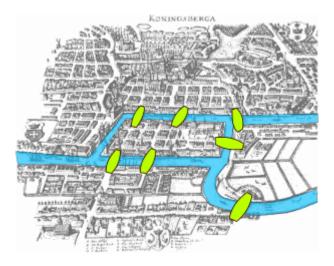
در قرن هجده میلادی، شهر کونیگسبرگ از دوساحل یک رودخانه و دو جزیره تشکیل ۱ شده بود که ۷پل این چهار منطقه را بهم وصل میکرد. معمای زیر سالها شهروندان را بهخود سرگرم کرده بود: آیا امکان دارد با آغاز از یکی از این مناطق، در شهر گشتی زد به طوریکه از هر پل فقط یکبار عبورنمود و به محل اولیه بازگشت؟ در سال ۱۷۳۶میلادی با حل این معما توسط اویلر ، نظریهٔ گرافها پایهگذاری ۲ شد، بدین صورت که به هر۴ منطقه، نقطهای از صفحه اختصاص داده و به ازای هر پل واصل بین دو منطقه، پاره خط بین دو نقطه متناظر با آنها رسم نمود. بدین ترتیب مطابق شکل زیر به مدل ریاضی دستیافت و به سادگی پاسخ معما که منفی بود،دریافت ازگرافها برای حل مسائل زیادی در ریاضیات و علوم کامپیوتر استفاده میشود .در علوم کامپیوتر، گرافها در دروس نظریهٔ مدارمنطقی، هوش مصنوعی، نظریهٔ زبانها و ماشینها، گرافیک، سیستم عامل و کامپایلر کاربردهای زیادی دارند.



#### , کاربردهای گراف

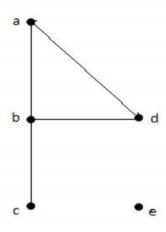
گرافها در اطراف ما هستند اما همیشه آنها را آن طور که هستند نمیبینیم. شما در حال حاضر با خواندن این مقاله، به معنای واقعی کلمه روی یک گراف قرار گرفته اید .وب یک ساختار گراف عظیم است! وقتی بین وبسایتها کلیک می کنیم و بین URLها به جلو و عقب حرکت می کنیم، در واقع در حال حرکت بر روی یک گراف هستیم. گاهی اوقات این گرافها دارای گرههایی با یالهای غیرجهت دار هستند و ما می توانیم از یک صفحه وب به صفحهی دیگر به عقب و جلو برویم و گاهی دارای صفحاتی جهت دار هستند که تنها می توان از صفحه وب Aبه صفحه وب قرکت برعکس آن ممکن نخواهد بود. اما یک مثال بهتری وجود دارد که تعاملات روزانه ما با گرافها را به زیبایی نشان می دهد: شبکههای اجتماعی.

فیسبوک بعنوان یک شبکه اجتماعی عظیم، *نوعی گراف* است. و اگر بیشتر در مورد عملکرد واقعی آن فکر کنیم، بهتر متوجه میشویم که دقیقاً چه نوع گرافی است. در فیسبوک، اگر شخصی شما را به عنوان دوست اضافه کند، باید درخواست او را بپذیرید و امکان ندارد که این تعامل بصورت یک طرفه صورت پذیرد. بنابراین رابطه بین دو کاربر (گرهها یا رئوس در قالب گراف!) دو طرفه است و هیچ مفهومی از گره "مبدا" و "مقصد" وجود ندارد.

آیا می توانید حدس بزنید که فیسبوک با چه نوع نموداری پیاده سازی شده است؟ بله کاملاً درست است ، گراف بدون جهت!

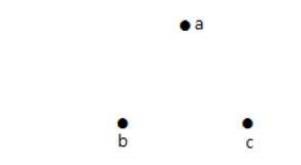
از طرف دیگر توییتر با فیسبوک بسیار متفاوت عمل می کند. شما می توانید فردی را دنبال کنید، اما او ممکن است شما را دنبال نکند. بعنوان مثال، شما ممکن است یک بازیگر یا سیاستمدار و یا هر فرد معروف دیگری را دنبال کنید، اما او قطعاً شما را دنبال نمی کند (متاسفانه!). بنابراین ما می توانیم توییتر را به عنوان یک گراف جهت دار نمایش دهیم. هر یالی که ایجاد می کنیم نشان دهنده یک رابطه یک طرفه است. وقتی فردی را در توییتر دنبال می کنید، یک یال در گراف با حساب خود به عنوان گره مبدا و حساب فرد مقابل به عنوان گره مقصد ایجاد می کنید.

گراف غیرجهتدار: گراف را غیرجهتدار گویند، هرگاه E مجموعهای از زیرمجموعههای دوعضوی V باشد .بهعبارتی، در یک گراف غیرجهتدار را بهطور کلی گراف نامند و در یک گراف غیرجهتدار را بهطور کلی گراف نامند و با E,V=(G)نشان میدهند, .گراف جهتدار: گراف را جهتدار گویند، هرگاه E زیرمجموعهای از زوجهای .باشد ( V=(G)نشان میدهند, .گراف جهتدار: گراف جهتدار برای رئوس V=(G) دو یال V=(G) متمایزاز وجود) متمایزاز یکدیگر میباشند. گراف جهتدار را با) V=(E,V) ه نشان میدهند.

