Wersja z 2023/01/11 o 18:19:21 (36EFA978CEBCCC59A4F9B494FEEBDE11)

1 Drzewiaste struktury danych

1.1 BST

• Drzewa wyszukiwań binarnych (drzewa BST – Binary Search Trees) - drzewa binarne, w których elementy rozmieszczone są w porządku symetrycznym.

• Właściwości BST:

	Drzewa binarne		Drzewa wyszukiwani binarnych	
	Wartość pesymistyczna	Wartość oczekiwana (każde drzewo jednakowo prawdopodobne)	Wartość pesymistyczna	Wartość oczekiwana (drzewo powstaje poprzez wstawienie elementów losowej permutacji do początkowo pustego drzewa)
Długość ścieżki wewnętrznej	n(n-1)/2	$n\sqrt{\pi n} - 3n + O(\sqrt{n})$	n(n-1)/2	1,386nlog n – 2,846n
Wysokość drzewa	n-1	$2\sqrt{\pi n} + O(n^{\frac{1}{4}+\varepsilon})$	n-1	4,311log n + o(log n)

1.2 AVL

• AVL-drzewo – drzewo wyszukiwań binarnych, w którym dla każdego węzła wysokości jego poddrzew różnią się co najwyżej o 1

• Złożoność operacji to $\log n$ gdzie n to wielkość drzewa.

• Atrybuty węzłów drzewa z wykładu:

Key(v) – klucz

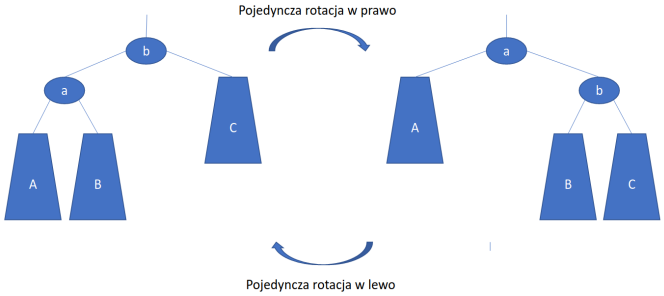
Left(v), Right(v), Parent(v) – wskaźniki odpowiednio do lewego i prawego dziecka oraz rodzica

Bf(v) – wskaźnik zrównoważenia (ang. balance factor) równy h(T(Left(v)) – h(T(right(v)) ∈ -1, 0, 1

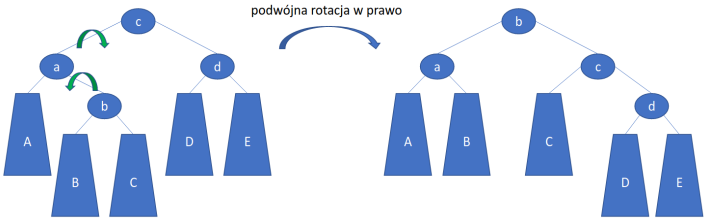
• Przyjmujemy, że węzeł zewnętrzny ma wysokość -1.

• Rotacje zachowują porządek symetryczny w BST, numerację infiksową (inorder) węzłów drzewa binarnego!

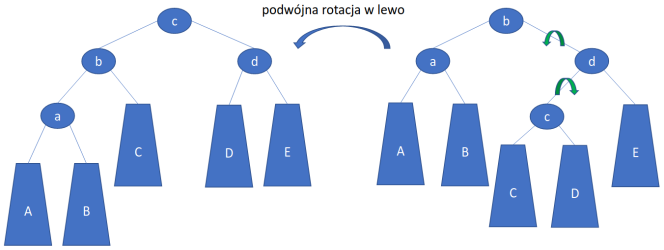
• Pojedyncza rotacja w prawo i lewo:



• Podwójna rotacja w prawo:



• Podwójna w lewo:



• Schemat wstawiania elementu gdy urosło lewe poddrzewo(symetrycznie dla prawego):

Bf v = -1 ⇒ Bf v = 0; STOP

Bf v = 0 ⇒ Bf v = 1; ⇑ (poprawiaj w górę)

Bf v = 1 ⇒ rotacja

• Schemat usuwania elementu gdy zmalało lewe poddrzewo(symetrycznie dla prawego):

Bf v = −1 ⇒ rotacja

Bf v = 0 ⇒ Bf v = −1; STOP

Bf v = 1 ⇒ Bf v = 0; ⇑ (poprawiaj w górę)

• Wzbogacenia AVL przedstawione na wykładzie:

