UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Übung 9: Zeitdiskrete Systeme

Alexander Björk, Janis Kaltenthaler

June 29, 2020

Aufgabe 9-1: Berechnung eines diskreten Zustandsraummodells aus dem Kontinuierlichen (3 Punkte)

a)

Um das zeitkontinuierliche System in die diskrete Form zu überführen berechnen wir zunächst die Systemmatrix A_d und den Eingabevektor b_d:

$$A_d = e^{A\cdot T} = e^{\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}\cdot T} = \begin{bmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.135335 & 0 \\ 0 & 0.367879 \end{bmatrix}$$
$$b_d = \int_0^T e^{A\cdot\alpha} d\alpha \cdot b = \int_0^3 \begin{bmatrix} e^{-\frac{2\alpha}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\alpha}{3}} \end{bmatrix} d\alpha \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3-3\cdot e^{-2}}{2} & 0 \\ 0 & 3-3\cdot e^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$b_d = \begin{bmatrix} 3\cdot(e^2-1)\cdot e^{-2} \\ 9\cdot(e-1)\cdot e^{-1} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2.59399 \\ 5.68909 \end{bmatrix}$$

Das zeitdiskrete Zustandsraummodell ist nun wie folgt gegeben:

$$x(k+1) = A_d x(k) + b_d u(k), \quad x(0) = x_0$$
$$y(k) = c^T x(k) + d u(k)$$

b)

Die Eigenwerte von A_d sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung:

$$\det(A-\lambda I) = 0$$
$$0 = (e^{-2}-\lambda)\cdot(e^{-1}-\lambda)$$
$$\lambda_1 = e^{-2},\ \lambda_2 = e^{-1}$$

Wegen $\lambda_1 < 1$ und $\lambda_2 < 1$ ist das zeitdiskrete System asymptotisch stabil.

c)

Für die freie Bewegung des zeitdiskreten Systems gilt $u(k) = 0$. die Bewegungsgleichung der freien Bewegung der Bewegungsgleichung des Ausgangs ist demnach:

$$y(k) = c^T A_d^k x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} = 1.5 \cdot e^{-k} + 1.5 \cdot e^{-2 \cdot k}$$

$$y(1) \approx 0.754822, y(2) \approx 0.230476, y(5) \approx 0.010175, y(10) \approx 0.000068, y(1000) \approx 0.0$$

Wie schon in Aufgabe **b)** gezeigt ist das System asympthotisch stabil. Für $k \to \infty$ verschwindet die Eigenbewegung.

Aufgabe 9-2: Berechnung eines diskreten Zustandsraummodells aus dem Kontinuierlichen (1,5 Punkte)

a)

Für die Überführung in das diskrete Zustandsraummodell müssen zunächst die Matrizen

$$A_d = e^{AT}$$

und

$$b_d = \int_0^T e^{A\alpha} d\alpha b$$

berechnet werden.

Für A_d muss die Matrixexponentialfunktion $\Phi(AT)$ gelöst werden. Da AT eine allgemeine 2x2 Matrix ist, muss erst die zugehörige Jordan-Normalform J mit Transformationsmatrix V von AT ermittelt werden. Diese sind

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

und

$$V = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Matrixexponentialfunktion $\Phi(AT)$ kann nun berechnet werden durch

$$e^{AT} = V \cdot \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}\right) \cdot V^{-1}.$$

Die Eigenwerte der Diagonalmatrix befinden sich in der Jordanmatrix J.

Damit ist

$$A_d = \begin{bmatrix} 1.6487 & 1.2808 \\ 0 & 0.3679 \end{bmatrix}.$$

Eine Überprüfung durch Matlab mit

```
expm(A*T)
```

liefert die gleichen Ergebnisse.

Nach [Gajic, 2003] gilt für die Matrix b_d nach Matrixintegration

$$b_d = e^{AT}\left(-e^{AT}A^{-1} + A^{-1}\right)B = \left(A_d - I\right)A^{-1}B$$

und ergibt somit

$$b_d = \begin{bmatrix} 1.3140 \\ 0.6321 \end{bmatrix}.$$

Eine Überprüfung durch Matlab mit

```
integral(@(alpha)expm(A*alpha), 0, Ts, 'ArrayValued', true) * B
```

liefert die gleichen Ergebnisse.

Auch die Matlabfunktion

```
c2d(sys,T)
```

liefert die gleichen Ergebnisse.

Das zeitdiskrete Zustandsraummodell ist somit

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 1.6487 & 1.2808 \\ 0 & 0.3679 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1.3140 \\ 0.6321 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(k). \end{aligned}$$

b)

Die Eigenwerte des diskreten Modells sind

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= e^{\frac{1}{2}} \approx 1.6487 \\ \lambda_2 &= e^{-1} \approx 0.3679. \end{aligned}$$

Ein zeitdiskretes System ist asymptotisch stabil wenn für alle Eigenwerte der Systemmatrix A_d

$$|\lambda_i| < 1$$

gilt. Da λ_1 größer als 1 ist, ist das System nicht asymptotisch stabil.

Aufgabe 9-3: Zeitdiskrete Systeme (1,5 Punkte)

Die Ausgabe von `uebung93.m`:

```
Das kontinuierliche System ist vollständig steuerbar!
Das zeitdiskrete System mit Abtastrate 2s ist nicht vollständig steuerbar!
Das zeitdiskrete System mit Abtastrate 3s ist vollständig steuerbar!
```

Das zeitdiskrete System mit einer Abtastrate von 2s hat eine Diagonalmatrix als Systemmatrix und bildet daher eine Steuerbarkeitsmatrix mit Rang 1 und ist deswegen nicht vollständig steuerbar. Das zeitdiskrete System mit einer Abtastrate von 3s hat keine Diagonalmatrix als Systemmatrix. Die Steuerbarkeitsmatrix hat Rang 2. Das System ist daher vollständig steuerbar.

Aufgabe 9-4: Zeitdiskrete Systeme (2,5 Punkte)

△: System 1, weil oszillierend. Es klingt schneller ab als System 2 und hat daher den kleineren Realteil.

○: System 4, weil stabil. Es erreicht seinen Endwert schneller als System 3 und hat daher den Realteil, der näher an 0 ist.

□: System 3, weil stabil. Es erreicht seinen Endwert später als System 4 und hat daher den Realteil, der weiter von 0 entfernt ist.

⋆: System 2, weil oszillierend. Es klingt langsamer ab als System 1 und hat daher den größeren Realteil.

⋆: System 5, weil instabil. Die Eigenwerte liegen außerhalb des Einheitskreises.

References

[Gajic, 2003] Gajic, Z. (2003). *Linear Dynamic Systems and Signals.* Prentice Hall/Pearson Education.