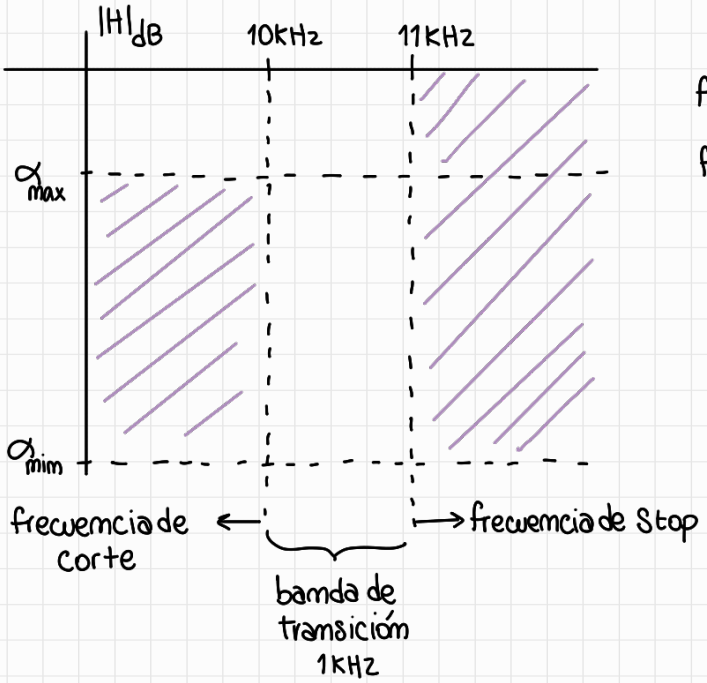
④ Que caract. debe tener un filtro antialias pasa bajos en cuanto a su banda de transición y atenuación para la fnyquist si queremos registrar un ancho de banda de 10kHz muestreando a 22 kHz?



$f_s = 22$ kHz

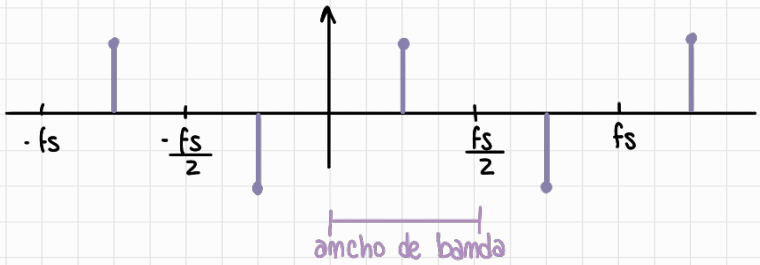
$f_{nyquist} = 11$ kHz $(f_s/2)$

$\alpha_{max} = -3$dB

$\alpha_{min} = -60$ dB

① Explicación del efecto alias. ¿Que vemos cuando no cumplimos Nyquist?

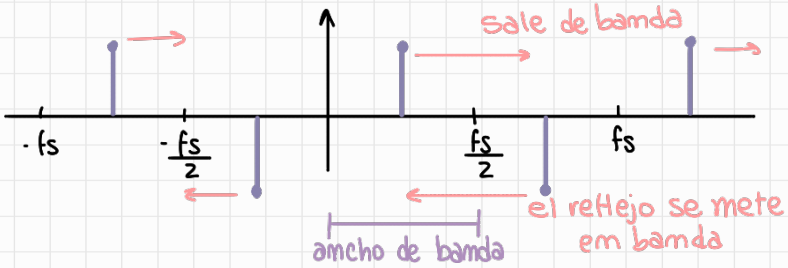
Nyquist: $f_s \geq 2 \cdot f_{max}$
$\frac{f_s}{2} \geq f_{max}$



En este esquema se muestra la FFT de una senoideal de frecuencia $f < \frac{f_s}{2}$

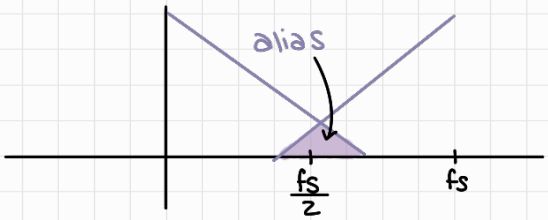
La FFT es simetrica en Magnitud y antisimetrica en fase.

¿Que pasa si la frecuencia de la señal es mayor a $\frac{f_s}{2}$?

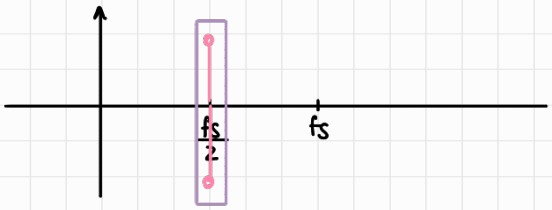


Entonces a una señal de $F > \frac{f_s}{2}$ La voy a ver como de una de $F < \frac{f_s}{2}$ con la fase invertida.

↓ no puedo reconstruir mi señal.



Plus: Porque no puedo analizar nada em f = nyquist?



tengo a la frecuencia original y al espejo em el mismo bim. no puedo distinguirlos. → no puedo reconstruir mi señal.

