

---

## Übung 8

### Beobachter

---

Alexander Björk, Janis Kaltenthaler

June 21, 2020

#### Aufgabe 8-1. Beobachterentwurf (3 Punkte)

a)

Zu prüfen ist ob die Regelstrecke vollständig steuerbar und vollständig beobachtbar ist:

*Steuerbarkeit*

$$S_S = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\det S_S = 0.25 \neq 0$$

Die Regelstrecke ist vollständig Steuerbar.

*Beobachtbarkeit*

$$S_B = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$
$$\det S_B = -1 \neq 0$$

Die Regelstrecke ist vollständig beobachtbar.

b)

Aufgrund der Struktur des gegebenen Zustandsraummodells wissen wir dass dieses in der Beobachtungsnormform vorliegt.

Die geforderten Eigenwerte des Beobachtermodells sind mit  $\lambda_{B1} = -4$  und  $\lambda_{B2} = -3$  gegeben. Daraus ergibt sich folgendes charakteristisches Polynom:

$$p(\lambda_B) = \lambda^2 + \underbrace{7}_{a_{B1}} \cdot \lambda + \underbrace{12}_{a_{B0}}$$

Die Koeffizienten  $a_0 = 1$  und  $a_1 = 2$  des charakteristischen Polynoms der Regelstrecke erhalten wird durch Ablesen aus dem gegebenen Zustandsraummodells.

Wie folgt kann nun die Beobachterrückführung berechnet werden:

$$l^T = [a_{B0} \quad a_{B1}] - [a_0 \quad a_1] = [11 \quad 5]$$

Das Zustandsraummodell der Regelstrecke und des Beobachters erhält man wie folgt:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ lc^T & A - lc^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & E \\ B & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(t) \\ d(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = [C \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & -12 \\ 0 & 5 & 1 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(t) \\ d(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

c)

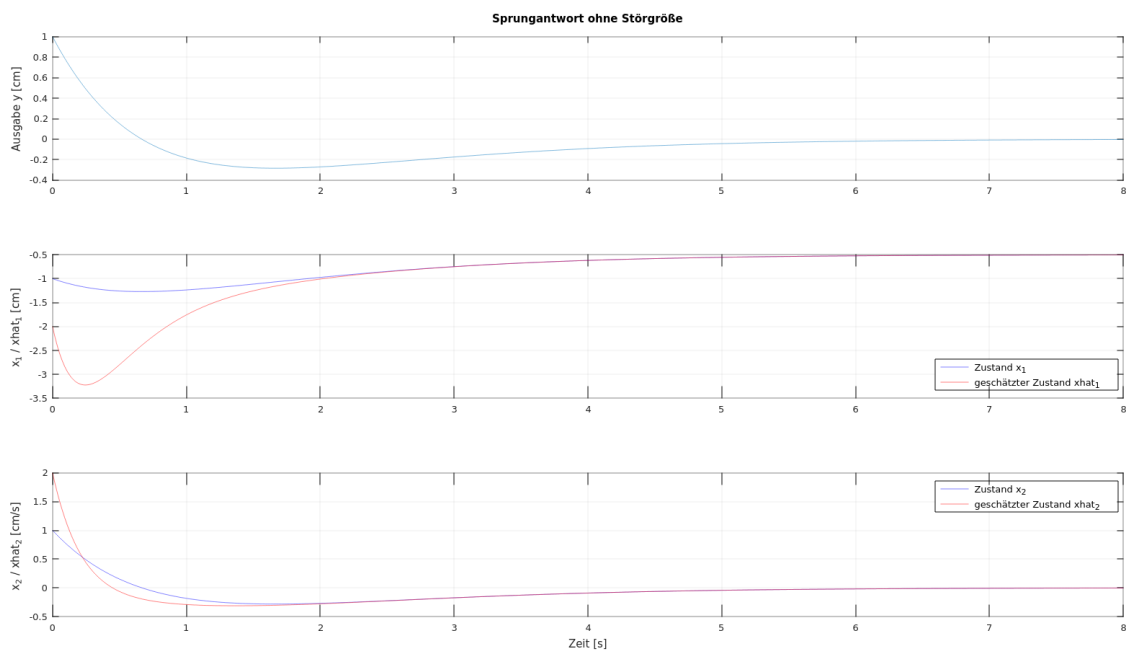


Abb. 8-1.1: Sprungantwort ohne Störgröße.

