

CB223 620887

S.No. 8675 T

22 SCCMM 13

(For candidates admitted from 2022-2023 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, APRIL 2025.

Part III — Mathematics – Major

COMPLEX ANALYSIS

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — (20 Marks)

Answer ALL the questions.

I. (A) Choose the correct answer. (5 × 1 = 5)

1. f மற்றும் g ஆகிய சார்புகள், z_0 எனும் புள்ளியில் தொடர்ச்சியானவை எனில், தவறான கூற்று எது?

(அ) $f + g$ z_0 இல் தொடர்ச்சியானது

(ஆ) f z_0 இல் தொடர்ச்சியானது

(இ) $\operatorname{Re} f$ z_0 இல் தொடர்ச்சியானது

(ஈ) $\operatorname{Im} f$ z_0 இல் தொடர்ச்சியானது அல்ல

If f and g are continuous at z_0 , then which one of the following is false?

- (a) $f + g$ is continuous at z_0
- (b) f is continuous at z_0
- (c) $\operatorname{Re} f$ is continuous at z_0
- (d) $\operatorname{Im} f$ is not continuous at z_0

2. $w = bz$ ($b < 1$, $\operatorname{Im} b \neq 0$) என்பது எவ்வகை உருமாற்றத்தைக் குறிக்கும்?

- (அ) ஊர்சி (ஆ) சுருக்கம்
- (இ) சுழற்சி (ஈ) மொழிபெயர்ப்பு

The transformation $w = bz$ ($b < 1$, real) is called

- (a) Magnification (b) Contraction
- (c) Rotation (d) Translation

3. _____ என்றால் மற்றும் இருதரால் மட்டுமே $\int p dx + q dy$ என்பது முடிவுப்படுவதெனச் சான்றது

இருக்கும்.

- (அ) தொகையீட்டுத் தொகை சுத்த மெய்யாக இருத்தல்
- (ஆ) தொகையீட்டுத் தொகை தூல்லியமாக இருத்தல்

- (இ) (அ) மற்றும் (ஆ) இரண்டும்
- (ஈ) மேற்கூறிய எதுவுமில்லை

2 S.No. 8675 T

$\int p dx + q dy$ depends only on the end points if and

only if

- (a) the integral is purely real
- (b) the integral is exact
- (c) both (a) and (b)
- (d) none of the above

4. பூஜ்யத்தைப் பொறுத்து $f(z)$ இன் மெய் தொகை விரிவாக்கம் _____ எனப்படும்.

- (அ) லாரென்டஸ் தொடர்
- (ஆ) மெக்லாரின் தொடர்
- (இ) கோசி தொடர்
- (ஈ) மேற்கூறிய எதுவுமில்லை

Taylor's series expansion of $f(z)$ about the point zero is called

- (a) Laurent's series (b) Maclaurin series
- (c) Cauchy's series (d) None of the above

5. $z = 0$ ஐ பொறுத்து $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$ இன் எகம்

- (அ) 1 (ஆ) 0
- (இ) -1 (ஈ) 2

The residue of $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$ at $z = 0$ is

- (a) 1 (b) 0
- (c) -1 (d) 2

3 S.No. 8675 T

(B) Fill in the blanks : (5 × 1 = 5)

6. $\lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^2 - 4}{z - 2}$ இன் மதிப்பு _____.
- $\lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^2 - 4}{z - 2}$ is given by _____.
7. மோபியஸ் உருமாற்றத்தின் சமன்பாடு _____.
Mobius transformation is given by _____.
8. $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq$ _____.
- $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq$ _____.
9. e^z இன் மெக்லாரின் தொடர் _____.
The Maclaurin's series of e^z is given by _____.
10. தனிமைப்படுத்தப்பட்ட ஒருமைப்பாடு $z = a$ ஐப் பொறுத்து $f(z)$ இன் எச்சமானது, a வை பொறுத்து $f(z)$ இன் லாரென்ட்ஸ் தொடர் விரிவாக்கத்தின் _____ என வரையறுக்கப்படுகிறது.
Residue of $f(z)$ at an isolated singularity $z = a$ is defined to be the _____ in Laurent's series expansion of $f(z)$ about ' a '.

II. Answer ALL the questions. (5 × 2 = 10)

11. சார்பின் எல்லை - வரையறு.
Define limit of a function.
12. $w = \frac{1+z}{1-z}$ எனும் உருமாற்றத்தின் மாறாப்புள்ளிகளை காண்க.
Find the invariant points of the transformation $w = \frac{1+z}{1-z}$.
13. கோசியின் தொகையீட்டுச் சூத்திரத்தை எழுதுக.
State Cauchy's integral formula.
14. $f(z) = \frac{z^3 - 1}{z^3 + 1}$ இன் அனைத்து பூஜ்யங்களைக் காண்க.
Find all the zeroes of $f(z) = \frac{z^3 - 1}{z^3 + 1}$.
15. வாதக்கோட்பாட்டை கூறுக.
State Argument theorem.

