15

Teoria de Conjuntos

Sumário da Aula

Muitos conceitos na ciência da computação podem ser expressos utilizando a linguagem de conjuntos e operações podem ser efetuadas em conjuntos para gerar novos conjuntos.

15.1 Introdução

Conjunto é toda coleção de objetos, sem repetição e não ordenada, em que seus elementos possuem uma propriedade em comum (além de pertencerem ao mesmo conjunto). Assim, qualquer objeto que possui essa propriedade pertence ao conjunto e qualquer objeto que não possui essa propriedade não pertence ao conjunto [4]. Um objeto pertencente a um conjunto é chamado de **elemento do conjunto**.

Por convenção, serão usadas letras maiúsculas para representar conjuntos e letras minúsculas para representar os elementos de um conjunto. O símbolo $\in$ será usado para denotar pertinência em um conjunto: $x \in A$ significa que o elemento x pertence ao conjunto A e, forma similar, $x \notin A$ significa que o elemento x não pertence ao conjunto A.

Notação Simbólica	Tradução para o português
$x \in A$	"x pertence a A"
$x \in A$	"x é elemento de A"
$x \notin A$	"x não pertence a A"
$x \notin A$	"x não é elemento de A"

Tabela 15.1: Utilização do símbolo $\in$.

Como os elementos podem ocorrer uma única vez em um conjunto, a operação determinar se um elemento pertence ou não a um conjunto possui um valor lógico (verdadeiro ou falso).

15.1.1 Definição de Conjuntos

Um conjunto pode ser definido de várias maneiras. A seguir será apresentado algumas formas de representação de conjuntos.

Por enumeração

Se um conjunto possui poucos elementos, porderá ser representado por enumeração, listando todos os seus elementos, um a um, entre chaves.

Exemplo 15.1. Conjuntos definidos por enumeração:

$$
\begin{aligned}
&A = \{\text{azul, verde, vermelho, amarelo}\}\\
&V = \{\text{a, e, i, o, u}\}\\
&P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\\
&J = \{\ \}
\end{aligned}
$$

- Proposições sobre pertinências verdadeiras nestes conjuntos:
  - $azul \in A$.
  - $preto \notin A$.
  - $5 \in P$.
- Proposições sobre pertinências falsas nestes conjuntos:
  - $l \in V$.
  - $azul \notin A$.
  - $5 \in J$.

Em termos de uma propriedade

Um conjunto pode ser representado em termos de uma propriedade que descreve quais são os seus elementos. De maneira simples, a representação do conjunto será na forma $S = \{\text{variável} \mid \text{propriedade}\}$:

$$A = \{x \in \ C \mid P(x)\} \tag{15.1}$$

em que x é uma variável arbitrária, C um conjunto e $P(x)$ é uma sentença matemática (fórmula da lógica de predicados). A Equação (15.1) significa que $\forall x, [(x \in C \to P(x)) \wedge (P(x) \to x \in C)]$.

Exemplo 15.2. Considere os conjuntos:

- A = $\{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 3\}$.
  O conjunto A é formado pelos seguintes elementos: $A = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$.
- Conjunto de todos os números naturais pares.
  O conjunto A é formado pelos seguintes elementos: $P = \{0, 2, 4, 6, 8, \cdots\}$ e também pode ser representado utilizando a notação simbólica $P = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k, k \in \mathbb{N} \wedge x = 2k\}$.

Observe que a representação de conjunto em termos de uma propriedade está diretamente **ligada as fórmulas da linguagem de primeira ordem com variável livre**. A fórmula para representar o conjunto dos números pares ($\{x \in \mathbb{N} \mid \exists k, k \in \mathbb{N} \wedge x = 2k\}$), por exemplo, possui x como variável livre.

Gottlob Frege (1948-1925) propôs uma formalização que unifica a lógica matemática e conjuntos, relacionando um conjunto como uma propriedade que descreve seus elementos. Em 1903, ele publicou o segundo volume do livro Leis básicas da Aritmética (em alemão *Grundgesetze der Arithmetik*), em que expunha um sistema lógico no qual seu contemporâneo Bertrand Russell (1872-1970) encontrou uma contradição, que ficou conhecida como o **Paradoxo[1] de Russell**.

Definição 15.1 (Paradoxo de Russell)**.** Se qualquer propriedade determina um conjunto, então podemos definir o conjunto S como o "*o conjunto de todos os conjuntos que não possuam a si próprios como elementos*".
A questão é: S pertence a si próprio?

Se todos os conjuntos estão formando outro conjunto, então ele não pode ser um conjunto, e daí surge o paradoxo: **não existe conjunto de todos os conjuntos**. Quando se diz que um conjunto está dentro de todos os outros, estamos afirmando que ele é maior que ele mesmo. O que leva a uma contradição! Formalmente o conjunto S é definido como:

$$S = \{A | A \notin A\}$$

Onde $A \in A$ ou $S \notin S$. Considere os seguintes casos:

- Caso $S \in S$: se $S \in S$, pela definição de S pode-se afirmar que $S \notin S$, o que constitui uma contradição.
- Caso $S \notin S$: pela definição de S, pode-se afirmar que $S \in S$, o que constitui uma contradição.

Como ambos os casos cobrem todas as possibilidades, $S \in S$ não pode ser uma proposição lógica, já que ela não pode ser determinada como verdadeira ou falsa.

Uma aplicação semelhante ao paradoxo de Russel é o Paradoxo do barbeiro.

