UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Übung 5

Regelabweichung, Vorfilter und Zustandsrückführung

Alexander Björk, Janis Kaltenthaler

May 28, 2020

Aufgabe 5-1. Vorfilter für einen Regelkreis (3 Punkte)

a)

Steuerbarkeit

Um die Steuerbarkeit direkt mithilfe der Übertragungsfunktion $G(s)$ bestimmen zu können, bilden wir die **Regelungsnormalform**:

$$\begin{aligned} \dot{x}_R(t) &= A_R x_R(t) + b_R u(t), \qquad x_R(0) = x_{R_0} \\ y(t) &= c_R^T x_R(t) + d u(t) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} A_R &= -a_0 = 3, & b_R &= 1 \\ c_R^T &= b_0 - b_n a_0 = 1, & d &= 0 \end{aligned}$$

Die Regelstrecke ist somit vollständig steuerbar, da die Regelungsnormalform existiert.

Beobachtbarkeit

Um die Beobachtbarkeit direkt mithilfe der Übertragungsfunktion $G(s)$ bestimmen zu können, bilden wir die **Beobachtungsnormalform**:

$$\begin{aligned} \dot{x}_B(t) &= A_B x_B(t) + b_B u(t), \qquad x_B(0) = x_{B_0} \\ y(t) &= c_B^T x_B(t) + d u(t) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} A_B &= -a_0 = 3, & b_B &= b_0 - b_n a_0 = 1 \\ c_B^T &= 1, & d &= 0 \end{aligned}$$

Die Regelstrecke ist somit vollständig beobachtbar, da die Beobachtungsnormalform existiert.

b)

Zur Bestimmung der statischen Verstärkung benötigen wir zunächst die Führungsübertragungsfunktion $G_W(s) = \frac{Y(s)}{W(s)}$, wobei $R(s) = 0$ gilt.

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= E(s)K(s)G(s) \\
Y(s) &= \big(W(s) - C(s)Y(s)\big)K(s)G(s) \\
\Leftrightarrow \frac{Y(s)}{K(s)G(s)} &= W(s) - C(s)Y(s) \\
\Leftrightarrow \frac{1 + C(s)K(s)G(s)}{K(s)G(s)} &= \frac{W(s)}{Y(s)} \\
\Leftrightarrow G_W(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} &= \frac{K(s)G(s)}{1 + C(s)K(s)G(s)}
\end{aligned}
$$

Durch einsetzen der gegebenen Übertragungsfunktionen erhalten wir:

$$
\Leftrightarrow G_W(s) = \frac{k_p \frac{1}{s-3}}{1 + \frac{1}{s+5} k_p \frac{1}{s-3}} = \frac{k_p(s+5)}{s^2 + 2s + k_p - 15}
$$

Die statische Verstärkung k_s in Abhängigkeit von k_p erhält man nun mit:

$$
\Leftrightarrow G_W(0) = k_s = \frac{k_p(0+5)}{0^2 + 2 \cdot 0 + k_p - 15} = \frac{5k_p}{k_p - 15}
$$

$E(s)$ erhält man wie folgt, wobei $R(s) = 0$ weiterhin gilt.

$$
\begin{aligned}
E(s) &= W(s) - \hat{Y}(s) \\
E(s) &= W(s) - E(s)K(s)G(s)C(s) \\
\Leftrightarrow E(s) &= \frac{W(s)}{1 + K(s)G(s)C(s)}
\end{aligned}
$$

Mithilfe von $E(s)$ erhält man nun die Regelabweichung $e(s)$:

$$
\begin{aligned}
e(s) &= W(s) - Y(s) = W(s) - E(s)K(s)G(s) \\
e(s) &= W(s) \cdot \left(1 - \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)C(s)}\right)
\end{aligned}
$$

Führt man dem Regelkreis nun den Einheitssprung zu, d.h. $W(s) = \frac{1}{s}$, erhält man für $s = 0$ und durch Einsetzen der Übertragungsfunktionen die bleibende Regelabweichung.

$$
\lim_{s \to 0} s \cdot e(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s}{s} \cdot \left(1 - \frac{k_p \cdot (s+5)}{s^2 + 2 \cdot s + k_p - 15}\right) = -\frac{75}{k_p - 15} - 4
$$

c)

Um die Führungsübertragungsfunktion $G_{\hat{W}} = \frac{Y(s)}{\hat{W}(s)}$ zu bestimmen gilt $R(s) = 0$. Wir verwenden die bereits in Teilaufgabe **b)** berechnete Führungsübertragungsfunktion G_W und setzen nun $W(s) = V\hat{W}(s)$.

$$
\begin{aligned}
G_W(s) &= \frac{Y(s)}{V\hat{W}(s)} = \frac{K(s)G(s)}{1 + C(s)K(s)G(s)} \\
\Leftrightarrow G_{\hat{W}}(s) &= \frac{Y(s)}{\hat{W}(s)} = \frac{K(s)G(s)V}{1 + C(s)K(s)G(s)}
\end{aligned}
$$

d)

