
Übung 2: Übertragungsfunktion, Regelkreis

Alexander Björk, Janis Kaltenthaler

May 11, 2020

Aufgabe 2-1. Übertragungsfunktion des PT₂-Gliedes (4 Punkte)

a) $d > 1$

Pole:

$$s_{1/2} = -d\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{d^2 - 1}$$

Die Terme, der bereits angegebenen Pole lassen sich nicht weiter vereinfachen. Es lässt sich jedoch zeigen, dass die Realteile (also s_1 und s_2 , weil der Imaginärteil durch $d > 1$ Null wird) für beide negativ sind. Durch $d^2 - 1 < 1$ gilt auch

$$s_{1/2} = \omega_0 \left(-d \pm \sqrt{d^2 - 1} \right) < 0.$$

Damit klingt das Übergangsverhalten für $t \rightarrow \infty$ ab und am Ausgang ist nur noch das stationäre Verhalten zu beobachten.

Sprungantwort im Frequenzbereich:

Die Sprungantwort im Frequenzbereich erhält man indem man die Übertragungsfunktion nach $Y(s)$ umstellt und den Laplace-transformierten Einheitssprung als Eingabe $U(s)$ verwendet. Der Einheitssprung $\sigma(t)$ ist definiert als

$$\sigma(t) = \int_0^t c^T a^{At} b d\tau + d.$$

Als Laplace-transformierte Eingabe $U(s)$ heißt das

$$U(s) = \frac{1}{s}.$$

Durch Einsetzen in die Übertragungsfunktion und anschließend Umstellen erhält man

$$Y(s) = \frac{k}{\frac{1}{\omega_0^2} s^3 + \frac{2d}{\omega_0} s^2 + s}$$

als Sprungantwort im Frequenzbereich.

Sprungantwort im Zeitbereich:

Die Sprungantwort im Zeitbereich erhält man durch die Laplace-Transformation der Sprungantwort im Frequenzbereich. Durch Substitution von $T := \frac{1}{\omega_0}$ erhält man die etwas vereinfachte Übertragungsfunktion

$$Y(s) = \frac{k}{T^2 s^3 + 2dT s^2 + s}.$$

Damit erhält man im Zeitbereich eine Sprungantwort von

$$y(t) = k \left(1 - \frac{E_1 \left(\sqrt{d^2 - 1} + d \right) + E_2 \left(\sqrt{d^2 - 1} - d \right)}{2\sqrt{d^2 - 1}} \right)$$

mit

$$E_{1,2} = \exp \left(\frac{t}{T} \left(\pm \sqrt{d^2 - 1} - d \right) \right).$$

Zeitlicher Verlauf von $y(t)$:

Die Funktion nähert sich mit einem klassischen Verlauf einer $k \cdot \exp \left(-\frac{1}{t} \right)$ Kurve dem Grenzwert k an.

b) $d = 1$

Pole:

Für den Fall $d = 1$ gibt es nur noch einen Pol mit

$$s_1 = s_2 = s = -\omega_0.$$

Dadurch vereinfacht sich die Übertragungsfunktion mit $T := \frac{1}{\omega_0}$ zu

$$G(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2Ts + 1}.$$

Sprungantwort im Frequenzbereich:

Die Sprungantwort im Frequenzbereich ist

$$Y(s) = \frac{k}{T^2 s^3 + 2Ts^2 + s}.$$

Sprungantwort im Zeitbereich:

Die Sprungantwort im Zeitbereich ist

$$y(t) = k \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{T} \right) - \frac{\exp \left(-\frac{t}{T} \right) t}{T} \right).$$

Zeitlicher Verlauf von $y(t)$:

Der zeitliche Verlauf von $y(t)$ für $d = 1$ ist qualitativ der selbe wie für $d > 1$. Auch hier stellt sich ein stationäres Verhalten bei k ein.

c) $d = 0$

Pole:

Durch $d = 0$ sind die Pole nun komplex mit $\Re(s) = 0$.

$$s_{1/2} = \pm \omega_0 i$$

Diesen Polstellen weisen auf ein oszillierendes System hin.