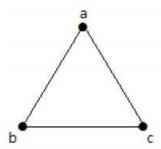


بدون جهت

انواع گرافها ,گراف تهی:گراف بدون یال را گراف تهی نامند. گراف تهی با Npنشان داده میشود



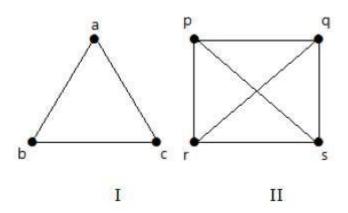
,گراف ساده: گراف فاقد یال موازی و طوقه را گراف ساده نامند.



, گراف چندگانه: گرافی که شامل یال موازی و یا طوقه باشد را، گراف چندگانه گویند .

,گراف مختلط: گرافی که شامل یالهای جهتدار و غیرجهتدار باشد را گراف مختلط گویند.

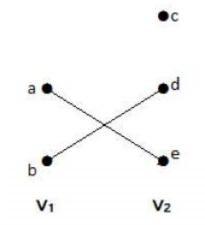
,گراف کامل: گراف سادهٔ G را کامل نامند، هرگاه بین هر دو رأس متمایز آن دقیقاً یک یال موجود باشد .به عبارتی، هر رأس گراف کامل با (-۱) nرأس دیگر، مجاور است. گراف کامل nرأس را با Kn نمایش میدهند.



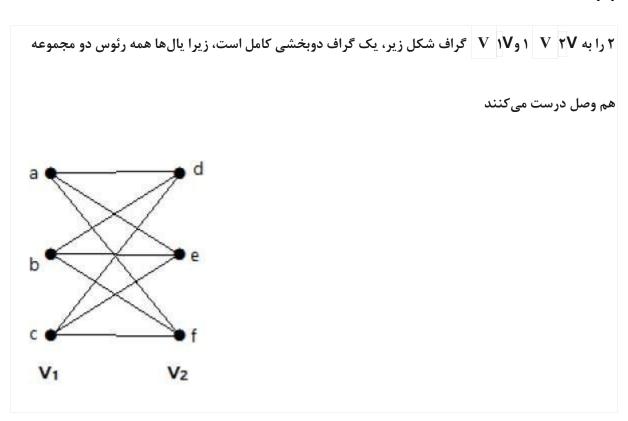
, تورنمنت: تورنمنت گرافی است جهتدار که در آن بین هر دو رأس متمایز bوa ، دقیقاً ایک یال وجود داشته باشد. تورنمنت ارأسی را با ک نشان میدهند.

,گراف دو بخشی: گرافی که بتوان مجموعه رئوس آن را به دو زیر مجموعهٔ ۷ ۷ ۷ کچنان افراز نمود، بهطوریکه هر یال آن دارای یک رأس در ۱ ۷و یک رأس در ۲ ۷باشد،گراف دوبخشی نامند.

محمد على كمالوند



گراف دوبخشیِ کامل: گراف دو بخشی Gبا مجموعه افرازهای V V و V Vرا کامل گویند، هرگاه بین هر دو رأس V V و V V یالی وجود داشته باشد

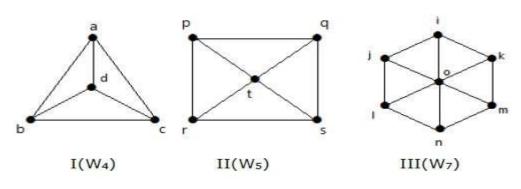


اگر  $|\mathbf{V}| = \mathbf{m}$  و  $|\mathbf{V}| = \mathbf{N}$  باشد، آنگاه گراف دوبخشی کامل با  $|\mathbf{V}| = \mathbf{m}$  نشان داده می شود

رگراف-r منتظم: برای عددصحیح ۲ ۲۰ تراف سادهٔ G را- r منتظم گویند، i .=. اهرگاه درجه هر رأس آن r وراف سادهٔ ناف باشد. یعنی u(deg i

 $\mathbf{C}$   $\mathbf{n}$   $\mathbf{C}$   $\mathbf{C}$   $\mathbf{n}$   $\mathbf{C}$   $\mathbf{C}$ 

### سه گراف زیر، گراف چرخ هستند

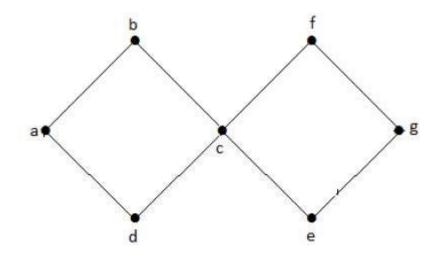


### گراف مدوّر یا دوردار

.گرافی را مدوّر یا دوردار گوییم که حداقل یک دور داشته باشد

مثال

در گراف شـکل زیر، دو دور a-b-c-d-a و c-f-g-e-c وجود دارد. بنابراین، گراف زیر یک گراف مدوّر یا دوردار است