•) uma señal de F se muestrea Fs . cantidad de muestras x ciclo.

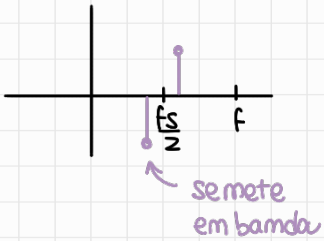
$$\#\text{muestras x ciclo} = \frac{T}{Ts} = \frac{Fs}{F}$$

•) uma señal de 600 Hz se muestrea a 1kHz. ¿Que sucede?

efecto alias

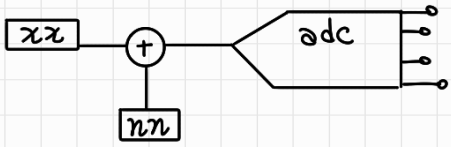
Fnyquist = 500Hz

Se ve como uma señal de frecuencia 400 Hz con la fase invertida.

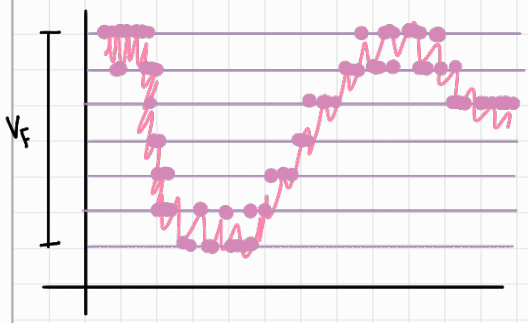


③ Proceso de cuantificación

xx : señal analogica
nn : ruido analogico
↓
gaussiano e incorrelado



¿que hace el adc? digitaliza la señal. ¿como? cuantificando la amplitud.

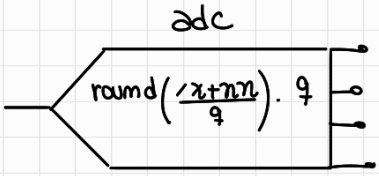


$xx + nn$

• señal cuantizada

V_F = rango de cuantización

el adc encasilla a la señal em 2^B espacios q.



$$q = \frac{V_F}{2^B} \longrightarrow e = \frac{q}{2}$$

Potencia de cuantización : $P_Q = \frac{q^2}{12} = \left(\frac{V_F}{2^B}\right)^2 \cdot \frac{1}{12}$

↓

em la prox explico de donde viene

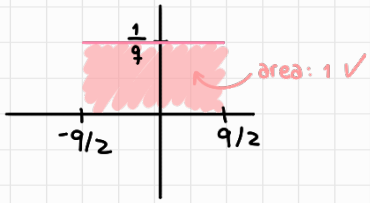
④ Encontrar la relación entre la cantidad B bits del adc y el SNR de la señal digitalizada.

Potencia del ruido = $Var(n_q) = \sigma_{n_q}^2$

$$\sigma_{n_q}^2 = \int_{-q/2}^{q/2} e^2 \cdot P_e(e)\, de = \int_{-q/2}^{q/2} e^2 \cdot \frac{1}{q}\, de = \frac{e^3}{3q}\Big|_{-q/2}^{q/2} = \frac{q^2}{12} = \left(\frac{V_f}{2^B}\right)^2 \frac{1}{12}$$

Función de densidad de probabilidad del error

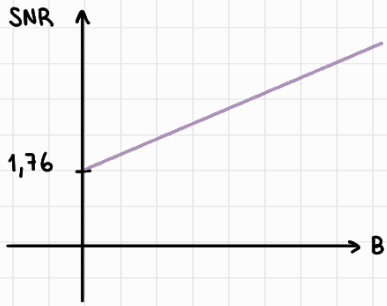
$$P_e(e) = \begin{cases} \frac{1}{q} & -q/2 \le e \le \frac{q}{2} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$



$$SNR = \frac{\text{Pot señal}}{\text{Pot ruido}}$$

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10}\left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_{n_q}^2}\right) = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{\sigma_x^2}{V_f^2} \cdot 2^B \cdot 12\right) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{\partial x}{V_F}\right) + 20\, B \cdot \log_{10}(2) + 10 \log_{10}(12)$$

$$SNR_{dB} = 6{,}02\, B + 1{,}76$$



a mayor B ↓ pot n_q ↑ Pot x

⑤ Si una señal contiene una componente de 50Hz y se muestrea a 200 Hz. en que bin de una dFT de 1024 puntos aparecerá dicha frecuencia.

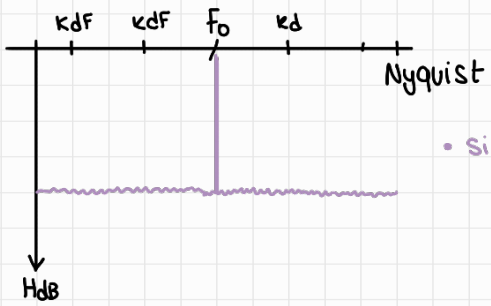
resolución espectral: $dF = \frac{F_s}{N} = \frac{200\,Hz}{1024} = \frac{25}{128}$ Hz

Fnyquist = 100Hz >> 50 Hz cumple teorema.