Etwa zum Zeitpunkt  $t = 2s$  stimmt der geschätzte Zustand mit dem tatsächlichen Zustand überein.

d)

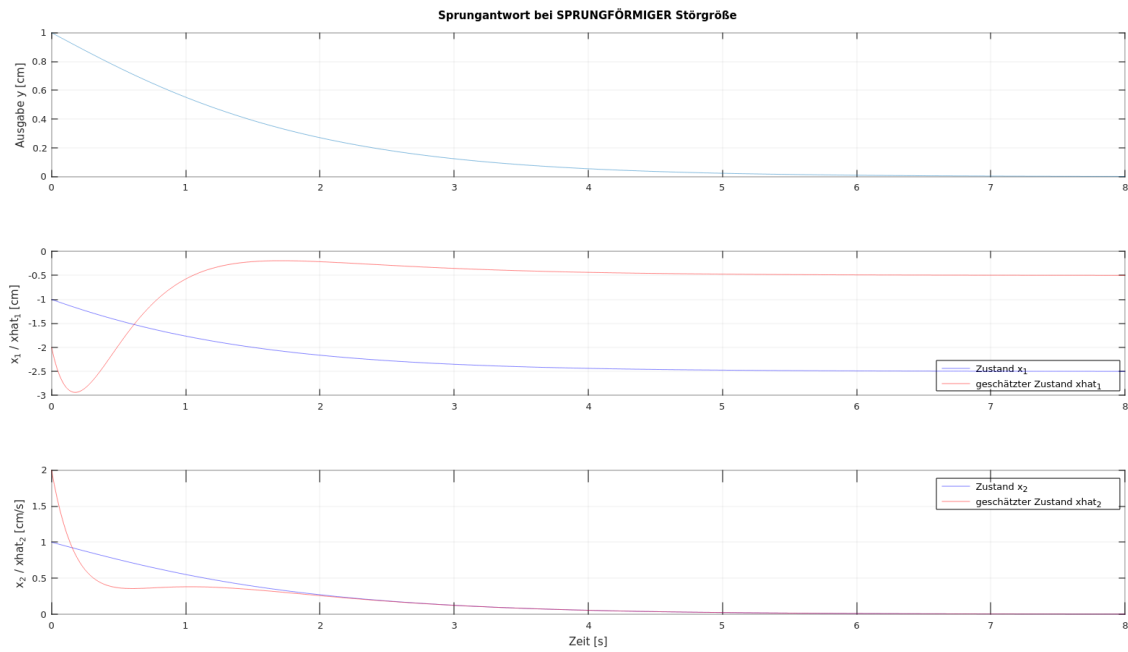


Abb. 8-1.2: Sprungantwort mit sprungförmiger Störgröße.

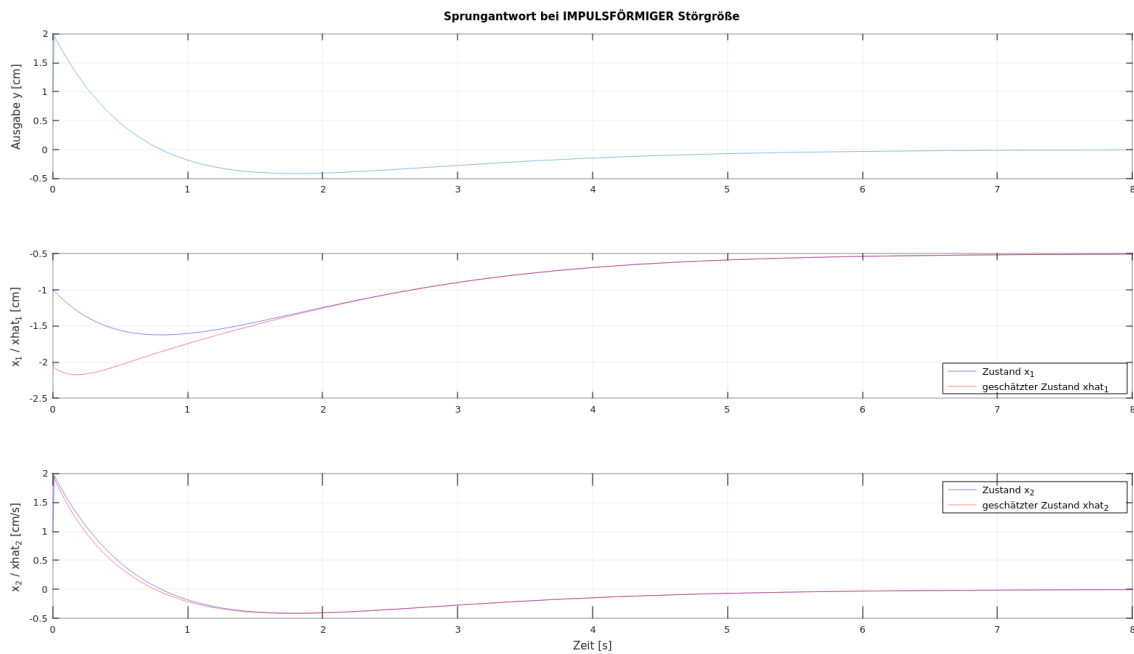


Abb. 8-1.3: Sprungantwort mit impulsförmiger Störgröße.

