UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Robotik II - Übung 01

Zustandsraummodell, Sprungantwort, Linearisierung

Alexander Björk, Janis Kaltenthaler

April 30, 2020

Aufgabe 1-1. Fahrt mit der Eisenbahn (5 Punkte)

a)

Die Differenzialgeleichung, die sich nach dem zweiten Newtonschen Gesetz

$$F = ma = m\dot{v}$$

ergibt, setzt sich aus der Beschleunigungs- bzw. Bremskraft der Lokomotive $u(t)$ und der durch den Rollwiderstand erzeugten Bremskraft $F_w(t)$ zusammen. Damit ergibt sich

$$F = ma = m\dot{v} = u + F_w.$$

Setzt man für $F_w(t)$ den gegebenen Zusammenhang $c \cdot v(t)$ mit $c = 1500\frac{\text{kg}}{\text{s}}$ ein, erhält man die geforderte Differentialgelichung erster Ordnung

$$m \cdot \dot{v}(t) = c \cdot v(t) + u(t).$$

Für die Überführung ins Zustandsraummodell wird $u(t)$ als Eingangsgröße und $v(t)$ sowohl als Zustands- als auch als Ausgangsgröße angenommen. Damit ergibt sich das Modell zu

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$$

mit

$$a = -\frac{c}{m_{ges}} \quad \text{und}$$
$$b = \frac{1}{m_{ges}}.$$

m_{ges} ist dabei die Gesamtmasse der Eisenbahn, die sich aus der Masse der Lokomotive und den 10 Wagen zusammensetzt.

b)

Der Eigenwert der Systemmatrix $A = a$ des Zustandraummodells ergibt sich aufgrund der Eindimensionalität zu

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ a - \lambda &= 0 \\ \lambda &= -\frac{c}{m_{ges}}. \end{aligned}$$

c)

Die Lösung der Bewegungsgleichung nach der beschriebenen Eingangsgröße wird wie in Folie 10 (Kapitel 02: Einführung dynamischer Systeme) nach

$$y(t) = c^T \Phi(t) x_0 + \int_0^t c^T \Phi(t-\tau) b u(\tau) d\tau + d u(t)$$

berechnet. Durch die stückweise definierte Eingangsgröße muss hier jedoch auch stückweise vorgegangen werden. Die Lösung muss daher in drei Teilschritten berechnet und auch die Lösung muss anschließend stückweise angegeben werden.
Die Lösung vereinfacht sich durch die Eindimensionalität erheblich:

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0 + \int_0^t e^{a(t-(\tau)} b u(\tau) d\tau$$

Der **erste Abschnitt** ist für $t_0 \le t \le t_1$ definiert. Somit gilt es

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0 + \int_0^t e^{a(t-(\tau)} b u(\tau) d\tau$$

zu lösen. Da man in diesem Intervall $u(\tau)$ als konstant annehmen kann, vereinfacht sich auch das Integral. Die Lösung ist

$$x(t) = e^{at} x_0 + \frac{b}{a} F_a (e^{at} - 1)$$

mit

$$F_a = 80\text{kN}.$$

Der **zweite Abschnitt** ist für $t_1 < t \le t_2$ definiert. Somit gilt es

$$x(t) = e^{a(t-t_1)} x(t_1) + \int_{t_1}^t e^{a(t-(\tau)} b u(\tau) d\tau$$

zu lösen. Da in diesem Intervall $u(\tau) = 0$ gilt, ist die Lösung

$$x(t) = e^{a(t-t_1)} x(t_1).$$

Der **dritte Abschnitt** ist für $t_2 < t \le t_3$ definiert. Somit gilt es

$$x(t) = e^{a(t-t_2)} x(t_2) + \int_{t_2}^t e^{a(t-(\tau)} b u(\tau) d\tau$$

zu lösen. In diesem Intervall kann $u(\tau)$ erneut als konstant angenommen werden. Die Lösung ist

$$x(t) = e^{a(t-t_2)} x(t_2) + \frac{b}{a} F_b (e^{a(t-t_2)} - 1)$$

mit

$$F_b = -90\text{kN}.$$

Die endgültige Lösung ist damit

$$x(t) = \begin{cases} e^{at}x_0 + \dfrac{b}{a}F_a(e^{at}-1) & t_0 \le t \le t_1 \\ e^{a(t-t_1)}x(t_1) & \text{sonst} \\ e^{a(t-t_2)}x(t_2) + \dfrac{b}{a}F_b(e^{a(t-t_2)}-1) & t_2 < t \le t_3. \end{cases}$$

d)