50 Hz = k . dF siendo k el bin

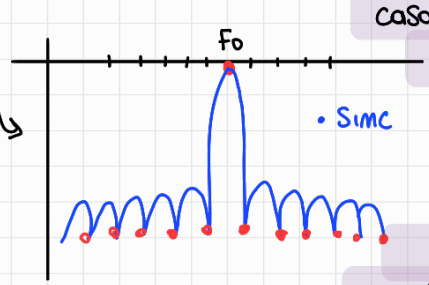
$\frac{50\,Hz}{\frac{25}{128}\,Hz} = 256$ aparecerá en el bin 256

⑤ Explicar el desparramo espectral.

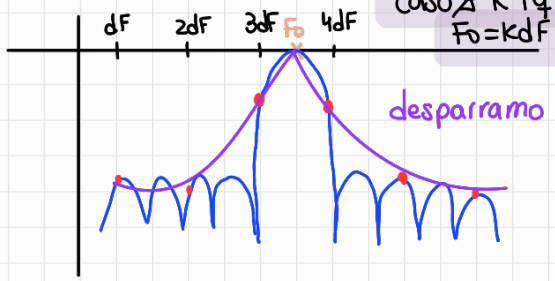


• Sim esparramo espectral

esto es por que quiem interpola los puntos es uma Sinc que aparece debido a la ventana box implicita.



caso $\exists$ k tq $F_o = kdF$ $k \in \mathbb{Z}$



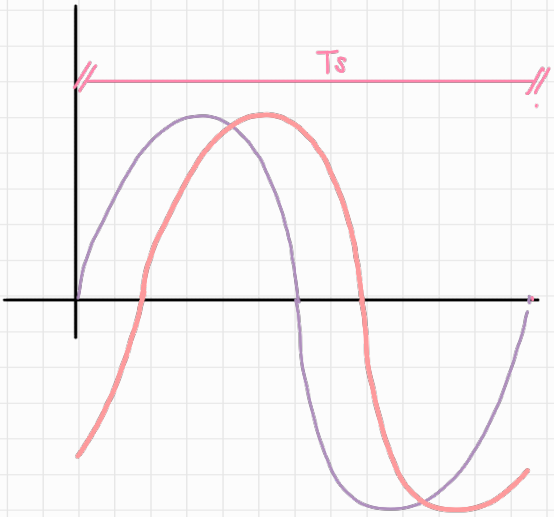
caso $\nexists$ k tq $F_o = kdF$ $k \in \mathbb{Z}$

¿Que es el desparramo espectral?
La energia de uma componte se exparse hacia frecuencias distintas de la suya.
Em lugar de ver um pico perfecto em el bim que corresponde; aparecem lobulos laterales.
¿A que se puede deber?

- La FFT asume que la señal es periodica em Ts.

Si $F_o \neq k \cdot dF$; $dF = \frac{F_s}{N}$ $\wedge$ $k \in \mathbb{Z}$; F_o: Frecuencia de la señal

mo existe bim entero que represente a F_o. Por ello migra a los bimes de al lado.



• Sim esparramo espectral
• Con esparramo espectral

⑥ ¿Que tipo de ventana elijirias Para las siguientes situaciones ...

A. hay 2 senoideales muy proximas y queremos medir la localización de cada frecuencia.

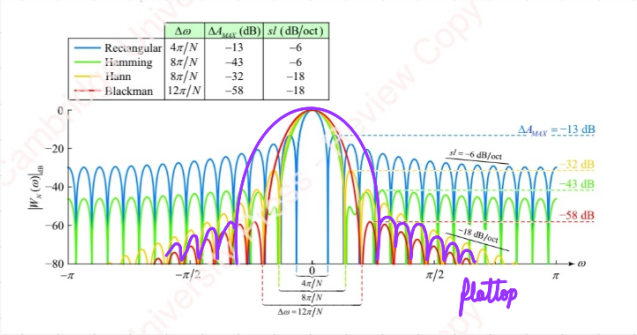
B. hay una señal que tiene energía y la queremos medir pero tenemos insertidumbre en la localización

quiero elejr una ventana.

existen 2 Lineamientos

•) dF (resolución frecuencial) :

Se refiere a la capacidad de distinguir 2 tonos de frecuencia cercanos.



☆ Una buena df implica 1 Lobulo principal estrecho ; permitiendo separar Señales adyacentes

•) Precisión en la medición de amplitud.

☆ se relaciona con el nivel de los Lobulos laterales. Lobulos laterales bajos reducen el esparramo espectral y evitan que la energía en 1 tono fuerte enmascare señales mas débiles.

elejir una ventana es dificil por que mejorar df suele empeorar la amplitud. y viceversa.