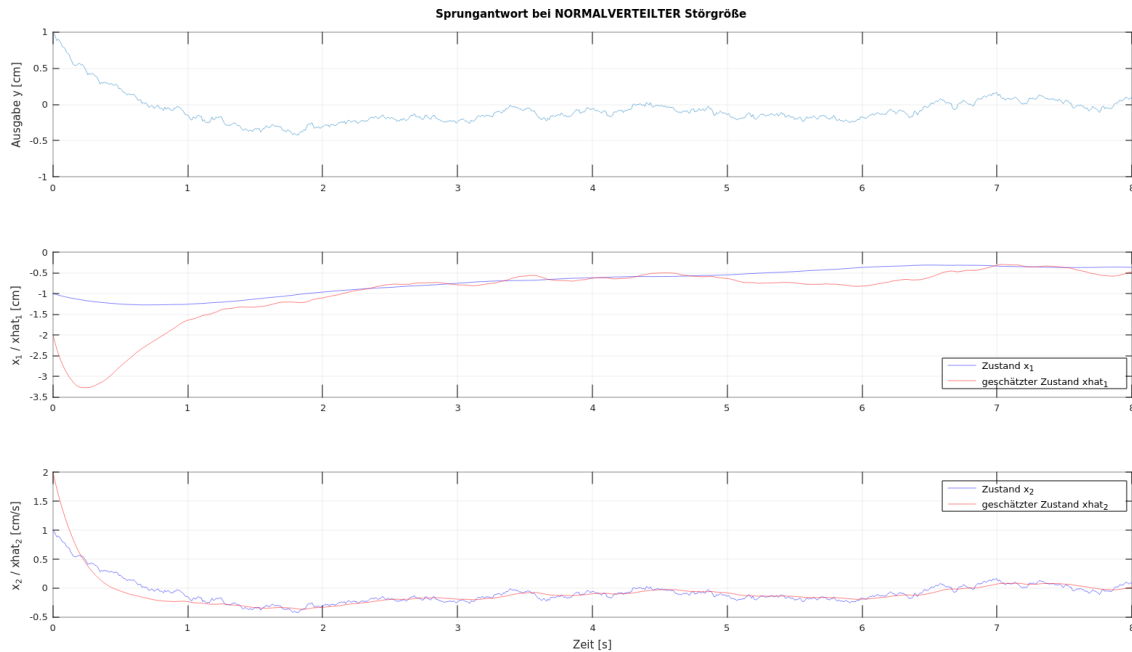


Abb. 8-1.4: Sprungantwort mit normalverteilter Störgröße.

Wirkt eine sprungförmige Störgröße auf die Regelstrecke, so bleibt eine stetige Abweichung zwischen dem geschätzten Zustand der ersten Zustandsvariable und dem tatsächlichen Zustand.

Wirkt eine normalverteilte oder impulsförmige Störgröße auf die Regelstrecke, so nähert sich der geschätzte Zustand dem tatsächlichen Zustand an.

## Aufgabe 8-2. Beobachterentwurf mit Zustandsrückführung (3 Punkte)

a)

Die vollständige Steuerbarkeit und vollständige Beobachtbarkeit wurde mit Matlab geprüft.

b)

Die Eigenwerte des Beobachters wurden mit  $\lambda_{B1} = -9$  und  $\lambda_{B2} = -12$  festgelegt.

Mithilfe von Matlab wurde das resultierende Zustandsraummodell des geschlossenen Regelkreises mit Beobachter berechnet:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -11 & -8 \\ 22 & 0 & -22 & 1 \\ 129 & 0 & -141 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

c)

Für die Simulation wurde eine sprungförmige Stellgröße genutzt. Die Anfangszustände wurden wie folgt gesetzt:

$$x_0(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_0(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

