Външни и диференциални форми в $\mathbb{R}^n$

Калоян Стоилов

25 октомври 2021 г.

Съдържание

I Външни форми **1**
I.1 1-форми . . . 2
I.2 2-форми . . . 2
I.3 k-форми . . . 3
I.4 Външно умножение . . . 4
I.5 Вътрешно произведение . . . 8
I.6 Изображения . . . 9
I.7 Звезда на Ходж . . . 10

II Диференциални форми **11**
II.1 Диференциални 1-форми . . . 12
II.2 Диференциални k-форми . . . 13
II.3 Външно диференциране . . . 13
II.4 Кодиференциал . . . 15
II.5 Диференциал на Ли . . . 16
II.6 Аналози на векторни операции . . . 17
II.7 Оператор на Лаплас-Белтрами-де Рам . . . 20
II.8 Интегриране на диференциални форми . . . 20

I Външни форми

Дефиниция I.1 (k-форма)**.** *Нека F е поле, с $\mathrm{char} F \neq 2$, а V е векторно пространство с размерност n(не задължително над F). Външна k-форма (или просто k-форма) ω^k е изображение $\omega^k : V \to F$, със следните свойства:*

1. *Полилинейност:*
$\omega^k(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \lambda\boldsymbol{\xi}_i + \mu\boldsymbol{\eta}_i, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k) = \lambda\omega^k(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_i, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k) + \mu\omega^k(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_i, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k)$
$\lambda, \mu \in F, i = \overline{1,k}$

2. *Антикомутативност:*
$\omega^k(\boldsymbol{\xi}_{\pi(1)}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{\pi(k)}) = sgn(\pi)\omega^k(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k)$,*където* π *е някаква пермутация.*

k-формите също са наричани (външни) форми от степен k.

I.1 1-форми

Това са линейните функции от вида $\omega : V \to F$. Тези фунцкии образуват векторно пространство, ако въведем следните операции между тях:

$$(\omega_1 + \omega_2)(\boldsymbol{\xi}) = \omega_1(\boldsymbol{\xi}) + \omega_2(\boldsymbol{\xi})$$
$$(\lambda\omega_1)(\boldsymbol{\xi}) = \lambda\omega_1(\boldsymbol{\xi})$$

Очевидно $\omega_1 + \omega_2$ и $\lambda\omega_1$ също са линейни и са със същите дефиниционна област и кодомейн. В общият случай за k-форми ще докажем, че се получават форми по по-горната дефиниция. Останалите свойства за векторни пространства директно следват от тези на кодомейна, който е поле.

Това векторно пространство се нарича спрегнато (дуално) пространство на V и се бележи с V^*. 1-формите понякога се наричат ковектори.

Нека с $x_i(\boldsymbol{\xi})$ отбележим проекцията на $\boldsymbol{\xi}$ върху i-тия базисен вектор. Така виждаме, че самите x_i са линейно независими 1-форми (а ако имаме евклидова структура даже $x_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$). Те образуват базис за V^*, тъй като всяка линейна функция $\omega : V \to F$ се представя в следния вид:

$$\omega(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \cdots, \xi_n)^T$$

Този базис се нарича спрегнат (дуален) и често се бележи с $\mathbf{x}^i$. Оказва се, че ако $A = (\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$, а $B = (\mathbf{x}^1, \cdots, \mathbf{x}^n)$, то ${}^T B = E_n$.

Така виждаме, че 1-формите над $\mathbb{R}^n$ могат да се представят чрез скаларно произведение: $\omega_{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi}) = \langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\xi} \rangle, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$

I.2 2-форми

Аналогично може да дефинираме операции върху 2-формите:

$$(\omega_1 + \omega_2)(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = \omega_1(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) + \omega_2(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$$
$$(\lambda\omega_1)(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = \lambda\omega_1(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$$

След аналогични разсъждения, отново получаваме, че те образуват векторно пространство.

I.3 k-форми

Ще покажем, че наистина щом ω_1, ω_2 са k-форми, то $(\omega_1 + \omega_2)$ и $(\lambda\omega_1)$ също са k-форми:

$$
\begin{aligned}
&(\omega_1+\omega_2)(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\lambda\boldsymbol{\xi}_i+\mu\boldsymbol{\eta}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)\\
=&\omega_1(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\lambda\boldsymbol{\xi}_i+\mu\boldsymbol{\eta}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)+\omega_2(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\lambda\boldsymbol{\xi}_i+\mu\boldsymbol{\eta}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)\\
=&\lambda\omega_1(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)+\mu\omega_1(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)\\
&+\lambda\omega_2(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)+\mu\omega_2(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)\\
=&\lambda(\omega_1(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)\omega_2(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k))\\
&+\mu(\omega_1(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)+\omega_2(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k))\\
=&\lambda(\omega_1+\omega_2)(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)+\mu(\omega_1+\omega_2)(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)\\
&(\omega_1+\omega_2)(\boldsymbol{\xi}_{\pi(1)},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{\pi(k)})=\omega_1(\boldsymbol{\xi}_{\pi(1)},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{\pi(k)})+\omega_2(\boldsymbol{\xi}_{\pi(1)},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{\pi(k)})\\
=&sgn(\pi)\omega_1(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)+sgn(\pi)\omega_2(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)\\
=&sgn(\pi)(\omega_1(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)+\omega_2(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k))\\
=&sgn(\pi)(\omega_1+\omega_2)(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)\\
&(\lambda\omega_1)(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\theta\boldsymbol{\xi}_i+\mu\boldsymbol{\eta}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)=\lambda\omega_1(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\theta\boldsymbol{\xi}_i+\mu\boldsymbol{\eta}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)\\
=&\lambda(\theta\omega_1(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)+\mu\omega_1(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k))\\
=&\theta(\lambda\omega_1(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k))+\mu(\lambda\omega_1(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k))\\
=&\theta(\lambda\omega_1)(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)+\mu(\lambda\omega_1)(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)\\
&(\lambda\omega_1)(\boldsymbol{\xi}_{\pi(1)},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{\pi(k)})=\lambda\omega_1(\boldsymbol{\xi}_{\pi(1)},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{\pi(k)})\\
=&sgn(\pi)(\lambda\omega_1(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k))=sgn(\pi)(\lambda\omega_1)(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)
\end{aligned}
$$

Сега вече сме сигурни, че k-формите образуват векторно пространство. Тъй като

$$
\begin{aligned}
&\omega^k(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_i,\cdots\boldsymbol{\xi}_k)=-\omega^k(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_i,\cdots\boldsymbol{\xi}_k),\quad i\neq j\\
&2\omega^k(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_i,\cdots\boldsymbol{\xi}_k)=0
\end{aligned}
$$

Тъй като при полета няма делители на нулата в мултипликативната група, то:

$$
\begin{aligned}
&(1+1)\omega^k(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_i,\cdots\boldsymbol{\xi}_k)=0\\
&\iff(1+1=0)\vee(\omega^k(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_i,\cdots,\boldsymbol{\xi}_i,\cdots\boldsymbol{\xi}_k)=0)
\end{aligned}
$$

Но по дефиниця полето F е такова, че $charF \neq 2$, т.е. $1+1 \neq 0$. Но тогава:

$$\omega^k(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_i, \cdots, \boldsymbol{\xi}_i, \cdots \boldsymbol{\xi}_k) = 0$$

I.4 Външно умножение

Въвеждаме операцията външно множение $\wedge$ над 1-формите по следният начин:

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k)(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k) = \begin{vmatrix} \omega_1(\boldsymbol{\xi}_1) & \cdots & \omega_1(\boldsymbol{\xi}_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_k(\boldsymbol{\xi}_1) & \cdots & \omega_k(\boldsymbol{\xi}_k) \end{vmatrix}$$