Exemplo 15.3 (Paradoxo do Barbeiro:)**. Considere uma cidade em que existe apenas um barbeiro e que este faz a barba de todos que não fazem a própria barba. O barbeiro faz sua própria barba?**

Veja que

- **Se o barbeiro não faz a própria barba, ele deveria fazê-la, já que ele faz a barba apenas de quem não faz a própria barba.**
- **Porém, se ele faz a própria barba, pela definição, ele não deveria fazê-la.**

Assim, a sentença sobre o barbeiro desta cidade é um paradoxo.

[1]Paradoxo é uma declaração aparentemente verdadeira que leva a uma contradição lógica, ou a uma situação que contradiz a intuição comum. Em termos simples, um paradoxo é uma palavra usada para designar uma contradição verdadeira e irresolúvel.

Por definição recursiva

Conjuntos definidos por recursão são muito utilizados em computação para a definição de estruturas de dados e algoritmos. De forma sucinta, para definir um conjunto recursivamente deve ser especificado: caso base, passo recursivo e regra de fechamento.

- **Caso base:** consiste de afirmativa(s) simple(s).
- **Passo recursivo:** consiste de afirmativa(s) que envolvem implicações e quantificadores universais.
- **Regra de fechamento:** especifica que todo elemento do conjunto pode ser obtido a partir de um número finito de utilizações dos passos anteriores.

Exemplo 15.4. Considere o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, que pode ser representado utilizando a operação de sucessor e uma constante para representar o número 0.

Esta mesma ideia será aplicada para denotar recursivamente o conjunto $\mathbb{N}$:

- **Caso base:** $0 \in \mathbb{N}$.
- **Passo recursivo:** $\forall n[n \in \mathbb{N} \rightarrow n + 1 \in \mathbb{N}]$
- **Regra de fechamento: Todo $n \in \mathbb{N}$ pode se obtido por um número finito de aplicações dos passos anteriores.**

Representação Gráfica

Conjuntos e as relações entre conjuntos podem ser representados por desenhos (círculos ou outras figuras geométricas) chamados de **Diagramas de Venn**[2].

Para exemplificar este tipo de representação, considere dois conjuntos hipotéticos A e B. A Figura 15.1 ilustra a representação desses conjuntos e também da relação entre eles usando o Diagrama de Venn. Na figura está a representação do conjunto único A composto pelos elementos $\{1,\ 2,\ 3,\ 4, 5\}$ e da relação existente entre os conjuntos A e B, onde é possível dizer que o conjunto B está contido no conjunto A.

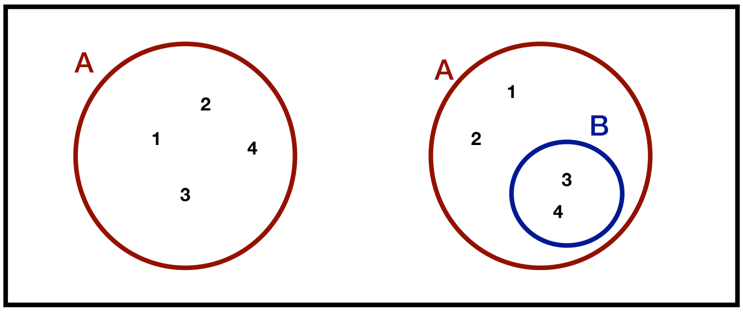

Figura 15.1: Exemplo da aplicação do Diagrama de Venn.

[2]Nome dado em homenagem ao matemático britânico do século XIX Jhon Venn.

15.1.2 Conjuntos Especiais

Conjunto Vazio

Existe um único conjunto A tal que $|A| = 0$ (não possui elementos). Este conjunto é chamado de **conjunto vazio** e será denotado pelos símbolos $\emptyset$ ou $\{\ \}$.

Exemplo 15.5. Seja o conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 0\}$. Deste conjunto é possível afirmar que:

$$\begin{array}{ccc} A = \emptyset & 3 \notin A & \emptyset \in A \\ |A| = 0 & x \notin A & \end{array}$$

Observação

Note que o significado de $\emptyset$ é diferente de $\{\emptyset\}$. A expressão $\{\emptyset\}$ significa que o conjunto possui um único elemento que é o conjunto vazio. Segue que:

1. $|\emptyset| = 0$
2. $|\{\emptyset\}| = 1$
3. $|A| = 0 \leftrightarrow A = \emptyset$

Conjunto Unitário

O conjunto unitário é um conjunto formado por um único elemento. São exemplos de conjuntos unitários os conjuntos $A = \{2\}$, $B = \{Maria\}$ e $\{\emptyset\}$.

Conjunto Universo

O **conjunto universo** ou **universo do discurso**, denotado pela letra $\mathbb{U}$, é um conjunto que contém todos os elementos do contexto em discussão.

Conjuntos Numéricos

Os conjuntos numéricos são conjuntos constituídos de números. Os conjuntos numéricos frequentemente usados na matemática e seus respectivos nomes simbólicos são:

$\mathbb{Z}$: Conjunto dos números inteiros ou $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$.

$\mathbb{N}$: Conjunto doos números naturais ou $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$.

$\mathbb{Q}$: Conjunto dos números racionais (números racionais são aqueles que podem ser expressos na forma de uma razão de inteiros, como 5/3 ou 4/2, por exemplo).

$\mathbb{R}$: Conjunto dos números reais (conjunto dos números reais e irracionais).

$\mathbb{C}$: Conjunto dos números complexos.