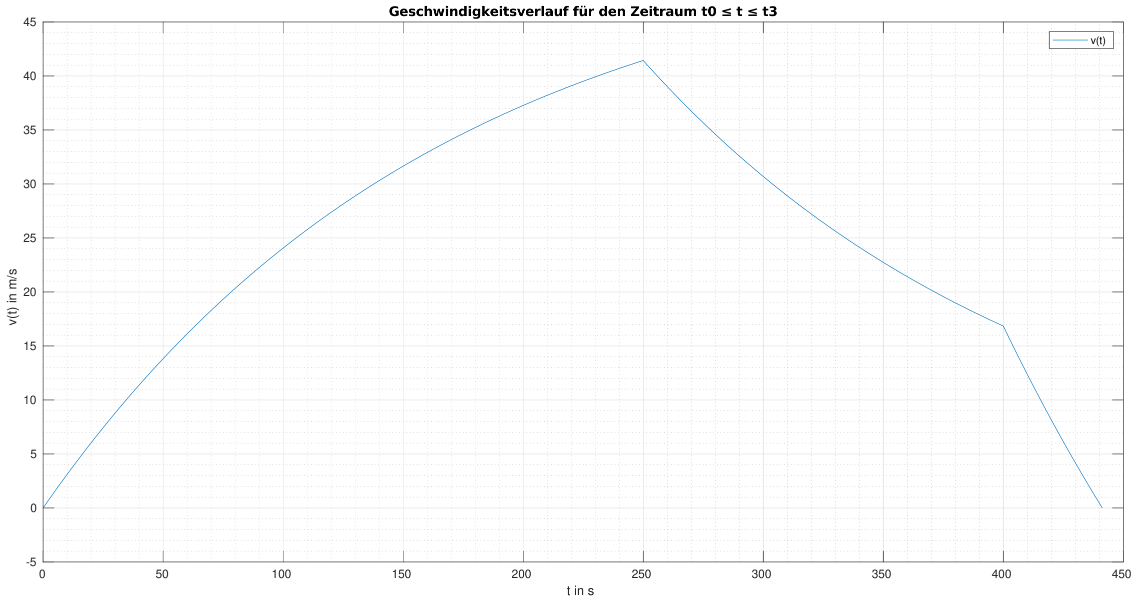

Abb. 1.1: Geschwindigkeitsverlauf für $t_0 \le t \le t_3$

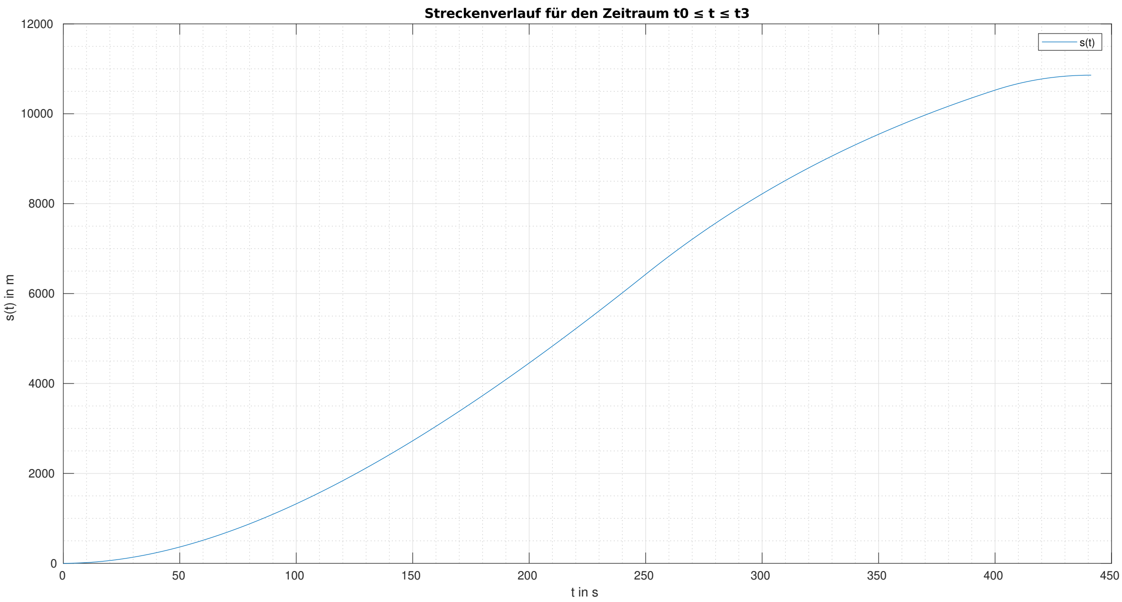

Abb. 1.2: Streckenverlauf für $t_0 \le t \le t_3$

Aufgabe 1-2. Simulation und Linearisierung eines Pendels am Wagen (5 Punkte)

b)