От $\det A = \det A^T$, то виждаме и друга еквивалентна дефиниция. Наистина получаваме k-форма:

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k)(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \lambda\boldsymbol{\xi}_i + \mu\boldsymbol{\eta}_i, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k) = \begin{vmatrix} \omega_1(\boldsymbol{\xi}_1) & \cdots & \omega_1(\lambda\boldsymbol{\xi}_i + \mu\boldsymbol{\eta}_i) & \cdots & \omega_1(\boldsymbol{\xi}_k) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \omega_k(\boldsymbol{\xi}_1) & \cdots & \omega_k(\lambda\boldsymbol{\xi}_i + \mu\boldsymbol{\eta}_i) & \cdots & \omega_k(\boldsymbol{\xi}_k) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \omega_1(\boldsymbol{\xi}_1) & \cdots & \lambda\omega_1(\boldsymbol{\xi}_i) + \mu\omega_1(\boldsymbol{\eta}_i) & \cdots & \omega_1(\boldsymbol{\xi}_k) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \omega_k(\boldsymbol{\xi}_1) & \cdots & \lambda\omega_k(\boldsymbol{\xi}_i) + \mu\omega_k(\boldsymbol{\eta}_i) & \cdots & \omega_k(\boldsymbol{\xi}_k) \end{vmatrix} \text{(линейност на 1-форми)}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \omega_1(\boldsymbol{\xi}_1) & \cdots & \omega_1(\boldsymbol{\xi}_i) & \cdots & \omega_1(\boldsymbol{\xi}_k) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \omega_k(\boldsymbol{\xi}_1) & \cdots & \omega_k(\boldsymbol{\xi}_i) & \cdots & \omega_k(\boldsymbol{\xi}_k) \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \omega_1(\boldsymbol{\xi}_1) & \cdots & \omega_1(\boldsymbol{\eta}_i) & \cdots & \omega_1(\boldsymbol{\xi}_k) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \omega_k(\boldsymbol{\xi}_1) & \cdots & \omega_k(\boldsymbol{\eta}_i) & \cdots & \omega_k(\boldsymbol{\xi}_k) \end{vmatrix} \text{(свойства на дет.)}$$

$$= \lambda(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k)(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_i, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k) + \mu(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k)(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}_i, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k)$$

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k)(\boldsymbol{\xi}_{\pi(1)}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{\pi(k)}) = sgn(\pi)(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k)(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k) \text{(директно от св. на дет.)}$$

k-формите, които се представят по този начин, т.е. $\omega^k = \omega_1^1 \wedge \cdots \wedge \omega_k^1$ се наричат разложими.

Очевидно $(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_k)(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k) = 0, \quad i \neq j$. Нека $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$ е базис в $\mathbb{R}^n$. Той определя n на брой 1-форми. От тях може да изберем $\binom{n}{k}$ различни и линейно независими разложими k-форми, като приемем, че избираме от базисните 1-форми с растящ индекс (иначе или бихме получили тъждествена на 0 форма, или че формата е -1.някоя от тези). От друга страна, поради линейността на формите те се определят от действието си над всяка последователност от базисните вектори. Но тъй като са антикомутативни, то еднозначно се определят от действието над $(\mathbf{x}_{i_1}, \cdots, \mathbf{x}_{i_k})$, където $i_1 < \cdots < i_k$. Но за всяка такава последователност има форма $x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_k}$. Веднага от дефиницята следва, че:

$$x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_k}(\mathbf{x}_{i_1}, \cdots, \mathbf{x}_{i_k}) = 1$$
$$x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_k}(\mathbf{x}_{j_1}, \cdots, \mathbf{x}_{j_k}) = 0, \quad (i_1, \cdots, i_k) \neq (j_1, \cdots, j_k)$$

Но така всяка k-форма е представима по начина:

$$\omega^k = \sum_{i_1,\cdots,i_k} a_{i_1,\cdots,i_k} x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_k}$$

В R^n има единствена n-форма в базиса - $\mu_n = x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$, която се нарича форма на обема, която отговаря на ориентираният обем, заключен между векторите, върху които е приложена.

Сега дефинираме операцията $\wedge$ над разложимите форми. Нека $\omega^k = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k$, а $\omega^l = \omega_{k+l} \wedge \cdots \wedge \omega_{k+l}$. Тогава $\omega^k \wedge \omega^l = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k \wedge \omega_{k+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{k+l}$. В сила е, че:

$$\begin{aligned}
&(\omega^k \wedge \omega^l) \wedge \omega^m = (\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k \wedge \omega_{k+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{k+l}) \wedge \omega^m \\
&= \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k \wedge \omega_{k+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{k+l} \wedge \omega_{k+l+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{k+l+m} \\
&= \omega^k \wedge (\omega_{k+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{k+l} \wedge \omega_{k+l+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{k+l+m}) \\
&= \omega^k \wedge (\omega^l \wedge \omega^m)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\omega^k \wedge \omega^l = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k \wedge \omega_{k+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{k+l} \\
&= (-1)^{kl} \omega_{k+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{k+l} \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k = (-1)^{kl} \omega^l \wedge \omega^k
\end{aligned}$$

тъй като има инверсии между всяко от $1, \cdots, k$ и всяко от $k+1, \cdots, k+l$

Може да се въведе и операцията $\wedge$ върху произволни форми по следния начин:

$$(\omega^k \wedge \omega^l)(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{k+l}) = \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_k \\ j_1 < \cdots < j_l}} sgn(i_1, \cdots, i_k, j_1, \cdots, j_l) \omega^k(\boldsymbol{\xi}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{i_k}) \omega^l(\boldsymbol{\xi}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{j_l})$$

Резултатът е $k+l$-форма:
Нека $\boldsymbol{\xi}_q = \lambda \boldsymbol{\eta}_q^1 + \mu \boldsymbol{\eta}_q^2$. В зависимост от пермутацията, то $\boldsymbol{\xi}_q$ се намира или сред аргументите на ω^k или сред тези на ω^l. Ще покажем, ако е сред тези на ω^k(другият случай е аналогичен). Тогава събираемите са от вида:

$$\begin{aligned}
&\omega^k(\boldsymbol{\xi}_{i_1}, \cdots, \lambda \boldsymbol{\eta}_q^1 + \mu \boldsymbol{\eta}_q^2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{i_k}) \omega^l(\boldsymbol{\xi}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{j_l}) \\
&= (\lambda \omega^k(\boldsymbol{\xi}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_q^1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{i_k}) + \mu \omega^k(\boldsymbol{\xi}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_q^2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{i_k})) \omega^l(\boldsymbol{\xi}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{j_l}) \\
&= \underbrace{\lambda \omega^k(\boldsymbol{\xi}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_q^1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{i_k}) \omega^l(\boldsymbol{\xi}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{j_l})}_{\text{присъства в сумата на } \lambda(\omega^k \wedge \omega^l)} + \underbrace{\mu \omega^k(\boldsymbol{\xi}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_q^2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{i_k}) \omega^l(\boldsymbol{\xi}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{j_l})}_{\text{присъства в сумата на } \mu(\omega^k \wedge \omega^l)}
\end{aligned}$$

За по-кратко сме пропуснали общия множител от четността на пермутацията. Тъй като аналогичното е в сила и при ω^l, а във всеки от членовете на сумите q

присъства в една от двете форми, то след разпределение на общият множител по сумите, прегрупиране и изнасяне на λ и μ пред крайните суми, получаваме:

$$(\omega^k \wedge \omega^l)(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \lambda \boldsymbol{\eta}_q^1 + \mu \boldsymbol{\eta}_q^2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{k+l}) =$$
$$\lambda(\omega^k \wedge \omega^l)(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_q^1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{k+l}) + \mu(\omega^k \wedge \omega^l)(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_q^2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{k+l})$$

Остава да приверим антикомутативността:

$$(\omega^k \wedge \omega^l)(\boldsymbol{\xi}_{\pi(1)}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{\pi(k+l)}) = sgn(\pi)(\omega^k \wedge \omega^l)(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{k+l})$$

Тя следва от факта, че в събираемите ще композираме тази фиксирана пермутация π и съответната за събираемото, да кажем σ. Използваме, че $sgn(\sigma \circ \pi) = sgn(\sigma)sgn(\pi)$.