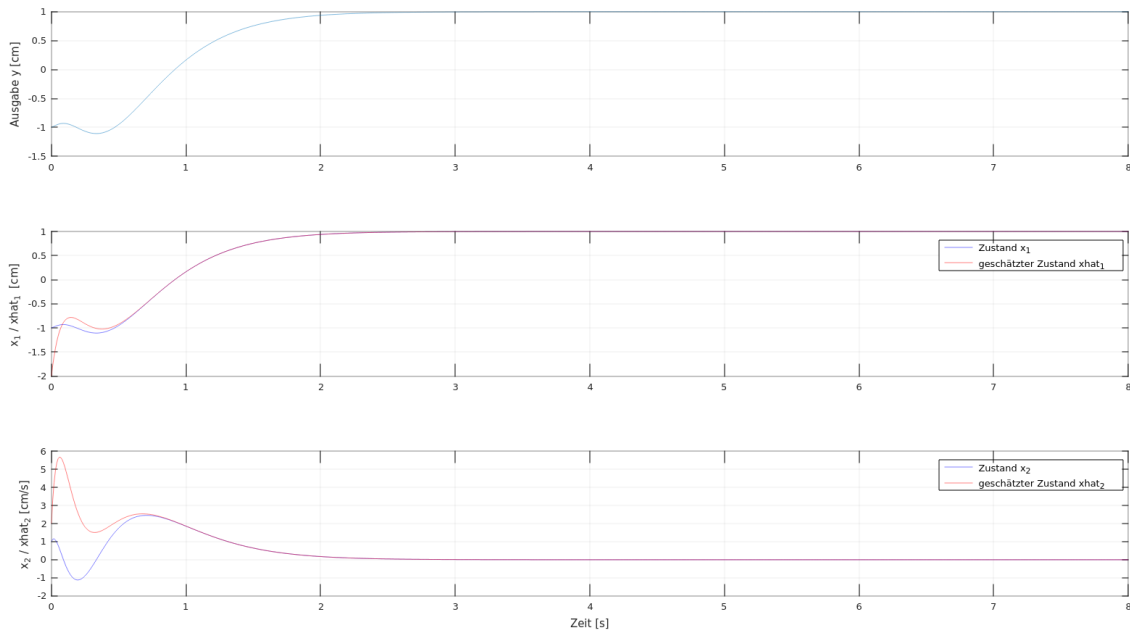


Abb. 8-2.1: Sprungantwort.

### Aufgabe 8-3. Beobachterentwurf für das Pendel am Wagen (5 Punkte)

a)

[InvertedPendulumSimLuenbergerInit.m]

b)

[InvertedPendulumSimLuenberger.mdl]

In Abbildung 8-3.1<sup>1</sup> fällt zu aller erst auf, dass das System mit Rückführung der gemessenen Zustandsvariablen stabil ist. Das Pendel konnte in der instabilen Ruhelage gehalten werden. Der geschätzte Zustand weicht stark vom gemessenen Zustand ab. Erst nach Drei bis Vier Sekunden stimmen diese überein und die Abweichung geht gegen Null. Am Ende der Swing-Up-Phase (Betrag des Pendelwinkels ist kleiner 1 rad) fällt auf, dass der Beobachterwert (exakt) mit der Wagenposition und der Wagensgeschwindigkeit übereinstimmt. Die Pendelposition weicht nur noch ungefähr um 0.5 rad ab.

In Abbildung 8-3.2 konnte das System mit der Rückführung der beobachteten Zustandsvariablen nur durch "Zufall" stabilisiert werden. Das ist auch nicht verwunderlich, nachdem in

<sup>1</sup>Die Auflösung der Abbildungen ist hoch genug, um durch den PDF-Viewer ihrer Wahl eine angemessene Vergrößerung zu erreichen.

Abbildung 8-3.1 bereits eine große Abweichung des beobachteten Zustands vom gemessenen Zustand festgestellt werden konnte. Die Beruhigungszeit beträgt mehr als 25s. Hier kann man nicht unbedingt von einem stabilen System sprechen. Ab ungefähr 14 Sekunden verfällt das System in ein sich immer wiederholendes Muster. Das Pendel vollführt komplette Schwingungen um seinen Aufhängepunkt. Diese Schwingungen werden mit der Zeit immer langsamer. Bei Sekunde 21 ist bei der Pendelposition in Abbildung 8-3.2 dieses Langsamerwerden deutlich zu erkennen. Als Folge ist es dann möglich durch die langsamer gewordenen Schwingung das Pendel in der instabilen Ruhelage zu halten.