Observações

- **O conjunto dos números inteiros é formado pelos inteiros positivos, negativos e o zero.**
- **A adição do sobrescrito $*$ indica a ausência do número zero no conjunto. Assim, o conjunto $\mathbb{Z}^* = \{\cdots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \cdots\}$**
- **A adição de um subscrito $+$ ou $-$ indica que somente os elementos não negativos ou não positivos do conjunto, respectivamente, são incluídos. Assim, $\mathbb{Z}_+$ denota o conjunto dos números inteiros não negativos, ou seja, $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$. Alguns autores referem-se ao conjunto $\mathbb{Z}_+$ como o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.**
- **Os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ podem, por exemplos, serem escritos formalmente como:**

$$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\} \qquad \textbf{e} \qquad \mathbb{Q} = \{x, y \in \mathbb{Z} \mid \frac{x}{y} \wedge y \neq 0\}$$

Conjunto Complementar

O **complemento** de um conjunto A, denotado por $\overline{A}$ ou A^c, é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto universo $\mathbb{U}$ e não pertencem ao conjunto A:

$$\overline{A} = \{x \mid x \in \mathbb{U} \wedge x \notin A\}. \qquad (15.2)$$

A representação do conjunto complentar utilizando o diagram de Venn está ilustrado na Figura 15.2.

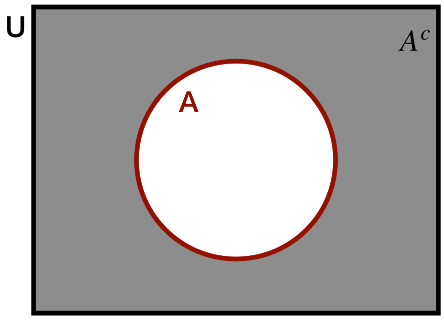

Figura 15.2: A área sombreada no diagrama de Venn representa o conjunto complementar.

Exemplo 15.6. Considere como universo do discurso o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Calcule:

- $\overline{\{2, 3, 4, 5\}}$
  O complementar do conjunto $\{2, 3, 4, 5\}$ é o conjunto $\{0, 1\} \cup \{6, 7, 8, \cdots\}$.
- $\overline{\{2x | x \in \mathbb{N}\}}$
  O complementar do conjunto $\{2x | x \in \mathbb{N}\}$ é o conjunto $\{2x + 1 | x \in \mathbb{N}\}$.

15.1.3 Cardinalidade

Um conjunto A é dito um **conjunto finito** se ele possui uma quantidade finita de elementos, ou seja, possui um número n de elementos, onde $n \in \mathbb{N}$. Este número é chamado de **cardinalidade** de A e será denotado por $|A|$.

Exemplo 15.7. Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{\{1,2\}, \{1,2,3\}\}$.
O conjunto A possui quatro elementos e o conjunto B possui dois elementos. Dizemos então sobre a cardinalidade destes conjuntos que $|A| = 4$ e $|B| = 2$.

Um conjunto A é dito um **conjunto infinito** se ele **não é um conjunto finito**. Um exemplos de conjunto infinito é o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$).

Exemplo 15.8. Descreva os conjuntos:

1. $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3 < x \leq 7\}$

2. $B = \{x \mid x$ é um mês com exatamente 30 dias$\}$

3. $C = \{x \mid x$ é a capital de Minas Gerais$\}$

4. $D = \big\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y(y \in \{0,1,2\} \ \wedge \ x = y^3)\big\}$

5. $E = \{x \in \mathbb{Z}_- \mid \exists y(y \in \mathbb{Z}_- \ \wedge \ x \leq y)\}$

6. $F = \{x \in \mathbb{Z}_- \mid \forall y(y \in \mathbb{Z}_- \wedge x \leq y)\}$

15.2 Relações entre Conjuntos

15.2.1 Subconjunto

Definição 15.2 (Continência). Sejam os conjuntos A e B. O conjunto A é dito **subconjunto** de B se, e somente se, todo elemento do conjunto A também for elemento do conjunto B, formalmente:

$$A \subseteq B \leftrightarrow \ \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \tag{15.3}$$

ou ainda, $A \subseteq B \quad \leftrightarrow$ para todo x, se $x \in A$ então $x \in B$. A notação $A \subseteq B$ significa que A é subconjunto de B.

De forma análoga, se existe um elemento de A que não pertence a B, é dito que A não é subconjunto de B **(notação: $A \not\subseteq B$)**. A Tabela 15.2 apresenta a tradução para o português de algumas notações simbólicas para relações entre conjuntos.

Notação Simbólica	Tradução para o português
$A \subseteq B$	"A está contido em B"
$A \subseteq B$	"A é subconjunto de B"
$A \not\subseteq B$	"A não está contido B"
$A \not\subseteq B$	"A não é subconjunto de B"
$B \supseteq A$	"B contém A"
$B \not\supseteq A$	"B não contém A"

Tabela 15.2: Notações para subconjuntos.

Observações

- **Todo conjunto está contido em si próprio ($A \subseteq A$).**
- **Todo conjunto contém o conjunto vazio ($\emptyset \subseteq A$).**
- **O símbolo $\subseteq$ é um hibridismo dos símbolos $\subset$ e $=$. Se eliminar a igualdade dos dois conjuntos, tem-se que A será um subconjunto _estrito_ ou _próprio_ de B.**

Definição 15.3 (Subconjunto Próprio). Sejam dois conjuntos arbitrários A e B. A é um **subconjunto próprio** de B, denotado simbolicamente por $A \subset B$ se, e somente se, $A \subseteq B$ **e** $A \neq B$.

