

(For candidates admitted from 2022-23 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, NOVEMBER 2023.

Part III — Mathematics – Major

INTEGRAL CALCULUS AND FOURIER SERIES

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — (20 marks)

Answer ALL the questions.

I. (A) Choose the Correct answer. (5 × 1 = 5)

1. $f(x)$ என்பது இரட்டைப்படை சார்பு எனில், x ,

$$\int_{-a}^a f(x) dx =$$

(அ) 0

(ஆ) $2 \int_0^a f(x) dx$

(இ) $\int_0^{2a} f(x) dx$

(ஈ) $\frac{1}{2} \int_0^{2a} f(x) dx$

If $f(x)$ is an even function of x , $\int_{-a}^a f(x) dx =$

(a) 0

(b) $2 \int_0^a f(x) dx$

(c) $\int_0^{2a} f(x) dx$

(d) $\frac{1}{2} \int_0^{2a} f(x) dx$

2. $x = 0$, $y = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$ ஆகியவற்றிற்குட்பட்ட பரப்பளவு என்பது

(அ) πa^2

(ஆ) $\frac{\pi a^2}{2}$

(இ) $\frac{\pi a^3}{4}$

(ஈ) $\frac{\pi a^2}{16}$

Area bounded by $x = 0$, $y = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$ is

(a) πa^2

(b) $\frac{\pi a^2}{2}$

(c) $\frac{\pi a^3}{4}$

(d) $\frac{\pi a^2}{16}$

3. $\int_1^2 \int_1^3 \frac{dx dy}{xy} =$ என்பது

(அ) 0

(ஆ) $\log 2 \log 3$

(இ) $\log 2$

(ஈ) $\log 3$

$$\int_1^2 \int_1^3 \frac{dx dy}{xy} =$$

(a) 0

(b) $\log 2 \log 3$

(c) $\log 2$

(d) $\log 3$

4. $\Gamma_{n+1} =$ என்பது

(அ) 1

(ஆ) $n\Gamma_n$

(இ) $n!$

(ஈ) (ஆ) மற்றும் (இ) இரண்டும்

$\Gamma_{n+1} =$

(a) 1

(b) $n\Gamma_n$

(c) $n!$

(d) Both (b) and (c)

5. $(-\pi < x < \pi)$ என்ற இடைவெளியில் $f(x) = x$ எனில் $a_n =$

(அ) $\frac{-2}{n}$

(ஆ) $\frac{2}{n}(-1)^n$

(இ) 1

(ஈ) 0

If $f(x) = x (-\pi < x < \pi)$, then $a_n =$

(a) $\frac{-2}{n}$

(b) $\frac{2}{n}(-1)^n$

(c) 1

(d) 0

6. 'n' என்பது இரட்டைப்படை எண் எனில்,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \underline{\hspace{2cm}}, \text{ when } n \text{ is even.}$$

7. x -அச்சு, $x = a$ மற்றும் $x = b$ ஆகிய வளைவுகளின் கீழ் பரப்பளவிற்கான சூத்திரம் $\underline{\hspace{2cm}}$.

The formula for the area under a curve, the x -axis and the lines $x = a$, $x = b$ is $\underline{\hspace{2cm}}$.

8. 'R' என்ற தளப்பகுதியின் 'A' என்ற பரப்பளவு என்பது,
 $A = \underline{\hspace{2cm}}.$

Area 'A' of the planes region 'R' is
 $A = \underline{\hspace{2cm}}.$

9. பீட்டா சார்பின் சமச்சீர் பண்பு என்பது $\underline{\hspace{2cm}}$.

Symmetry property of Beta function states that
 $\underline{\hspace{2cm}}.$

10. $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, எனில் $f(x)$ என்பது
 இரட்டைப்படைச் சார்பு.

If $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, then $f(x)$ is said to be
 even function.

11. மதிப்பு காண்க : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$.

Evaluate $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$.

12. $y^2 = x^2 \left(\frac{a+x}{a-x} \right)$ என்ற வளையத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

Find the area of the loop $y^2 = x^2 \left(\frac{a+x}{a-x} \right)$.