а) $sgn(\pi) = 1$: Тогава $sgn(\sigma \circ \pi) = sgn(\sigma)$ и получаваме същите събираеми.

б) $sgn(\pi) = -1$: Тогава $sgn(\sigma \circ \pi) = -sgn(\sigma)$ и получаваме събираемите, но с обратен знак.

И в двата случая може да изкараме общия знак пред сумата, но той съвпада с $sgn(\pi)$.

Свойства на $\wedge$:

1. Дистрибутивност: $(\lambda \omega_1^k + \mu \omega_2^k) \wedge \omega^l = \lambda \omega_1^k \wedge \omega^l + \mu \omega_2^k \wedge \omega^l$
   Събираемите в сумата(без знака за пермутация) са от вида:

$$\begin{aligned}
&(\lambda \omega_1^k + \mu \omega_2^k)(\boldsymbol{\xi}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{i_k})\omega^l(\boldsymbol{\xi}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{j_l}) \\
&= (\lambda \omega_1^k(\boldsymbol{\xi}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{i_k}) + \mu \omega_2^k(\boldsymbol{\xi}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{i_k}))\omega^l(\boldsymbol{\xi}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{j_l}) \\
&= \underbrace{\lambda \omega_1^k(\boldsymbol{\xi}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{i_k})\omega^l(\boldsymbol{\xi}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{j_l})}_{\text{присъства в сумата на } \lambda \omega_1^k \wedge \omega^l} + \underbrace{\mu \omega_2^k(\boldsymbol{\xi}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{i_k})\omega^l(\boldsymbol{\xi}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{j_l})}_{\text{присъства в сумата на } \mu \omega_2^k \wedge \omega^l}
\end{aligned}$$

   След повтаряне на предишните разсъждения получаваме търсеното.

2. Асоциативност $(\omega^k \wedge \omega^l) \wedge \omega^m = \omega^k \wedge (\omega^l \wedge \omega^m)$

$$(\omega^k \wedge \omega^l) \wedge \omega^m$$
$$= \sum_{\substack{r_1<\cdots<r_{k+l} \\ p_1<\cdots<p_m}} sgn(r_1,\cdots,r_{k+l},p_1,\cdots,p_m)(\omega^k \wedge \omega^l)(\boldsymbol{\xi}_{r_1},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{r_{k+l}})\omega^m(\boldsymbol{\xi}_{p_1},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{p_m})$$
$$= \sum_{\substack{r_1<\cdots<r_{k+l} \\ p_1<\cdots<p_m}} sgn(r_1,\cdots,r_{k+l},p_1,\cdots,p_m)$$
$$\left(\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_k \\ j_1<\cdots<j_l}} sgn(i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_l)\omega^k(\boldsymbol{\xi}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{i_k})\omega^l(\boldsymbol{\xi}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{j_l})\right)\omega^m(\boldsymbol{\xi}_{p_1},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{p_m})$$
$$= \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_k \\ j_1<\cdots<j_l \\ p_1<\cdots<p_m}} sgn(I,J,P)\omega^k(\boldsymbol{\xi}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{i_k})\omega^l(\boldsymbol{\xi}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{j_l})\omega^m(\boldsymbol{\xi}_{p_1},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{p_m})$$
$$= \omega^k \wedge (\omega^l \wedge \omega^m), \quad (I,J,P) = (i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_l,p_1,\cdots,p_m)$$

3. Антикомутативност $\omega^k \wedge \omega^l = (-1)^{kl}\omega^l \wedge \omega^k$

$$\omega^k \wedge \omega^l = \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_k \\ j_1<\cdots<j_l}} sgn(i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_l)\omega^k(\boldsymbol{\xi}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{i_k})\omega^l(\boldsymbol{\xi}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{j_l})$$
$$= \sum_{\substack{j_1<\cdots<j_l \\ i_1<\cdots<i_k}} (-1)^{kl} sgn(j_1,\cdots,j_l,i_1,\cdots,i_k)\omega^l(\boldsymbol{\xi}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{j_l})\omega^k(\boldsymbol{\xi}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{i_k})$$
$$= (-1)^{kl}\omega^l \wedge \omega^k$$

Нека ω е k-форма, а с ω^m отбележим $\underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{\text{m пъти}}$. Тогава е в сила, че:

- Ако k е нечетно, то $\omega^m = 0,\ m > 1$:

$$m = 2 : \omega \wedge \omega = (-1)^{k^2}\omega \wedge \omega = -\omega \wedge \omega \implies \omega \wedge \omega = 0$$
$$m > 2 : \omega^m = \omega \wedge \omega \wedge \omega^{m-2} = (\omega \wedge \omega) \wedge \omega^{m-2} = 0 \wedge \omega^{m-2} = 0$$

- Ако ω е разложима, то $\omega^m = 0,\ m > 1$:

$$\omega = \omega_1 \wedge \cdots \omega_k, \quad \omega_j \text{ са 1-форми}$$
$$m = 2 : \omega^2 = \omega_1 \wedge \cdots \omega_k \wedge \omega_1 \wedge \cdots \omega_k = (-1)^{(k-1)k^2}(\omega_1 \wedge \omega_1) \wedge \omega_2 \wedge \cdots \omega_k \wedge \omega_2 \wedge \cdots \omega_k$$
$$= 0 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \omega_k \wedge \omega_2 \wedge \cdots \omega_k = 0$$
$$m > 2 : \omega^m = \omega^2 \wedge \omega^{m-2} = 0 \wedge \omega^{m-2} = 0$$

С $\bigwedge^k V$ бележим множеството от всички k-форми над V.

Задача 1. *Нека над* $\mathbb{R}^{2n} = (\mathbf{q},\mathbf{f})$ *е дефинирана* 2*-формата* $\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{n} p_i \wedge q_i$ *Да се намери формата* $\boldsymbol{\omega}^m$.

Решение.

$$\omega^1 = (-1)^0 1! \sum_{i=1}^{n} p_i \wedge q_i$$

$$\omega^{m+1} = \omega \wedge \omega^m = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} m! (\sum_{i=1}^{n} p_i \wedge q_i) \wedge (\sum_{i_1 < \cdots < i_m}^{n} p_{i_1} \wedge \cdots \wedge p_{i_m} \wedge q_{i_1} \wedge \cdots \wedge q_{i_m})$$

$$= (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} m! \sum_{i_1 < \cdots < i_m} \sum_{j=1}^{n} p_j \wedge q_j \wedge p_{i_1} \wedge \cdots \wedge p_{i_m} \wedge q_{i_1} \wedge \cdots \wedge q_{i_m}$$

$$= (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} m! \sum_{i_1 < \cdots < i_m} \sum_{j=1}^{n} (-1)^m p_j \wedge p_{i_1} \wedge \cdots \wedge p_{i_m} \wedge q_j \wedge q_{i_1} \wedge \cdots \wedge q_{i_m}$$