Sprungantwort im Frequenzbereich:

$$Y(s) = \frac{k}{T^2 s^3 + s}$$

Sprungantwort im Zeitbereich:

Die Sprungantwort im Zeitbereich bestätigt die Aussage über die Polstellen:

$$y(t) = k \left(1 - \cos\left(\frac{t}{T}\right) \right)$$

Wir haben ein oszillierendes System mit Amplitude k und Schwingungsdauer $\tilde{T} = 2\pi nT$ für $n \in \mathbb{Z}$.

Zeitlicher Verlauf von $y(t)$:

Es stellt sich durch das oszillierende Verhalten kein stationärer Zustand ein. Der zeitliche Verlauf entspricht dem einer klassischen Cosinus-Kurve.

d) $0 < d < 1$

Pole:

Die Pole lassen sich hier nicht vereinfachen. Es ist jedoch möglich sie nun sinnvoll in Real- und Imaginärteil anzugeben, da nun beide verschieden von Null sind.

$$\begin{aligned} s_{1/2} &= -d\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{d^2 - 1} \\ \Re(s_{1/2}) &= -d\omega_0 \\ \Im(s_{1/2}) &= \pm \omega_0 \sqrt{d^2 - 1} \end{aligned}$$

Der negative Realteil zeigt an, dass hier entweder ein stabiles oder ein abklingendes System vorliegt. Der von Null verschiedene Imaginärteil zeigt an, dass es sich um ein oszillierendes System handeln muss.

Sprungantwort im Frequenzbereich:

Die Sprungantwort im Frequenzbereich lässt sich nicht vereinfachen.

$$Y(s) = \frac{k}{T^2 s^3 + 2dT s^2 + s}$$

Sprungantwort im Zeitbereich:

Die Sprungantwort im Zeitbereich ist die selbe wie für $d > 1$.

$$y(t) = k \left(1 - \frac{E_1 \left(\sqrt{d^2 - 1} + d \right) + E_2 \left(\sqrt{d^2 - 1} - d \right)}{2\sqrt{d^2 - 1}} \right)$$

Zeitlicher Verlauf von $y(t)$:

Wie eingangs beschrieben liegt hier ein oszillierendes System vor, welches mit der Zeit abklingt (gedämpfte Cosinus-Schwingung) während es um k schwingt. Mit der Zeit stellt sich ein stationäres Verhalten um k ein.

Aufgabe 2-2. Übertragungsfunktion im Regelkreis (6 Punkte)**a)**

Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$\hat{Y}(s) = \tilde{Y}(s) + R(s)$$

$$U(s) = E(s)K(s)$$

$$E(s) = W(s) - \hat{Y}(s)$$

$$\tilde{Y}(s) = Y(s)C(s)$$

b)

Die Führungsübertragungsfunktion berechnet sich mit $G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)}$ mit $R(s) = 0$. Für die Regelgröße ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$Y(s) = G(s)K(s)E(s)$$

$$Y(s) = G(s)K(s)(W(s) - \hat{Y}(s))$$

$$Y(s) = G(s)K(s)[W(s) - \tilde{Y}(s) - R(s)]$$

$$Y(s)[1 + G(s)K(s)C(s)] = G(s)K(s)W(s) - G(s)K(s)R(s)$$

$$Y(s) = \frac{G(s)K(s)W(s) - G(s)K(s)R(s)}{1 + G(s)K(s)C(s)}$$

Setzt man nun wie gefordert den Messfehler auf Null, ergibt sich für die Führungsübertragungsfunktion

$$G_w(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)C(s)}$$

c)

Für die Messfehlerübertragungsfunktion $G_r(s)$ ist ein analoges Vorgehen zielführend.

$$G_r(s) = -\frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)C(s)}$$

d)

Die Führungsübertragungsfunktion und die Messfehlerübertragungsfunktion liefern dem Betrag nach das gleiche Ergebnis. Es gilt $G_w(s)/G_r(s) = -1$.