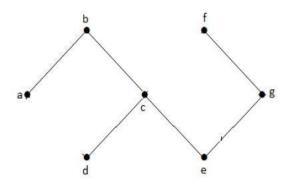


### گراف غيرمدوّر

.گرافی را که دوری نداشته باشد، گراف غیرمدور مینامیم

مثال

در گراف شکل زیر، هیچ دوری وجود ندارد، بنابراین، گراف غیرمدور است



رگراف -n مکعب :) Qn)گرافی است که رئوس آن مشخصکننده n رشته بیتی به طول n است. دو رأس در این گراف فقط در صورتی مجاور هستند که در یک بیت اختلاف داشته باشند.

رگراف وزندار:گرافی که در آن به هر یال، وزنی یا به هر رأس، عددی نسبت داده شود، گراف وزندار نامیده میشود. این گراف با  $\mathbf{W}, \mathbf{E}, \mathbf{V} = (\mathbf{G})$  نشان داده میشود که در آن  $\mathbf{W}$  مجموعهٔ وزنهای گراف میباشد .این گرافها بیشتر در محمد علی کمالوند

مسائلی مانند محاسبه کوتاهترین مسیر و یا محاسبهٔ کمترین هزینهٔ نقل و انتقال موجودی انبارها بهکار برده میشوند.

یکریختی گرافها, :گرافهای یکریخت: دو گرافG ۱,۷=(۱E۱) په ۱,۷=(۱E۱) یا یک تابع یک آ $\vec{\Lambda}$  و ۲٫۷=(۲E۲) یا به یک و پوشا مانند ۱ $\vec{\Lambda}$   $\vec{\Lambda}$   $\vec{\Lambda}$   $\vec{\Lambda}$   $\vec{\Lambda}$   $\vec{\Lambda}$   $\vec{\Lambda}$   $\vec{\Lambda}$  و پوشا مانند ۲ $\vec{\Lambda}$   $\vec$ 

,گراف خودمکمل: گراف G را خودمکمل گویند، هرگاه G و Gل یکریخت باشند .گراف مثال قبل، یک گراف خود مکمل است.

گراف همبند: گراف G را همبند گویند، هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر موجود باشد، در غیر اینصورت گراف را ناهمبند گویند, مؤلفه(مؤلفهٔ همبند): هرگراف ناهمبند، شامل چندین زیرگراف همبنداست، که هرکدام رایک مؤلفه برای گراف نامند.

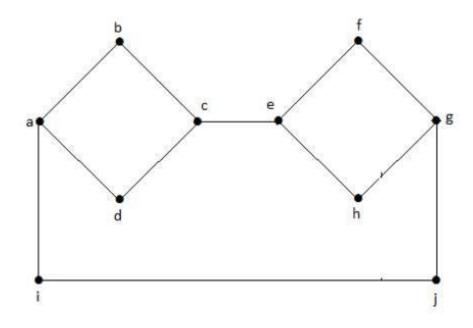
#### گراف همبند

را همبند گوییم، اگر یک مسیر بین هر دو را ٔ س آن وجود داشته باشد. در حقیقت، باید حداقل یک یال G گراف

.برای هر را ٔس وجود داشته باشد

مثال

در گراف شکل زیر، برای هر را ٔس می توان مسیری پیدا کرد که به راس دیگر برسد. بنابراین، گراف همبند است



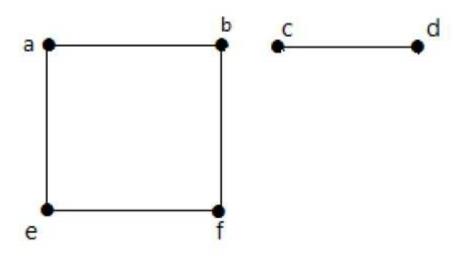
#### گراف ناهمبند

گراف **G** را ناهمبند گوییم، اگر حداقل دو راهٔس جدا داشته باشد.

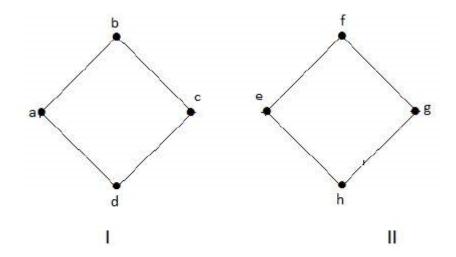
### مثال ۱

شکل زیر، یک گراف ناهمبند را نشان میدهد که دو بخش دارد؛ یکی شامل رئوس «c»، «d»، «a»و «d» و

دیگری شامل رئوس «g» ، «f»، «e»و. «h»



محمد على كمالوند



#### گراف دوری

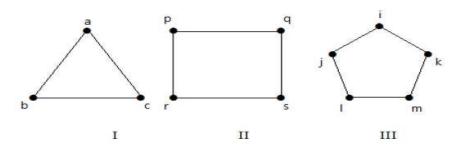
یک گراف ساده با n رائس و n یال (n = 3) ، یک گراف دوری نامیده می شود، اگر همه یال های آن، دوری به طول

nرا تشکیل دهند. به عبارت دیگر، اگر مرتبه هر راهٔس گراف، ۲ باشد، آنگاه گراف دوری است. گراف دوری را

با C n Cn نشان می دهند.

