UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Übung 6
Vorfilter, Regelabweichung und Ausgangsrückführung

Alexander Björk, Janis Kaltenthaler

June 7, 2020

Aufgabe 6-1. Zustandsrückführung und Vorfilter (7 Punkte)

a)

Die bleibende Regelabweichung $e(\infty)$ für eine sprungförmige Führungsgröße $w(\infty) = 1$ berechnet sich wie folgt:

$$
\begin{aligned}
e(\infty) &= w(\infty) - y(\infty) = w(\infty) + C(A - BK)^{-1} B w(\infty) \\
e(\infty) &= (I + C(A - BK)^{-1} B) w(\infty) \\
e(\infty) &= \left(1 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}\right) \cdot 1 = 0.9
\end{aligned}
$$

b)

Der Vorfilter V berechnet sich nun wie folgt:

$$
\begin{aligned}
V &= -(C(A - BK)^{-1} B)^{-1} = -\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}\right)^{-1} \\
V &= 10
\end{aligned}
$$

Durch den Vorfilter ändert sich das Zustandsraummodell zu:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.25 \end{bmatrix} d(t) \qquad x(0) = x_0 \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)
\end{aligned}
$$

c)

Die Berechnung der bleibenden Regelabweichung ohne Störgröße folgt dem selben Prinzip wie in Teilaufgabe **a)**:

$$e(\infty) = w(\infty) - y(\infty) = w(\infty) + C(A - BK)^{-1} B w(\infty)$$
$$e(\infty) = (I + C(A - BK)^{-1} B) w(\infty)$$
$$e(\infty) = \left(1 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}\right) \cdot 1 = 0$$

Druch den Vorfilter konnte die bleibende Regelabweichung eliminiert werden. Wirkt nun jedoch zusätzlich eine sprungförmige Störgröße $d(\infty) = 1$, ändert sich die Berechnungsvorschrift für die bleibende Regelabweichung wie folgt:

$$e(\infty) = w(\infty) - y(\infty) = w(\infty) + C(A - BK)^{-1} B w(\infty) + C(A - BK)^{-1} E d(\infty)$$
$$e(\infty) = 1 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot 1 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.25 \end{bmatrix} \cdot 1$$
$$e(\infty) = -0.05$$

Für eine Störung $d(t) \neq 0$ ergibt sich stets eine bleibende Regelabweichung, d.h. $e(\infty) \neq 0$.

d)

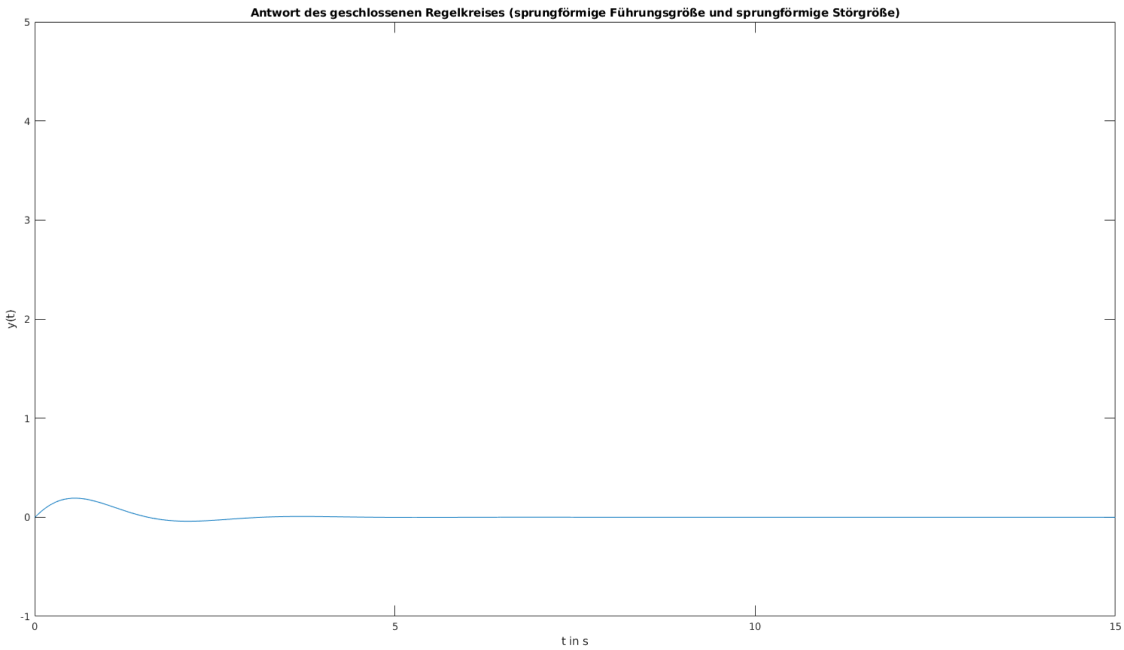

Abb. 6-1.1: Antwort des geschlossenen Regelkreises für den Fall einer sprungförmigen Führungsgröße w und einer sprungförmigen Störgröße d.