Window	ΔF	para medir dF	Lobulos Laterales	Para medir A	Pendiente de caida	Para solucionar desparramo espectral
Boxcar	$2\frac{fs}{N}$	Excelente	-13 dB	Pesima	-6 dB/dec	mala
Hann	$4\frac{fs}{N}$	bien	-31 dB	bien	-12 dB/dec	bien
Hamming	$4\frac{fs}{N}$	bien	-41 dB	muy buena	-12 dB/dec	bien
Blackman	$12\frac{fs}{N}$	mala	-58 dB	excelente	-20 dB/dec	buena
Flattop	$16\frac{fs}{N}$	Pésima	-90 dB	excelente	-50 dB/dec	excelente
Triangular	$4\frac{fs}{N}$	bien	-26 dB	maso	-6 dB/dec	mala

Situación A. La boxcar ofrece mejor df. Pero tiene alto desparramo espectral. Asi que tmb podría pensar elejr Ham o Hamming. Su df esta bien y apasiguan un poco el desparramo espectral.

7 métodos de estimación espectral

densidad espectral de Potencial (La que nosotros queremos estimar) $P_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_x(k) e^{-jk\omega}$

Secuencia de autocorrelación $r_x(k) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n+k) x^*(n)$

Periodograma

- dado um proceso estocastico ; estaciomario, estaciomario em semtido amplio y ergodico

$$\hat{r}_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(m+k) x^*(m)$$

al hacer la convolución estre x y sigo misma. Tmb estoy haciendo la convolución delas 2 ventamas implicitas de cada señal. La convolución de 2 Boxcar resulta em uma triangular.

es el módulo de la DFT al cuadrado de x[m]

$$\hat{P}_{per}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \hat{r}_x(k) e^{-jkW} = \frac{1}{N} X_N(e^{jW}) X_N^*(e^{jW}) = \frac{1}{N} \left| X_N(e^{jW}) \right|^2$$

$$E(\hat{P}_{per}) = \frac{1}{2\pi} P(e^{j\omega}) * W_B(e^{j\omega})$$

ventama △

→ el estimador tieme sesgo. Pero

$$\lim_{N \to \infty} W_B[k] = \lim_{N \to} 1 - \frac{k}{N} = 1$$

asimtoticamente imsesgado

$$\lim_{N \to \infty} Var(\hat{P}_{per}) = \sigma_x^4 \neq 0$$

Lo que lo convierte em um mal estimador

Periodograma modificado

Ventamear

- Ventamear a la señal. Para evitar que aparezca Barlet.

$$X_N = x(m).w(m)$$

$$\hat{P}_M(e^{jw}) = \frac{1}{N}\left|X_N(e^{jw})\right|^2 = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m)\, w_R(m)\, e^{-jmw}\right|^2 . \frac{1}{U}$$

$$U = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} |w(m)|^2$$

es un factor de escala. La ventana Le quita energía a la señal.

La resolución depende de la Ventana

$$E\{\hat{P}_M\} = \frac{1}{2\pi N U} P_x(e^{jw}) * |W(e^{jw})|^2$$

ya no es la Δ; es la que yo quiera

no mejora mucho la verdad.

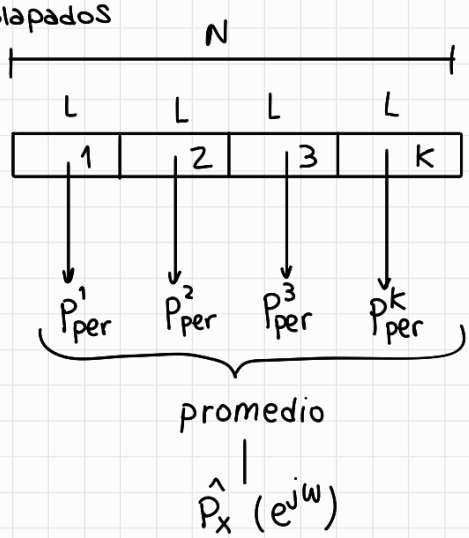
$$Var\{\hat{P}_M\} \approx Var\{\hat{P}_{per}\}$$

metodo de Barlet : asume ergodicidad

Promediar

- dadas N muestras; Las dividimos en $\underbrace{\text{k bloques}}_{\text{no solapados}}$ de duración L.

$$\boxed{N = k.L}$$



$$\hat{P}^{(i)}_{per}(e^{jw}) = \frac{1}{L}\left|\sum_{n=0}^{L-1} x_i(m)\, e^{-jmw}\right| \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

$$\hat{P}_x(e^{jw}) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} P^{(i)}_{per}(e^{jw})$$

promediar bloques mejora la varianza pero empeora La resolución

$$Var\{\hat{P}_B(e^{jw})\} \approx \frac{1}{k} P_x^2(e^{jw})$$

cuanto mayor sea k
menor es L
peor es la resolución espectral
mejor es la varianza