$$= (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} m! \sum_{i_1 < \cdots < i_m} \sum_{j \notin \{i_1, \cdots, i_m\}} (-1)^m p_j \wedge p_{i_1} \wedge \cdots \wedge p_{i_m} \wedge q_j \wedge q_{i_1} \wedge \cdots \wedge q_{i_m}$$

$$= (-1)^{\frac{m(m-1)}{2} + m} m! \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_m \\ j \notin \{i_1, \cdots, i_m\}}} (sgn(j, i_1, \cdots, i_m))^2 \underbrace{p_{i_1} \wedge \cdots \wedge p_j \wedge \cdots \wedge p_{i_m} \wedge q_{i_1} \wedge \cdots \wedge q_j \wedge \cdots \wedge q_{i_m}}_{i_1 < \cdots j < \cdots < i_m}$$

$$= (-1)^{\frac{(m+1)m}{2}} m! (m+1) \sum_{i_1 < \cdots < i_{m+1}} p_{i_1} \wedge \cdots \wedge p_{i_{m+1}} \wedge q_{i_1} \wedge \cdots \wedge q_{i_{m+1}}$$

$$= (-1)^{\frac{(m+1)m}{2}} (m+1)! \sum_{i_1 < \cdots < i_{m+1}} p_{i_1} \wedge \cdots \wedge p_{i_{m+1}} \wedge q_{i_1} \wedge \cdots \wedge q_{i_{m+1}}$$

I.5 Вътрешно произведение

Нека $\boldsymbol{\xi} \in V$, а ω^k е k-форма. Тогава $i_{\boldsymbol{\xi}} \omega^k$ е $k-1$-форма, дефинирана като $i_{\boldsymbol{\xi}} \omega^k(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{k-1}) = \omega^k(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{k-1})$.
Вътрешното произведение има следните свойства:

1. $i_{\lambda \boldsymbol{\xi} + \mu \boldsymbol{\eta}} \omega^k = \lambda i_{\boldsymbol{\xi}} \omega^k + \mu i_{\boldsymbol{\eta}} \omega^k$

$$\begin{aligned} i_{\lambda \boldsymbol{\xi} + \mu \boldsymbol{\eta}} \omega^k(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{k-1}) &= \omega^k(\lambda \boldsymbol{\xi} + \mu \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{k-1}) \\ &= \lambda \omega^k(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{k-1}) + \mu \omega^k(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{k-1}) \end{aligned}$$

2. $i_{\boldsymbol{\xi}} i_{\boldsymbol{\eta}} \omega^k = -i_{\boldsymbol{\eta}} i_{\boldsymbol{\xi}} \omega^k + i_{\boldsymbol{\eta}} \omega^k$

   $i_{\boldsymbol{\xi}} i_{\boldsymbol{\eta}} \omega^k = i_{\boldsymbol{\xi}} \omega^k(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{k-2}) = \omega^k(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{k-2}) = -\omega^k(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{k-2}) = -i_{\boldsymbol{\eta}} \omega^k(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{k-2}) = -i_{\boldsymbol{\eta}} i_{\boldsymbol{\xi}} \omega^k(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{k-2})$

Следствие: $i_{\boldsymbol{\xi}} i_{\boldsymbol{\xi}} \omega^k = 0$

3. $i_{\boldsymbol{\xi}}(\omega^k \wedge \omega^l) = i_{\boldsymbol{\xi}}\omega^k \wedge \omega^l + (-1)^k \omega^k \wedge i_{\boldsymbol{\xi}}\omega^l$

$$\begin{aligned}
&i_{\boldsymbol{\xi}}(\omega^k \wedge \omega^l)(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{k+l-1}) = (\omega^k \wedge \omega^l)(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{k+l-1}) \\
&= \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_k \\ j_1 < \cdots < j_l}} sgn(i_1, \cdots, i_k, j_1, \cdots, j_l)\omega^k(\boldsymbol{\eta}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{i_k})\omega^l(\boldsymbol{\eta}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{j_l}) \\
&\boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{\eta}_j = \boldsymbol{\xi}_{j-1}, \ \ j = \overline{2, k+l}
\end{aligned}$$

Ако $\boldsymbol{\xi}$ е сред аргументите на $\boldsymbol{\omega}^k$ в някое събираемо, то трябва да е най-левият, тъй като $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta}_1, i_1 < i_j, \ \ j = \overline{2,k}$. Но тогава събираемото ще е от вида

$$\begin{aligned}
&sgn(1, \cdots, i_k, j_1, \cdots, j_l)\omega^k(\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{i_k})\omega^l(\boldsymbol{\eta}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{j_l}) \\
&= sgn(i_2, \cdots, i_k, j_1, \cdots, j_l)(i_{\boldsymbol{\eta}_1}\omega^k)(\boldsymbol{\eta}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{i_k})\omega^l(\boldsymbol{\eta}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{j_l}) \\
&= sgn(i_2, \cdots, i_k, j_1, \cdots, j_l)(i_{\boldsymbol{\xi}}\omega^k)(\boldsymbol{\eta}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{i_k})\omega^l(\boldsymbol{\eta}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{j_l})
\end{aligned}$$

А това е точно събираемо от $i_{\boldsymbol{\xi}}\omega^k \wedge \omega^l$. От друга страна, когато $\boldsymbol{\xi}$ е аргумент на $\boldsymbol{\omega}^l$, аналогично трябва да бъде първият аргумент. Това значи, че

$$\begin{aligned}
&sgn(i_1, \cdots, i_k, 1, \cdots, j_l)\omega^k(\boldsymbol{\eta}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{i_k})\omega^l(\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{j_l}) \\
&= (-1)^k sgn(1, i_1, \cdots, i_k, \cdots, j_l)\omega^k(\boldsymbol{\eta}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{i_k})(i_{\boldsymbol{\eta}_1}\omega^l)(\boldsymbol{\eta}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{j_l}) \\
&= (-1)^k sgn(1, i_1, \cdots, i_k, \cdots, j_l)\omega^k(\boldsymbol{\xi}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{i_k})(i_{\boldsymbol{\eta}_1}\omega^l)(\boldsymbol{\eta}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{j_l})
\end{aligned}$$

Това е събираемо от $(-1)^k\omega^k \wedge i_{\boldsymbol{\xi}}\omega^l$. И тъй доказахме равенството.

I.6 Изображения

Нека $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ и f е линейно изображение. Тогава $(f^*\omega^k)(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k) = \omega^k(f(\boldsymbol{\xi}_1), \cdots, f(\boldsymbol{\xi}_k))$ е k-форма над $\mathbb{R}^m$, тъй като:

$$\begin{aligned}
&(f^*\omega^k)(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \lambda\boldsymbol{\xi}_i + \mu\boldsymbol{\eta}_i, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k) = \omega^k(f(\boldsymbol{\xi}_1), \cdots, f(\lambda\boldsymbol{\xi}_i + \mu\boldsymbol{\eta}_i), \cdots, f(\boldsymbol{\xi}_k)) \\
&= \omega^k(f(\boldsymbol{\xi}_1), \cdots, \lambda f(\boldsymbol{\xi}_i) + \mu f(\boldsymbol{\eta}_i), \cdots, f(\boldsymbol{\xi}_k)) \\
&= \lambda\omega^k(f(\boldsymbol{\xi}_1), \cdots, f(\boldsymbol{\xi}_i), \cdots, f(\boldsymbol{\xi}_k)) + \mu\omega^k(f(\boldsymbol{\xi}_1), \cdots, f(\boldsymbol{\eta}_i), \cdots, f(\boldsymbol{\xi}_k)) \\
&(f^*\omega^k)(\boldsymbol{\xi}_{\pi_1}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{\pi_k}) = \omega^k(f(\boldsymbol{\xi}_{\pi_1}), \cdots, f(\boldsymbol{\xi}_{\pi_k})) = sgn(\pi)\omega^k(f(\boldsymbol{\xi}_1), \cdots, f(\boldsymbol{\xi}_k)) \\
&= sgn(\pi)(f^*\omega^k)(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k)
\end{aligned}$$