Die Regelabweichung $e(s)$ mit dem Vorfilter V ist nun:

$$e(s) = V\hat{W}(s) - Y(s) = V\hat{W}(s) \cdot \left(1 - \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)C(s)}\right)$$

Führt man dem Regelkreis nun den Einheitssprung zu, d.h. $\hat{W}(s) = \frac{1}{s}$, erhält man für $s = 0$ und durch Einsetzen der Übertragungsfunktionen die bleibende Regelabweichung mit dem Vorfilter V.

$$\lim_{s\to 0} s \cdot e(s) = \lim_{s\to 0} V \cdot \frac{s}{s} \cdot \left(1 - \frac{k_p \cdot (s+5)}{s^2 + 2 \cdot s + k_p - 15}\right) = -\frac{75 \cdot V}{k_p - 15} - 4$$

Der Vorfilter V kann nun wie folgt berechnet werden um die bleibende Regelabweichung zu eliminieren:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{75 \cdot V}{k_p - 15} - 4 \\ \Leftrightarrow V &= -\frac{4 \cdot (k_p - 15)}{75} \end{aligned}$$

Zuerst betrachten wir die **Reihenschaltung** zweier Integretoren.

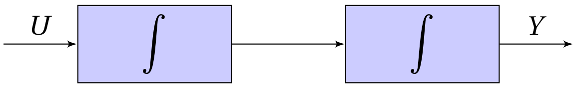

Abb.4-1.1: Blockschaltbild der Reihenschaltung zweier Integratoren.

Nach

$$G(s) = \left(c^T\,(sI - A)^{-1}\,b + d\right)$$

ist die Übertragungsfunktion eines Integrators

$$G_{\text{int}}(s) = \frac{1}{T_i\,s} = \frac{K}{s} \qquad \text{mit} \qquad K = \frac{1}{T_i}.$$

Demnach ist die Übertragungfunktion einer Reihenschaltung zweier Integratoren

$$G(s) = G_{\text{int}}(s) \cdot G_{\text{int}}(s) = \frac{K^2}{s^2}.$$

Daraus kann nun das Zustandsraummodell abgelesen werden[1], um dann auf Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit zu prüfen.
Das Zustandsraummodell ist

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} K^2 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

Um jetzt auf Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit zu prüfen, müssen nun die Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsmatrizen gebildet werden:

$$\begin{aligned} S_S &= \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ S_B &= \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & \dots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^2 & 0 \\ 0 & K^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Untersucht man nun deren Determinanten, können Rückschlüsse auf die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit gezogen werden. Die Determinante der Steuerbarkeitsmatrix ist

$$\det(S_S) = 0 - 1 = -1 \neq 0.$$

Die Determinante der Beobachtbarkeitsmatrix ist

$$\det(S_B) = K^2 \cdot K^2 - 0 = K^4 \neq 0.$$

Beide sind ungleich 0. Das System ist damit vollständig steuerbar und beobachtbar.

Nun betrachten wir die **Parallelschaltung** zweier Integratoren.

[1] `https://lpsa.swarthmore.edu/Representations/SysRepTransformations/TF2SS.html`

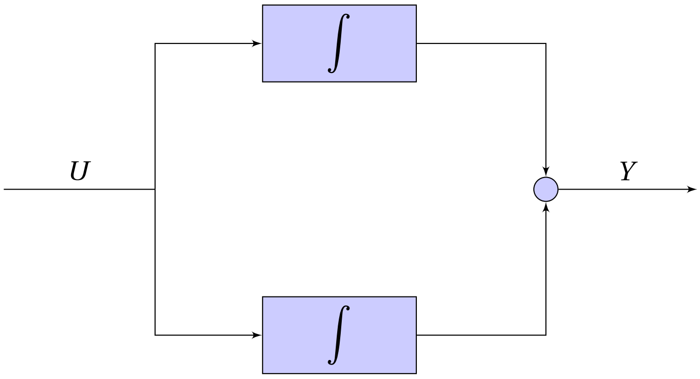

Abb.4-1.2: Blockschaltbild der Parallelschaltung zweier Integratoren.

Die Übertragungsfunktion ist

$$G(s) = G_{\text{int}}(s) + G_{\text{int}}(s) = 2\frac{K}{s}.$$

Daraus kann erneut das Zustandsraummodell abgelesen werden.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u(t)\\ y(t) &= 2Kx(t)\end{aligned}$$

Nun ist es wieder möglich, die Steuerbarkeits- und die Beobachtbarkeitsmatrix zu bilden.

$$\begin{aligned}S_S &= [B] = 1 \neq 0\\ S_B &= [C] = 2K \neq 0\end{aligned}$$

Damit ist auch die Parallelschaltung zweier Integratoren vollständig steuerbar und beobachtbar.