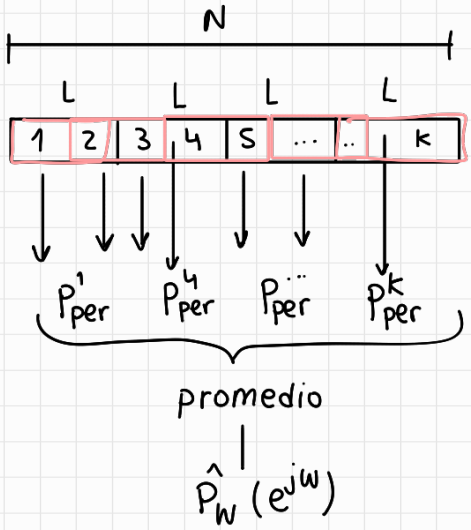
Ventamear → reduce sesgo

Promediar → reduce varianza

metodo de welch

Ventamear Solapado y Promediar

$$\hat{P}_W(e^{jw}) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} \underbrace{P_M^{(i)}}_{\text{Periodograma modificado}} (e^{jw})$$



Tipicamente se usa solapamiento del 50%

$$P_W(e^{jw}) = \frac{1}{KLU} \sum_{i=0}^{K-1} \left| \sum_{m=0}^{L-1} w(m)x(m+i\Delta)e^{-jw} \right|^2$$

$$U = \frac{1}{L} \sum_{m=0}^{L-1} |w(m)|^2$$

$$E\{\hat{P}_W\} = \frac{1}{2\pi LU} P_x(e^{jw}) * |W(e^{jw})|^2$$

$$Var\{\hat{P}_W\} \approx \frac{9}{16} \frac{L}{N} P_x^2(e^{jw})$$

La var se reduce casi un 50%

método de blackman Tuckey

em vez de estimar $\hat{P}$ via FFT ; intenta mejorar la secuencia de autocorrelación

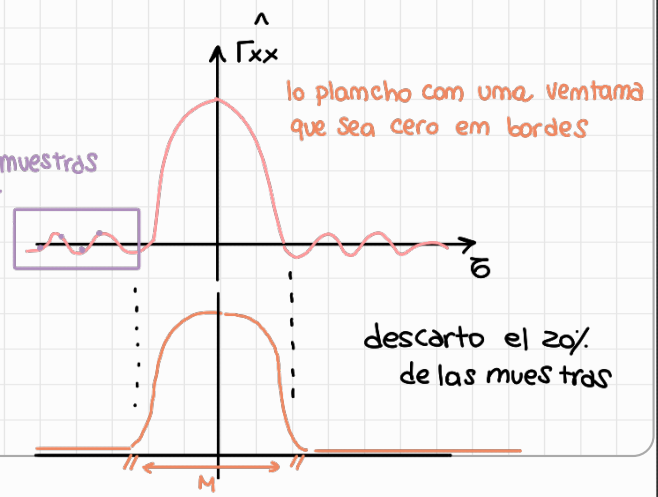
$$\hat{P}_{BT}(e^{jw}) = \sum_{k=-M}^{M} \hat{r}_x(k) w(k) e^{-jk}$$

N : tamaño de la señal
M : tamaño de la ventana

$$E\{P_{BT}\} \approx \frac{1}{2\pi} P_x(e^{jw}) * W(e^{jw})$$

ventameo la secuencia de correlación

$$Var\{\hat{P}_{BT}\} \approx P_x^2(e^{jw}) \frac{1}{N} \sum_{k=-M}^{M} w^2(k)$$



porser autocorrelación tengo pocas muestras em bordes

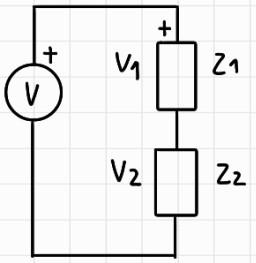
EJERCICIOS de Filtros Pasivos

impedancia $\infty \rightarrow$ circuito abierto

impedancia $0 \rightarrow$ corto circuito

$Z_R = R \qquad Z_C = \frac{1}{sC} \qquad Z_L = sL \quad ; \quad s = j\omega$

divisor de impedancias



$$V_1 = V \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

$$V_2 = V \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

elementos de emergía almacemada < inductor / capacitor

Filtros
- 1er ordem : tiemem 1 solo elemento de emergía almacemadda
- 2do ordem : tiemem 2.

ordem de um filtro: grado del demominador de $H(s)$

Fumciom de Transferencia

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \qquad Y(s) = 0 \quad \text{Polos} \qquad X(s) = 0 \quad \text{Polos}$$

$$|H(s)|_{dB} = 20 \cdot \log_{10} |H|$$

el ordem del filtro determima la pemdiemte maxima em dB/dec dela atemuaciom

$m = 1 \rightarrow -20$ dB/dec

$m = 2 \rightarrow -40$ dB/dec

$m = 3 \rightarrow -60$ dB/dec

Filtros Pasivos $|H(s)| \leq 1$

Filtros activos $\frac{|H(s)|}{|H_0|} \leq 1$

Filtros de 1er ordem : solo hay 2 RL y RC

expresión general de H(S) $\rightarrow$ $H(S) = H_0 \cdot \dfrac{Y(S)}{1 + \frac{S}{\omega_c}}$

