UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Übung 7

Ausgangsrückführung, LQR

Alexander Björk, Janis Kaltenthaler

June 9, 2020

Aufgabe 7-1. Ausgangsrückführung (7 Punkte)

a)

Damit die Pole des geschlossenen Regelkreises bei den geforderten Werten liegen, ergibt sich durch die Berechnung in Matlab die folgende Regelmatrix:

$$K_x = \begin{bmatrix} 1.6205 \\ -1.41 \end{bmatrix}$$

Der Vorfilter V wird nun wie folgt bestimmt:

$$V_x = -\left(C(A - BK_x)^{-1}B\right)^{-1} = 0.052632$$

Das resultierende Zustandsraummodell mit Zustandsrückführung erhält man nun wie folgt:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A - BK_x)x(t) + BV_x w(t) = \begin{bmatrix} -0.24100 & -0.17993 \\ -2.16205 & -2.85900 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.1052632 \\ 0.0052632 \end{bmatrix} w(t) \\ y(t) &= Cx(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b)

Das System mit Ausgangsrückführung ist stabil, falls alle Pole des geschlossenen Regelkreis mit Ausgangsrückführung einen negativen Realteil besitzen. Um dies zu Prüfen nutzen wir das Hurwitz-Kriterium. Die System Matrix $\bar{A}$ des geschlossenen Regelkreises berechnet sich wie folgt:

$$\bar{A} = A - Bk_yC = \begin{bmatrix} 3 - 2 \cdot k_y & -3 \\ -0.1 \cdot k_y - 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Das charakteristische Polynom des geschlossenen Regelkreises berechnet sich wie folgt:

$$\det(\bar{A} - \lambda I) = \underbrace{1}_{a_0} \cdot \lambda^2 + \underbrace{2 \cdot k_y}_{a_1} \cdot \lambda + \underbrace{5.7 \cdot k_y - 15}_{a_2}$$

Daraus ergibt sich die Hurwitzmatrix:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot k_y & 0 \\ 1 & 5.7 \cdot k_y - 15 \end{bmatrix}$$

Die zwei Hauptabschnittsdeterminanten D_1 und D_2 werden wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} D_1 &= a_1 = 2 \cdot k_y \\ D_2 &= \det\left(\begin{bmatrix} 2 \cdot k_y & 0 \\ 1 & 5.7 \cdot k_y - 15 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot k_y \cdot (5.7 \cdot k_y - 15) \end{aligned}$$

Das betrachtete System ist stabil falls alle Koeffizienten a_i und alle Hauptabschnittsdeterminanten D_i positiv sind. Daher ist das System stabil für $k_y > \frac{15}{5.7} \approx 2.63$ und somit durch eine Ausgangsrückführung stabilisierbar.

c)

Zuerst prüfen wir ob die Zustandsrückführung durch eine Ausgangsrückführung ersetzt werden kann:

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} C \\ K \end{bmatrix} = 2 \neq \text{Rang } C = 1$$

Da die Ränge nicht gleich sind ist eine direkte Ersetzung nicht möglich.
Nun berechnen wir die Eigenvektormatrix $\bar{V}$ von $A - BK_x$:

$$V = \begin{bmatrix} 0.787112 & 0.065079 \\ -0.616810 & 0.997880 \end{bmatrix}$$

Die Wichtungsmatrix W wird wie folgt definiert:

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nun ermitteln wir die Ausgangsrückführung K_y nach Gleichung:

$$k_y = KVW(CVW)^T\left((CVW)(CVW)^T\right)^{-1} = 2.5712$$

Um zu Prüfen ob die Güteforderungen erfüllt werden, d.h. ob das resultierende System stabil ist, berechnen wir die Eigenwerte der Systemmatrix $A - Bk_yC$:

$$\lambda_1 = 0.066126, \ \lambda_2 = -5.208437$$

Wegen $\lambda_1 > 0$ ist das System nicht stabil. Entsprechend passen wir die Wichtungsfunktion an, damit λ_1 genauer an den geforderten Eigenwert von -0.1 angenähert wird:

$$W = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nun erhalten wir eine Ausgangsrückführung von:

$$k_y = 2.6867$$

mit den Eigenwerten:

$$\lambda_1 = -0.059103, \ \lambda_2 = -5.314262$$

Das System ist nun dementsprechend stabil.
Der Vorfilter V_y zur Sicherung der Sollwertfolge bei der Ausgangsrückführung berechnet sich wie folgt:

$$V_y = -\left(C(A - Bk_yC)^{-1}B\right)^{-1} = 0.055103$$

Das resultierende Zustandsraummodell mit Ausgangsrückführung erhält man nun wie folgt:

$$\dot{x}(t) = (A - BK_yC)x(t) + BV_y w(t) = \begin{bmatrix} -2.3734 & -3.0000 \\ -2.2687 & -3.0000 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.1102067 \\ 0.0055103 \end{bmatrix} w(t)$$
$$y(t) = Cx(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$