مثال

### گرافهای شکل زیر را در نظر بگیرید



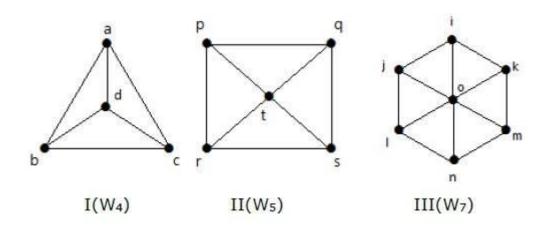
- گراف ا سه رائس و سه یال دارد که دور ab-bc-ca را تشکیل می دهند.
- ، گراف II چهار را ٔس و چهار یال دارد که دور pq-qs-sr-rp را تشکیل می دهند.
- ، گراف III پنج رائس و پنج یال دارد که دور ik-km-ml-lj-ji را تشکیل می دهند.
  - بنابراین، همه گرافهای بالا، گراف دوری هستند.

### گراف چرخ •

• گراف چرخ، با افزدون یک راهٔس جدید به گراف دوری  $C \cap D = C \cap C$  بهدست می آید. گراف چرخ را

با  $\mathbf{W}$  نشان می دهند. را ٔس جدید، هاب نامیده می شود.

• سه گراف زیر، گراف چرخ هستند.

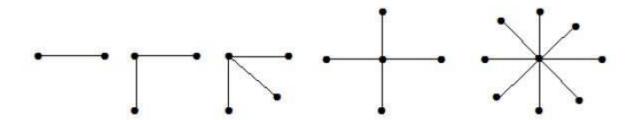


### گراف ستاره

یک گراف دوبخشی کامل، بهفرم (۲<sub>۱, n-1</sub> یک گراف ستاره با n را ٔس است. به عبارت دیگر، یک گراف دوبخشی کامل را گراف ستاره می گوییم، اگر یک را ٔس به یک مجموعه متعلق باشد و همه رئوس باقیمانده به سایر مجموعهها تعلق داشته باشند.

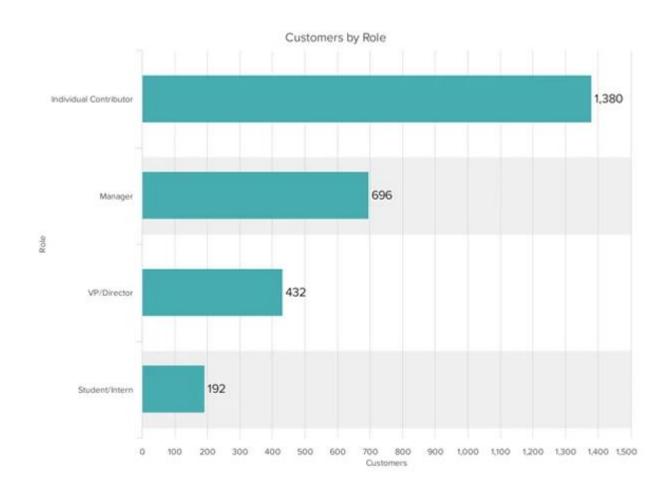
مثال

هر یک از گرافهای شکل زیر، nرا ٔس دارند، که n ۱-تا از رئوس آنها به یک را ٔس متصل است



#### :گراف میلهای

از گراف میلهای زمانی استفاده میشود که یک برچسب داده با طول زیاد داریم یا بیش از ۱۰ مورد مختلف میخواهیم مقایسه کنیم تا از بههم ریختگی جلوگیری کنیم.



بهترین موارد استفاده از گرافهای میلهای:

محمد على كمالوند

گرافهای میلهای برای مقایسه دادهها در گروههای مختلف یا رصد تغییرات طی یک دوره زمانی مناسباند. این گراف ها وقتی کار آمدتر هستند که تغییرات قابل توجهی داریم یا میخواهیم نحوه مقایسه یک گروه با دیگران را نشان دهیم.

برای مثال، می توان به تعداد مشتریان با توجه به نقش در کسب و کار نگاه کرد. این نوع گراف به ما امکان می دهد که بفهمیم تعداد مشتریان در یک نقش خاص چقدر بیشتر از سایر نقشهاست.

همچنین، گراف میلهای می تواند به طور واضح نشان دهد کدام دسته دادهها بالاترین یا پر تکرار ترین است. به عنوان یک نمونه، در زمان ابتدایی شیوع یک ویروس، ممکن است کسب و کارهای آنلاین ترافیک بالایی را تجربه کنند، و یک گراف میلهای می تواند این تغییر را به خوبی نشان دهد.