Em outras palavras, A é um subconjunto próprio de B se existe pelo menos um elemento de B que não pertence a A. A notação $A \not\subset B$ significa que A não é um subconjunto próprio de B.

Exemplo 15.9. Sejam os conjuntos $A = \{1, 2\}$, $C = \{-1, \sqrt{2}\}$ e $B = \mathbb{N}$.
Pode-se afirmar que:

- **A é subconjunto de B ($A \subseteq B$).**
- **C não é subconjunto de B ($C \not\subseteq B$).**
- **B contém A ($B \supseteq A$).**
- **B não contém C ($B \not\supseteq C$).**

15.2.2 Igualdade de Conjuntos

Definição 15.4 (Igualdade)**.** Sejam dois conjuntos quaisquer A e B. Dizemos que A e B são **iguais (denotado por $A = B$)** se, e somente se, os dois conjuntos possuem exatamente os mesmos elementos:

$$A = B \quad \leftrightarrow \quad (A \subseteq B) \quad \wedge \quad (B \subseteq A) \tag{15.4}$$

Em outras palavras, um conjunto A é dito igual a um conjunto B se, e somente se, todo elemento de A for elemento de B, e todo elemento de B for elemento de A. Usando a notação da lógica dos predicados, $A = B$ significa que:

$$(\forall x)[(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)] \tag{15.5}$$

De forma análoga, dois conjuntos A e B são ditos diferentes e denotamos por $A \neq B$ se, e somente se, existe um elemento de A que não pertence a B ou um elemento de B que não pertence a A.

Exemplo 15.10. Sejam os conjuntos:

- $A = \{x \in \mathbb{Z} : \text{x é par}\}$
- $B = \{z \in \mathbb{Z} : z = a + b, \text{em que a e b são números inteiros e ímpares}\}$

Os conjuntos A e B são iguais.

15.3 Conjuntos de Conjuntos

Uma **Família de conjuntos** é um conjunto $\mathcal{F}$ cujos elementos são conjuntos. Um exemplo de família de conjuntos é o conjunto potência de $\mathbb{U}$ denotado por $\mathcal{P}(\mathbb{U})$.

Definição 15.5 (Conjunto Potência)**.** ou **conjunto das partes** do conjunto A, simbolicamente representado por $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto de todos os subconjuntos de A:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \; | X \subseteq A\} \tag{15.6}$$

Exemplo 15.11. Seja o conjunto $A = \{a, b, c\}$. O conjunto potência do conjunto A é

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Teorema 15.1 (Contagem de Subconjuntos)**.** *Seja A um conjunto finito. O número de subconjuntos de A é dado por $2^{|A|}$.*

A demonstração deste teorema será feito na Parte V (Indução Matemática) usando a técnica de prova por **indução**. O exemplo seguinte ilustra o teorema da contagem de subconjuntos.

Exemplo 15.12. Quantos e quais são os subconjuntos do conjunto $A = \{a, b, c\}$?

- **Do Tereoma 15.1 o conjunto A possui $2^{|A|} = 2^3 = 8$ subconjuntos.**
- **Para verificar que o conjunto A possui oito subconjuntos vamos listar todos os possíveis subconjuntos de A.**
- **Dado que $|A| = 3$, qualquer subconjunto de A poderá ter de zero a três elementos.**
- **A Tabela 15.3 apresenta de forma organizada todas as possibilidades de subcontjuntos existentes.**

nº de elementos do conjunto	Subconjuntos	Quantidade de conjuntos
0	$\emptyset$	1
1	$\{a\},\ \{b\},\ \{c\}$	3
2	$\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}$	3
3	$\{a,b,c\}$	1
Total		8

Tabela 15.3: Contagem de subconjuntos do conjunto $A = \{a, b, c\}$.

Observações

Para qualquer conjunto A, o conjunto potência $\mathcal{P}(A)$:

- **tem pelo menos os conjuntos $\emptyset$ e o próprio A como elementos, já que é sempre verdade que $\emptyset \subseteq A$ e $A \subseteq A$.**
- **$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.**

15.4 Operações em Conjuntos

Nesta seção serão apresentadas operações binárias e unárias no conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{U})$. Para tanto, considere A e B subconjuntos do conjunto universo $\mathbb{U}$.

União e interseção de conjuntos

A união e a interseção são as operações mais fundamentais sobre conjuntos.

- A **união** dos conjuntos A e B, denotada por $A \cup B$, é o conjunto de todos os elementos que estão em pelo menos um dos conjuntos, A ou B:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \lor \ x \in B\}. \tag{15.7}$$

- A **interseção** dos conjuntos A e B, denotada por $A \cap B$, é o conjunto que contém todos os elementos que estão em ambos os conjuntos, A e B:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \land \ x \in B\}. \tag{15.8}$$

A Figura 15.3 ilustra as operações de união e interseção utilizando o diagrama de Venn. As áreas sombreadas representam os conjuntos resultantes das operações (a) $A \cup B$ e (b) $A \cap B$.

