UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Übung 9: Zeitdiskrete Systeme

Alexander Björk, Janis Kaltenthaler

June 27, 2020

Aufgabe 9-1: Berechnung eines diskreten Zustandsraummodells aus dem Kontinuierlichen (3 Punkte)

a)

Um das zeitkontinuierliche System in die diskrete Form zu überführen berechnen wir zunächst die Systemmatrix A_d und den Eingabevektor b_d:

$$A_d = e^{A \cdot T} = e^{\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot T} = \begin{bmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.135335 & 0 \\ 0 & 0.367879 \end{bmatrix}$$

$$b_d = \int_0^T e^{A \cdot \alpha} d\alpha \cdot b = \int_0^3 \begin{bmatrix} e^{-\frac{2\alpha}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\alpha}{3}} \end{bmatrix} d\alpha \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3-3\cdot e^{-2}}{2} & 0 \\ 0 & 3-3\cdot e^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$b_d = \begin{bmatrix} 3 \cdot (e^2 - 1) \cdot e^{-2} \\ 9 \cdot (e-1) \cdot e^{-1} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2.59399 \\ 5.68909 \end{bmatrix}$$

Das zeitdiskrete Zustandsraummodell ist nun wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_d x(k) + b_d u(k), \quad x(0) = x_0 \\ y(k) &= c^T x(k) + d u(k) \end{aligned}$$

b)

Die Eigenwerte von A_d sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ 0 &= (e^{-2} - \lambda) \cdot (e^{-1} - \lambda) \\ \lambda_1 &= e^{-2},\ \lambda_2 = e^{-1} \end{aligned}$$

Wegen $\lambda_1 < 1$ und $\lambda_2 < 1$ ist das zeitdiskrete System asymptotisch stabil.

c)

Für die freie Bewegung des zeitdiskreten Systems gilt $u(k) = 0$. die Bewegungsgleichung der freien Bewegung der Bewegungsgleichung des Ausgangs ist demnach:

$$y(k) = c^T A_d^k x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} = 1.5 \cdot e^{-k} + 1.5 \cdot e^{-2 \cdot k}$$

$$y(1) \approx 0.754822, y(2) \approx 0.230476, y(5) \approx 0.010175, y(10) \approx 0.000068, y(1000) \approx 0.0$$

Wie schon in Aufgabe **b)** gezeigt ist das System asympthotisch stabil. Für $k \to \infty$ verschwindet die Eigenbewegung.

Aufgabe 9-2: Berechnung eines diskreten Zustandsraummodells aus dem Kontinuierlichen (1,5 Punkte)

a)

Für die Überführung in das diskrete Zustandsraummodell müssen zunächst die Matrizen

$$A_d = e^{AT}$$

und

$$b_d = \int_0^T e^{A\alpha} d\alpha b$$

berechnet werden.

Für A_d muss die Matrixexponentialfunktion $\Phi(AT)$ gelöst werden. Da AT eine allgemeine 2x2 Matrix ist, muss erst die zugehörige Jordan-Normalform J mit Transformationsmatrix V von AT ermittelt werden. Diese sind

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

und

$$V = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Matrixexponentialfunktion $\Phi(AT)$ kann nun berechnet werden durch

$$e^{AT} = V \cdot \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}\right) \cdot V^{-1}.$$

Die Eigenwerte der Diagonalmatrix befinden sich in der Jordanmatrix J.

Damit ist

$$A_d = \begin{bmatrix} 1.6487 & 1.2808 \\ 0 & 0.3679 \end{bmatrix}.$$

Eine Überprüfung durch Matlab mit

```
expm(A*T)
```

liefert die gleichen Ergebnisse.

Nach [Gajic, 2003] gilt für die Matrix b_d nach Matrixintegration

$$b_d = e^{AT}\left(-e^{AT}A^{-1} + A^{-1}\right)B = \left(A_d - I\right)A^{-1}B$$

und ergibt somit

$$b_d = \begin{bmatrix} 1.3140 \\ 0.6321 \end{bmatrix}.$$

Eine Überprüfung durch Matlab mit

```
integral(@(alpha)expm(A*alpha), 0, Ts, 'ArrayValued', true) * B
```

liefert die gleichen Ergebnisse.

Auch die Matlabfunktion

```
c2d(sys,T)
```

liefert die gleichen Ergebnisse.

Das zeitdiskrete Zustandsraummodell ist somit

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 1.6487 & 1.2808 \\ 0 & 0.3679 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1.3140 \\ 0.6321 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(k). \end{aligned}$$

b)

Die Eigenwerte des diskreten Modells sind

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= e^{\frac{1}{2}} \approx 1.6487 \\ \lambda_2 &= e^{-1} \approx 0.3679. \end{aligned}$$

Da beide Eigenwerte positiv und reell sind, ist das System instabil und erzeugt exponentielles Wachstum.

Aufgabe 9-3: Zeitdiskrete Systeme (1,5 Punkte)

Die Ausgabe von `uebung93.m`:

```
Das kontinuierliche System ist vollständig steuerbar!
Das zeitdiskrete System mit Abtastrate 2s ist nicht vollständig steuerbar!
Das zeitdiskrete System mit Abtastrate 3s ist vollständig steuerbar!
```

Das zeitdiskrete System mit einer Abtastrate von 2s hat eine Diagonalmatrix als Systemmatrix und bildet daher eine Steuerbarkeitsmatrix mit Rang 1 und ist deswegen nicht vollständig steuerbar. Das zeitdiskrete System mit einer Abtastrate von 3s hat keine Diagonalmatrix als Systemmatrix. Die Steuerbarkeitsmatrix hat Rang 2. Das System ist daher vollständig steuerbar.

Aufgabe 9-4: Zeitdiskrete Systeme (2,5 Punkte)

References

[Gajic, 2003] Gajic, Z. (2003). *Linear Dynamic Systems and Signals.* Prentice Hall/Pearson Education.