Задача 3 относно представянето на интеграла в $\boldsymbol{M}^+$

Калоян Стоилов

19 ноември 2024 г.

Надолу $(X,\mathscr{A},\mu)$ е пространство с мярка.

Нека разгледаме простата функция $\varphi \in SF^+(X,\mathscr{A})$ в каноничен вид $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} d_j \chi_{T_j}(x)$. Б.О.О считаме че $d_1 < d_2 < \dots < d_n$. В SF^+, интегралът на φ е:

$$\int_X \varphi \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{m} d_j \mu(T_j) = d_1 \sum_{j=1}^{m} \mu(T_j) + (d_2 - d_1) \sum_{j=2}^{m} \mu(T_j) + \dots + (d_m - d_{m-1}) \mu(T_m)$$

Понеже множествата T_j са непресичащи се, може да използваме пълната адитивност на мярката μ, т.е. за $k = \overline{2,m}$:

$$\sum_{j=k}^{m} \mu(T_j) = \mu(\bigcup_{j=k}^{m} T_j) = \mu(\{x \in X | \varphi(x) \geq d_k\}) = \mu(\{x \in X | \varphi(x) > d_{k-1}\}) = \mu(S_\varphi(d_{k-1})) = \Psi_\varphi(d_{k-1})$$

Отчитаме, в интервала $[d_{k-1}, d_k)$, Ψ_φ е константа, тъй като и φ е константа. Също така може да забележим, че $\Psi_\varphi(t) = 0, t \geq d_k$. Може да смятаме, че $d_1 = 0$. Ако присъства към каноничния вид, не добавя нищо към сумата, а ако не присъства може фиктивно да го добавим със съответното $T_1 = \emptyset$, като отново не добавя нищо. Така достигаме до:

$$\int_X \varphi \mathrm{d}\mu = (d_2 - d_1)\Psi_\varphi(d_1) + \dots + (d_m - d_{m-1})\Psi_\varphi(d_{m-1}) = \Psi_\varphi(d_1) \int_{d_1}^{d_2} \mathrm{d}t + \dots + \Psi_\varphi(d_{m-1}) \int_{d_{m-1}}^{d_m} \mathrm{d}t =$$
$$\int_{d_1}^{d_2} \Psi_\varphi(t)\mathrm{d}t + \dots + \int_{d_{m-1}}^{d_m} \Psi_\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_{d_1}^{d_m} \Psi_\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_{d_1}^{d_m} \Psi_\varphi(t)\mathrm{d}t + \int_{d_m}^{\infty} \Psi_\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \Psi_\varphi(t)\mathrm{d}t$$

Така доказахме представянето за прости функции и интеграла в $SF^+(X,\mathscr{A})$, като за тях той съвпада с дефиницията на интеграла на $M+(X,\mathscr{A})$, а и $SF+(X,\mathscr{A}) \subset M+(X,\mathscr{A})$. От основната лема за $M+(X,\mathscr{A})$, за всяка $f \in M+(X,\mathscr{A})$, съществува монотонно растяща редица от прости фунцкии $\{\varphi_n\}, \subseteq SF^+(X,\mathscr{A})$, такава че $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$. От $\varphi_{n+1}(t) \geq \varphi_n(t)$ може да видим, че $S_{\varphi_n}(t) \subseteq S_{\varphi_{n+1}}(t)$. С други думи $S_{\varphi_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_{\varphi_n}(t) = S_f(t)$. Наистина, едната страна на съдържането е очевидна от $S_{\varphi_n}(t) \subseteq S_f(t)$, понеже $f(t) \geq \varphi_n(t)$. В обратната посока, ако допуснем, че има някой елемент $f(x) \geq \varphi_n(x) + \varepsilon, \varepsilon > 0$, то след граничен преход $0 \geq \varepsilon$, противоречие (с други думи граничният преход пред множеството може да влезе като граничен преход в условието за отделяне). Тогава използвайки теоремата на Бепо Леви за монотонния граничен преход:

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} \varphi_n \mathrm{d}\mu \overset{\text{(Б. Л.)}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \Psi_{\varphi_n}(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \Psi_{\varphi_n}(t)\mathrm{d}t =$$
$$\int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \mu(S_{\varphi_n}(t))\mathrm{d}t \overset{\text{(гр. пр. на } \mu)}{=} \int_0^\infty \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_{\varphi_n}(t))\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mu(S_f(t))\mathrm{d}t = \int_0^\infty \Psi_f(t)\mathrm{d}t$$