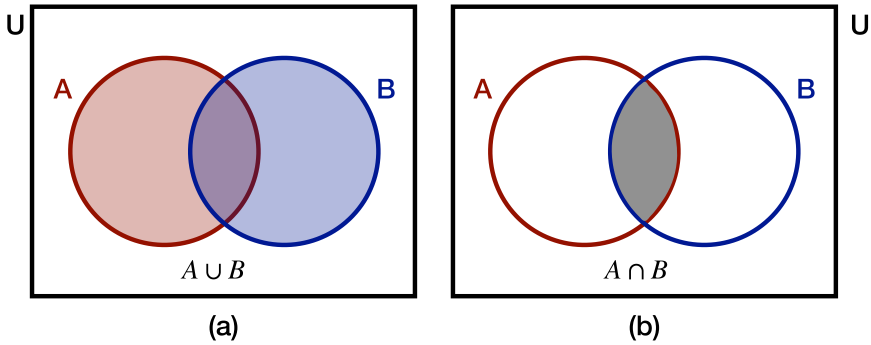

Figura 15.3: Diagrama de Venn das operações (a) união e (b) interseção nos conjuntos A e B.

Definição 15.6 (Conjunto Disjunto)**.** Dois conjuntos são chamados de **conjuntos disjuntos** se, e somente se, $A \cap B = \emptyset$.

Exemplo 15.13. Sejam os conjuntos:

a) $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ e $B = \{\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 11\}$

- $A \cup B = \{1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10,\ 11\}$
- $A \cap B = \{\ 3,\ 5\}$
- $\emptyset \cup A = A$
- $\emptyset \cap A = \emptyset$

b) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ e $\{\{\{\emptyset\}\}\}$

- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$

Definição 15.7 (União e interseção de famílias de conjuntos)**.** Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos não vazia. As operações de união e interseção da família $\mathcal{F}$ são definidas como:

União:

$$\bigcup \mathcal{F} = \{x \mid \exists A, A \in \mathcal{F} \ \wedge \ x \in A\} \tag{15.9}$$

Interseção:

$$\bigcap \mathcal{F} = \{x \mid \forall A, A \in \mathcal{F} \ \rightarrow \ x \in A\} \tag{15.10}$$

Exemplo 15.14. Considere a seguinte família de conjuntos $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 2, 3\}\}$. Logo:

$$\begin{aligned} \bigcup \mathcal{F} &= \{1\} \cup \{1,3,5\} \cup \{1,2,3\} &= \{1,2,3,5\} \\ \bigcap \mathcal{F} &= \{1\} \cap \{1,3,5\} \cap \{1,2,3\} &= \{1\} \end{aligned}$$

Uma outra maneira de especificar uma família de conjuntos é através de um conjunto de índices, que são conhecidas como **famílias indexadas**.

Definição 15.8 (Famílias Indexadas)**.** Seja I um conjunto de índices (não vazio). Denomina-se por família indexada de conjuntos o conjunto

$$\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\} \tag{15.11}$$

onde cada A_i é definido em termos dos elementos do conjunto de índices.

Exemplo 15.15. Considere o seguinte conjunto de índices $I = \{1, 2, 3\}$ e a família indexada $\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\}$, em que $A_i = \{i, i+1, i+2\}$.

Logo:

$$\mathcal{F} = \{A_1, A_2, A_3\} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}\}.$$

As operações de união e interseção de famílias indexadas é formalizada por:

União:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i i \in I \ \wedge \ x \in A_i()\} \tag{15.12}$$

Interseção:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i(i \in I \ \rightarrow \ x \in A_i)\} \tag{15.13}$$

Exemplo 15.16. Considere o exemplo anterior em que $\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}\}$.

Logo:

- $\bigcup_{i \in \{1,2,3\}} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\bigcap_{i \in \{1,2,3\}} = \{3\}$

Diferença de conjuntos:

A diferença entre dois conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que estão no conjunto A, mas não estão no conjunto B, ou seja:

$$A - B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\} \tag{15.14}$$

essa operação pode ainda ser reescrita como $A - B = A \cap \overline{B}$.

Exemplo 15.17. Considere as operações:

- $\{2, 3, 5, 7\} - \{2, 7, 11\} = \{3, 5\}$
- $A - \emptyset = A$
- $\emptyset - A = \emptyset$

Observação

Dois conjuntos A e B são ditos disjuntos quando $A \cap B = \emptyset$. Dessa forma, temos que $A - B$ e $B - A$ são exemplos de conjuntos disjuntos.

Definição 15.9 (Diferença Simétrica)**.** A **diferença simétrica** entre dois conjuntos A e B, denotada por $A \Delta B$, é o conjunto de todos os elementos que estão em A, mas não estão em B, ou que estão em B, mas não estão em A:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A). \tag{15.15}$$

A Figura 15.4 apresenta o diagrama de Venn para as operações diferenças sobre dois conjuntos A e B. As áreas sombreadas na figura ilustram os seguintes resultados: (a) $A - B$, (b) $B - A$ e (c) $A \Delta B$.

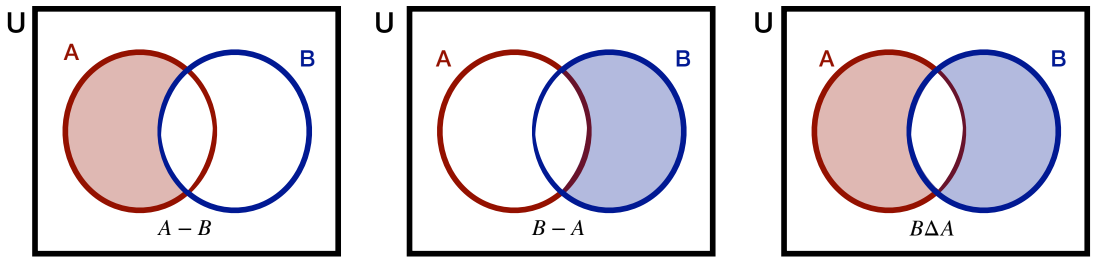

Figura 15.4: Diagrama de Venn para as operações diferenças entre conjuntos (a) $A - B$, (b) $B - A$ e (c) $A \Delta B$.

