Universität Würzburg

Übung 4
Steuerbarkeitund Beobachtbarkeit

Alexander Björk, Janis Kaltenthaler

May 21, 2020

Aufgabe4-1. Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit von Reihen-und Parallelschaltung (6Punkte)

Zuerst betrachten wir die **Reihenschaltung** zweier Integretoren.

Abb.4-1.1: Blockschaltbild der Reihenschaltung zweier Integratoren.

Nach

$$G(s) = \left(c^T (sI - A)^{-1} b + d\right)$$

ist die Übertragungsfunktion eines Integrators

$$G_{\text{int}}(s) = \frac{1}{T_i s} = \frac{K}{s} \qquad \text{mit} \qquad K = \frac{1}{T_i}.$$

Demnach ist die Übertragungfunktion einer Reihenschaltung zweier Integratoren

$$G(s) = G_{\text{int}}(s) \cdot G_{\text{int}}(s) = \frac{K^2}{s^2}.$$

Daraus kann nun das Zustandsraummodell abgelesen werden[1], um dann auf Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit zu prüfen.
Das Zustandsraummodell ist

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} K^2 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

[1] `https://lpsa.swarthmore.edu/Representations/SysRepTransformations/TF2SS.html`

Um jetzt auf Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit zu prüfen, müssen nun die Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsmatrizen gebildet werden:

$$S_S = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$S_B = \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & \dots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^2 & 0 \\ 0 & K^2 \end{bmatrix}$$

Untersucht man nun deren Determinanten, können Rückschlüsse auf die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit gezogen werden. Die Determinante der Steuerbarkeitsmatrix ist

$$\det(S_S) = 0 - 1 = -1 \neq 0.$$

Die Determinante der Beobachtbarkeitsmatrix ist

$$\det(S_B) = K^2 \cdot K^2 - 0 = K^4 \neq 0.$$

Beide sind ungleich 0. Das System ist damit vollständig steuerbar und beobachtbar.

Nun betrachten wir die **Parallelschaltung** zweier Integratoren.

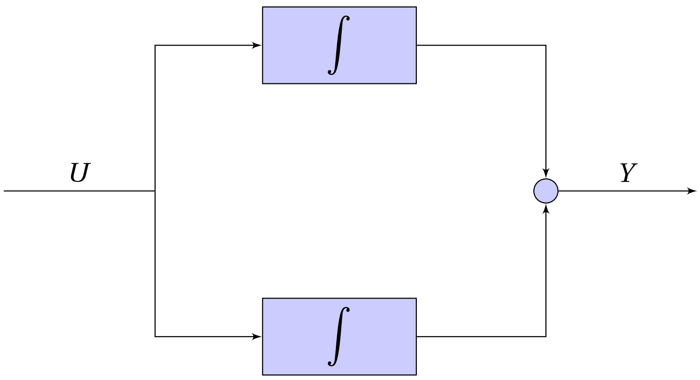

Abb.4-1.2: Blockschaltbild der Parallelschaltung zweier Integratoren.

Die Übertragungsfunktion ist

$$G(s) = G_{\text{int}}(s) + G_{\text{int}}(s) = 2\frac{K}{s}.$$

Daraus kann erneut das Zustandsraummodell abgelesen werden.

$$\dot{x} = u(t)$$
$$y(t) = 2Kx(t)$$

Nun ist es wieder möglich, die Steuerbarkeits- und die Beobachtbarkeitsmatrix zu bilden.

$$S_S = [B] = 1 \neq 0$$
$$S_B = [C] = 2K \neq 0$$

Damit ist auch die Parallelschaltung zweier Integratoren vollständig steuerbar und beobachtbar.

Aufgabe4-2. Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit eines Mehrgrößensystems (3Punkte)

Die Prüfung auf Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit bei Mehrgrößensystemen ist sehr ähnlich zu der von Eingrößensystemen. Man bildet zuerst die benötigten Matrizen:

$$S_S = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_B = \begin{bmatrix} C & CA \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ -6 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Und dann die zugehörigen Transponierten:

$$S_S{}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -6 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_B{}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Multipliziert man diese und bildet dann die Determinante, kann man Rückschlüsse auf die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des Systems ziehen.

$$S_S S_S{}^T = \begin{bmatrix} 50 & 14 \\ 14 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(S_S S_S{}^T\right) = 54 \neq 0$$

$$S_B{}^T S_B = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(S_B{}^T S_B\right) = 0$$

Das System ist somit vollständig steuerbar, jedoch nicht vollständig beobachtbar.

Aufgabe4-3. Steuerbarkeitund Beobachtbarkeitdes Pendels am Wagen (4Punkte)

a)

b)

c)

d)