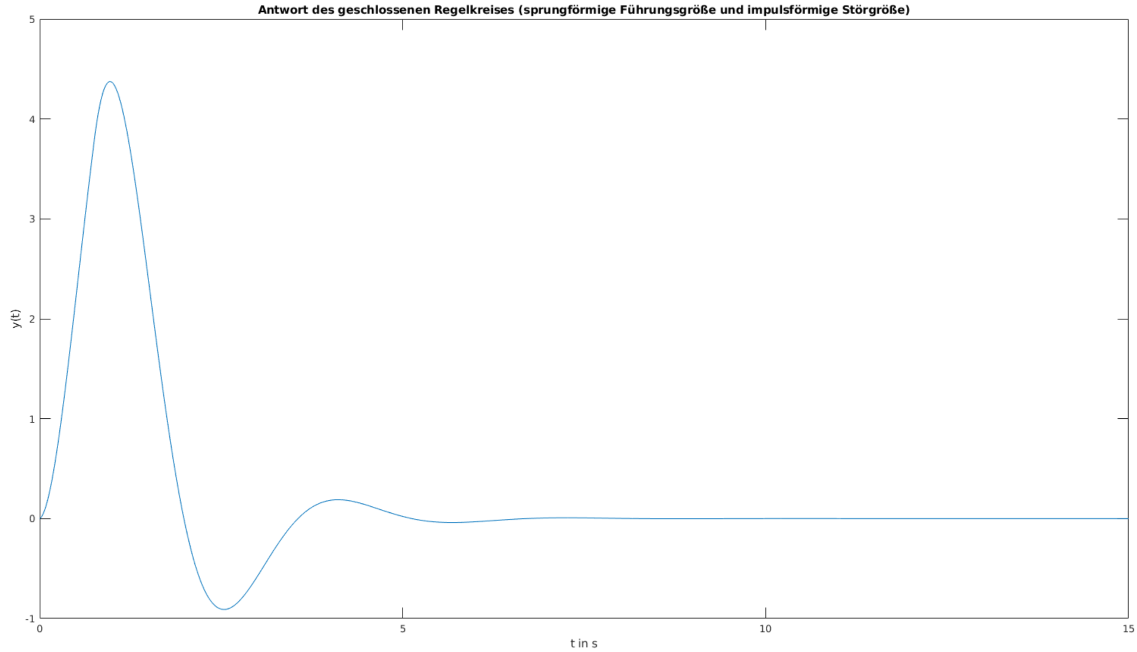

Abb. 6-1.2: Antwort des geschlossenen Regelkreises für den Fall einer sprungförmigen Führungsgröße w und einer impulsförmigen Störgröße d.

6-2: Ackermann-Formel (3 Punkte)

Die Ackerman-Formel ergibt sich zuallererst aus der Umstellung zu

$$k^T = k_R^T T_R^{-1} = \left(\begin{pmatrix} \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \dots & \bar{a}_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}\right) T_R^{-1}.$$

Anschließend wird die Transformationsmatrix

$$T_R^{-1} = \begin{pmatrix} s_R^T \\ s_R^T A \\ \vdots \\ s_R^T A^{n-1} \end{pmatrix}$$

direkt eingesetzt, um eine extra Berechnung zu vermeiden:

$$k^T = \begin{pmatrix} \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \dots & \bar{a}_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_R^T \\ s_R^T A \\ \vdots \\ s_R^T A^{n-1} \end{pmatrix} \underbrace{- \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_R^T \\ s_R^T A \\ \vdots \\ s_R^T A^{n-1} \end{pmatrix}}_{= -s_R^T A^n}$$

Ausgeschrieben ergibt dies die Ackermann-Formel.

$$k^T = \begin{pmatrix} \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \dots & \bar{a}_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_R^T \\ s_R^T A \\ \vdots \\ s_R^T A^{n-1} \\ s_r^T A^n \end{pmatrix}$$

$$k^T = s_R^T \left(\bar{a}_0 \boldsymbol{I} + \bar{a}_1 \boldsymbol{A} + \bar{a}_2 \boldsymbol{A}^2 + \ldots + \bar{a}_{n-1} \boldsymbol{A}^{n-1} + \boldsymbol{A}^n\right)$$

6-3: Ausgangsrückführung (3 Punkte)

a)

Das resultierende ZMR ist

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -26 & 20 \\ -30 & 23 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} -9 & 7 \end{bmatrix} x(t)$$

mit

$$K = \begin{bmatrix} 27 & -21 \end{bmatrix}$$

b)

Das resultierende ZMR ist

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -26 & 20 \\ -30 & 23 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} -9 & 7 \end{bmatrix} x(t)$$

mit

$$K_y = -3$$