13. மதிப்பு காண்க : $\int_1^2 \int_1^x xy^2 \, dy \, dx$.

Evaluate : $\int_1^2 \int_1^x xy^2 \, dy \, dx$.

14. மதிப்பு காண்க : $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx$.

Evaluate : $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx$.

5. $f(x) = \begin{cases} a, & 0 < x < \pi \\ -a, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$ என்ற சார்பை பூரியர் தொடராக எழுதுக.

Express as a Fourier series, the function

$$f(x) = \begin{cases} a, & 0 < x < \pi \\ -a, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

PART B — (5 × 5 = 25)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

6. (அ) மதிப்பு காண்க : $\int x e^{2x} dx$.

Evaluate : $\int x e^{2x} dx$.

Or

(ஆ) மதிப்பு காண்க : $\int \log x dx$.

Evaluate : $\int \log x dx$.

17. (அ) $y^2 = 4ax$ மற்றும் $x^2 = 4by$ ஆகிய பரவளையங்களுக்குட்பட்ட பரப்பளவைக் காண்க.

Find the area bounded by the parabolas $y^2 = 4ax$ and $x^2 = 4by$.

Or

(ஆ) $r = 2(1 + \cos \theta)$ -ன் பரப்பளவைக் காண்க.

Find the area of the Cardioid $r = 2(1 + \cos \theta)$.

18. (அ) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ -ன் நேர் அரைக்காற்கோளத்தின் வழியாக $\iiint xyz \, dx \, dy \, dz$ -ன் மதிப்பு காண்க.

Evaluate $\iiint xyz \, dx \, dy \, dz$ taken through the positive octant of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Or

- (ஆ) $y = x^2$ மற்றும் $y = x$ ஆகியவற்றின் பகுதிக்கிடையே $\iint (x - y) \, dx \, dy$ -ன் மதிப்பு காண்க.

Evaluate $\iint (x - y) \, dx \, dy$ over the region between the parabola $y = x^2$ and the line $y = x$.

19. (அ) நிறுவுக $\Gamma_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$.

Prove that $\Gamma_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$.

Or

- (ஆ) மதிப்பு காண்க : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}$.

Evaluate : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}$.

0. (அ) $f(x) = \cos x$ எனும் சார்புக்கு $(0, \pi)$ என்ற இடைவெளியில் பூரியர் சைன் தொடரைக் காண்க.

Find a Fourier Sine series for $f(x) = \cos x$ in the range 0 to π .

Or

(ஆ) $f(x) = x(\pi - x)$, $0 < x < \pi$ என்ற சார்புக்கு பூரியர் கொசைன் தொடரைக் காண்க.

Find a Fourier Cosine series of $f(x) = x(\pi - x)$, $0 < x < \pi$.

PART C — ($3 \times 10 = 30$)

Answer any THREE out of Five.

21. $\int \sin^n x dx$ -ன் மதிப்பை காண்க, இதிலிருந்து $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ -ன் மதிப்பை காண்க.

Evaluate $\int \sin^n x dx$ and hence deduce $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

22. $r = a\sqrt{2}$ மற்றும் $r = 2a \cos \theta$ ஆகிய வட்டங்களுக்கு பொதுவாக உள்ள பரப்பளவைக் காண்க.

Find the area common to the circles $r = a\sqrt{2}$ and $r = 2a \cos \theta$.

23. வரிசையை மாற்றி மதிப்பு காண்க : $\int_0^a \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} xy \, dy \, dx$.

Change the order of integration in $\int_0^a \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} xy \, dy \, dx$

and evaluate it.

24. நிறுவுக : $\beta(m, n) = \frac{\Gamma_m \Gamma_n}{\Gamma_{m+n}}$.

Prove : $\beta(m, n) = \frac{\Gamma_m \Gamma_n}{\Gamma_{m+n}}$.

25. நிறுவுக : $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

தருவி :

(அ) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots$

(ஆ) $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \dots$

(இ) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$

Show that $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$ in $-\pi \leq x \leq \pi$.

Deduce that

(a) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots$

(b) $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \dots$

(c) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$