Може да разглеждаме f^* като линеен оператор, изобразяващ векторното пространство от k-форми над $\mathbb{R}^m$ във векторното пространство от k-форми над $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
&(f^*(\lambda\omega_1^k+\mu\omega_2^k))(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)=(\lambda\omega_1^k+\mu\omega_2^k)(f(\boldsymbol{\xi}_1),\cdots,f(\boldsymbol{\xi}_k))\\
&=(\lambda\omega_1^k)(f(\boldsymbol{\xi}_1),\cdots,f(\boldsymbol{\xi}_k))+(\mu\omega_2^k)(f(\boldsymbol{\xi}_1),\cdots,f(\boldsymbol{\xi}_k))\\
&=\lambda\omega_1^k(f(\boldsymbol{\xi}_1),\cdots,f(\boldsymbol{\xi}_k))+\mu\omega_2^k(f(\boldsymbol{\xi}_1),\cdots,f(\boldsymbol{\xi}_k))\\
&=\lambda(f^*\omega_1^k)(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)+\mu(f^*\omega_2^k)(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)
\end{aligned}$$

Ще покажем, че $(g\circ f)^*=f^*\circ g^*$:

$$\begin{aligned}
&((g\circ f)^*\omega^k)(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)=\omega^k((g\circ f)(\boldsymbol{\xi}_1),\cdots,(g\circ f)(\boldsymbol{\xi}_k))\\
&=\omega^k(g(f(\boldsymbol{\xi}_1)),\cdots,g(f(\boldsymbol{\xi}_k)))=(g^*\omega^k)(f(\boldsymbol{\xi}_1),\cdots,f(\boldsymbol{\xi}_k))\\
&=(f^*(g^*\omega^k))(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)=((f^*\circ g^*)\omega^k)(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)
\end{aligned}$$

$f*$ комутира с прилагането на външно произведение:

$$\begin{aligned}
&(f^*(\omega^k\wedge\omega^l))(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{k+l})=(\omega^k\wedge\omega^l)(f(\boldsymbol{\xi}_1),\cdots,f(\boldsymbol{\xi}_{k+l}))\\
&=\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_k\\ j_1<\cdots<j_l}} sgn(i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_l)\omega^k(f(\boldsymbol{\xi}_{i_1}),\cdots,f(\boldsymbol{\xi}_{i_k}))\omega^l(f(\boldsymbol{\xi}_{j_1}),\cdots,f(\boldsymbol{\xi}_{j_l}))\\
&=\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_k\\ j_1<\cdots<j_l}} sgn(i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_l)(f^*\omega^k)(\boldsymbol{\xi}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{i_k})(f^*\omega^l)(\boldsymbol{\xi}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{j_l})\\
&=(f^*\omega^k\wedge f^*\omega^l)(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{k+l})
\end{aligned}$$

Функцията f^* понякога се нарича транспонирано (дуално) изображение на f.

I.7 Звезда на Ходж

Звездата на Ходж е изображение между две форми, което може да дефинираме така:

$$\begin{aligned}
&*:\bigwedge^k\to\bigwedge^{n-k}\\
&(*\omega)(\mathbf{e}_{j_1},\cdots,\mathbf{e}_{j_{n-k}})=sgn(i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_{n-k})\omega(\mathbf{e}_{i_1},\cdots,\mathbf{e}_{i_k})
\end{aligned}$$

$*(\omega_1+\omega_2) = *\omega_1 + *\omega_2$:

$$(*(\omega_1+\omega_2))(\mathbf{e}_{j_1},\cdots,\mathbf{e}_{j_{n-k}}) = sgn(i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_{n-k})(\omega_1+\omega_2)(\mathbf{e}_{i_1},\cdots,\mathbf{e}_{i_k})$$
$$= sgn(i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_{n-k})(\omega_1(\mathbf{e}_{i_1},\cdots,\mathbf{e}_{i_k})+\omega_2(\mathbf{e}_{i_1},\cdots,\mathbf{e}_{i_k}))$$
$$= sgnsgn(i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_{n-k})\omega_1(\mathbf{e}_{i_1},\cdots,\mathbf{e}_{i_k})+sgn(i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_{n-k})\omega_2(\mathbf{e}_{i_1},\cdots,\mathbf{e}_{i_k})$$
$$= (*\omega_1)(\mathbf{e}_{i_1},\cdots,\mathbf{e}_{i_k})+(*\omega_2)(\mathbf{e}_{i_1},\cdots,\mathbf{e}_{i_k})$$

$*(\lambda\omega) = \lambda(*\omega)$:

$$\begin{aligned}
&(*(\lambda\omega))(\mathbf{e}_{j_1},\cdots,\mathbf{e}_{j_{n-k}}) = sgn(i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_{n-k})(\lambda\omega)(\mathbf{e}_{i_1},\cdots,\mathbf{e}_{i_k})\\
&= sgn(i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_{n-k})\lambda\omega(\mathbf{e}_{i_1},\cdots,\mathbf{e}_{i_k})\\
&= \lambda(sgn(j_1,\cdots,j_{n-k},i_1,\cdots,i_k)\omega(\mathbf{e}_{i_1},\cdots,\mathbf{e}_{i_k}))\\
&= \lambda(*\omega)(\mathbf{e}_{j_1},\cdots,\mathbf{e}_{j_{n-k}})
\end{aligned}$$

$**\omega = (-1)^{k(n-k)}\omega$:

$$\begin{aligned}
&(*(*\omega))(e_{i_1},\cdots,e_{i_k}) = sgn(j_1,\cdots,j_{n-k},i_1,\cdots,i_k)(*\omega)(e_{j_1},\cdots,e_{j_{n-k}})\\
&= sgn(j_1,\cdots,j_{n-k},i_1,\cdots,i_k)sgn(i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_{n-k})\omega(e_{i_1},\cdots,e_{i_k})\\
&= (-1)^{k(n-k)}(sgn(i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_{n-k}))^2\omega(e_{i_1},\cdots,e_{i_k})\\
&= (-1)^{k(n-k)}\omega(e_{i_1},\cdots,e_{i_k})
\end{aligned}$$

Така звездата на Ходж в някакъв смисъл задава дуалност на k- форма и $n-k$-форма. Това не е толкова учудващо, тъй като пространството от k-форми $\bigwedge^k$ е с размерност $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, размерността на $\bigwedge^{n-k}$.

Има и по-обща дефиниция на $*$, която е свързана с изобразяване g на базис на R^n в положително ориентиран ортонормиран базис на V(разглеждат се формите над $V, dim(V) = n$), относно някакво скаларно произведение. Тогава може да се дефинира и като:

$$*\omega = (g^{-1})^*(*g^*\omega)$$

В този случай $*$ за форми над $\mathbb{R}^n$ се дефинира малко по-различно чрез билинейно изображение.

II Диференциални форми

Нека M е многообразие, а с $T_{\mathbf{x}}M$ бележим допирателното пространство към M в точката $\mathbf{x}$, а $TM = \bigcup_{\mathbf{x}\in M} T_{\frown}M$. Тъй като за произволно $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ е в сила $T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$, то и $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$. Надолу под гладкост ще разбираме безкрайна гладкост.

