CB22S620887

S.No. 8674 T **22 SCCMM 12**

(For candidates admitted from 2022-2023 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, APRIL 2025.

Part III — Mathematics — Major

LINEAR ALGEBRA

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (20 marks)

Answer ALL questions.

I. (A) Choose the best answer : $(5 \times 1 = 5)$

1. F எனும் களத்தின் உறுப்புகள் ———— எனப்படும்.

   (அ) ஸ்கேலார்

   (ஆ) திசையெண்

   (இ) அடிக்கணம்

   (ஈ) மேற்கூறிய எதுவுமில்லை

   The elements of the field F are called ————.

   (a) Scalars (b) Vectors

   (c) Basis (d) None of the above

2. $T : V \to W$ எனும் நேரியல் உருமாற்றம் ஒருமையற்ற அணியாக இருக்கவேண்டுமெனில் T ________ ஆக இருக்க வேண்டும்.

(அ) ஒன்றுக்கு ஒன்றாக (ஆ) மேல் சார்பு
(இ) மாறிலி (ஈ) முற்றொருமை

The linear transformation $T : V \to W$ in non-singular if T is ________.

(a) One-one (b) Onto
(c) Constant (d) Identify

3. கலப்பெண் களத்தின் மீதமைந்த உட்பெருக்கல் வெளி ________ எனப்படும்.

(அ) யூக்ளிடியன் வெளி (ஆ) வெற்று வெளி
(இ) யூனிட்டரி வெளி (ஈ) வெக்டர் வெளி

An Inner product space over the field of Complex Numbers is known as ________.

(a) Euclidean space (b) Null space
(c) Unitary space (d) Vector space

4. $A = (a_{ij})$ எனும் சதுர அணி சமச்சீராக இருக்க நிபந்தனை

(அ) $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$ (ஆ) $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$
(இ) $a_{ii} = 0, \forall_i$ (ஈ) $a_{ij} = 0, \forall i, j$

A square matrix $A = (a_{ij})$ is said to be symmetric if

(a) $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$ (b) $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$
(c) $a_{ii} = 0, \forall_i$ (d) $a_{ij} = 0, \forall i, j$

5. A இன் சிறப்பியல்பு மூலம் 0 ஆக இருக்க தேவையான போதுமான நிபந்தனை ________.

(அ) A ஒருமையாக இருத்தல்
(ஆ) A ஒருமையற்றதாக இருத்தல்
(இ) A சமச்சீராக இருத்தல்
(ஈ) A தலைகீழாக இருத்தல்

Zero is an Eigen value of $A \Leftrightarrow A$ is

(a) Singular (b) Non Singular
(c) Symmetric (d) Invertible

(B) Fill in the blanks. $(5 \times 1 = 5)$

6. $T_{(V)} = 0, \quad \forall v \in V$ என வரையறுக்கப்பட்ட $T : V \to W$ என்பது ________ நேரியல் உருமாற்றம் என அழைக்கப்படுகிறது.

$T : V \to W$ defined by $T_{(V)} = 0, \quad \forall v \in V$ is called a ________ linear transformation.

7. F என்ற களத்தின் மீதமைந்த ஒரே பரிமாணம் உடைய இரு வெக்டர் வெளிகள் ________ ஆகு இருக்கும்.

Any two vector spaces of the same dimension over a field F are ________.

8. $V_3(\mathbb{R})$இன் இயல் அடிக்கணம் __________.

Standard basis of $V_3(\mathbb{R})$ is __________.

9. $\overline{A}^T$ என்பது அணி A இன் __________ என அழைக்கப்படுகிறது.

$\overline{A}^T$ is called the __________ of the matrix A.

10. சமன்பாடு $|A - xI| = 0$ என்பது A இன் __________ என அழைக்கப்படுகிறது.

The equation $|A - xI| = 0$ is called the __________ of A.

II. Answer ALL questions. (5 × 2 = 10)

11. நேரடித் தொகை – வரையறு.

Define Direct Sum.

12. T இன் தரம் – வரையறு.

Define Rank of T.

13. நெறிம அலகு செங்குத்து கணம் – வரையறு.

Define Orthonormal set.

14. A மற்றும் B ஆகியவை ஒத்த அணிகள் எனில், அவற்றின் அணிக்கோவைகள் ஒரே மதிப்புடையவை என நிறுவுக.

If A and B are Similar Matrices, then show that their determinants are same.