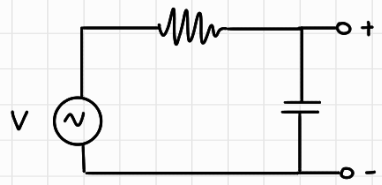
Filtro Pasa bajos $\begin{cases} RC \\ LR \end{cases}$ Filtro Pasa altos $\begin{cases} CR \\ RL \end{cases}$

omega de corte

$|H(\omega_c)| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$|H(\omega_c)|_{dB} = -3dB$

RC



$$H(S) = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} = \frac{\frac{1}{SC}}{\frac{1}{SC} + R} = \frac{1}{1 + SCR}$$

$\frac{S}{\omega_c} \rightarrow \omega_c = \frac{1}{RC}$

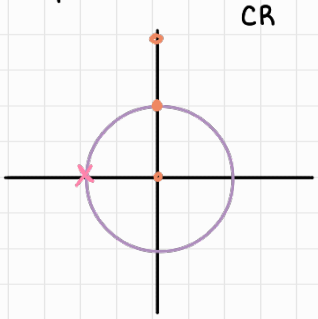
$\lim_{w \to 0, \infty} Z_R = Z_R$

$\lim_{w \to 0} Z_C = \infty$ pasa bajos

$\lim_{w \to \infty} Z_C = 0$

no tiene ceros

tiene 1 polo: $S = \dfrac{-1}{CR}$



$S = 0$ $|H| = 1$

$S = \frac{1}{CR} j$ $|H| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

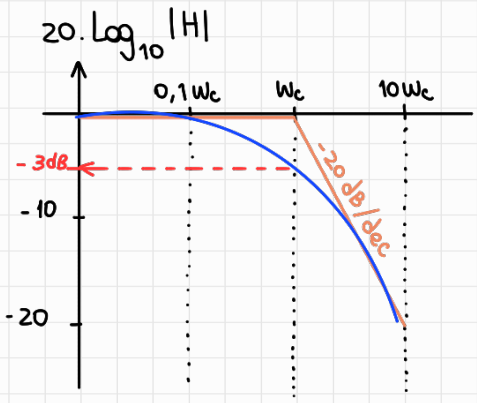
$\lim_{w \to +\infty} wj = \infty$ $|H| \rightarrow 0$

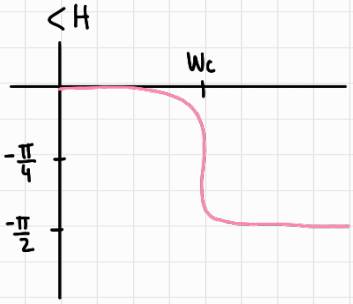
$\sum \varnothing_{ceros} - \sum \varnothing_{polos}$

$S = 0$ Fase $= 0$

$S = \frac{1}{CR}$ Fase $= -\frac{\pi}{4}$

$S \rightarrow +\infty j$ Fase $= -\frac{\pi}{2}$



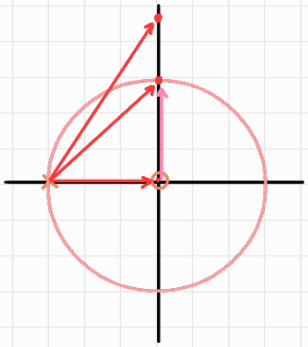


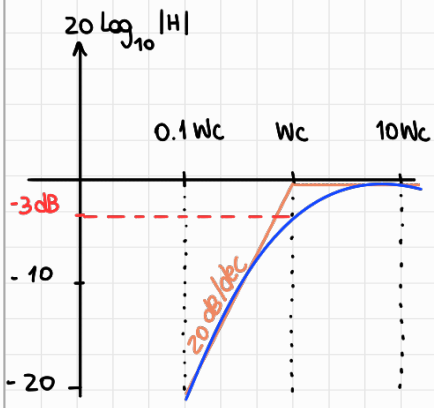
RL

$$H(s) = \frac{Z_L}{Z_L + Z_R} = \frac{sL}{R + sL} = \frac{\frac{sL}{R}}{1 + s\frac{L}{R}} \qquad W_c = \frac{R}{L}$$

Ceros : $S = 0$

Polos : $S = -\frac{R}{L}$





$W = 0 \qquad \frac{0}{1} \cdot CR = 0$

$W = \frac{1}{CR} \qquad \frac{CR}{CR} = 1$

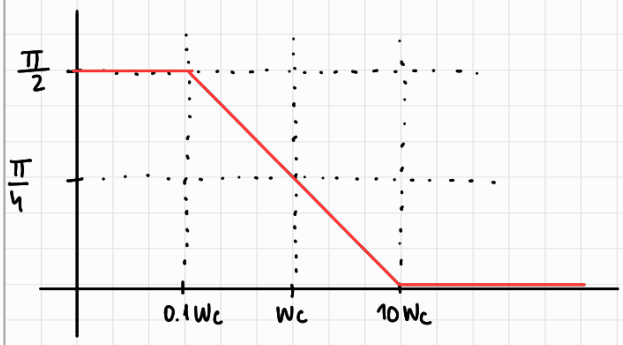
$W \to +\infty \qquad \longrightarrow 1$