II.1 Диференциални 1-форми

Диференциална 1-форма ω^1 над M е гладко изображение $\omega^1 : TM \to \mathbb{R}$, линейно над всяко T_xM т.е. диференциалната 1-форма над M е алгебрична 1-форма над $T_\mathbf{x}M$, за всяко $\mathbf{x} \in M$. Виждаме, че когато диференциалната 1-форма ω е над $\mathbb{R}^n$, то тя е гладко линейно изображение $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Тъй като диференциалните 1-форми са над T_xM, то те са в дуалното пространство, T_x^*M. Това пространство също се нарича котангенциално, а диференциалните 1-формите - тангенциални (допирателни) ковектори, котангенциални вектори.

Ако $dim(T_\mathbf{x}M) = p$, то ако приемем, че $\mathrm{d}y_i$ е проекцията на допирателен вектор в $\mathbf{x}$ по базисните вектори на T_xM, то 1-формите се представят по следният начин:

$$\omega = \sum_{i=1}^{p} g_i(\mathbf{x})\mathrm{d}y_i$$
$$\omega = \sum_{i=1}^{n} g_i(\mathbf{x})\mathrm{d}y_i, TM = R^n$$

Ако фиксираме x получаваме общ запис на алгебрична 1-форма, т.е. $\sum_{i=1}^{p} a_i \mathrm{d}y_i$, т.е. самите коефициенти може да зачитаме за функция на $\mathbf{x}$. Тъй като в случая на форми над R^n имаме, че $x \in R^n$, просто може да вземем вече наличният базис на R^n и го използваме и за допирателното пространство. Така може да запишем $\omega = \sum_{i=1}^{n} g_i(\mathbf{x})\mathrm{d}x_i$.

Когато ω е над $\mathbb{R}$, то понеже е гладко изображение, то в частност е и непрекъснато. Нека $\omega = f(x)dx$. Но тогава тя е точна, понеже:

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds, \quad F'(x) = f(x)$$

Това обаче не е задължително при $n > 1$. За да може $\mathrm{d}f = \omega$, то от $\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$ по теоремата на Шварц трябва да е в сила $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$. Така веднага може да видим, че $5\mathrm{d}x_1 + 3x\mathrm{d}x_2$ и $x_2^2\mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2 - 13x_3\mathrm{d}x_3$ не са диференциал на никоя функция.

Задача 2. *Нека* $\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$, *над* $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, *а* $f(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)^T$. *Да се намери* $f^*\omega$.

Решение.

$$
\begin{aligned}
&(f^*\omega)(\rho,\theta) = \omega(f_1(\rho,\theta), f_2(\rho,\theta)) \\
&= -\frac{\rho\sin\theta}{(\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2}\,\mathrm{d}(\rho\cos\theta) + \frac{\rho\cos\theta}{(\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2}\,\mathrm{d}(\rho\sin\theta) \\
&= -\frac{\rho\sin\theta}{\rho^2}(\cos\theta\mathrm{d}\rho - \rho\sin\theta\mathrm{d}\theta) + \frac{\rho\cos\theta}{\rho^2}(\sin\theta\mathrm{d}\rho + \rho\cos\theta\mathrm{d}\theta) \\
&= -\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho}\mathrm{d}\rho + \sin^2\theta\mathrm{d}\theta + \frac{\cos\theta\sin\theta}{\rho}\mathrm{d}\rho + \cos^2\theta\mathrm{d}\theta = (\sin^2\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

II.2 Диференциални k-форми

Уточнението, което направихме по-рано сега влиза в общата дефиниция. Диференциална k-форма $\omega|_x$ в точка $x \in M$ е (външна) k-форма над T_xM. Ако тя съществува за кое да е $x \in M$ и е диференцируема в него, то казваме, че формата е над M и бележим само ω.

Тъй като дефинираме диференциалните k-форми като вид k-форми, то и за тях са дефинирани операциите външно и вътрешно произведение.

Задача 3. *Да се пресметне* $\omega|_x = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}\big(x_1^2+x_2^2+x_3^2\big)$ *в точката* $x = (1,2,3)^T$ *с аргументи допирателните вектори* $\boldsymbol{\xi}_1 = (0,5,2)^T, \boldsymbol{\xi}_2 = (3,2,1)^T$

Решение.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right) = 2x_1\mathrm{d}x_1 + 2x_2\mathrm{d}x_2 + 2x_3\mathrm{d}x_3 \\
&\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right) = 2x_2\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2 + 2x_3\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3 \\
&\omega|_x = 4\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2 + 6\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3 \\
&\omega(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2) = 4\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2) + 6\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2) \\
&\quad = 4\begin{vmatrix}0 & 3\\ 5 & 2\end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 4(-15)+6(-6) = -60-36 = -96
\end{aligned}
$$

II.3 Външно диференциране

Външното диференциране е допълнителна операция над диференциалните форми, даваща ни диференциална форма от степен с едно повече.

В зависимост от дефинцията следните свойства или са аксиоматични или се извеждат:

1. d е линейно изображение.

2. $\mathrm{d}f$ е диференциал на f, ако f е гладка фунцкия(0-форма)

3. $\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = 0$, ако f е 0-форма

4. $\mathrm{d}\left(\omega^k \wedge \omega^l\right) = \mathrm{d}\omega^k \wedge \omega^l + (-1)^k \omega^k \wedge \mathrm{d}\omega^l$

Няколко основни свойства:

1. $\mathrm{dd} = 0$

$$\omega \in \bigwedge^k \implies \omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1\cdots i_k}(\mathbf{x})\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \mathrm{d}x_{i_k}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) &= \mathrm{d}\left(\sum_{i_1<\cdots<i_k} \mathrm{d}(a_{i_1\cdots i_k}(\mathbf{x})\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \mathrm{d}x_{i_k})\right) \\
&= \mathrm{d}\left(\sum_{i_1<\cdots<i_k} \mathrm{d}a_{i_1\cdots i_k}(\mathbf{x}) \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \mathrm{d}x_{i_k} + \sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1\cdots i_k}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}(\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \mathrm{d}x_{i_k})\right) \\
&= \sum_{i_1<\cdots<i_k} \mathrm{d}(\mathrm{d}a_{i_1\cdots i_k}(\mathbf{x}) \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \mathrm{d}x_{i_k}) \\
&+ \mathrm{d}\left(\sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1\cdots i_k}(\mathbf{x})\mathrm{dd}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \cdots \mathrm{d}x_{i_k} - \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}(\mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k})\right) \quad ddx_j = 0 \implies \\
&= \sum_{i_1<\cdots<i_k} \mathrm{dd}a_{i_1\cdots i_k}(\mathbf{x}) \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \mathrm{d}x_{i_k} - \mathrm{d}a_{i_1\cdots i_k}(\mathbf{x}) \wedge \mathrm{d}(\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \mathrm{d}x_{i_k}) + \mathrm{d}(0) \\
&= 0 + 0 = 0 \quad (\mathrm{dd}a_{i_1\cdots i_k}(\mathbf{x}) = 0)
\end{aligned}$$

Така видяхме и че:

$$\mathrm{d}(a_{i_1\cdots i_k}(\mathbf{x})\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \mathrm{d}x_{i_k}) = \mathrm{d}a_{i_1\cdots i_k}(\mathbf{x}) \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \mathrm{d}x_{i_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{i_1\cdots i_k}}{\partial x_j}(\mathbf{x})\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \mathrm{d}x_{i_k}$$

2. $f^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(f^*\omega)$

$$\begin{aligned}
f^*(\mathrm{d}\omega) &= \sum_{i_1<\cdots<i_k} ((\mathrm{d}a_{i_1\cdots i_k}) \circ f) \wedge \mathrm{d}f_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_{i_k} = \sum_{i_1<\cdots<i_k} (\mathrm{d}(a_{i_1\cdots i_k} \circ f)) \wedge \mathrm{d}f_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_{i_k} \\
&= \mathrm{d}\left(\sum_{i_1<\cdots<i_k} (a_{i_1\cdots i_k} \circ f)\mathrm{d}f_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_{i_k}\right) = d(f^*\omega)
\end{aligned}$$

Задача 4. *Да се намерят* $\mathrm{d}\omega, \mathrm{d}^2\omega$, *ако* $\omega = z^3\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + (z^2 + 2y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$

Решение.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\Big(z^3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + (z^2+2y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z\Big) = \mathrm{d}z^3\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + \mathrm{d}\Big(z^2+2y\Big)\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z\\
&\;= 3z^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + 2z\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z + 2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z = 3z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - 2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\\
&\;= (3z^2-2)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\\
&\mathrm{d}\mathrm{d}\omega = 6z\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = 0
\end{aligned}$$

Казваме, че диференциална форма α е точна, когато $\alpha = \mathrm{d}\beta$. Казваме, че диференциална форма ω е затворена, ако $\mathrm{d}\omega = 0$.