سایر موارد استفاده از گرافهای میلهای:

- مقايسه محصولات
- •فركانس استفاده از يك محصول
  - مقایسه میان دستهها
- •ترافیک بازاریابی طی یک ماه یا سال
  - تعداد تبدیلهای بازاریابی

راهنمای طراحی بهتر گرافهای میلهای:

•از رنگهای یکنواخت در کل گراف استفاده کرده و برای نقاط دادهای کلیدی یا تغییرات چشمگیر، رنگهای متفاوت انتخاب کنید .

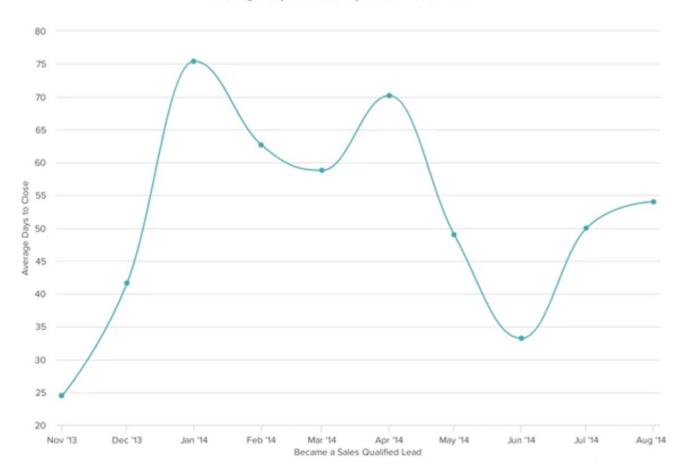
•برای سادگی خواندن، از برچسبهای افقی استفاده نمایید .

•شروع محور y را از عدد صفر در نظر بگیرید تا مقادیر درست و دقیق را نشان دهد.

.2گراف خطی:

گراف خطی روند یا تغییرات را طی یک دوره زمانی نشان می دهد. این نوع گراف مناسب برای نمای ش مجموعههای پیوسته از دادهها است





#### بهترین موارد استفاده از گرافهای خطی:

گرافهای خطی به نمایش تغییرات در طول زمان مخصوصاً در دورههای کوتاه و بلندمدت می پردازند، که این باعث می شود برای مشاهده تغییرات ناچیز مناسب باشند. با استفاده از آنها می توان تغییرات چندین گروه را در یک بازه زمانی مشابه مقایسه و ارتباطات بین گروهها را سنجید. به عنوان مثال، یک کسب و کار می تواند با استفاده از گراف خطی نرخ فروش محصولات یا خدمات مختلف خود را در طول زمان نمایش دهد. این نوع نمودار نیز می تواند برای محاسبه و نمایش عملکرد کانالهای خدمات، نظیر تعداد چتها یا ایمیلهای پاسخدهی در هر ماه، مورد استفاده قرار گیرد.

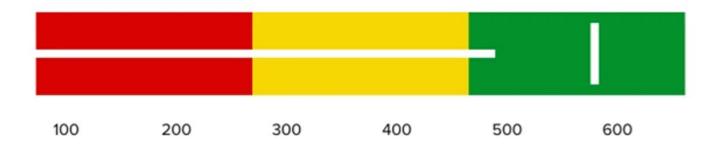
بهترین روشها برای طراحی گرافهای خطی:

- •تنها از خطوط بدون قطعه استفاده كنيد .
- •نهایتاً از چهار خط استفاده کنید تا از پیچیدگی بصری جلوگیری شود .
- •ارتفاع نمودار را طوری تنظیم کنید که خطوط تقریباً دو سوم ارتفاع محور y را پوشش دهند.

### 3.گراف گلولهاي.

گراف گلولهای پیشرفت به سمت هدف خاصی را نشان میدهد، و با استفاده از معیار مشخصی، آن را با دیگر موارد مقایسه میکند. این نوع گراف معمولاً به منظور نمایش رتبهبندی یا عملکرد در یک زمینه خاص استفاده میشود.

#### **New Customers**



#### بهترین موارد استفاده از گرافهای گلولهای:

در مثال ارائه شده، گراف گلولهای تعداد مشتریان جدید را نسبت به هدف مشتری معین نشان می دهد. گرافهای گلولهای برای مقایسه عملکرد با اهداف مشخص مناسباند.

این نوع گرافها به تیمها کمک می کنند تا عوامل احتمالی مانع را شناسایی کنند، چرا که می توانند با استفاده از نمایشگرهای بصری قوی، دادهها را تحلیل کنند. به عنوان مثال، می توانید مجموعهای از گرافهای گلولهای برای اندازه گیری عملکرد نسبت به معیارهای مختلف ایجاد کنید یا از یک گراف گلولهای مستقل برای نمایش نسبت KPIها به اهداف خود استفاده کنید، مانند:

•درآمد. • سود. • رضایت مشتری. • اندازه متوسط سفارش. • تعداد مشتریان جدید.