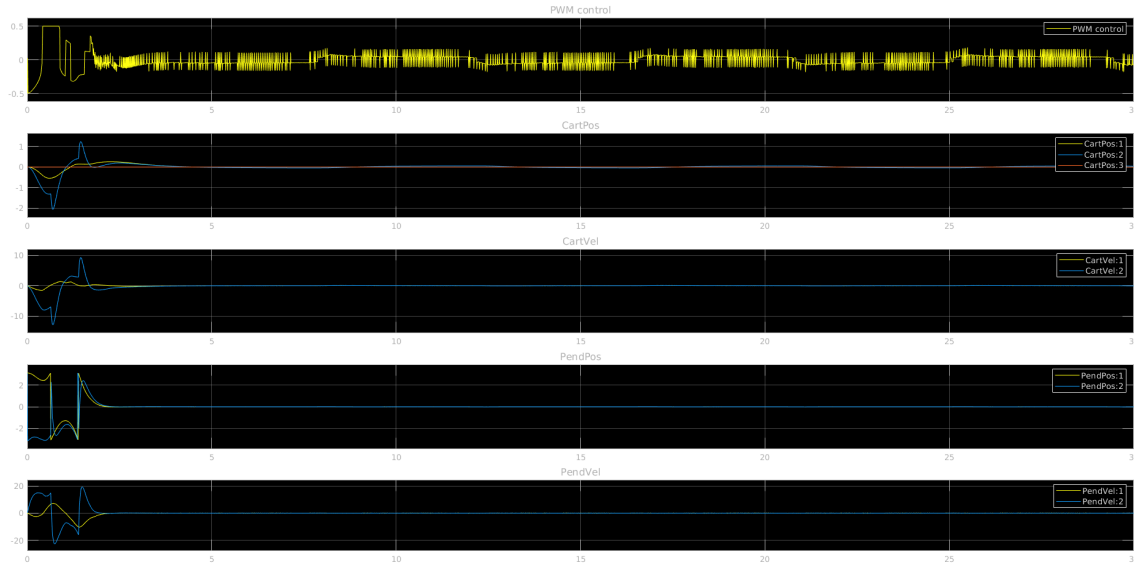


Abb. 8-3.1: Scope der Simulation mit Rückführung der **gemessenen** Zustandsgrößen. Eigenwerte des Beobachters wurden doppelt so groß gewählt. Die gemessenen Werte sind gelb und die beobachteten Werte blau dargestellt.

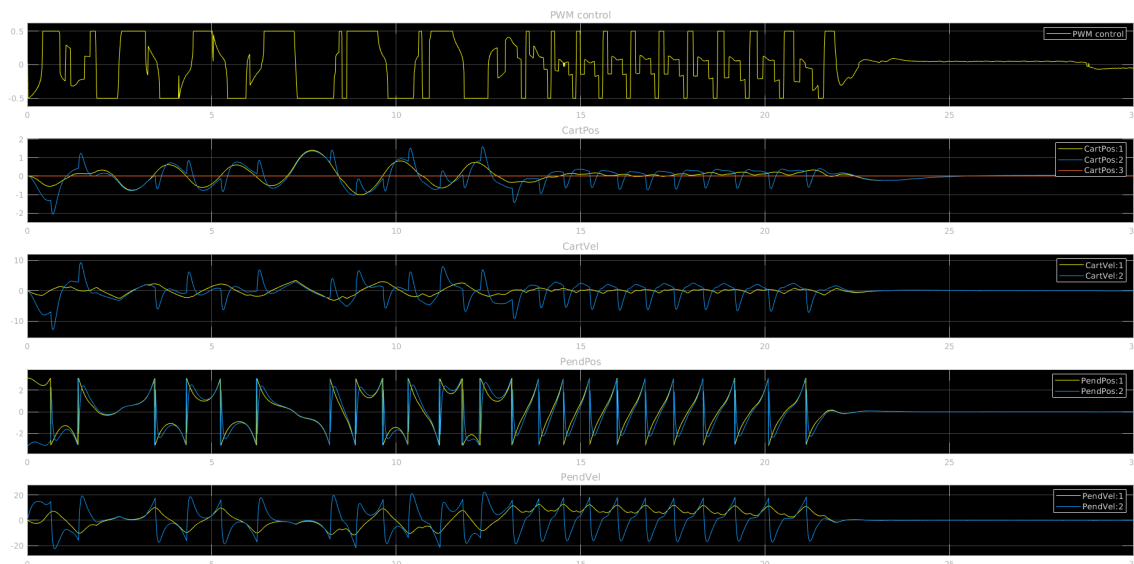


Abb. 8-3.2: Scope der Simulation mit Rückführung der **beobachteten** Zustandsgrößen. Eigenwerte des Beobachters wurden doppelt so groß gewählt. Die gemessenen Werte sind gelb und die beobachteten Werte blau dargestellt.

c)

In Abbildung 8-3.3 ist zu erkennen, dass das System nun stabil ist. Das Pendel wird in der instabilen Ruhelage gehalten obwohl die Schätzung teils sehr ungenau ist. Diese Ungenauigkeiten treten aber immer nur sehr kurz auf, sodass das System wenig bis gar nicht darauf reagiert bzw. reagieren kann. Solche extremen Abweichungen sind beispielsweise ungefähr bei Sekunde 1 zu sehen. Die Schätzung der Wagenposition hat eine Spike (mehr als doppelt so groß wie gemessen) in negativer Richtung. Dasselbe passiert bei Wagengeschwindigkeit (nicht verwunderlich, da dies die Ableitung der Position ist). Für die Pendelposition ist dies auf der Abbildung nur schwer zu erkennen, aber ebenfalls bei ungefähr Sekunde 1 hat die Pendelgeschwindigkeit einen Spike in positiver Richtung, d.h. die Pendelposition tut dies auch. Bei hinreichender Vergrößerung ist dies auch bei der Pendelposition zu erkennen.

