UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Übung 10: Zufallsvariablen und Zufallsprozesse

Alexander Björk, Janis Kaltenthaler

June 30, 2020

Aufgabe 10-1: Statistische Unabhängigkeit (2 Punkte)

Wir berechnen zuerst die Randverteilungsdichtefunktionen $f_X(x)$ und $f_Y(y)$:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\ dy = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-(x+y)}\ dy = e^{-x}, & x \geq \text{ und } y \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\ dx = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-(x+y)}\ dx = e^{-y}, & x \geq \text{ und } y \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Zufallsvariablen X und Y sind genau dann unabhängig, falls $f_X(x) \cdot f_Y(y)$ eine Verbundverteilunsgdichtefunktion von X und Y ist:

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} e^{-x} \cdot e^{-y} = e^{-(x+y)}, & x \geq \text{ und } y \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = f_{XY}(x,y)$$

Da $f_X(x) \cdot f_Y(y) = f_{XY}(x,y)$ gilt, sind die Zufallsvariablen X und Y statistisch unabhängig voneinander.

Aufgabe 10-4: Erwartungswerte von Zufallsprozessen (1,5 Punkte)

a)

Der Erwartungswert $E[Z(t)] = \mu_z$ des Zufallsprozesses $Z(t) = a \cdot X(t) + b \cdot Y$ erhält man wie folgt:

$$E[Z(t)] = a \cdot E[X(t)] + b \cdot E[Y(t)] = 2 \cdot E[X(t)] + 3 \cdot E[Y(t)] = 6$$

Die Varianzen der Zufallsprozesse erhält man wie folgt:

$$\mathrm{Var}[X(t)] = E[X^2(t)] - (E[X(t)])^2 = 6$$
$$\mathrm{Var}[Y(t)] = E[Y^2(t)] - (E[Y(t)])^2 = -1$$

Die Varianz des Zufallsprozesses $Z(t)$ erhält man wie folgt, wobei durch die Unkorreliertheit $\mathrm{Cov}[X(t), Y(t)] = 0$ gilt.

$$\mathrm{Var}[Z(t)] = a^2 \cdot \mathrm{Var}[X(t)] + 2ab \cdot \mathrm{Cov}[X(t), Y(t)] + b^2 \cdot \mathrm{Var}[Y(t)] = 15$$

Das gewöhnliche Moment zweiter Ordnung erhalten wir mithilfe der Varianz und des Erwarungswertes wie folgt:

$$E[Z^2(t)] = \mathrm{Var}[Z(t)] + (E[Z(t)])^2 = 51$$

b)

Da die Erwatungswerte erster und zweiter Ordnung der Zufallsprozesse $X(t)$ und $Y(t)$ invariant gegenüber zeitlicher Verschiebung sind, sind diese schwach stationär.