UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Übung 7
Ausgangsrückführung, LQR

Alexander Björk, Janis Kaltenthaler

June 10, 2020

Aufgabe 7-1. Ausgangsrückführung (5 Punkte)

a)

Damit die Pole des geschlossenen Regelkreises bei den geforderten Werten liegen, ergibt sich durch die Berechnung in Matlab die folgende Regelmatrix:

$$K_x = \begin{bmatrix} 1.6205 \\ -1.41 \end{bmatrix}$$

Der Vorfilter V wird nun wie folgt bestimmt:

$$V_x = -\left(C(A - BK_x)^{-1}B\right)^{-1} = 0.052632$$

Das resultierende Zustandsraummodell mit Zustandsrückführung erhält man nun wie folgt:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A - BK_x)x(t) + BV_x w(t) = \begin{bmatrix} -0.24100 & -0.17993 \\ -2.16205 & -2.85900 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.1052632 \\ 0.0052632 \end{bmatrix} w(t) \\ y(t) &= Cx(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b)

Das System mit Ausgangsrückführung ist stabil, falls alle Pole des geschlossenen Regelkreis mit Ausgangsrückführung einen negativen Realteil besitzen. Um dies zu Prüfen nutzen wir das Hurwitz-Kriterium. Die System Matrix $\bar{A}$ des geschlossenen Regelkreises berechnet sich wie folgt:

$$\bar{A} = A - Bk_yC = \begin{bmatrix} 3 - 2\cdot k_y & -3 \\ -0.1\cdot k_y - 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Das charakteristische Polynom des geschlossenen Regelkreises berechnet sich wie folgt:

$$\det(\bar{A} - \lambda I) = \underbrace{1}_{a_0}\cdot\lambda^2 + \underbrace{2\cdot k_y}_{a_1}\cdot\lambda + \underbrace{5.7\cdot k_y - 15}_{a_2}$$

Daraus ergibt sich die Hurwitzmatrix:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot k_y & 0 \\ 1 & 5.7 \cdot k_y - 15 \end{bmatrix}$$

Die zwei Hauptabschnittsdeterminanten D_1 und D_2 werden wie folgt berechnet:

$$D_1 = a_1 = 2 \cdot k_y$$
$$D_2 = \det\left(\begin{bmatrix} 2 \cdot k_y & 0 \\ 1 & 5.7 \cdot k_y - 15 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot k_y \cdot (5.7 \cdot k_y - 15)$$

Das betrachtete System ist stabil falls alle Koeffizienten a_i und alle Hauptabschnittsdeterminanten D_i positiv sind. Daher ist das System stabil für $k_y > \frac{15}{5.7} \approx 2.63$ und somit durch eine Ausgangsrückführung stabilisierbar.

c)

Zuerst prüfen wir ob die Zustandsrückführung durch eine Ausgangsrückführung ersetzt werden kann:

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} C \\ K \end{bmatrix} = 2 \neq \text{Rang } C = 1$$

Da die Ränge nicht gleich sind ist eine direkte Ersetzung nicht möglich.
Nun berechnen wir die Eigenvektormatrix $\bar{V}$ von $A - BK_x$:

$$V = \begin{bmatrix} 0.787112 & 0.065079 \\ -0.616810 & 0.997880 \end{bmatrix}$$

Die Wichtungsmatrix W wird wie folgt definiert:

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nun ermitteln wir die Ausgangsrückführung K_y nach Gleichung:

$$k_y = KVW(CVW)^T\big((CVW)(CVW)^T\big)^{-1} = 2.5712$$

Um zu Prüfen ob die Güteforderungen erfüllt werden, d.h. ob das resultierende System stabil ist, berechnen wir die Eigenwerte der Systemmatrix $A - Bk_yC$:

$$\lambda_1 = 0.066126, \ \lambda_2 = -5.208437$$

Wegen $\lambda_1 > 0$ ist das System nicht stabil. Entsprechend passen wir die Wichtungsfunktion an, damit λ_1 genauer an den geforderten Eigenwert von -0.1 angenähert wird:

$$W = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nun erhalten wir eine Ausgangsrückführung von:

$$k_y = 2.6867$$

mit den Eigenwerten:

$$\lambda_1 = -0.059103, \ \lambda_2 = -5.314262$$

Das System ist nun dementsprechend stabil.
Der Vorfilter V_y zur Sicherung der Sollwertfolge bei der Ausgangsrückführung berechnet sich wie folgt:

$$V_y = -\left(C(A - Bk_y C)^{-1} B\right)^{-1} = 0.055103$$

Das resultierende Zustandsraummodell mit Ausgangsrückführung erhält man nun wie folgt:

$$\dot{x}(t) = (A - BK_y C)x(t) + BV_y w(t) = \begin{bmatrix} -2.3734 & -3.0000 \\ -2.2687 & -3.0000 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.1102067 \\ 0.0055103 \end{bmatrix} w(t)$$
$$y(t) = Cx(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 7-2. LQ-Regler (3 Punkte)

a)