Dann ungefähr ab Sekunde 2 stimmen gemessener Zustand und geschätzter Zustand überein und das Pendel steht stabil in der instabilen Ruhelage.

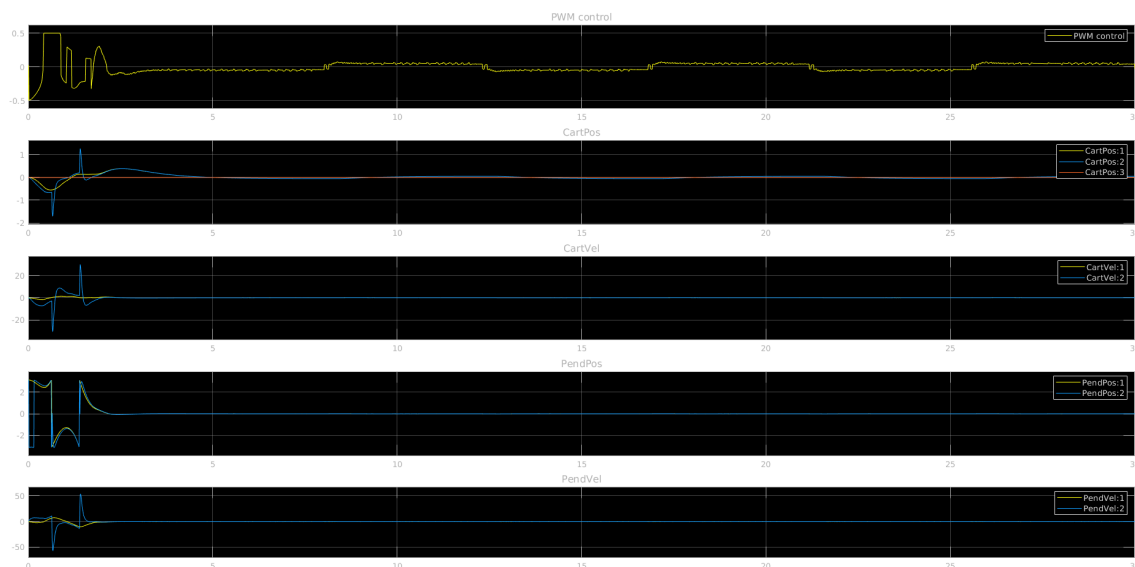


Abb. 8-3.3: Scope der Simulation mit Rückführung der **beobachteten** Zustandsgrößen. Eigenwerte des Beobachters wurden sechsmal so groß gewählt. Die gemessenen Werte sind gelb und die beobachteten Werte blau dargestellt.

d)

Die Simulation mit Rückführung der gemessenen Zustandsgrößen und hinzugefügten Störungen konnte mit Tiefpassfilter stabilisiert werden (Abbildung 8-3.4).

Die gemessenen und beobachteten Zustandsgrößen stimmen für die Wagenposition ungefähr ab Sekunde 2 überein. Davor gab es wie schon wie den Simulation zuvor (Abbildung 8-3.1 bis 8-3.3) kurze aber dafür sehr starke Abweichungen. Die beobachtete Pendelposition stimmt zu Anfang teilweise mit der gemessenen überein. Die Beobachtungswerte unterliegen hier großen Schwankungen.

Ohne Tiefpassfilter (Abbildung 8-3.5) gelang keine Stabilisierung.

In Abbildung 8.3-6 und 8.3-7 sind die Scopes der Simulation mit Rückführung der beobachteten Zustandsgrößen. Es gelang eine Stabilisierung in der instabilen Ruhephase. Es ist eindeutig zu erkennen, dass die abgeleiteten beobachteten Zustandsgrößen (Wagen- und Pendelgeschwindigkeit)

nicht so stark von den Störungen beeinflusst werden wie die gemessenen. Bei den (direkt) beobachteten Zustandsgrößen (Wagen- und Pendelposition) ist dies schon deutlicher der Fall. Der Beobachter berücksichtigt die Störungen und kann diese rückführen, so dass das System stabil gehalten werden kann.