Точните форми са затворени:

$$\omega = \mathrm{d}\beta \implies \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\mathrm{d}\beta = 0$$

Задача 5. *Разгледайте* $\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i$, *над* $\mathbb{R}^{2n} = (\mathbf{q}, (p))$ *и докажете, че е точна и затворена.*

Решение.

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} p_i\mathrm{d}q_i, \quad \mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\mathrm{d}q_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}(p_i\mathrm{d}q_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}p_i\wedge\mathrm{d}q_i = \omega$$

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}p_i\wedge\mathrm{d}q_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}(\mathrm{d}p_i\wedge\mathrm{d}q_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}1\wedge\mathrm{d}p_i\wedge\mathrm{d}q_i = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0$$

Лема 1 (Лема на Поанкаре)**.** *Всяка затворена диференциална форма над R^n е точна.*

II.4 Кодиференциал

Кодиференциалът е изображение от диференциални форми в такива от един ред по-нисък.

$$\delta\omega = (-1)^{n(k+1)+1} * \mathrm{d} * \omega, \quad \omega \in \bigwedge^k$$

Виждаме, че $\delta^2 = 0$, тъй като:

$$\begin{aligned}
&\delta\delta\omega^k = \delta(-1)^{n(k+1)+1} * \mathrm{d} * \omega^k = (-1)^{n(k+1)+1}(-1)^{nk+1} * \mathrm{d} * * \mathrm{d} * \omega^k\\
&= (-1)^{n(2k+1)}(-1)^{n(n-k+1)} * \mathrm{d}\mathrm{d} * \omega^k = (-1)^{n(n+k+2)} * \mathrm{d}\mathrm{d}\alpha^{n-k} = (-1)^{n(n+k+2)} * 0 = 0
\end{aligned}$$

Ако f е гладка фунцкия, то:

$$\begin{aligned}
&\delta f = (-1)^{n+1} * \mathrm{d} * f = (-1)^{n+1} * \mathrm{d}(f\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n) = (-1)^{n+1} * (\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n)\\
&= (-1)^{n+1} * (\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n) = (-1)^{n+1} * 0 = 0
\end{aligned}$$

II.5 Диференциал на Ли

Нека $\mathbf{V}$ е векторно поле, а f-гладка фунцкия. Тогава под диференциал на Ли разбираме:

$$L_{\mathbf{V}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}$$
$$L_{\mathbf{V}}(f) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i(\mathbf{x}) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Лесно се вижда, че за 0-форма, т.е. гладка фунцкия f е в сила:

$$L_{\mathbf{V}}(f) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i(\mathbf{x}) \frac{\partial f}{\partial x_i} = \langle \mathbf{V}, \mathbf{grad} f \rangle$$

Веднага се вижда, че:

$$\begin{aligned}
L_{\mathbf{V}+\mathbf{W}} &= \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{V}+\mathbf{W})_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{V}_i(\mathbf{x}) + \mathbf{W}_i(\mathbf{x})) \frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{W}_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} = L_{\mathbf{V}} + L_{\mathbf{W}} \\
L_{g\mathbf{V}} &= \sum_{i=1}^{n} (g\mathbf{V})_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} g(\mathbf{x}) \mathbf{V}_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} = g(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} = g L_{\mathbf{V}}
\end{aligned}$$

В зависимост от дефиницията на $L_{\mathbf{V}}$ следната формула на Картан(известна още като формула на хомотопията) или се извежда, или може да се приеме за дефиниция на действието на диференциала на Ли над форми:

$$L_{\mathbf{V}} \omega = i_V \mathrm{d}\omega + \mathrm{d} i_V \omega$$

Тоест с диференциала на Ли получаваме диференциална форма от същия ред.

Задача 6. *Нека* $\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i$, *над* $\mathbb{R}^{2n} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ *и дефинираме следното векторно поле:* $\mathbf{X}_H = (\frac{\partial H}{\partial p_1}, \cdots, \frac{\partial H}{\partial p_i}, \cdots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \cdots, -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \cdots, -\frac{\partial H}{\partial q_n})^T$. *Да се намерят* $L_{\mathbf{X}_H} H$ *и* $L_{\mathbf{X}_H} \omega$.

Решение.

$$L_{\mathbf{X}_H} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

$$L_{\mathbf{X}_H}H = i_{\mathbf{X}_H}\mathrm{d}H + \mathrm{d}i_{\mathbf{X}_H}H = i_{\mathbf{X}_H}\mathrm{d}H = \mathrm{d}H(\mathbf{X}_H) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i(\mathbf{X}_H) + \frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i(\mathbf{X}_H)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i}(\mathbf{X}_H)_{q_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i}(\mathbf{X}_H)_{p_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i}(-\frac{\partial H}{\partial q_i}) = 0$$

$$L_{\mathbf{X}_H}\omega = i_{\mathbf{X}_H}\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}i_{\mathbf{X}_H}\omega = \mathrm{d}i_{\mathbf{X}_H}\omega = \mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i(\mathbf{X}_H, \boldsymbol{\xi})\right)$$

$$= \mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_H)_{p_i}\mathrm{d}q_i(\boldsymbol{\xi}) - \mathrm{d}p_i(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{X}_H)_{q_i}\right)$$

$$= \mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n} -\frac{\partial H}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i(\boldsymbol{\xi}) - \frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i(\boldsymbol{\xi})\right) = -\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i\right)(\boldsymbol{\xi}) = -\mathrm{d}\mathrm{d}H(\boldsymbol{\xi}) = 0$$

$L_{\mathbf{X}_H}H = 0$ може да се покаже и направо със заместване.

II.6 Аналози на векторни операции

Външната производна и оператора на Ходж могат да се използват в съвкупност и така да се получат повечето известни от математическия анализ "важни"функции на векторните полета. За следващите определения предполагаме V поле в $\mathbb{R}^n$, а f гладка фунцкия.

Градиент

Градиентът на f ни дава векторното поле $\mathbf{grad}f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n})^T$. Той е обвързан с диференцирането по посока (направление) $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$.

$$\mathrm{d}f(n) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i(w) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}w_i = \langle \mathbf{grad}f, \mathbf{w}\rangle$$

Максималната стойност на горното скаларно произведение се достига при $\mathbf{w} = \mathbf{grad}f$, откъдето и $\mathbf{grad}f$ е посоката на най-голямо нарастване на фунцкията. И обратно, най-малката стойност се достига при $\mathbf{w} = -\mathbf{grad}f$ - посоката на най-голямо намаляване. Тези свойства се използват при някои оптимизационни алгоритми, базиране на предвижване по тези посоки, за да се достигне съответно локален максимум или минимум. Градиентът също се бележи и с $\boldsymbol{\nabla}f$, а понякога и директно с f' за показване на аналог на формули при по-писока размерност.