PART B — (5 × 5 = 25)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) $f(z)$ ஒரு வேறுபடுத்தக்கூடிய சார்பு எனில் CR சமன்பாட்டை $f_z = 0$ என எழுத முடியும் என நிறுவுக.

Prove that if $f(z)$ is a differentiable function, then CR equation can be put in the form $f_z = 0$.

Or

- (ஆ) $e^{-x}[2xy \cos y + (y^2 - x^2)] \sin y$ என்பதை கற்பனைக் கூறாக கொண்ட பகுமுறை சார்பின் மெய்கூறை காண்க.

Find the real part of an analytic function whose imaginary part is $e^{-x}[2xy \cos y + (y^2 - x^2)] \sin y$.

17. (அ) $w = iz + i$ என்ற உருமாற்றத்தின் கீழ் $x > 0$ எனும் அரைவரிமாணம், $v > 1$ என்ற அரைவரிமாணத்தின் மீது விவரணையாகிறது என நிரூபி.

Show that the half plane $x > 0$ maps onto the half plane $v > 1$ under the transformation $w = iz + i$.

Or

6

S.No. 8675 T

- (ஆ) $w = -i, -1, i$ ஆகிய புள்ளிகள் மேல்கோர்க்கும், $z = -1, 1, \infty$ எனும் புள்ளிகளின் இருவழி நேரியல் உருமாற்றத்தைக் காண்க.

Find the bilinear transformation which maps the points $z = -1, 1, \infty$ respectively on $w = -i, -1, i$.

18. (அ) நிறுவுக : $\int_c f(z) dz = - \int_{-c} f(z) dz$.

Prove : $\int_c f(z) dz = - \int_{-c} f(z) dz$.

Or

- (ஆ) c என்பது $|z| = 2$ எனும் நேர்மறை நோக்கிய வட்டம் எனில், $\int_c \frac{z dz}{z^2 - 1}$ ஐ மதிப்பிடுக.

Evaluate $\int_c \frac{z dz}{z^2 - 1}$ where c is a positively oriented circle $|z| = 2$.

7

S.No. 8675 T

19. (அ) $z = \pi/2$ எனும் புள்ளியைப் பொறுத்து

$\cos z$ இன் டெய்லர் தொடர் விரிவாக்கத்தையும் அதன் குவி மண்டலத்தையும் காண்க.

Expand $\cos z$ into a Taylor series about the point $z = \pi/2$ and determine the region of convergence.

Or

(ஆ) $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ என்றால் மற்றும் இருந்தால் மட்டுமே $f(z)$ இன் தனிமைப்படுத்தப்பட்ட ஒருமைப்பாடு ' a ' துருவமாக இருக்கும் என நிறுவுக.

Prove that an isolated singularity ' a ' of $f(z)$ is a pole $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$.

20. (அ) $\frac{z+1}{z^2-2z}$ இன் எச்சத்தை அதன் துருவங்களில் கணக்கிடுக.

Calculate the residue of $\frac{z+1}{z^2-2z}$ at its poles.

Or

(ஆ) மதிப்பிடுக $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\sin\theta}$.

Evaluate: $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\sin\theta}$.

PART C — (3 × 10 = 30)

Answer any THREE questions.

21. துருவ ஆயத்தொலைவுகளில் கோசி-ரீமான் சமன்பாட்டை எழுதி நிரூபி.

State and prove Cauchy-Riemann equations in polar coordinates.

22. இருவழி நேரியல் சமன்பாடு குறுக்கு விகிதத்தை பாதுகாக்கிறது என நிரூபி.

Prove that any Bilinear transformation preserves cross ratio. —

23. கோசி தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

State and prove Cauchy's theorem.

24. $\frac{-1}{(z-1)(z-2)}$ இன் அடுக்குத்தொடர் விரிவாக்கத்தை $|z| < 1$ எனும் பகுதியில் காண்க.

Expand $\frac{-1}{(z-1)(z-2)}$ as a power series in z in the region $|z| < 1$,

25. விளிம்பு தொகையீட்டை பயன்படுத்தி $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{13 + 5 \sin \theta}$ ஐ கணக்கிடுக.

Using contour integration, evaluate $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{13 + 5 \sin \theta}$.

$$z = \frac{1}{2}$$