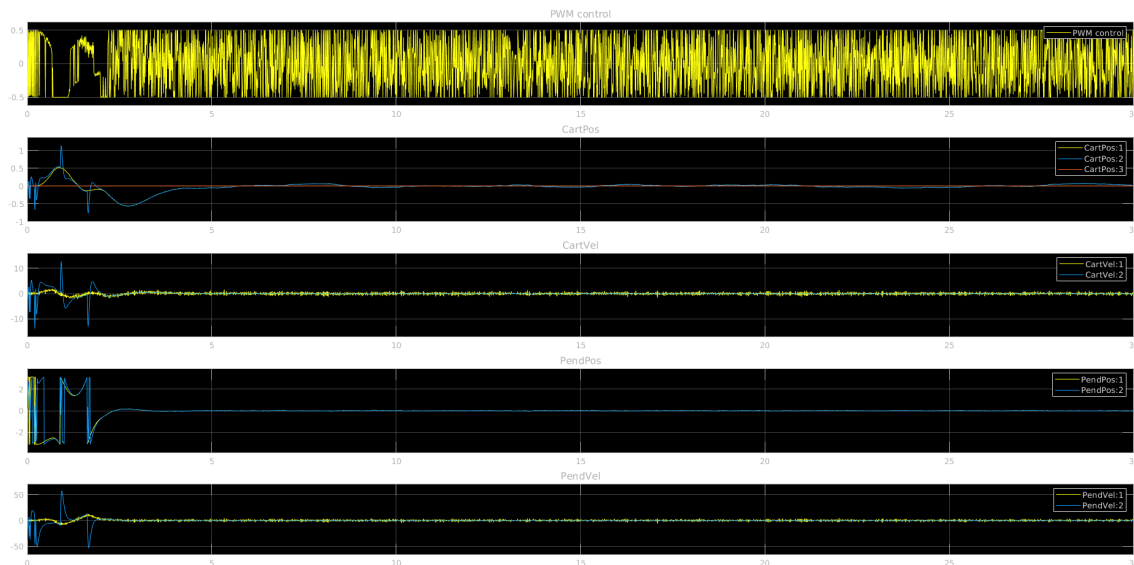


Abb. 8-3.4: Scope der Simulation mit Rückführung der **gemessenen** Zustandsgrößen. Eigenwerte des Beobachters wurden auf  $[-45, -24, -21, -18]$  gewählt. Die gemessenen Werte sind gelb und die beobachteten Werte blau dargestellt. Der Simulation wurden Störungen hinzugefügt und es wurde ein Tiefpassfilter verwendet.

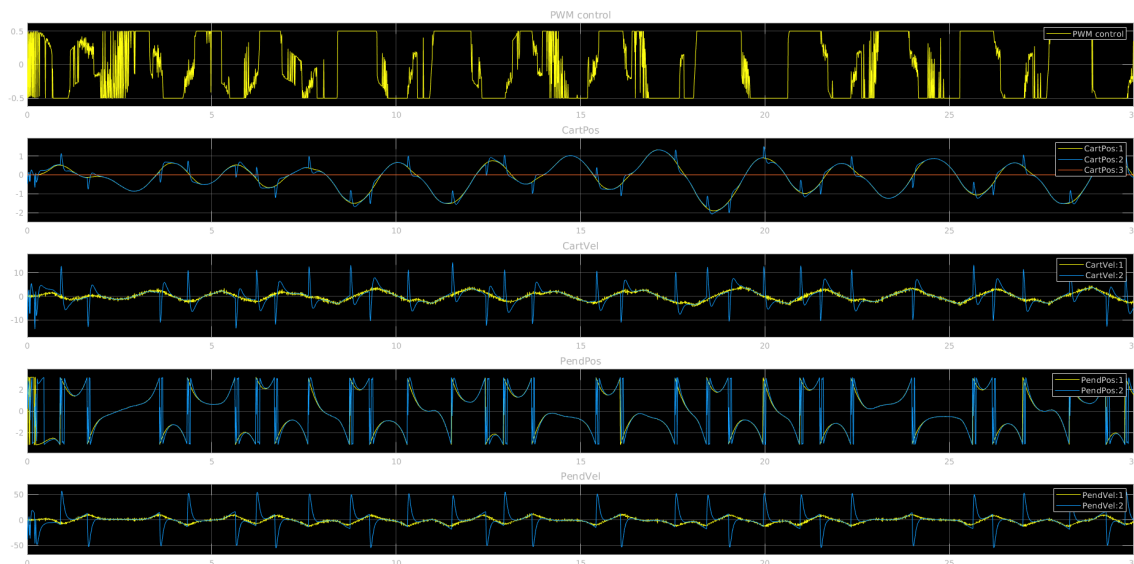


Abb. 8-3.5: Scope der Simulation mit Rückführung der **gemessenen** Zustandsgrößen. Eigenwerte des Beobachters wurden auf  $[-45, -24, -21, -18]$  gewählt. Die gemessenen Werte sind gelb und die beobachteten Werte blau dargestellt. Der Simulation wurden Störungen hinzugefügt und es wurde **kein** Tiefpassfilter verwendet.