Exemplo 15.18. Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

- $A - B = \{1, 2\}$
- $B - A = \{5, 6\}$
- $A \Delta B = \{1, 2, 5, 6\}$

Produto Cartesiano:

Definição 15.10 (Produto Cartesiano)**.** O Produto cartesiano de A e B, denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (lista de dois elementos) formados tomando-se o primeiro elemento do conjunto A e o segundo elemento do conjunto B. Ou seja:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \textbf{ e } y \in B\} \tag{15.16}$$

Exemplo 15.19. Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{5, 7\}$. Calcule $A \times B$ e $B \times A$.

$$A \times B = \{(1, 5), (1, 7), (2, 5), (2, 7), (3, 5), (3, 7)\}.$$
$$B \times A = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (7, 1), (7, 2), (7, 3)\}.$$

Observações

- **A notação** $A^2 = A \times A$.
- $A \times B \neq B \times A$, **ou seja, o produto cartesiano de conjuntos não é uma operação comutativa.**
- **Se** A **e** B **são conjuntos finitos, então** $|A \times B| = |A| \times |B|$.

15.5 Leis Álgébricas para Conjuntos

Existem igualdades entre conjuntos envolvendo as operações de união, interseção, diferença e complemento que são verdadeiras para quaisquer subconjuntos pertencentes ao universo do discurso $\mathbb{U}$. Essas igualdades são chamadas de **leis algébricas** para conjuntos e as principais são listadas a seguir.

1. Idempotência:

$$A \cup A = A \tag{15.17}$$

$$A \cap A = A \tag{15.18}$$

2. Comutatividade:

$$A \cup B = B \cup A \tag{15.19}$$

$$A \cap B = B \cap A \tag{15.20}$$

3. Associatividade:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \tag{15.21}$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \tag{15.22}$$

4. Distributividade:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{15.23}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{15.24}$$

5. Existência do Conjunto Universo:

$$A \cup \mathbb{U} = \mathbb{U} \tag{15.25}$$

$$A \cap \mathbb{U} = A \tag{15.26}$$

6. Existência do Conjunto Vazio:

$$A \cup \emptyset = A \tag{15.27}$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \tag{15.28}$$

7. Propriedades do Complemento:

$$A = \overline{\overline{A}} \tag{15.29}$$

$$\overline{\mathbb{U}} = \emptyset \tag{15.30}$$

$$\overline{\emptyset} = \overline{\mathbb{U}} \tag{15.31}$$

$$A \cup \overline{A} = \mathbb{U} \tag{15.32}$$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset \tag{15.33}$$

$$A - B = A \cap \overline{B} \tag{15.34}$$

8. Leis de De Morgan:

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B} \tag{15.35}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B} \tag{15.36}$$

Exemplo 15.20. Prove que a lei algébrica da distributividade para conjuntos Equação (15.23) é verdadeira.
Prova Prova: Mostrar que a equação $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ é verdadeira é equivalente a provar que:

(1) $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$**, e**

(2) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$**.**

Demonstrando a parte (1): seja x um elemento qualquer de $A \cup (B \cap C)$. Então:

$$
\begin{aligned}
x \in A \cup (B \cap C) &\rightarrow x \in A \textbf{ ou } x \in (B \cap C) \\
&\rightarrow x \in A \textbf{ ou } (x \in B \textbf{ e } x \in C) \\
&\rightarrow (x \in A \textbf{ ou } x \in B) \textbf{ e } (x \in A \textbf{ ou } x \in C) \\
&\rightarrow x \in (A \cup B) \textbf{ e } x \in (A \cup C) \\
&\rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned}
$$

Para mostrar (2) basta refazer o argumento de trás para frente. ■

Existe uma correspondência entre os conectivos lógicos e as operações sobre conjuntos e as relações lógicas com as relações sobre conjunto. De forma sucinta:

Relação Lógica	**Relação sobre Conjuntos**
Implicação ($p \rightarrow q$) Equivalência ($p \leftrightarrow q$)	continência ($A \subseteq B$) igualdade ($A = B$)
Conectivo Lógico	**Operação sobre Conjuntos**
negação disjunção conjunção	complemento união interseção

Para fazer a demonstração de equivalência deve-se levar em consideração que a equivalência (igualdade de conjuntos) pode ser definida em termos de uma dupla implicação (dupla continência, no caso dos conjuntos). Assim, **um conjunto $X = Y$ se, e somente se, $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$**.

As propriedades introduzidas sobre os conectivos lógicos também são válidas para a teoria dos conjuntos, basta substituir cada conectivo lógico pela sua operação sobre conjuntos correspondente, conforme apresentado no quadro a seguir.

