# Задача 2 относно неравенството на Чебишов

Калоян Стоилов

18 ноември 2024 г.

(а) Нека $f \in M^+(X,\mu), \quad \lambda > 0, \quad S = \{x \in X | f(x) > \lambda\}$, тогава:

$$\int_X f\mathrm{d}\mu = \int_S f\mathrm{d}\mu + \int_{X\setminus S} f\mathrm{d}\mu \geq \int_S \lambda\mathrm{d}\mu + \int_{X\setminus S} 0\mathrm{d}\mu \geq \lambda \int_S \mathrm{d}\mu = \lambda\mu(S) = \lambda\{x \in X | f(x) > \lambda\}$$

.

(б) Нека $f \in M^+(X,\mu), \int_X f\,\mathrm{d}\mu = 0$, тогава е в сила, че $\mu(\{x \in X | f(x) > \frac{1}{n}\}) \leq n\int_X f\,\mathrm{d}\mu = n0 = 0$, откъдето:

$$\mu(\{x \in X | f(x) > 0\}) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in X | f(x) > \frac{1}{n}\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{x \in X | f(x) > \frac{1}{n}\}) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

От дефиницията на почти навсякъде имаме, че:

$$f(x) = 0 \quad \text{п.н} \iff \mu(X \setminus \{x \in X | f(x) = 0\}) = \mu(\{x \in X | f(x) \neq 0\}) \overset{f \in M^+}{=} \mu(\{x \in X | f(x) > 0\}) = 0$$