نمایش همزمان این دادهها می تواند به تیمها کمک کند تا به سرعت تصمیم بگیرند. گرافهای گلولهای برای تجزیه و تحلیل دادههای سالانه عالی هستند. شما نیز می توانید از گرافهای گلولهای برای نمایش مواردی چون:

•نمرات رضایت مشتری. • میزان استفاده از محصول. • عادات خرید مشتری. • استفاده از رسانههای اجتماعی بر حسب پلتفرم.

#### بهترین روشها برای طراحی گرافهای گلولهای:

از رنگهای متضاد استفاده کنید تا ویژگیهای دادهها را مشخص کنید. • با استفاده از سایههای مختلف یک رنگ، پیشرفت را نمایش دهید

#### گراف تھی

گراف تهی ممکن است اشاره به گرافی از مرتبه صفر داشته باشد یا معادل گرافی بی یال باشد. (دومی که گاهی اوقات به "گراف خالی" نام برده می شود). در نظریه دسته ها، گراف تهی، بنابر برخی از تعاریف «دسته گرافها» عضوی اولیه در دسته است. گراف ته  $\{0\}$ گرافی منحصر بفرد است که هیچ رأسی ندارد (بنابراین مرتبه صفر است). در نتیجه این گراف هیچ یالی هم ندارد.

#### گراف چگال

گراف چگال گرافی است که شمار یالهای آن به بیشینه شمار یالها نزدیک باشد. در برابر گرافی چگال، گراف تنک گرافی است که یالهای اندکی داشته باشد

#### گراف شكافته

گراف شکافته (Split Graph) گرافی است که رئوس آن را می توان به یک کلیک و یک مجموعه مستقل افراز نمود. گرافهای شکافته را اولین بار فولدس و همر مطالعه نموده، و همچنین به طور مستقل توسط تیشکویچ و چرنیاک معرفی شدند. ممکن است گراف شکافته شده بیش از یک افراز به کلیک و مجموعه مستقل داشته باشد؛ به عنوان مثال، مسیر a-b-c گراف شکافته شده ای است که رئوس آن را می توان به سه روش مختلف افراز نمود:

کلیک a,b و مجموعه مستقل

کلیک b,c و مجموعه مستقل

کلیک b و مجموعه مستقل a,c

گرافهای شکافته شده را می توان بر حسب زیرگراف های القاء شده ممنوعه شان مشخصه سازی نمود: یک گراف دلخواه شکافته شده است اگر و تنها اگر هیچ زیرگراف القاء شده آن که چهار یا پنج رأس داشته یا دارای یک جفت یال مجزا باشد (متمم یک ۴-دور)، دوری نباشد].۴[

#### گراف فاكتور بحراني

گراف فاکتور بحرانی یا گراف هایپومچبل (Factor-critical graph) یک گراف با n راس میباشد به طوری که هر زیر گراف به این معنی است که یک هر زیر گراف این گراف به این معنی است که یک زیر مجموعه از یالهای این گراف هستند که در این زیر مجموعه هر یک از راسها دقیقاً نقطه پایانی یکی از یالها هستند. نوع دیگری از اتصال که در آن تمامی راسها به جز یکی از آنها پوشش داده میشوند تطابق کامل نزدیک هستند. نوع دیگری از اتصال که در آن تمامی راسها به جز یکی از آنها پوشش داده میشوند تطابق کامل نزدیک (near-perfect matching)نامیده میشود. پس بهطور مشابه یک گراف فاکتور بحرانی گرافی است که در آن تطابقهای کامل نزدیک وجود داشته باشد طوری که در هر کدام از یکی از راسها صرف نظر شده باشد. هر دور به طول فرد یک گراف فاکتور بحرانی میباشد، همانطور که هر گراف کامل با تعداد فرد راس یک گراف

هر دور به طول فرد یک گراف فاکتور\_بحرانی میباشد، همانطور که هر گراف کامل با تعداد فرد راس یک گراف فاکتور\_بحرانی میباشد. فاکتور\_بحرانی میباشد. به طور عمومی هر گراف همیلتونی با تعداد فرد راس یک گراف فاکتور\_بحرانی میباشد. گرافهای دوستی یا) friendship graphs گرافهایی که از اتصال مجموعهای از مثلثها به وجود آمده و در یک راس مشترک هستند) مثال دیگری از گراف فاکتور\_بحرانیها هستند با این تفاوت که این گرافها غیر همیلتونی هستند. هر گراف همبند پنجه آزاد (claw-free) با تعداد فرد راس، یک گراف فاکتور\_بحرانی میباشد. برای مثال گراف از حذف یک راس از بیست وجهی منتظم به وجود می آید و همبند نیز میباشد، یک گراف فاکتور\_بحرانی میباشد. این نتیجه به طور مستقیم از یک قضیه بنیادی تر با این مضمون که هر گراف پنجه آزاد همبند که دارای تعدادی زوج راس باشد حتماً دارای یک تطابق کامل میباشد، حاصل می شود.

#### گراف کیلی

در ریاضیات یک گراف کیلی، گرافی است که ساختار جبری یک گروه جبری را در خود دارد. نام گراف کیلی پس از قضیه ٔ کیلی پیشنهاد شد که در تعریف آن یک گروه به همراه مجموعهای از عناصر آن (معمولاً مولد آن گروه) در نظر گرفته می شود.