Conectivo Lógico	**Operação sobre Conjuntos**
idempotência: $\wedge$ e $\vee$	idempotência: $\cap$ e $\cup$
comutatividade: $\wedge$ e $\vee$	comutatividade: $\cap$ e $\cup$
associatividade: $\wedge$ e $\vee$	associatividade: $\cap$ e $\cup$
distributividade $\wedge$ sobre $\vee$ $\vee$ sobre $\wedge$	distributividade $\cap$ sobre $\cup$ $\cup$ sobre $\cap$
dupla negação $\neg(\neg p)$	duplo complemento $\overline{\overline{A}} = A$
Leis de De Morgan	Leis de De Morgan
Absorção	Absorção

Exemplo 15.21. Prove que: $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$.
A prova será dividida em duas partes:

I. $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A$

II. $A \cup \emptyset = A$

Prova Prova: (Parte I. $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A$) Para tanto, precisamos provar que $A \cup \emptyset \subseteq \emptyset \cup A$ e que $\emptyset \cup A \subseteq A \cup \emptyset$.
Seja $x \in A \cup \emptyset$, logo:

$$\begin{aligned} x \in A \cup \emptyset \quad &\Rightarrow \quad x \in A \vee x \in \emptyset && \text{definição de união} \\ &\Rightarrow \quad x \in \emptyset \vee x \in A && \text{comutatividade da disjunção} \\ &\Rightarrow \quad x \in \emptyset \cup A && \text{definição de união} \end{aligned}$$

Portanto, segue que:

$$A \cup \emptyset \subseteq \emptyset \cup A \qquad (1)$$

Seja $x \in \emptyset \cup A$, logo:

$$\begin{aligned} x \in \emptyset \cup A \quad &\Rightarrow \quad x \in \emptyset \vee x \in A && \text{definição de união} \\ &\Rightarrow \quad x \in A \vee x \in \emptyset && \text{comutatividade da disjunção} \\ &\Rightarrow \quad x \in A \cup \emptyset && \text{definição de união} \end{aligned}$$

Portanto, segue que

$$\emptyset \cup A \subseteq A \cup \emptyset \qquad (2)$$

De (1) e (2), concluímos que $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A$.
(Parte II. $A \cup \emptyset = A$) Provar que $A \cup \emptyset \subseteq A$ e que $A \subseteq A \cup \emptyset$.
Seja $x \in A \cup \emptyset$

$$\begin{aligned} x \in A \cup \emptyset \quad &\Rightarrow \quad x \in A \vee x \in \emptyset && \text{definição de união} \\ &\Rightarrow \quad x \in A \vee F && x \in \emptyset \text{ é sempre falso} \\ &\Rightarrow \quad x \in A && \end{aligned}$$

Portanto, segue que:

$$A \cup \emptyset \subseteq A \qquad (3)$$

Agora, considere $x \in A$

$$\begin{aligned} x \in A \quad &\Rightarrow \quad x \in A \vee x \in \emptyset && \text{adição } p \Rightarrow p \vee q \\ &\Rightarrow \quad x \in A \cup \emptyset && \text{definição de união} \end{aligned}$$

Portanto temos que

$$A \subseteq A \cup \emptyset \qquad (4)$$

De (3) e (4), concluímos que $A \cup \emptyset = A$. Logo, por transitividade da igualdade, podemos concluir que

$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A.$$

■

De forma similar à aplicação das leis fundamentais da lógica para provar equivalências lógicas, pode-se aplicar às leis algébricas para conjuntos para provar novas equivalências.

Exemplo 15.22. Prove que $[A \cup (B \cap C)] \cap \{[\overline{A} \cup (B \cap C)] \cap \overline{(B \cap C)}\} \equiv \emptyset$

Prova Prova: Seja:

$$
\begin{aligned}
& [A \cup (B \cap C)] \cap \{[\overline{A} \cup (B \cap C)] \cap \overline{(B \cap C)}\} && \equiv \quad \textbf{Distributividade (15.24)} \\
& [A \cup (B \cap C)] \cap \{[\overline{A} \cap \overline{(B \cap C)}] \cup [(B \cap C) \cap \overline{(B \cap C)}]\} && \equiv \quad \textbf{Prop. Complemento (15.33)} \\
& [A \cup (B \cap C)] \cap \{[\overline{A} \cap \overline{(B \cap C)}] \cup \emptyset\} && \equiv \quad \textbf{Exist. Conjunto Vazio (15.27)} \\
& [A \cup (B \cap C)] \cap [\overline{A} \cap \overline{(B \cap C)}] && \equiv \quad \textbf{Leis de De Morgan (15.35)} \\
& [A \cup (B \cap C)] \cap [\overline{A \cup (B \cap C)}] && \equiv \quad \textbf{Prop. Complemento (15.33)} \\
& \emptyset
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

15.6 Exercícios

E. 1. Liste os elementos dos conjuntos seguintes:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é ímpar } \wedge \ x < 10\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y\ (y \in \mathbb{N} \ \wedge \ x = 2y + 1)\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 9\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 2 = 1\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid x < 10\}$

f) $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 2\}$

E. 2. Use a notação em termos de uma propriedade para reescrever os conjuntos abaixo:

a) $A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

b) $B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

c) $C = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, \cdots\}$

d) $D = \{MTM123,\ BCC101,\ EAD700,\ BCC324,\ BCC202,\ BCC266\}$

e) $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

f) $F = \emptyset$

E. 3. Sejam os conjuntos:

$$
\begin{aligned}
A&: \quad \{x : x \in \mathbb{N} \ \ e \ \ x \geq 5\} \\
B&: \quad \{\ \mathbf{10,\ 12,\ 16,\ 20}\} \\
C&: \quad \{x : (\exists x)(y \in \mathbb{N} \ \ e \ \ x = 2y)\}
\end{aligned}
$$

Verifique se as proposições seguintes são verdadeiras ou falsas.

