

(For candidates admitted from 2022–2023 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, APRIL 2025.

Part III — Mathematics — Major

INTEGRAL CALCULUS AND FOURIER SERIES

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — (20 marks)

I. (A) Choose the correct answer : (5 × 1 = 5)

1. $f(x)$ என்பது ஒற்றைச்சார்பு எனில் $\int_{-a}^a f(x) dx =$

(அ) $2 \int_0^a f(x) dx$

(ஆ) 0

(இ) $\int_0^{2a} f(x) dx$

(ஈ) $\frac{1}{2} \int_0^{2a} f(x) dx$

If $f(x)$ is an odd function of n , $\int_{-a}^a f(x) dx =$

(a) $2 \int_0^a f(x) dx$

(b) 0

(c) $\int_0^{2a} f(x) dx$

(d) $\frac{1}{2} \int_0^{2a} f(x) dx$

2. $x = 0$, $y = 0$ மற்றும் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

ஆகியவற்றிற்குட்பட்ட பரப்பளவு என்பது

(அ) $\frac{\pi ab}{4}$

(ஆ) πab

(இ) $\frac{\pi ab}{2}$

(ஈ) $\frac{\pi ab}{16}$

Area bounded by the lines $x = 0$, $y = 0$ and

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ is

(a) $\frac{\pi ab}{4}$

(b) πab

(c) $\frac{\pi ab}{2}$

(d) $\frac{\pi ab}{16}$

3. $\int_1^b \int_1^a \frac{dx dy}{xy} =$

(அ) $\text{Log } a \text{ Log } b$

(ஆ) $\text{Log } a$

(இ) $\text{Log } b$

(ஈ) 0

$\int_1^b \int_1^a \frac{dx dy}{xy} =$

(a) $\text{Log } a \text{ Log } b$

(b) $\text{Log } a$

(c) $\text{Log } b$

(d) 0

4. $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx =$

(அ) 1

(ஆ) 0

(இ) 2

(ஈ) -1

$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx =$

(a) 1

(b) 0

(c) 2

(d) -1



5. $f(x) = |x|$ ($-\pi < x < \pi$). எனில் $b_n =$

(அ) $\frac{2}{n}(-1)^n$ (ஆ) $\frac{2}{n}$

(இ) 1 (ஈ) 0

If $f(x) = |x|$ ($-\pi < x < \pi$) then $b_n =$

(a) $\frac{2}{n}(-1)^n$ (b) $\frac{2}{n}$

(c) 1 (d) 0

(B) Fill in the blanks :

(5 × 1 = 5)

6. 'u' மற்றும் 'v', x-யை சார்ந்த சார்புகள் எனில்,
 $\int u dv = \underline{\hspace{2cm}}$.

If u and v are function of x, $\int u dv =$
 $\underline{\hspace{2cm}}$.

7. y-அச்சு, $y = c$ மற்றும் $y = d$ ஆகிய வளைவுகளின்
கீழ் பரப்பளவிற்கான சூத்திரம் $\underline{\hspace{2cm}}$.

The formula for the area under a curve, the
y-axis and the lines $y = c$, $y = d$ is $\underline{\hspace{2cm}}$.

8. 'V' என்ற வெளியில் பகுதியின் கொள்ளளவு _____.

The volume of a region of space V is _____.

9. $\left[\frac{1}{2} \right] = \underline{\hspace{2cm}}$.

$\left[\frac{1}{2} \right] = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, எனில் $f(x)$ என்பது
ஒற்றைச்சார்பு.

If $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, then $f(x)$ is said to be a
odd function.

II. Answer ALL questions :

(5 × 2 = 10)

11. மதிப்பு காண்க : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$.

Evaluate $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$.

12. $y^2 = x^4(x+2)$ என்ற வளையத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

Find the area of the loop of the curve $y^2 = x^4(x+2)$.

13. மதிப்பு காண்க : $\int_0^3 \int_1^2 xy(x+y) dy dx$.

Evaluate : $\int_0^3 \int_1^2 xy(x+y) dy dx$.

14. மதிப்பு காண்க : $\int_0^1 x^7 (1-x)^8 dx$.