#### گرافهای پنجه آزاد

در نظریه گراف، که بخشی از ریاضیات است، گراف پنجه آزاد گرافی است که زیرگراف پنجه نداشته باشد. پنجه نام دیگر گراف دوبخشی کامل K1,3 است (یک گراف ستاره با سه برگ و یک راس مرکزی). یک گراف پنجه آزاد گرافی است که هیچیک از زیر گرافهای آن پنجه نباشد؛ یعنی هر زیرگراف چهار راسی آن یالی بیش از سه یالی که آنها

را بدین شکل به هم متصل می کنند داشته باشد. به بیانی دیگر گراف پنجه آزاد گرافی است که در آن مکمل گراف القایی همسایه های هر راس آن گراف، مثلث آزاد باشد. گراف های پنجه آزاد، در ابتدا به عنوان تعمیم گراف یالی شناخته می شدند، اما با کشف این سه خاصیت مهم، اهمیت بیشتری پیدا کردند:

اثبات این که هر گراف پنجه آزاد زوج راسی تطابق کامل دارد.

کشف راه حل چند جملهای برای پیدا کردن مجموعه مستقل بیشینه در گرافهای پنجه آزاد. توصیف خصوصیات گراف ایدهآل پنجه آزاد

گذر اویلری: گذری که از تمام یالهای گراف عبورکند، گذر اویلری نام دارد.

به عبارت دیگر، گذر اویلری گشتی است که از تمام یالهای گراف، فقط یکبار عبور مینماید, .مدار اویلری: مداری که از تمام یالهای گراف فقط یکبار که از تمام یالهای گراف فقط یکبار عبور نماید و به نقطهٔ شروع بازگردد، مدار اویلری نامند, .گراف اویلری: گرافی که مدار اویلری دارد، گراف اویلری نامیده میشود.

مسیرهمیلتونی: مسیری است که از تمام رئوس گراف عبور کند, .دور همیلتونی: دوری است که از تمام رئوس گراف عبور کند, .گراف همیلتونی نیز گویند.

۴گراف مسطح گراف چندگانهٔ G را مسطح گوییم، هرگاه بتوان آنرا به گونهای رسم کرد که یالهای آن(به جز در رئوس ابتدا و انتها) همدیگر را قطع نکنند.

•دوگان گراف ورونی تعریف: دوگان گراف ورونی یک گراف مسطح، گرافی است که گرههای آن نماهای گراف اولیه بوده و یالهای آن بیانگر ارتباطات همجواری در گراف اولیه باشد ]۱۹۹۴. Harary, شکل۳ نحوه استخراج دوگان گراف ورونی را نشان می دهد . تعریف: دوگان گراف ورونی یک گراف مسطح، گرافی است که گرههای آن نماهای گراف اولیه باشد. [

۲دوگان گراف مفهومی این نوع دوگان گراف بر خالف دوگان قبل از گراف اولیه استخراج نشده و از ابتدا بر اساس نگرشی متفاوت تولید میشود. در نگرش رایج برای تبدیل شبکه های شهری به گراف، تقاطعها به عنوان گرههای گراف و مسیرهای بین تقاطعها به عنوان یالهای گراف در نظر گرفته میشوند. در دوگان گراف مفهومی خیابانها به عنوان گره و تقاطعها به عنوان یالهای گراف تصویر می شوند. روشهای متفاوتی برای تولید دوگان گراف مفهومی در شبکه راههای شهری بر اساسنیاز و کاربرد تعریف و استفاده شده اند که در زیر به چند مورد از آنها اشاره می شود: •دوگان مفهومی بر اساس خط دید در این نوع دوگان، راهها بر اساس شکستگیها و تغییر جهت آنها تبدیل به گره می شوند. به عبارت دیگر تا زمانی که یک راه شکسته نشده است گره جدیدی تشکیل نمی شود. کل مسیر بین دو شکسته نشده است گره جدیدی تشکیل نمی شود. کل مسیر بین دو شکستگی به عنوان یک گره تصویر می شود. بین گرههای مربوط به مسیرهایی که با هم متقاطع هستند در دوگان گراف یک یال رسم خواهد شد آ۲۰۰۶ [ all et Porta قمال ۱۰ چگونگی تشکیل این نوع دوگان گراف را نشان می محمد علی کمالوند

دهد. به عنوان مثال همان طور که در شکل ۱۰ مشاهده می شود تمامی راه بدون شکستگی که با نام ۲ عالمت گذاری شده است به یک گره در دوگان مفهومی تبدیل شده است که این گره چون با راههای بدون شکستگی ۲،۶،۴،۱ متقاطع است پس در دوگان بین آنها یال وجود دارد

•دوگان مفهومی بر اساس عرض راه در این نوع دوگان راهها بر اساس عرض آنها تبدیل به گره می شوند. به عبارت دیگر کل یک مسیر با یک عرض واحد به عنوان یک گره تصویر می شود. مسیرهای غیرهم عرضی که با هم متقاطع هستند، بین گرههای متناظر آنها یک یال دردوگان گراف رسم خواهد شد Thomson]. ۲۰۰۴]. شکل ۱۲ چگونگی تشکیل این نوع دوگان گراف را نشان می دهد.