Die LQ-Regelung kann angewendet werden falls das System vollständig steuerbar ist.
Um auf Steuerbarkeit zu Prüfen berechnen wir zunächst die Steuerbarkeitsmatrix S_S:

$$S_S = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Nach dem Steuerbarkeitskriterium von Kalman ist das System vollständig steuerbar, wenn die Determinate von S_S undgleich null ist:

$$\det S_S = -1$$

Das System ist vollständig steuerbar und die LQ-Regelung kann angewendet werden.

b)

Die Lösung der Riccatigleichung wurde mit Matlab berechnet:

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 70 \end{bmatrix}$$

Die Regelmatrix K des geschlossenen Regelkreises mit Zustandsrückführung wird nun wie folgt mit der Gleichung für den Optimalregler:

$$K = R^{-1} B^T P = 2^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 70 \end{bmatrix}$$
$$K = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 35 \end{bmatrix}$$

Anschließend kann der Vorfilter V berechnet werden:

$$V = -\left(C(A - BK)^{-1} B\right)^{-1} = 5$$

Damit erhält man das resultierende Zustandsraummodell:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + BV w(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -31 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} w(t)$$
$$y(t) = Cx(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 7-3. LQ-Regler für das Pendel am Wagen (4 Punkte)

a)

Um den Vorfilter für die Zustandsrückführung zu berechnen musste eine Pseudoinverse (`pinv`, welches die Moore-Penrose Pseudoinverse liefert) berechnet werden, da die Matrix

$$C\,(A-BK)B)$$

nicht quadratisch ist.

$\mathbf{x_0} = [\mathbf{0.3}, \mathbf{0}, \mathbf{0.15}, \mathbf{0}]^{\mathbf{T}}$:

Die Standardparameter $R = 1$ und $Q = 1 \cdot I(4)$ ermöglichten bereits eine Stabilisierung des System um die instabile Ruhelage. Die Berechnung der Regelmatrix lieferte

$$K = \begin{bmatrix} -1.0000 & -2.6034 & -24.0392 & -4.4759 \end{bmatrix}.$$

Die Wagenposition bewegt sich im Bereich $x \in \left[-2.18 \cdot 10^{-4}, 0.5221\right]$ und der Pendelwinkel in $\theta \in [-0.0563, 0.15]$. Damit wurden die Gütekriterien eingehalten.

Die Beruhigungszeit mit einer Toleranz von 2cm ist 5.0712s.

$\mathbf{x_0} = [\mathbf{0.3}, \mathbf{0}, \mathbf{-0.15}, \mathbf{0}]^{\mathbf{T}}$:

Die Wagenposition bewegt sich im Bereich $x \in [-0.0755, 0.3]$ und der Pendelwinkel in $\theta \in [-0.15, 0.0333]$. Damit wurden die Gütekriterien eingehalten.

Die Beruhigungszeit mit einer Toleranz von 2cm ist 4.1843s.

Durch verändern von R und Q wurde für $x_0 = [0.3, 0, 0.15, 0]^T$ eine Beruhigungszeit von 0.6766s erreicht. In dieser Simulation war

$$R = 0.001$$

und

$$Q = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

und damit

$$K = 10^4 \begin{bmatrix} -3.1623 & -1.2097 & -2.2704 & -0.4234 \end{bmatrix}$$

Die Gütekriterien wurden eingehalten.

Für $x_0 = [0.3, 0, -0.15, 0]^T$ wurde mit den selben Parametern eine Beruhigungszeit von 0.6085s erreicht.

b)

Der "Standard"-Regler mit $R = 1$ und $Q = I$ war erfolgreich.