Wenn der Messfehler gleich der Führungsgröße ist, ist

$$Y(s) = -G(s)K(s)\tilde{Y}(s)$$

$$Y(s) = -G(s)K(s)Y(s)C(s)$$

$$G(s)K(s)C(s) = -1.$$

Das heißt es ist nicht mehr möglich eine Führungs- oder Messfehlerübertragungsfunktion anzugeben.

e)

Durch Einsetzen der einzelnen Übertragungsfunktionen erhält man

$$G_w(s) = \frac{\frac{k_p}{s-3}}{1 + \frac{k_p}{(s-3)(s+5)}}.$$

Umformen führt zu

$$G_w(s) = \frac{k_p (s-3)(s+5)}{((s-3)(s+5) + k_p)(s-3)}.$$

Der Term $s-3$ kürzt sich raus und nach Umformen in die Polynomform erhält man für die Führungsübertragungsfunktion

$$G_w(s) = \frac{k_p s + 5k_p}{s^2 + 2s - 15 + k_p}$$

f)

Die Polstellen für $G_w(s)$ sind

$$0 = s^2 + 2s - 15 + k_p$$
$$s_{1/2} = -1 \pm \sqrt{16 - k_p}.$$

Ein Regelkreis ist stabil wenn seine Polstellen nur aus negativen Realteilen bestehen. Dafür muss schon mal offensichtlich

$$k_p \leq 16$$

sein, um komplexe Polstellen zu vermeiden. Zusätzlich müssen die Polstellen jetzt noch negativ sein. Für

$$s_1 = -1 + \sqrt{16 - k_p}$$

muss $k_p > 15$ sein, damit s_1 auch negativ ist. Für

$$s_2 = -1 - \sqrt{16 - k_p}$$

muss die Wurzel größer als -1 sein, damit $s_2 < 0$ gilt. Dies ist bereits durch die Bedingung $k_p \leq 16$ garantiert.

Dadurch ergeben sich die Stabilitätsbedingungen an k_p zu:

$$15 < k_p \leq 16.$$

g)

Die statische Verstärkung ist

$$G_w(0) = \frac{b_0}{a_0} = \frac{5k_p}{-15 + k_p} = 80.$$

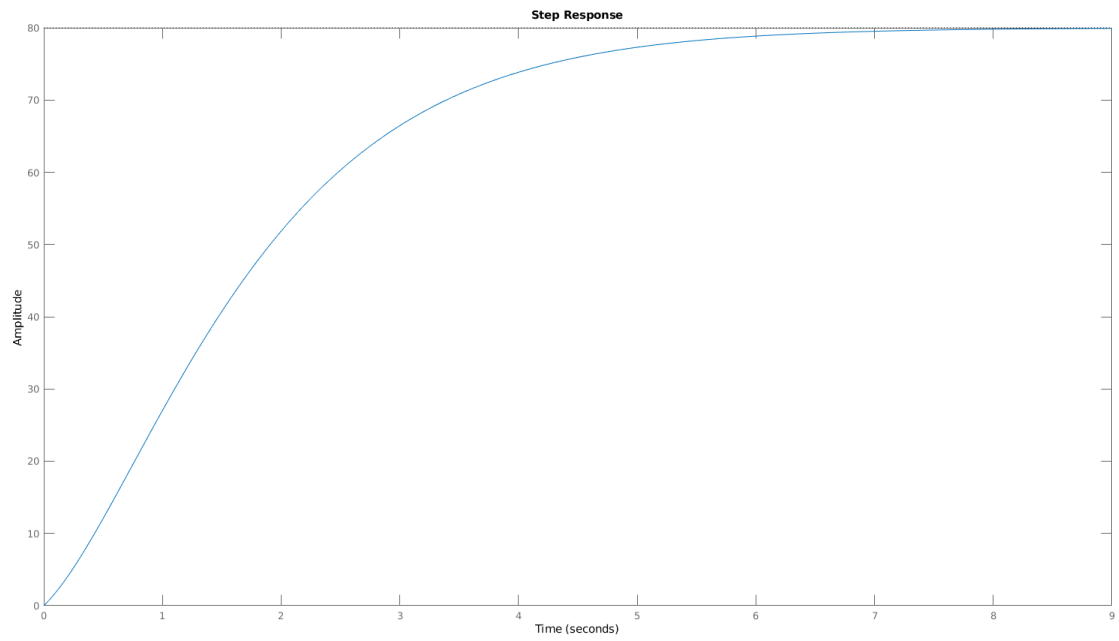


Abb. 2.2.1: Führungsübertragungsfuntion im Zeitbereich