Universität Würzburg

Übung 3
Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit & Stabilität

Alexander Björk, Janis Kaltenthaler

May 17, 2020

Aufgabe 3-1. Steuerbarkeit und Stabilität (5 Punkte)

a)

Um das System auf Steuerbarkeit zu untersuchen wird nach dem Steuerbarkeitskriterium von Kalman geprüft. Dies besagt, dass ein System steuerbar ist, wenn die Steuerbarkeitsmatrix S_S den Rang n hat.

$$\text{Rang } S_S = n$$

Bei Eingrößensystem genügt eine Prüfung von

$$\det\ S_S \neq 0.$$

Die Steuerbarkeitsmatrix ist hier:

$$S_S = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -64 \\ 24 & -192 \end{bmatrix}$$

Die Determinante ist

$$\det\ S_S = 8 \cdot (-192) - (-64) \cdot 24 = 0.$$

Das System ist somit nicht vollständig steuerbar.

b)

Für die einfache Berechnung der Übertragungsfunktion in Pol-Nullstellenform, kann man zuvor die Pol- und Nullstellen aus der Polynomform der Übertragungsfunktion berechnen.
Die Übertragungsfunktion ist (für die Berechnung aus dem Zustandsraummodell) definiert als

$$G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b + d.$$

Daraus ergibt sich für unseren Fall:

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s-4 & 4 \\ 0 & s+8 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \end{bmatrix} = \frac{8s-32}{s^2+4s-32}$$

Dies lässt sich zu

$$G(s) = 8\frac{s-4}{(s-4)(s+8)} \tag{1}$$

umformen. Setzt man voraus, dass $s \neq 4$ gilt, lässt sich dies sogar noch weiter kürzen zu

$$G(s) = 8\frac{1}{s+8}. \tag{2}$$

c)

Berechnet man nun die Pol- und Nullstellen nach Gl. 2, erkennt man, dass das System nach dieser Übertragungsfunktion keine Nullstellen und nur eine Polstelle bei $s_p = -8$ hat. Die Ordnung ist somit 1.

d)

Die Berechnung der Pol- und Nullstellen mit Hilfe von z.B. MATLAB zeigt, dass das System anders als in Gl. 2 gezeigt, eine höhere Ordnung besitzt. Es gibt sehr wohl eine Pol- als auch eine Nullstelle bei $s = 4$.
Das Problem ist hier das zu weite Kürzen von Gl. 1 zu Gl. 2. Bei diesem Vorgang verliert man die Pol- und Nullstelle bei $s = 4$, sowie eine Ordnung.

e)

Zustandsstabilität

Ein System ist stabil wenn für die Eigenwerte λ der Systemmatrix A gilt:

$$\mathrm{Re}\{\lambda_i\} \leq 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

Gilt zusätzlich:

$$\mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

ist das System asymptotisch stabil. Die Eigenwerte von A sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$
$$(\lambda - 4) \cdot (\lambda + 8) = 0$$

Damit erhält man die Eigenwerte $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -8$. Aus $\mathrm{Re}\{\lambda_1\} = 4$ folgt, dass das System nicht stabil ist.

Eingangs-Ausgangs-Stabilität

Ein System ist genau dann E/A-stabil, wenn sämtliche Pole seiner Übertragungsfunktion die Bedingung

$$\mathrm{Re}\{s_i\} < 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllen. Die Pole der Übertragungsfunktion $G(s)$ erhält man durch das Nullsetzen des Nenners und Lösen nach s.

$$0 = s + 8$$

Damit erhält man den Pol $s_1 = -8$. Aus $\mathrm{Re}\{s_1\} = -8$ folgt, dass das System E/A-stabil ist.

Das System ist nicht zustandsstabil, d.h. wird das System um x_0 aus seiner Gleichgewichtslage ausgelenkt, kehrt es nicht mehr zu seiner Gleichgewichtslage zurück.
Da das System jedoch E/A-stabil ist, besitzt es eine betragsbeschränkte Ausgangsgröße wenn es von außen durch eine Eingangsgröße erregt wird.

Aufgabe 3-2. Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit eines elektrischen Systems (5 Punkte)

a)

Um das System auf Steuerbarkeit zu untersuchen wird nach dem Steuerbarkeitskriterium von Kalman geprüft. Dies besagt, dass ein System steuerbar ist, wenn die Steuerbarkeitsmatrix S_S den Rang n hat.

$$\text{Rang } S_S = n$$

Bei Eingrößensystem genügt eine Prüfung von

$$\det S_S \neq 0.$$

Die Steuerbarkeitsmatrix ist hier:

$$S_S = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{C^2 {R_1}^2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L^2} \end{bmatrix}$$

Die Determinante ist

$$\det S_S = -\frac{C R_1 R_2 - L}{C^2 L^2 {R_1}^2}$$

Um nun ein nicht vollständig steuerbares System zu erhalten muss gelten:

$$\det S_S = 0$$

Das wird erreicht durch:

$$0 = C R_1 R_2 - L \Leftrightarrow L = C R_1 R_2$$

Wobei zusätzlich gelten muss:

$$C^2 L^2 {R_1}^2 \neq 0$$

b)

