UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Übung 10: Zufallsvariablen und Zufallsprozesse

Alexander Björk, Janis Kaltenthaler

July 6, 2020

Aufgabe 10-1: Statistische Unabhängigkeit (2 Punkte)

Wir berechnen zuerst die Randverteilungsdichtefunktionen $f_X(x)$ und $f_Y(y)$:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\ dy = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-(x+y)}\ dy = e^{-x}, & x \geq \text{ und } y \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\ dx = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-(x+y)}\ dx = e^{-y}, & x \geq \text{ und } y \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Zufallsvariablen X und Y sind genau dann unabhängig, falls $f_X(x) \cdot f_Y(y)$ eine Verbundverteilunsgdichtefunktion von X und Y ist:

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} e^{-x} \cdot e^{-y} = e^{-(x+y)}, & x \geq \text{ und } y \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = f_{XY}(x,y)$$

Da $f_X(x) \cdot f_Y(y) = f_{XY}(x,y)$ gilt, sind die Zufallsvariablen X und Y statistisch unabhängig voneinander.

Aufgabe 10-2: Zufallsprozesse (2,5Punkte)

a)

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X_j(t)\, dt \quad , \quad \text{für beliebige j}$$

Dies lässt sich folgendermaßen interpretieren. Für welche Scharen ist der Erwartungswert erster Ordnung (Scharmittelwert für bestimmten Zeitpunkt) gleich dem Zeitmittelwert einer beliebiger Musterfunktion selbiger Schar. Dies kann zutreffen für:

- **Schar 1** könnte hier zutreffend sein, da sowohl Erwartungswert als auch Zeitmittelwert ungefähr 0 ist.

- Auch **Schar 2** könnte passen, da hier die selben Bedingungen für Größen erster Ordnung gelten wie bei Schar 1.
- Ebenso ist **Schar 4** möglich, es handelt sich nur um eine Verschiebung um +1.

Schar 3 erfüllt diese Eigenschaft womöglich nicht, da weder über den Scharmittelwert noch über den Zeitmittelwert eine Aussage getroffen werden kann. Schar 5 hat über die Musterfunktionen einen sinusförmigen Verlauf. Der Zeitmittelwert ist jedoch 0.

b)

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i^2(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X_j^2(t)\,dt \quad , \quad \text{für beliebige j}$$

Dies lässt sich durch "Erwartungswert zweiter Ordnung (quadratischer Scharmittelwert) ist gleich quadratischem Zeitmittelwert einer beliebigen Musterfunktion selbiger Schar" ausdrücken. Dies kann zutreffen für:

- **Schar 4** könnte diese Eigenschaft erfüllen, da der Zufallsprozess scheinbar Zahlen um 1 generiert und $1^2 = 1$ ist.
- Je nachdem wie die weiteren Musterfunktionen von **Schar 3** verlaufen, kann hier die Eigenschaft gelten. Durch die Quadrierung könnte hier Schar- und Zeitmittelwert gleich sein. Eine konkrete Aussage lässt sich aber bei nur 3 Musterfunktionen nicht treffen.

Für Schar 1 und 2 lässt sich nichts aussagen, da durch die Quadrierung und der fehlenden Beschriftung der Ordinate ein nicht-vorhersehbares Verhalten entsteht. Unter der Voraussetzung, dass Schar 5 ein sinusförmigen Verlauf hat, lässt sich diese Schar auch hier ausschließen. Für den quadratischen Scharmittelwert kann man $\sin^2(x)$ annehmen und für den quadratischen Zeitmittelwert somit $\frac{x - \sin x \cos x}{2}$.

Aufgabe 10-3: Stationäre und ergodische Zufallsprozesse (2,5Punkte)

a)

- **Schar 1** ist schwach stationär. Erwartungswerte erster und zweiter Ordnung sind konstant und daher unabhängig von der Zeit.
- Selbiges gilt für **Schar 2, 3 und 4**.

Schar 5 hat offensichtlich keinen zeitunabhängigen Erwartungswert erster Ordnung und ist somit nicht schwach stationär.

b)

- **Schar 1 und 2** sind ergodisch. Sie sind schwach stationär und sowohl die Zeitmittelwerte als auch die Scharmittelwerte stimmen überein (ungefähr 0).
- **Schar 4** ist ebenfalls ergodisch. Es gilt die gleiche Begründung wie für Schar 1 und 2, nur dass hier die Mittelwerte ungefähr 1 sind.

Schar 3 ist nicht ergodisch, weil die Zeitmittelwerte über die Musterfunktionen nicht gleich sind. Schar 5 ist auch nicht ergodisch, weil sie nicht (schwach) stationär ist.

Aufgabe 10-4: Erwartungswerte von Zufallsprozessen (1,5 Punkte)

a)

Der Erwartungswert $E[Z(t)] = \mu_z$ des Zufallsprozesses $Z(t) = a \cdot X(t) + b \cdot Y(t)$ erhält man wie folgt:

$$E[Z(t)] = a \cdot E[X(t)] + b \cdot E[Y(t)] = 2 \cdot E[X(t)] + 3 \cdot E[Y(t)] = 3$$

Die Varianzen der Zufallsprozesse erhält man wie folgt:

$$\mathrm{Var}[X(t)] = E[X^2(t)] - (E[X(t)])^2 = 6$$
$$\mathrm{Var}[Y(t)] = E[Y^2(t)] - (E[Y(t)])^2 = 2$$

Die Varianz des Zufallsprozesses $Z(t)$ erhält man wie folgt, wobei durch die Unkorreliertheit $\mathrm{Cov}[X(t), Y(t)] = 0$ gilt.

$$\mathrm{Var}[Z(t)] = a^2 \cdot \mathrm{Var}[X(t)] + 2ab \cdot \mathrm{Cov}[X(t), Y(t)] + b^2 \cdot \mathrm{Var}[Y(t)] = 42$$

Das gewöhnliche Moment zweiter Ordnung erhalten wir mithilfe der Varianz und des Erwarungswertes wie folgt:

$$E[Z^2(t)] = \mathrm{Var}[Z(t)] + (E[Z(t)])^2 = 51$$

b)

Da die Erwatungswerte erster und zweiter Ordnung der Zufallsprozesse $X(t)$ und $Y(t)$ invariant gegenüber zeitlicher Verschiebung sind, sind diese schwach stationär.