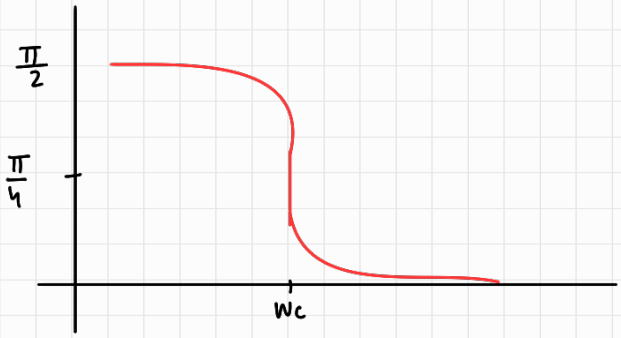
Fase

$W = 0 \qquad \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

$W = \frac{1}{CR} \qquad \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

$W \to +\infty \qquad \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$





Filtros de 2do ordem :

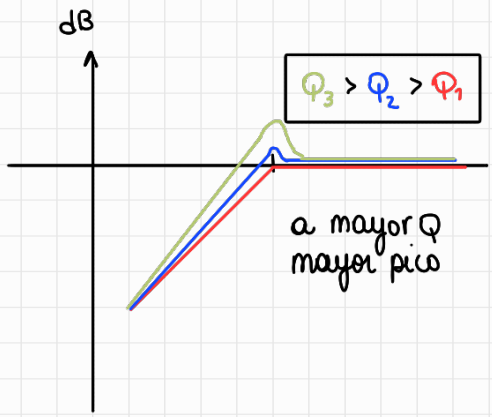
expresión general de H(S) $\rightarrow$ $H(S) = \dfrac{H_0 \cdot Y(s)}{S^2 + \frac{S\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$

omega de resonancia ω_0

Factor de calidad Q

Filtro Pasa bajos; Pasa altos; pasa banda, notch

¿Que es Q?



Polos de H(S)

$$S = \frac{-1/Q \pm \sqrt{1/Q^2 - 4}}{2/\omega_0}$$

Polos reales y distintos

$$\frac{1}{Q^2} - 4 > 0 \rightarrow Q < \frac{1}{2} \rightarrow S_{1,2} = \omega_0 \left[-\frac{1}{2Q} \mp \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \right]$$

Polos reales e iguales

$$\frac{1}{Q^2} - 4 = 0 \rightarrow Q = \frac{1}{2} \rightarrow S_1 = S_2 = \frac{-\omega_0}{2Q}$$

complejos conj

$$\frac{1}{Q^2} - 4 < 0 \rightarrow Q > \frac{1}{2} \rightarrow S_{12} = \omega_0 \left[-\frac{1}{2Q} \pm j \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \right]$$

este caso vimos nostros!

Subamos tiguado

Vale $Q = \dfrac{1}{2\cos\varphi}$

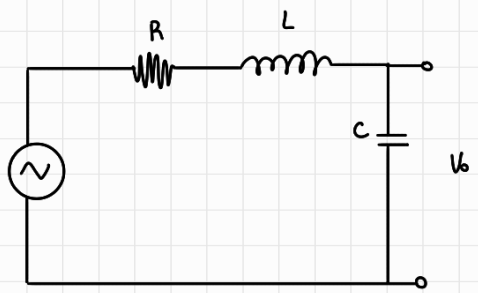
diag. de polos y ceros

conrespecto a Y(s) la clave es plamtear

$Y(S) = S^2 + \frac{\omega_0 S}{Q} + \omega_0^2$ y de acuerdo

a la situación ver que cambiar.

pasa bajo : $\boxed{RLC}$



$$H(s) = \frac{Z_C}{Z_R + Z_L + Z_C} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{s^2LC + sRC + 1}$$

$$\frac{1}{\omega_0^2} = LC \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\frac{1}{Q\omega_0} = RC \rightarrow Q = \frac{1}{\omega_0 RC}$$

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

no tiene ceros

polos : $s^2LC + sRC + 1 = 0$

$$\frac{-R \pm \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L}$$

Solo calculo el 3er caso

$$R^2 - \frac{4L}{C} < 0$$

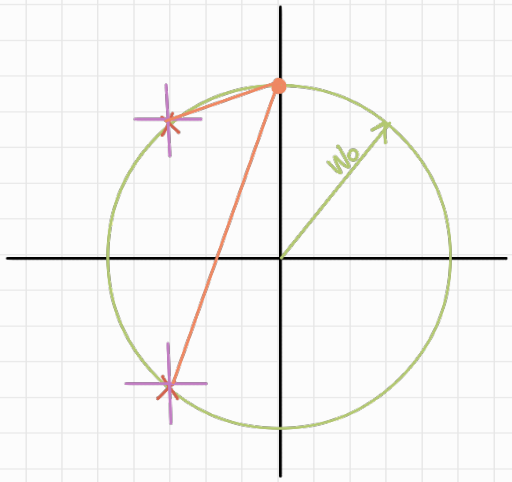
$$R^2 < \frac{4L}{C}$$

$$|H(s)| = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + \frac{s}{Q\omega_0} + 1} \rightarrow |H| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2}}}$$