Um das System auf Beobachtbarkeit zu untersuchen wird nach dem Beobachtbarkeitskriterium von Kalman geprüft. Dies besagt, dass ein System beobachtbar ist, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix S_B den Rang n hat.

$$\text{Rang } S_B = n$$

Bei Eingrößensystem genügt eine Prüfung von

$$\det S_B \neq 0.$$

Die Beobachtbarkeitsmatrix ist hier:

$$S_B = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & 1 \\ \frac{1}{C{R_1}^2} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix}$$

Die Determinante ist

$$\det S_B = \frac{CR_1R_2 - L}{CL{R_1}^2}$$

Um nun ein nicht vollständig beobachtbares System zu erhalten muss gelten:

$$\det S_B = 0$$

Das wird erreicht durch:

$$0 = CR_1R_2 - L \Leftrightarrow L = CR_1R_2$$

Wobei zusätzlich gelten muss:

$$CL{R_1}^2 \neq 0$$

c)

Beispielhaft wurden folgende Werte gewählt:

$$R_1 = 1\Omega,\ R_2 = 2\Omega,\ C = 0.5F,\ L = 1H$$

d)

Nullstellen:

$$s_{n,1} = -2.0,\ s_{n,2} = -1.0$$

Pole:

$$s_{p,1/2} = -2.0$$

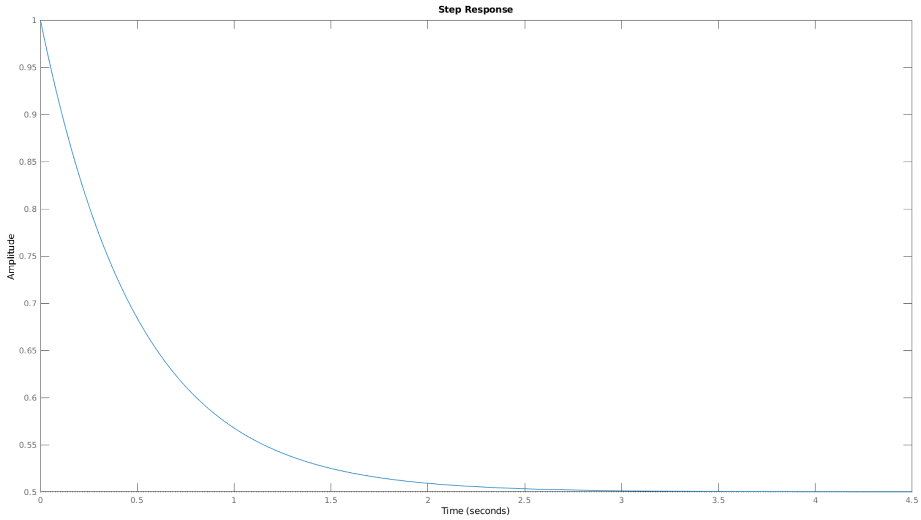

Abb. 3-2.1: Sprungantwort für $R_1 \neq R_2$

e)

Beispielhaft wurden folgende Werte gewählt:

$$R_1 = 2\Omega,\ R_2 = 2\Omega,\ C = 0.5F,\ L = 2H$$

Nullstellen:

$$s_{n,1/2} = -1.0$$

Pole:

$$s_{p,1/2} = -1.0$$

Da nun $R_1 = R_2 = R$ gilt, folgt für die Ausgangsgröße:

$$y = \frac{u}{R}$$

Das System hängt somit linear von der Eingangsgröße (Sprungfunktion) ab und beginnt nicht zu schwingen.

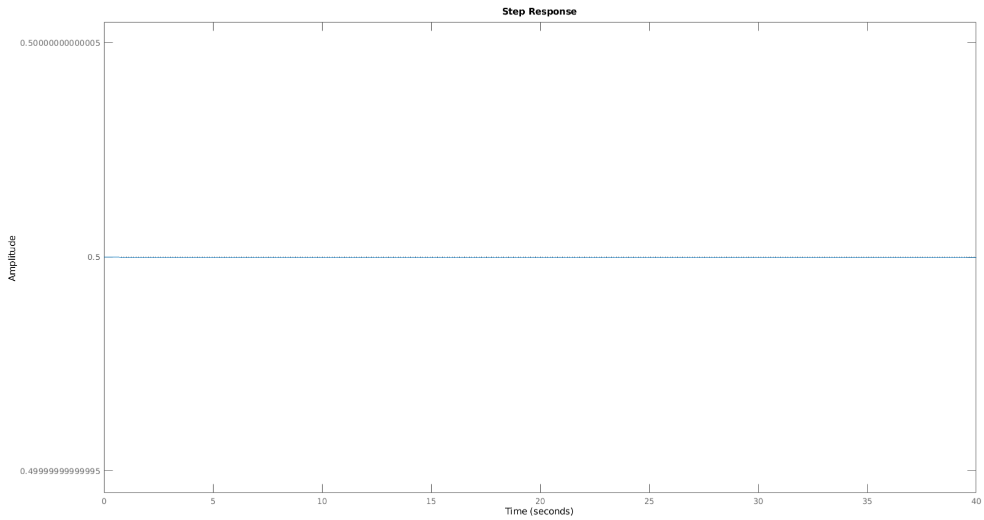

Abb. 3-2.2: Sprungantwort für $R_1 = R_2$