a) (   ) $B \subseteq C$

b) (   ) $B \subset A$

c) (   ) $A \subseteq C$

d) (   ) $26 \in C$

e) (   ) $\{11, 12, 13\} \subseteq A$

f) (   ) $\{11, 12, 13\} \subset C$

g) (   ) $\{12\} \in B$

h) (   ) $\{12\} \subseteq B$

i) (   ) $\{x : x \in \mathbb{N} \ \ e \ \ x < 20\} \not\subseteq B$

j) (   ) $5 \subseteq A$

k) (   ) $\{\emptyset\} \subseteq B$

l) (   ) $\emptyset \notin A$

E. 4. Determine se os conjuntos são iguais.

a) $\{1, 2, 3\}, \{1, 1, 2, 3\}, \{1, 1, 2, 3, 1\}, \{2, 1, 3\}, \{1, 2, 2, 3\}$

b) $\{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}, \{1\}$

c) $\{\emptyset\}, \emptyset$

d) $\{x : x \in \mathbb{N}, x < 3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 1\}$

e) $\{3, 1\}, \{x : x \in \mathbb{N}, x^2 - 4x + 3 = 0\}, \{1, 3, 3\}$

E. 5. Determine se cada uma das proposições abaixo é verdadeira ou falsa.

a) (   ) $0 \in \emptyset$

b) (   ) $\emptyset \in \{0\}$

c) (   ) $\{0\} \subset \emptyset$

d) (   ) $\emptyset \subset \{0\}$

e) (   ) $\{0\} \in \{0\}$

f) (   ) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$

g) (   ) $x \in \{x\}$

h) (   ) $\emptyset \subseteq \{x\}$

i) (   ) $\{x\} \in \{\{x\}\}$

E. 6. Sejam os conjuntos A, B e C arbitrários. Determine se cada uma das proposições abaixo é verdadeira ou falsa.

a) (   ) $A \in \{A\}$

b) (   ) $A \subseteq \{A\}$

c) (   ) $A \subseteq \mathcal{P}(A)$

d) (   ) $(A \cup B) - B = A$

e) (   ) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$

f) (   ) $A \cap \emptyset = A$

E. 7. Sejam os conjuntos $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$ e $C = \{1, \{1\}\}$. Determine se cada uma das proposições é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.

a) (   ) $A \subset B$

b) ( ) $A \subseteq B$

c) ( ) $A \in B$

d) ( ) $A = B$

e) ( ) $A \subset C$

f) ( ) $A \in C$

g) ( ) $\{1\} \in A$

h) ( ) $\emptyset \subseteq A$

E. 8. Suponha o conjunto universo $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e sejam os conjuntos: $A = \{2, 4, 5, 6, 8\}$, $B = \{1, 4, 5, 9\}$ e $C = \{x | x \in \mathbb{Z} \wedge 2 \leq x < 5\}$. Determine:

a) $A \cup B$

b) $C \cap B$

c) $A - B$

d) $A \,\Delta\, B$

e) $B - A$

f) $\overline{C}$

g) $\overline{(A \cap B)}$

h) $(C \cap B) \cup \overline{A}$

i) $B \times C$

j) $A \times B$

k) $\mathcal{P}(A)$

E. 9. Sejam os conjuntos arbitrários A, B e C e o conjunto universo $\mathbb{U}$. Prove as seguintes equivalências algébricas para conjuntos.

a) $A \cup A \equiv A$

b) $A \cap A \equiv A$

c) $A \cup B \equiv B \cup A$

d) $A \cap B \equiv B \cap A$

e) $\overline{(A \cap B)} \equiv \overline{A} \cup \overline{B}$

f) $A \cap (B \cup C) \equiv (A \cap B) \cup (A \cap C)$

g) $A \cap \mathbb{U} \equiv A$

h) $A \cap (B \cap C) \equiv (A \cap B) \cap C$

E. 10. Prove as seguintes equivalências algébricas para conjuntos.

a) $(A \cup B) \cap \overline{A} \equiv B \cap \overline{A}$

b) $A \cup (\overline{A} \cap B) \equiv A \cup B$

c) $\overline{((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}))} \equiv (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

d) $A \cap (B \cup \overline{A}) \equiv B \cap A$

Referências Bibliográficas

1 HAMMACK, R. H. *Book of Proof*. 2ª. ed. Virginia: Richard Hammack, 2013. v. 1.

2 EPP, S. S. *Discrete Mathematics With Applications*. Fourth. Boston - USA: Cengage Learning, 2010. ISBN 978-0-495-39132-6.

3 HUNTER, D. J. *Fundamentos da Matemática Discreta*. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

4 GERSTING, J. L. *Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação: Matemática Discreta e suas Aplicações*. 7ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

5 MENEZES, P. B. *Matemática Discreta para a Computação e Informática*. 4ª. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

6 RIBEIRO, R. G. *Notas de Aula de Matemática Discreta*. [S.l.]: Universidade Federal de Ouro Preto, 2016.

7 BISPO, C. A. F.; CASTANHEIRA, L. B.; FILHO, O. M. S. *Introdução à Lógica Matemática*. São Paulo: CENGAGE Learning, 2011.

8 SCHEINERMAN, E. R. *Matemática Discreta:Uma Introdução.* 2. ed. São Paulo: Cengage Learning., 2016.

9 DAGHLIAN, J. *Lógica e Álgebra de Boole*. 4ª. ed. São Paulo: atlas, 2016.

10 FILHO, E. de A. *Iniciação à Lógica Matemática*. São Paulo: Nobel, 2002.

11 ROSEN, K. H. *Matemática Discreta e Suas Aplicações*. 6ª. ed. Porto Alegre: Mc Graw Hill, 2010.