Der Wagen wird aus dem anfänglichen Ruhepunkt $x = 0$ ausgeschwungen und pendelt danach um einen von Null verschiedenen Punkt (in der Simulation ungefähr $x = 0.015$). Dabei ist die Amplitude während einer Schwingungsdauer nahezu synchron mit der Amplitude der Pendelgeschwindigkeit. Nach ungefähr 30 Sekunden ist die Position des Wagens nahezu konstant und die Wagengeschwindigkeit somit nahezu Null. Das Pendel jedoch schwingt noch, nun relativ gleichmäßig.

c)

Die linearisierten Zustandsgleichungen für $\ddot{x}$ und $\ddot{\theta}$ sehen wie folgt aus:

$$\ddot{x} = T\left(\frac{F}{m} - \frac{{m_p}^2 l^2}{Jm} g\theta + \frac{m_p l}{Jm} f_p \theta - \frac{f_c}{m}\dot{x}\right)$$

$$\ddot{\theta} = T\left(\frac{m_p l}{J} g\theta - \frac{m_p l}{Jm} F + \frac{m_p l}{Jm} f_c \dot{x} - \frac{f_p}{J}\dot{\theta}\right)$$

mit

$$T = \frac{1}{1 - \frac{{m_p}^2 l^2}{Jm}}.$$

Dadurch ergibt sich das linearisierte Zustandsraummodell zu

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -T\cdot\frac{f_c}{m} & -T\cdot\frac{{m_p}^2 l^2}{Jm} g & T\cdot\frac{m_p l}{Jm} f_p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & T\cdot\frac{m_p l}{Jm} f_c & T\cdot\frac{m_p l}{J} g & -T\cdot\frac{f_p}{J} \end{bmatrix}\vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ T\frac{1}{m} \\ 0 \\ -T\frac{m_p l}{Jm} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\vec{x}.$$

e)

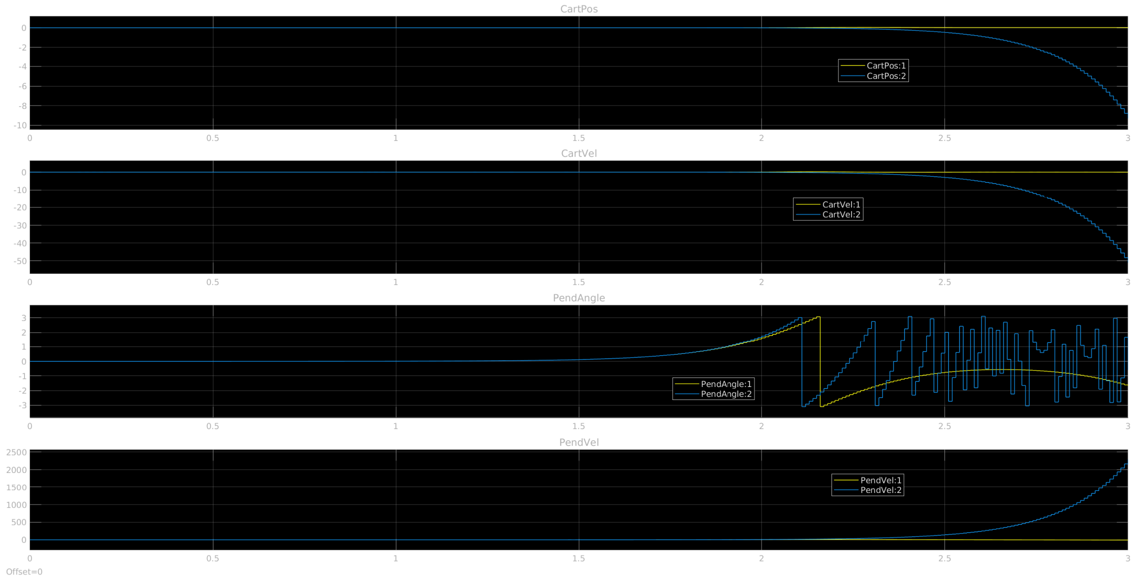

Abb. 2.1: Scope des nichtlinearen (gelb) und linearen (blau) Pendels

Im kleinen θ-Bereich, also der Bereich in dem die Linearisierung gültig ist, stimmen die Ausgaben überein. Die Linearisierung ist also tatsächlich gültig. Ist die Auslenkung des Pendels jedoch zu groß, ist die Linearisierung nicht mehr gültig, was in den Ausgaben auch eindeutig zu sehen ist.