Evaluate : $\int_0^1 x^7 (1-x)^8 dx$.

15. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi, & 0 < x < \pi \end{cases}$ என்ற சார்பை பூரியர்

தொடராக எழுதுக.

Find the Fourier series expansion of

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

PART B — (5 × 5 = 25)

Answer ALL questions.

16. (அ) மதிப்பு காண்க : $\int x e^{3x} dx$.

Evaluate : $\int x e^{3x} dx$.

Or

(ஆ) மதிப்பு காண்க : $\int x \log(x+1) dx$.

Evaluate : $\int x \log(x+1) dx$.

17. (அ) $y^2 = 2x$ மற்றும் $x^2 = 3y$ ஆகிய
பரவளையங்களுக்குட்பட்ட பரப்பளவைக்
காண்க.

Find the area bounded by $y^2 = 2x$ and
 $x^2 = 3y$.

Or

(ஆ) $r^2 = 4 \cos 2\theta$ -ன் பரப்பளவைக் காண்க.

Find the area of $r^2 = 4 \cos 2\theta$.

18. (அ) மதிப்பு காண்க : $\iiint \frac{dx dy dz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$, x, y
மற்றும் z ஆகியவை நேர் மதிப்புகள்.

Evaluate $\iiint \frac{dx dy dz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$ for all positive values of x, y, z for which the integral is real.

Or

- (ஆ) $x^2 + y^2 = a^2$ -ன் நேர் கால் பகுதியின் வழியாக $\iint xy dx dy$ -ன் மதிப்பை காண்க.

Evaluate $\iint xy dx dy$ taken over the positive quadrant of the circle $x^2 + y^2 = a^2$.

19. (அ) நிறுவுக : $\sqrt{n+1} = n\sqrt{n}$.

Prove : $\sqrt{n+1} = n\sqrt{n}$.

Or

(ஆ) $\int_0^1 x^m (1-x^n)^p dx$ -யை காமா சார்பு கொண்டு

எழுதுக. $\int_0^1 x^5 (1-x^3)^{10} dx$ -ன் மதிப்பு காண்க.

Express $\int_0^1 x^m (1-x^n)^p dx$ in terms of Gamma

function and evaluate the integral

$$\int_0^1 x^5 (1-x^3)^{10} dx.$$

20. (அ) $x \sin x$ என்ற சார்புக்கு $(0, \pi)$ என்ற இடைவெளியில் பூரியர் கொசைன் தொடரைக் காண்க.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \dots - \text{யை வருவி.}$$

Expand $x \sin x$ as a Fourier cosine series in the range $0 < x < \pi$.

$$\text{Deduce that } \frac{1}{2} + \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \dots$$

Or

(ஆ) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ என்ற சார்புக்கு

பூரியர் சைன் தொடரைக் காண்க.

Find a Fourier sine series for

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

PART C — (3 × 10 = 30)

Answer any THREE questions.

21. மதிப்பு காண்க : $\int \cos^n x dx$. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ -யை வருவி.

Evaluate $\int \cos^n x dx$ and hence deduce

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$



22. $y = mx$ என்ற கோடு $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தை வெட்டும் போது உருவாகும் பரப்பளவைக் காண்க.

Find the area cut off from the parabola $y^2 = 4ax$ by the straight line $y = mx$.

23. வரிசையை மாற்றி மதிப்பு காண்க : $\int_0^1 \int_y^{2-y} xy \, dx \, dy$.

Change the order of integration in $\int_0^1 \int_y^{2-y} xy \, dx \, dy$ and evaluate it.

24. நிறுவுக : $\beta(m, n) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta \, d\theta$. மதிப்பு

காண்க $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan \theta} \, d\theta$.

Prove that $\beta(m, n) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta \, d\theta$ and

hence evaluate $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan \theta} \, d\theta$.

25. $f(x) = x + x^2$ என்ற சார்புக்கு $(-\pi, \pi)$ என்ற இடைவெளியில் பூரியர் தொடரைக் காண்க.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ -யை வருவி.}$$

Find the Fourier series expansion of $f(x) = x + x^2$

in $-\pi < x < \pi$. Deduce that $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.