна или векторна, която е дефинирана поточково в обем τ. Тогава изменението по времето на общата величина за обема ще бъде

(9)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_{\tau} Q\mathrm{d}\tau$$

Тъй като говорим за флуиди и самият обем се мени с времето. Да разгледаме $\tau(t+\Delta t) - \tau(t)$. За достатъчно малко време и малка площ ΔS по границата $S(t)$, може да разглеждаме че се движи със скорост $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ към нова повърхнина $S(t+\Delta t)$. Така изменението на обема над тази площ ще може да се пресметне като обем на прав криволинеен цилиндър

(10)
$$\Delta\tau = h\Delta S = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\Delta t\Delta S$$

След граничен преход и изразявайки обема чрез интеграл по елементарни обеми получаваме:

(11)
$$\frac{\iiint\limits_{\tau(t+\Delta t)-\tau(t)} \mathrm{d}\tau}{\Delta t} = \iint\limits_{S} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S$$

Сега може да получим аналог на формулата за диференциране на Лайбниц

(12)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_{\tau} Q\mathrm{d}\tau = \iiint\limits_{\tau} \frac{\partial Q}{\partial t}\mathrm{d}\tau + \iint\limits_{S} Q(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}S$$

Може да забележим, че ако Q е скаларна величина, то $Q(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) = (Q\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}$. Използвайки теоремата на Гаус-Остроградски, то

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_{\tau} Q\mathrm{d}\tau = \iiint\limits_{\tau} \frac{\partial Q}{\partial t}\mathrm{d}\tau + \iiint\limits_{\tau} \nabla\cdot(Q\mathbf{v})\mathrm{d}\tau \tag{13}$$

Лесно може да се провери, че

$$\nabla\cdot(Q\mathbf{v}) = \nabla Q\cdot\mathbf{v} + Q\nabla\cdot\mathbf{v} = \nabla Q\cdot\dot{\mathbf{x}} + Q\nabla\cdot\mathbf{v} \tag{14}$$

Остава да забележим, че

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla Q\cdot\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{15}$$

След използване на линейността на интеграла получаваме

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_{\tau} Q\mathrm{d}\tau = \iiint\limits_{\tau} \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + Q\nabla\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}\tau \tag{16}$$

Ако Q е векторна величина, то може да го разгледаме покомпонентно и пак получаваме същата формула.

I.4 Формула на Коши

Нека τ бъде триъгълна пирамида с прав тристенен ъгъл при върха си - началото на координатната система. Тогава може да се опише като съвкупност от 4 повъхнини:

1. S_x е стената перпендикулярна на оста x.
2. S_y е стената перпендикулярна на оста y.
3. S_z е стената перпендикулярна на оста z.
4. S_n е стената срещу тристенният ъгъл на координатната система.

Тогава $\mathbf{t}^{-x}$, $\mathbf{t}^{-y}$, $\mathbf{t}^{-z}$ ще са напреженията по съответните първи три стени. Нека $\mathbf{t}^{n}$ бъде по четвъртата. Така се достига до формулата на Коши

$$\iiint\limits_{\tau} \frac{\mathrm{d}\rho\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} + \rho\mathbf{v}\nabla\cdot\mathbf{v} - \rho\mathbf{F}\mathrm{d}\tau = \iint\limits_{S_x} \mathbf{t}^{-x}\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_y} \mathbf{t}^{-y}\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_z} \mathbf{t}^{-z}\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_n} \mathbf{t}^{n}\mathrm{d}S \tag{17}$$

II Подобие при вискозни течения

Иска ни се с едно течение да оприличим друго - както например имаме геометрично подобие на фигури и сме извели някакво свойство/количество за една от тях, лесно може да го получим за другата. И тъй нека имаме две течения със съответни величини

$$a_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{g}_i, \nu_i, \frac{p_i}{\rho_i}, \quad i = 1,2 \tag{18}$$

III Безразмерни характерни числа