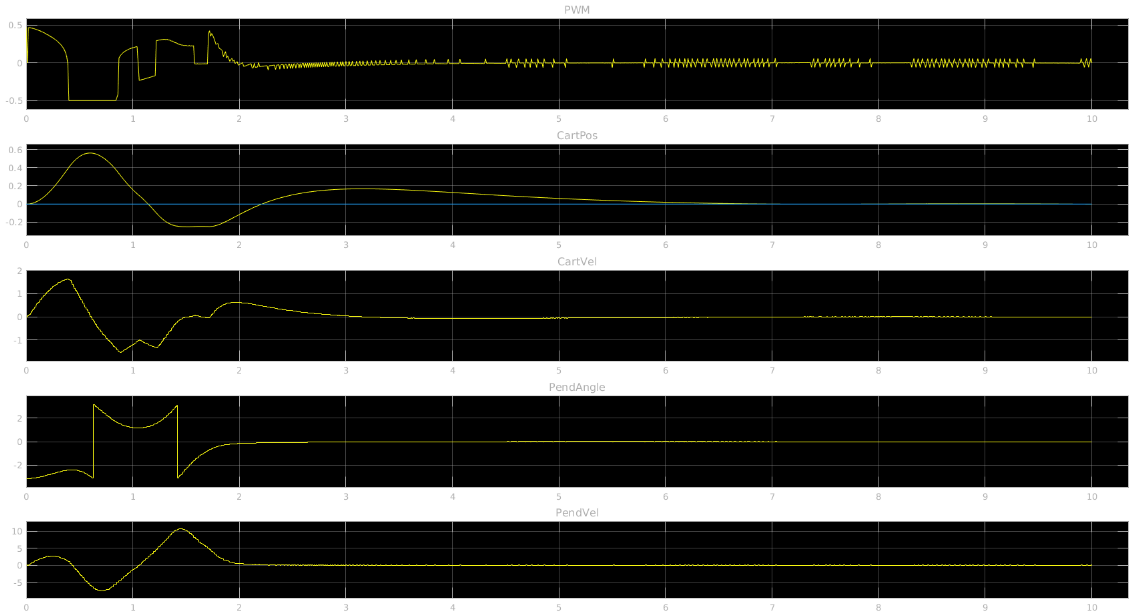

Abb. 7-3.1: Scope des Pendels am Wagen mit Standard-LQ-Regler.

Der Regler mit $R = 1$ und $Q = \text{diag}(1000, 0.1, 0.1, 0.1)$ war erfolgreich.

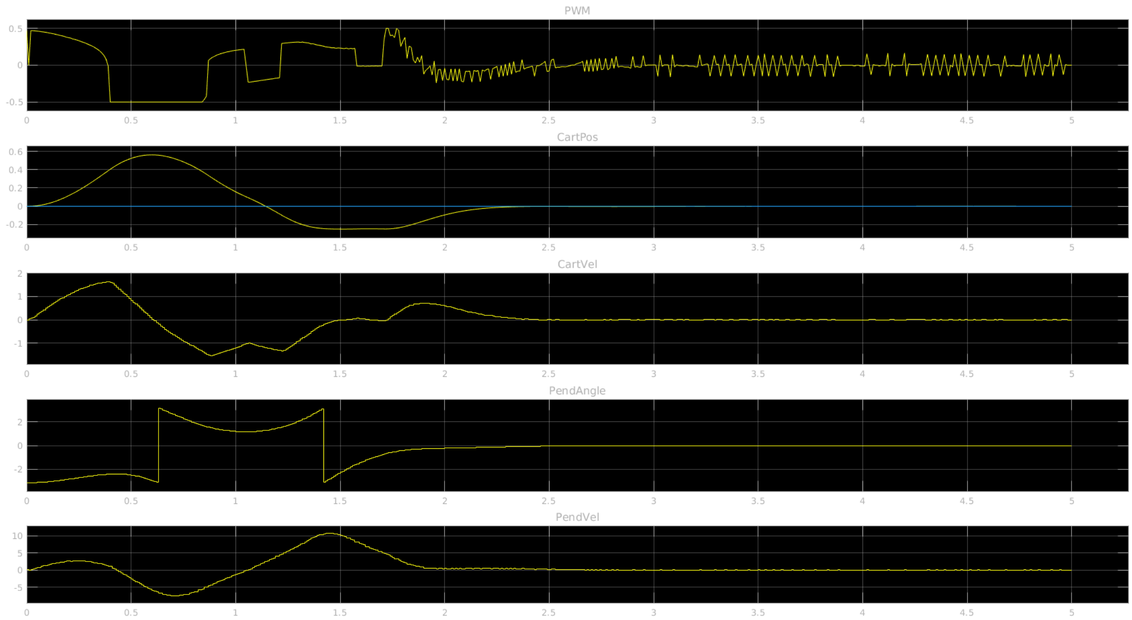

Abb. 7-3.2: Scope des Pendels am Wagen mit schnellem LQ-Regler.