$|H(0)| = 1$

$|H(\omega_0)| = Q$

ω_j

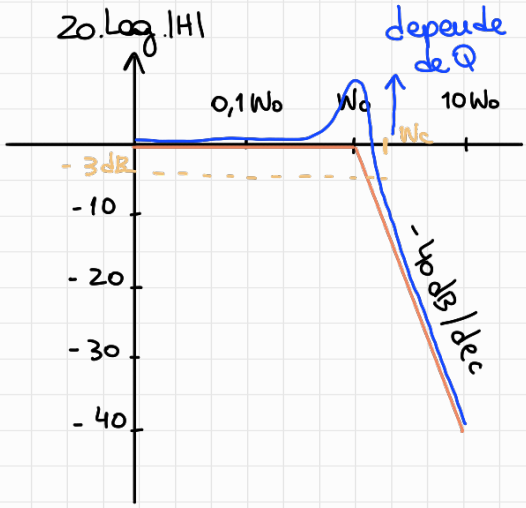


Metodo gráfico

$\omega = 0 \longrightarrow |H| = 1$

$\omega = \omega_0 \longrightarrow |H| = Q$

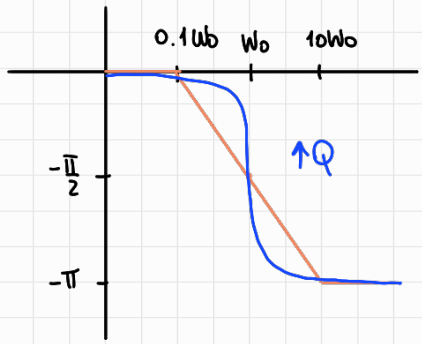
$\omega \to \infty \longrightarrow |H| \to 0$



$\omega = 0 \quad (\ ) - 0 = 0$

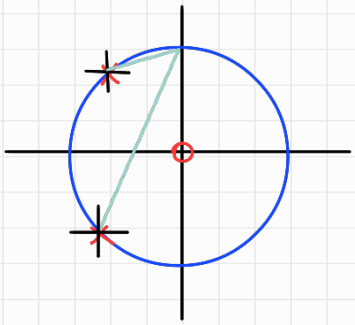
$\omega = \omega_0 \quad (\ ) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

$\omega \to \infty \quad (\ ) - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\pi$



EJERCIOS Solo del método gráfico (solo de diagramas de Polos y ceros)

a)



es de 2do orden ya que has mas de 1 polo

Forma de Filtro de 2do orden

$$H(s) = \frac{\cancel{s^2} + \frac{W_0 s}{Q} + \cancel{W_0^2}}{s^2 + \frac{W_0 s}{Q} + W_0^2}$$

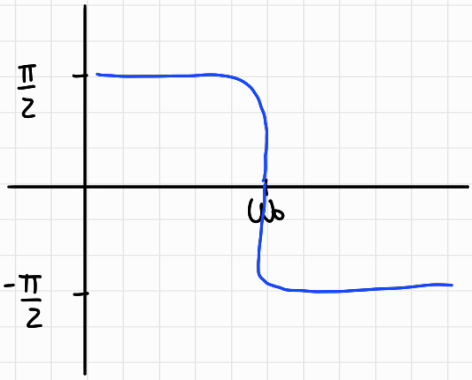
$$H(s) = \frac{\frac{W_0}{Q} s}{s^2 + \frac{W_0}{Q} s + W_0^2}$$

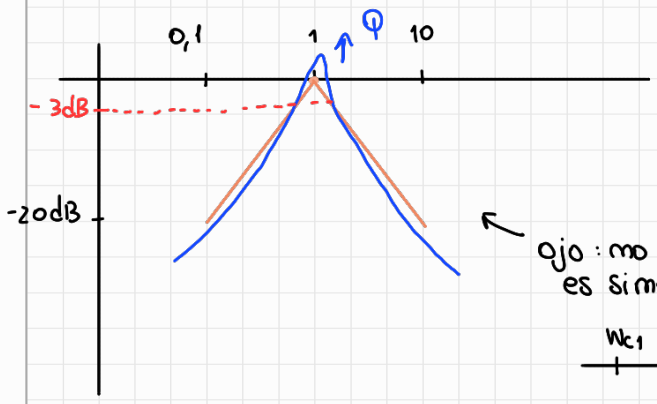
$$H(s) = \frac{|1| . e^{<}}{|1| e^{<} |1| e^{<}}$$

si $w = 0$ $|H| = 0$ $\quad < H = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

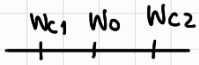
si $w = W_0$ $|H| = 1$ $\quad < H = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$

si $w \to +\infty$ $|H| = 0$ $\quad < H = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$





ojo: no siempre es simetrico



Ancho de Banda: $W_{c2} - W_{c1} = \Delta W$

Segun PDF $\Delta W = \frac{W_0}{Q}$ a mayor Q menor Banda