16

Teoria de Conjuntos

Sumário da Aula

16.1 Teoremas

As técnicas de provas apresentadas na Parte III (**Estratégias de Demonstração**) podem ser utilizadas para provar diversos fatos que envolvem a teoria de conjuntos. Os exemplos e exercícios apresentados neste tópico foram retirados e adaptados de [1, 4, 6].

Exemplo 16.1. Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Então se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

- **Hipóteses:**
  - A, B e C são conjuntos.
  - $A \subseteq B$
  - $B \subseteq C$
- **Conclusão:** $A \subseteq C$
- **Definição de contingência (15.2):** $A \subseteq B \leftrightarrow \quad \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$.

Prova direta:

1. **Sejam $A,\ B$ e C conjuntos quaisquer e suponha as relações $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$.**
3. **Seja $x \in A$. Como $A \subseteq B$, pela definição de contingência $x \in B$.**
4. **Dado que $x \in B$ e $B \subseteq C$, pela definição de contingência $x \in C$.**
5. **Como x é um elemento arbitrário, conclui-se que $A \subseteq C$.**
6. **Portanto, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.**

■

Exemplo 16.2. Seja U um conjunto infinito e seja S um subconjunto finito de U. Seja também T o complemento de S em relação a U. Prove que T é infinito.

Considere as seguintes definições úteis:

- S **é finito:** $\exists$ um inteiro n tal que $|S| = n$.
- U **é infinito:** Para nenhum inteiro p é possível dizer que $|U| = p$.
- T **é o complemento de** S **em relação a** U**:** Então, $S \cup T = U$ e $S \cap T = \emptyset$.

Prova por contradição:

1. **Da afirmação "seja U um conjunto infinito e seja S um subconjunto finito de U" temos que se S é finito, então $|S| = n$ para algum n e, como U é infinito, não existe inteiro p tal que $|U| = p$.**
2. **Da afirmação "seja T o complemento de S em relação a U" temos que $S \cup T = U$ e que S e T são disjuntos. Assim, $|S| + |T| = |U|$.**
3. **Suponha por contradição que T seja finito. (negação da tese)**
4. **Então, $|T| = m$ para algum inteiro m.**
5. **Assim, $|U| = |S| + |T| = n + m$, onde $m + n \in \mathbb{Z}$. Tal fato contradiz a afirmação (1) de não existe nenhum inteiro p igual a $|U|$.**
6. **Portanto, T é infinito.**

■

Exemplo 16.3. Suponha que $A \cap C \subseteq B$ e $a \in C$. Prove que $a \notin A - B$.

- **Hipóteses:**
  - $A \cap C \subseteq B$
  - $a \in C$
- **Conclusão:** $a \notin A - B$.
- **Definição da operação diferença (Equação 15.14):** $A - B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$.
- Observe que, por definição, a conclusão ($a \notin A - B$) pode ser reescrita utilizando a seguinte fórmula da lógica $\neg(a \in A \ \wedge \ a \notin B)$. Utilizando as equivalências algébricas, verifica-se também que:

$$
\begin{aligned}
\neg(a \in A \ \wedge \ a \notin B) &\equiv \neg(a \in A) \ \vee \ \neg(a \notin B) && \{\wedge - \text{De Morgan}\}. \\
&\equiv \neg(a \in A) \ \vee \ a \in B && \{\text{Negação}\} \\
&\equiv (a \in A) \ \rightarrow \ a \in B && \{\text{Implicação}\}
\end{aligned}
$$

- Será provado que dados $A \cap C \subseteq B$ **e** $a \in C$**, se** $a \in A$ **então** $a \in B$.

Prova direta:

1. **Sejam $A \cap C \subseteq B$ e $a \in C$.**
2. **Suponha que $a \in A$.**
3. **a é um elemento arbitrário e dado que $a \in A$ e $a \in C$, por definição de interseção $a \in A \cap C$.**
4. **Como $a \in A \cap C$ e $A \cap C \subseteq B$, então $a \in B$.**
5. **Assim, se $a \in A$ então $a \notin A - B$.**

Logo, se $A \cap C \subseteq B$ e $a \in C$, então $a \notin A - B$. ■

16.2 Exercícios

E. 1. Mostre que $A = \{2, 3, 5, 7\}$ **não é subconjunto de** $B = \{x | x \in \mathbb{N},$ **x é ímpar**$\}$

E. 2. Mostre que $A = \{2, 3, 5, 7\}$ **é um subconjunto próprio de** $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

E. 3. Suponha que $A \times B = \emptyset$. **O que você pode concluir?**

E. 4. Prove que, se $\overline{A} \subseteq \overline{B}$**então** $B \subseteq A$

E. 5. Prove que, se $A \subseteq B$ **então** $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

E. 6. Prove que, se $A \cup B = A - B$ **então** $B = \emptyset$

E. 7. Prove que, se $A \cap B = A$ **então** $A \subseteq B$

E. 8. Suponha que $A \subseteq C$ **e que** B **e** C **são disjuntos. Prove que, se** $x \in A$ **então** $x \notin B$

Referências Bibliográficas

1 HAMMACK, R. H. *Book of Proof*. 2ª. ed. Virginia: Richard Hammack, 2013. v. 1.

2 EPP, S. S. *Discrete Mathematics With Applications*. Fourth. Boston - USA: Cengage Learning, 2010. ISBN 978-0-495-39132-6.

3 HUNTER, D. J. *Fundamentos da Matemática Discreta*. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

4 GERSTING, J. L. *Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação: Matemática Discreta e suas Aplicações*. 7ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

5 MENEZES, P. B. *Matemática Discreta para a Computação e Informática*. 4ª. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

6 RIBEIRO, R. G. *Notas de Aula de Matemática Discreta*. [S.l.]: Universidade Federal de Ouro Preto, 2016.

7 BISPO, C. A. F.; CASTANHEIRA, L. B.; FILHO, O. M. S. *Introdução à Lógica Matemática*. São Paulo: CENGAGE Learning, 2011.

8 SCHEINERMAN, E. R. *Matemática Discreta:Uma Introdução.* 2. ed. São Paulo: Cengage Learning., 2016.

9 DAGHLIAN, J. *Lógica e Álgebra de Boole*. 4ª. ed. São Paulo: atlas, 2016.

10 FILHO, E. de A. *Iniciação à Lógica Matemática*. São Paulo: Nobel, 2002.

11 ROSEN, K. H. *Matemática Discreta e Suas Aplicações*. 6ª. ed. Porto Alegre: Mc Graw Hill, 2010.