Aufgabe4-2. Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit eines Mehrgrößensystems (3Punkte)

Die Prüfung auf Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit bei Mehrgrößensystemen ist sehr ähnlich zu der von Eingrößensystemen. Man bildet zuerst die benötigten Matrizen:

$$S_S = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_B = \begin{bmatrix} C & CA \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ -6 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Und dann die zugehörigen Transponierten:

$$S_S{}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -6 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_B{}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Multipliziert man diese und bildet dann die Determinante, kann man Rückschlüsse auf die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des Systems ziehen.

$$
\begin{aligned}
S_S {S_S}^T &= \begin{bmatrix} 50 & 14 \\ 14 & 5 \end{bmatrix} \\
\det\left(S_S {S_S}^T\right) &= 54 \neq 0 \\
{S_B}^T S_B &= \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\det\left({S_B}^T S_B\right) &= 0
\end{aligned}
$$

Das System ist somit vollständig steuerbar, jedoch nicht vollständig beobachtbar.

Aufgabe4-3. Steuerbarkeitund Beobachtbarkeit des Pendels am Wagen (4Punkte)

a)

Das System ist vollständig steuer- und beobachtbar (für die Berechnung siehe `uebung4.m`).

b)

Die Eigenwerte der Systemmatrix sind:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0 \\
\lambda_2 &= -5.5931 \\
\lambda_3 &= -0.5787 \\
\lambda_4 &= 5.5108
\end{aligned}
$$

Da nicht alle Eigenwerte aus ausschließich negativen Realteil bestehen ($\lambda_1$und $\lambda_4 \geq 0$), ist das System nicht zustandsstabil.
Es ist auch nicht stabilisierbar. Für eine Stabilisierung muss das System durch eine Zustands- oder Ausgangsrückführung geschlossen werden. Dafür wird entweder die Systemausgabe oder der Systemzustand auf die Stellgröße über eine Regler mit proportionalem Verhalten zurückgeführt. Zusätzlich muss ein Vorfilter mit

$$
\begin{aligned}
\text{Zustandsrückführung:} \quad & V = -\left(C\,(A - BK)^{-1}\,B\right)^{-1} \\
\text{Ausgangsrückführung:} \quad & V = -\left(C\left(A - BK_yC\right)^{-1}\,B\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

Diese Eigenschaft des Vorfilters beschränkt die Möglichkeit der Stabilisierung des System in diesem Fall.

Zustandsrückführung: Durch $A - BK$ muss die Regelmatrix K die Dimension 1×4 haben. Dadurch hat die Matrix $C\,(A - BK)^{-1}\,B$ die Dimension 2×1 und ist nicht invertierbar.

Ausgangsrückführung: Durch $A - BK_yC$ muss die Regelmatrix K_y die Dimension 1×2 haben. Dadurch hat die Matrix $C\left(A - BK_yC\right)^{-1}B$ die Dimension 2×1 und ist nicht invertierbar.
Durch die Nichtbestimmbarkeit des Vorfilters, welcher für die Stabilisierung notwendig ist, ist das System nicht stabilisierbar.

c)

Der Ausfall eines der beiden Sensoren wird über die Veränderung der C-Matrix realisiert. Fällt der Sensor für die Positionsmessung des Wagens aus bedeutet dies für

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

und damit für die Ausgabe

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \theta.$$

In diesem Fall ist das System nicht mehr beobachtbar. Die Determinante der Beobachtbarkeitsmatrix ist Null.

Fällt der Sensor für die Winkelmessung des Pendels aus bedeutet dies für

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und damit für die Ausgabe

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = x.$$

In diesem Fall ist das System immernoch beobachtbar. Die Determinante der Beobachtbarkeitsmatrix ist 0.3384.

d)

Durch den Ausfall des Wagensensors ist das System vollständig steuerbar aber nicht vollständig beobachtbar. Dadurch besitzt das System zwei der vier möglichen Teilsysteme einer Kalman-Zerlegung: Einen **steuerbaren und beobachtbaren** Teil und einen **steuerbaren, aber nicht beobachtbaren** Teil.

Das steuerbare, aber nicht beobachtbare Teilsystem:

$$\left(\begin{bmatrix} \check{A}_{11} & \check{A}_{12} \\ \check{A}_{21} & \check{A}_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \check{B}_1 \\ \check{B}_2 \end{bmatrix}, \check{C}_2, \check{D} \right) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{J}{d} f_c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{J}{d} \end{bmatrix}, 0, 0 \right)$$

Das steuerbare und beobachtbare Teilsystem:

$$(\check{A}_{22}, \check{B}_2, \check{C}_2, \check{D}) = \left(-\frac{J}{d} f_c, \frac{J}{d}, 0, 0 \right)$$