15. A மற்றும் A^T ஆகியவற்றின் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் ஒரே மதிப்புடையவையாக இருக்கும் என நிறுவுக.

Show that the eigen values of A and A^T are same.

PART B — (5 × 5 = 25)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) வெக்டர் வெளியின் இரு உட்வெளிகளின் வெட்டு ஒரு உட்வெளி என நிறுவுக.

Prove that the Intersection of two subspaces of a vector space in a subspace.

Or

(ஆ) $T(a,b)=(2a-3b,\ a+4b)$ என வரையறுக்கப்பட்ட $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ என்பது ஒரு நேரியல் உருமாற்றம் என நிரூபி.

Prove that $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ defined by $T(a,b) = (2a - 3b,\ a + 4b)$ is a linear transformation.

17. (அ) $V_3(\mathbb{R})$இல், $(1,2,1), (2,1,0)$ மற்றும் $(1,-1,2)$ ஆகிய வெக்டர்கள் நேரியல் சார்பற்றவை என நிரூபி.

Prove that in $V_3(\mathbb{R})$, the vectors $(1,2,1), (2,1,0)$ and $(1,-1,2)$ are linearly independent.

Or

(ஆ) V என்பது $\mathbb{R}[x]$ இன் $\leq n$ அளவைக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கணம் ஆகும். $T : V \to v$ என்பது $T(f) = \frac{df}{dx}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில் T இன் பரிமாணம், தரம் மற்றும் பூஜ்யத்தை காண்க.

Let V denote the set of all polynomials of degree $\leq n$ in $\mathbb{R}[x]$. Let $T : V \to v$ be defined by $T(f) = \frac{df}{dx}$. Find Dimension, rank and Nullity of T.

18. (அ) உட்பெருக்கல் வெளியை எடுத்துகாட்டுடன் வரையறு.

Define Inner product space with an example.

Or

(ஆ) V என்பது முடிவுள்ள பரிமாணமுடைய உட்பெருக்கல் வெளி. W என்பது V இன் உட்வெளி எனில் $(W^{\perp})^{\perp} = W$ என நிரூபி.

Let V be a finite Dimensional Inner product space. Let W be a sub space of V. Then prove that $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

19. (அ) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ எனும் அணி $A(A - I)(A + 2I) = 0$ என்ற சமன்பாட்டை திருப்திபடுத்துகிறது என நிரூபி.

Show that the matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ satisfies the equation $A(A - I)(A + 2I) = 0$.

Or

(ஆ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ என்ற அணியை அதன் நியமன வடிவிற்கு சுருக்குக.

Reduce the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ to its canonical form.

20. (அ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ என்ற அணிக்கு கெய்லி-ஹாமில்டன் தேற்றத்தை சரிபார்க்க.

Verify Cayley-Hamilton's theorem for the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Or

(ஆ) P மற்றும் A ஆகியவை $n \times n$ அணிகள் மற்றும் P ஒரு ஒருமையற்ற அணி எனில், A மற்றும் $P^{-1}AP$ ஆகியவை ஒரே மதிப்பிலான சிறப்பியல்பு மூலங்களைக் கொண்டவை என நிரூபி.

If P and A are $n \times n$ matrices and P is a non-singular matrix, then prove that A and $P^{-1}AP$ have same eigen values.

PART C — (3 × 10 = 30)

Answer any THREE questions.

21. செயலொப்புமையின் அடிப்படைத் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

State and Prove fundamentals theorem of homomorphism.

22. V மற்றும் W ஆகியவை F இன் மீதமைந்த வெக்டர் வெளிகள் மற்றும் $T : V \to W$ என்பது சமவுருவுடைமையாக இருக்குமெனில், V இன் அடிக்கணம் W வின் அடிக்கணத்தின் மேல் விவரணைகிறது என நிரூபி.

Let V and W be vector spaces over a field F. Let $T : V \to W$ be an Isomorphism. Then prove that T maps a basis of V onto a basis of W.

23. உட்பெருக்கல் வெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட நெறிமத்தின் பண்புகளை எழுதி நிரூபி.

State and Prove the properties of Norm defined in an Inner product space.

24. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தலைகீழ் காண்க.

Compute the Inverse of the Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

25. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் சிறப்பியல்பு மூலங்களையும், சிறப்பியல்பு வெக்டர்களையும் காண்க.

Find the Eigen Values and Eigen Vectors of the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