Дивергенция

Дивергенцията на векторното поле $\mathbf{V}$ му съпоставя функция :

$$div\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{V_i}}{\partial x_i}$$

Интуитивно, дивергенцията ни дава идея дали дали векторното поле "сочи към"или "сочи далеч"от дадена точка. Тя е свързана с n-формата $\mathrm{d}(*\omega)$, където ω е съпоставената по полето 1-форма:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(*\omega) &= \mathrm{d}\left(*\sum_{i=1}^{n} \mathbf{V_i}\mathrm{d}x_i\right) = \mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{V_i} * \mathrm{d}x_i\right) \\
&= \mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{V_i} sgn(i,1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n)\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \mathrm{d}x_{i-1} \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \wedge \cdots \wedge x_n\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}(\mathbf{V_i})\,(-1)^{i-1} \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \mathrm{d}x_{i-1} \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \wedge \cdots \wedge x_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} (\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{V_j}}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j) \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \mathrm{d}x_{i-1} \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \wedge \cdots \wedge x_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial \mathbf{V_i}}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \mathrm{d}x_{i-1} \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \wedge \cdots \wedge x_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}(-1)^{i-1} \frac{\partial \mathbf{V_i}}{\partial x_i}\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \\
&= (\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{V_j}}{\partial x_i})\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = (div\mathbf{V})\mathrm{d}\mu_n \\
* \mathrm{d}(*\omega) &= *(div\mathbf{V})\mathrm{d}\mu_n = div\mathbf{V} sgn(1,\cdots,n) = div\mathbf{V}
\end{aligned}$$

Дивергенцията също се бележи и с $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V}$(чисто мнемоническо означение, тъй като $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ не е истински вектор).

Ротор

Роторът на векторното поле $\mathbf{V}$ му съпоставя $n-2$-форма:

$$\mathbf{rot}\mathbf{V} = *\mathrm{d}\omega, \quad \omega = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i \mathrm{d}x_i$$

Роторът също се бележи и с **curlV** или $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V}$ (отново за лесно запомняне, но това важи само за $\mathbb{R}^3$). Роторът може да се срещне и като "завихряне".

Използвайки, че $d^2 = 0$, получаваме формулатите $\mathbf{rot}\,\mathbf{grad} f = *\mathrm{d}\mathrm{d}f = *0 = 0$ и $div\,\mathbf{rot}\mathbf{V} = *\mathrm{d} * *\mathrm{d}\omega = (-1)^{0n} * \mathrm{d}\mathrm{d}\omega = 0$

Нека фиксираме векторни полета $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ над $\mathbb{R}^3$ и бележим $\omega^1_{\mathbf{A}} = A_1\mathrm{d}x_1 + A_2\mathrm{d}x_2 + A_3\mathrm{d}x_3, \omega^2_{\mathbf{A}} = A_1\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + A_2\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + A_3\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$(аналогично дефинираме и за $\mathbf{B}$). Тогава:

$$
\begin{aligned}
&\omega^1_{\mathbf{A}} \wedge \omega^1_{\mathbf{B}} = (A_1\mathrm{d}x_1 + A_2\mathrm{d}x_2 + A_3\mathrm{d}x_3) \wedge (B_1\mathrm{d}x_1 + B_2\mathrm{d}x_2 + B_3\mathrm{d}x_3)\\
&= A_1B_2\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + A_1B_3\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + A_2B_1\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 + A_2B_3\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3\\
&+ A_3B_1\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + A_3B_2\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_2\\
&= (A_2B_3 - A_3B_2)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + (A_3B_1 - A_1B_3)\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + (A_1B_2 - A_2B_1)\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_2\\
&= \omega^2_{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}\\
&\omega^1_{\mathbf{A}} \wedge \omega^2_{\mathbf{B}} = (A_1\mathrm{d}x_1 + A_2\mathrm{d}x_2 + A_3\mathrm{d}x_3) \wedge (B_1\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + B_2\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + B_3\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2)\\
&= A_1B_1\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + A_2B_2\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + A_3B_3\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2\\
&= A_1B_1\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + A_2B_3\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + A_3B_3\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3\\
&= \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 = \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle \mathrm{d}\mu_3
\end{aligned}
$$

Задача 7. *Да се намерят векторни операции, съответствия на* $\mathrm{d}f$, $\mathrm{d}\omega^1_{\mathbf{A}}$ *и* $\mathrm{d}\omega^2_{\mathbf{A}}$

Решение.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3 = \omega^1_{\mathbf{grad} f}\\
&\mathrm{d}\omega^1_{\mathbf{A}} = \mathrm{d}(A_1\mathrm{d}x_1 + A_2\mathrm{d}x_2 + A_3\mathrm{d}x_3) = \mathrm{d}A_1\mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}A_2\mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}A_3\mathrm{d}x_3\\
&= \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 + \frac{\partial A_1}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + \frac{\partial A_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2\\
&+ \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + \frac{\partial A_3}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3\\
&= \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2\\
&= \omega^2_{\mathbf{rot}\mathbf{A}}\\
&\mathrm{d}\omega^2_{\mathbf{A}} = \mathrm{d}(A_1\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + A_2\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + A_3\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2)\\
&= \mathrm{d}A_1\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \mathrm{d}A_2\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}A_3\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2\\
&= \frac{\partial A_1}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \frac{\partial A_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2\\
&= \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 = (div\mathbf{A})d\mu_3
\end{aligned}
$$

II.7 Оператор на Лаплас-Белтрами-де Рам

Този операторът на Лаплас-де Рам се дефинира така:

$$\Delta = (\mathrm{d}+\delta)^2 = \mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d}$$

До формулата отдясно стигаме след използване на $d^2 = \delta^2 = 0$. Формите ω, за които $\Delta\omega = 0$ се наричат хармонични. Известният ни Лапласиан е операторът на Лаплас-Белтрами:

$$\Delta f = div\,\mathbf{grad} f$$

Обобщението на Лаплас-Белтрами е Лаплас-де Рам. Ако то е приложено на функция, дава $\Delta f = \mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d}f = \delta\mathrm{d}f$. Може да се покаже, че $\delta\mathrm{d}f = -\Delta f$(в смисълът на Лаплас-Белтрами). Това не е проблем, тъй като хармонични 0-форми, т.е. функции са едни и същи в двата случая (от $-\Delta f = 0 \iff \Delta f = 0$).

Задача 8. *Покажете,че наистина* $\delta\mathrm{d}f = -div\,\mathbf{grad} f$

Доказателство. Тъй като f е гладка фунцкия, то може да намерим неиният градиент, $\mathbf{grad} f$. Тъй като той е векторно поле, то $*\mathrm{d}*\omega = div\,\mathbf{grad} f$(тук ω е съответстващата на градиента 1-форма). Но $\mathrm{d}f = \omega$. Тогава $\delta\mathrm{d}f = (-1)^{n(1+1)+1} * \mathrm{d}*\mathrm{d}f = (-1)*\mathrm{d}*\omega = -div\,\mathbf{grad} f$ □

II.8 Интегриране на диференциални форми

Теорема (Формула на Стокс)**.** *Нека M е компактно гладко ориентируемо многообразие с непразна граница $\partial M \subset \mathbb{R}^n$. Нека ω е диференциална $n-1$-форма. Тогава $\int_{\partial M}\omega = \int_M \mathrm{d}\omega$.*

Теоремата на Стокс е обобщение на теоремите на Нютон-Лайбниц, Грийн и Гаус-Остроградски.