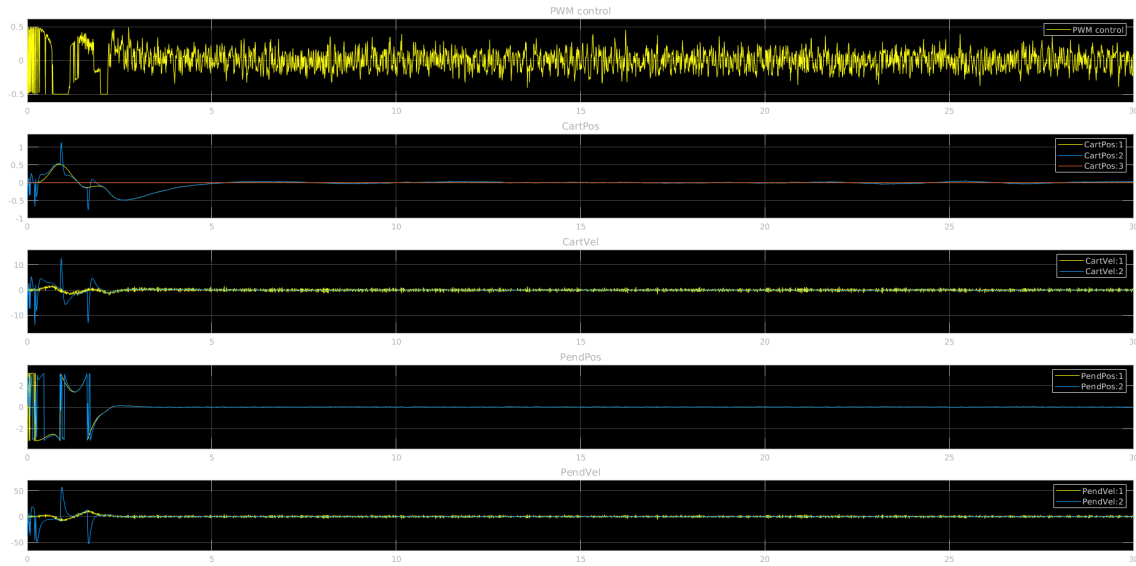


Abb. 8-3.6: Scope der Simulation mit Rückführung der **beobachteten** Zustandsgrößen. Eigenwerte des Beobachters wurden auf  $[-45, -24, -21, -18]$  gewählt. Die gemessenen Werte sind gelb und die beobachteten Werte blau dargestellt. Der Simulation wurden Störungen hinzugefügt und es wurde **kein** Tiefpassfilter verwendet.

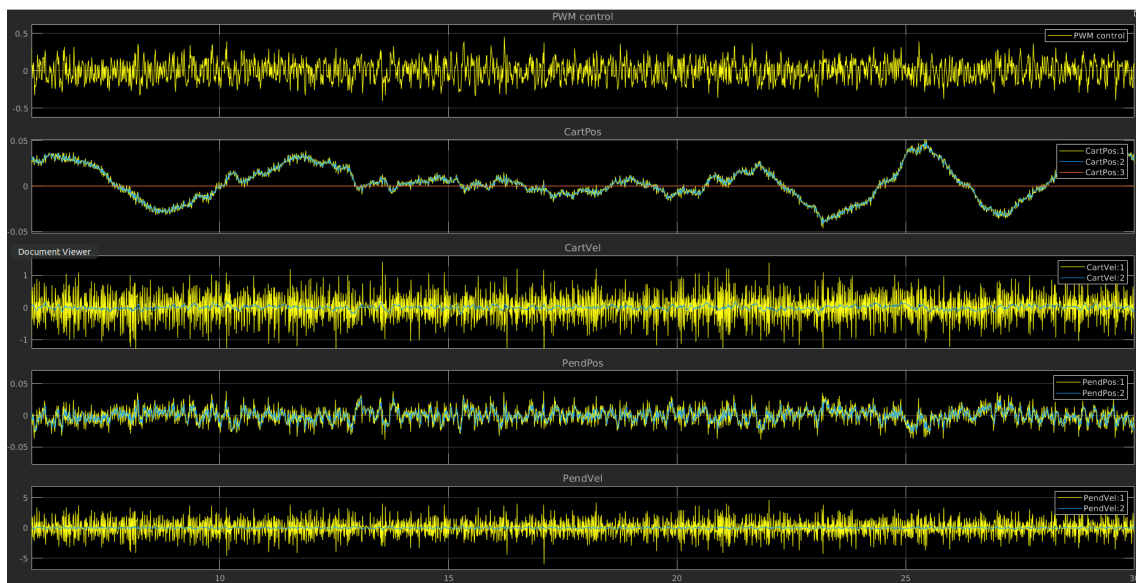


Abb. 8-3.7: Starke Vergrößerung der instabilen Ruhephase von Abbildung 8-3.6.