گراف برنامه ریزی، گراف جهتداری است که بصورت چندین سطح سازمان دهی شده است. سطح  $\mathbf{S}_0$  برای حالت شروع، شامل گره هایی است که این گره ها، **FLUENT**هایی را نشان می دهند که در  $\mathbf{S}_0$  وجود دارند. سپس سطح  $\mathbf{S}_0$  شامل گره هایی برای هر فعالیت پایه ای است که ممکن است در  $\mathbf{S}_0$  قابل اجرا باشند، سپس سطوح  $\mathbf{S}_0$  بعد از آنها سطوح  $\mathbf{A}_0$  وجود دارند تا به شرط پایان برسیم.

به بیان ساده  $\mathbf{S}_i$ شامل تمام لیترال هایی اس که می توانستند در زمان  $\mathbf{t}$  نگهداری شوند و این به فعالیت هایی بستگی دارد که در مراحل زمانی قبلی اجرا شدند.  $\mathbf{A}_i$  نیز شامل تمام فعالیت هایی است که پیش شرط های آنها می توانستند در زمان  $\mathbf{t}$  ارضا شوند.

گراف های برنامه ریزی فقط برای مسئله های برنامه ریزی گزاره ای کار می کند (آنهایی که فاقد متغیر هستند). گزاره ای کردن مجموعه ای از شماهای فعالیت، آسان است. علی رغم اینکه گراف های برنامه ریزی موجب افزایش اندازه توصیف مسئله می شود، اثبات شده است که ابزارهای کار آمدی برای حل مسئله های برنامه ریزی سخت محسوب می شوند.

گراف محدودیت { ۷گراف محدودیت - :گره ها متغیرها را نشان می دهند - .یالهای گراف محدودیت ها ی بین متغیرها را نشان می دهند.

گرافهای یویا (داینامیک)

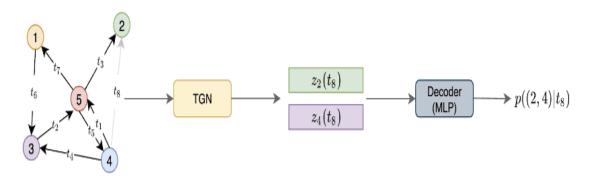
گرافهای پویا، گرافهای هستند که ساختار آنها در طول زمان تغییر می کند. این تغییر شامل هر دو گره و یال می شود که امکان اضافه، اصلاح و حذف را دارند. برای مثال، به شبکههای اجتماعی، تراکنشهای مالی و موارد دیگر اشاره کرد. یک گراف پویا می تواند به عنوان یک فهرست مرتب شده یا یک جریانی از رویدادهای دارای مشخصه زمانی که ساختار گراف را مورد تغییر قرار می دهند، ارائه شود.

تحقیقات یادگیری ماشین (ML) به روی گرافهای پویا بسیار جدید است. با این وجود چند معماری قابل ملاحظهای در این زمینه وجود دارد.

شبکه های گراف زمانی (TGN)

شبکههای گراف زمانی  $^{0}$ نویدبخش ترین معماری است. از آنجا که گرافهای پویا به عنوان یک لیست زمانبندی ارائه می شود، همسایگیهای گره در طول زمان تغییر می کند. در هر زمان t می توانیم تصویر لحظهای را از گراف دریافت کنیم. همسایگی (مجاورت) موجود در یک زمان خاص t را یک همسایگی زمانی می نامند.

همانطور که در تصویر زیر مشاهده می کنید، هدف TGN پیش بنی لازم برای تعبیه گرهها در یک برچسب زمانی مشخص می باشد. این تعبیهها را می توان به عنوان ورودی به یک شبکه رمزگشا (Decoder) اعمال کرد تا بصورت تکلیف در دست اقدام اجرا کند.



نمونه ای از رمزگذار TGN در یک گراف پویا . منبع: یادگیری عمیق بر روی گرافهای پویا توسط امانوئل روسی و مایکل برونشتاین(Emanuele Rossi and Michael Bronstein)

این معماری توسط توئیتر (Twitter) مطرح شده و به روی گراف تئویتها آموزش داده شده است. گرهها نشاندهنده توئیتها و یالها تعامل بین آنها می باشد. هدف مدل پیش بینی تعاملاتی است که در برچسب زمانی t به شکل احتمال، اتفاق نیافتاده است. به عبارت دیگر، یک پیش بینی یال انجام دادهاند. این شبکه به روش خود نظارت (self-supervised) آموزش داده می شوند: در طول هر دوره، فرآیند رمزگذار رویدادها را به ترتیب زمانی پردازش می کند و تعامل بعدی را بر اساس موارد قبلی پیش بینی می کند.