OnLeft(v) – liczba węzłów w lewym poddrzewie v

Max(v) – maksimum z elementów w poddrzewie o korzeniu v

• Rotajce w drzewie zachowują kolejność infiksową(inorder)

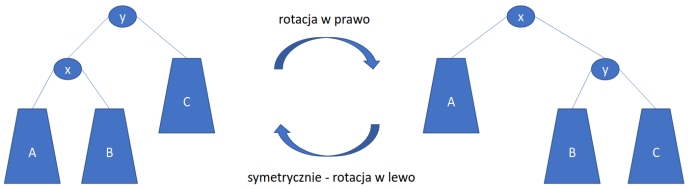
1.3 Splay

• Operacje na drzewach splay są w czasie zamortyzowanym logarytmicznym

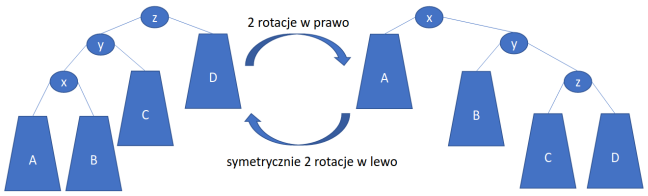
• Podczas każdej operacji na drzewie splay wierzchołek, na którym wykonujemy operację, staje się korzeniem.

• Local Splay:

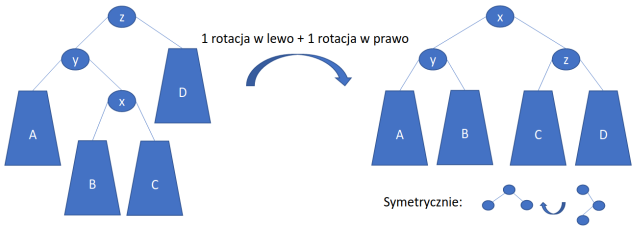
Przypadek 1: rodzic węzła x jest korzeniem drzewa
B.o. utożsamiamy klucze z węzłami



Przypadek 2a: rodzicem x nie jest korzeń
x jest lewym dzieckiem rodzica, który jest lewym dzieckiem swojego rodzica lub
x jest prawym dzieckiem rodzica, który jest prawym dzieckiem swojego rodzica



Przypadek 2b: rodzicem x nie jest korzeń drzewa
x jest prawym dzieckiem swojego rodzica, który jest lewym dzieckiem swojego rodzica
x jest lewym dzieckiem swojego rodzica, który jest prawym dzieckiem swojego rodzica



• Istnieje operacja split która dzieli drzewo na dwa poddrzewa według wieżchołka v. (lewe drzewo ma klucze mniejsze a prawe wieksze niż klucz v)

1.4 Drzewa B

• Niech t będzie liczbą całkowitą większą od 1.

B-drzewem (minimalnego) stopnia t nazywamy drzewo z korzeniem spełniające poniższe warunki:

• Każdy węzeł x ma następujące atrybuty:

a) m – liczba kluczy aktualnie pamiętanych w x

b) m kluczy Key1, Key2, ..., Keym uporządkowanych rosnąco (załóżmy ponadto, że mamy wirtualnych strażników Key0 = -∞ oraz Keym+1 = +∞)

c) Leaf – atrybut logiczny przyjmujący wartość TRUE wiw, gdy x jest liściem

• Każdy węzeł wewnętrzny x zawiera m+1 wskaźników P1, P2, ..., Pm+1 do swoich dzieci w drzewie. Dla liści wartością tych wskaźników jest NULL.

• Każdy klucz K w poddrzewie wskazującym przez Pi spełnia warunek Keyi-1 < K < Keyi.

• Wszystkie liście leżą na tej samej głębokości równej wysokości drzewa h.

• Każdy węzeł różny od korzenia całego drzewa musi zawierać co najmniej t-1 i co najwyżej 2t-1 kluczy (odpowiednio, co najmniej t i co najwyżej 2t wskaźników do dzieci, o wartościach równych NULL jeśli jest to liść).

• W niepustym drzewie korzeń musi zawierać, co najmniej 1 i co najwyżej 2t-1 kluczy (odpowiednio co najmniej 2 i co najwyżej 2t wskaźników do dzieci - o wartościach NULL, jeśli jest to jednocześnie liść).

• Złożoności

n-węzłowe B-drzewo stopnia t		
	# odwołań do pamięci zewnętrznej	# operacji w pamięci wewnętrznej
Search	$O(\log_t n)$	$O(t\log_t n)$
Insert	$O(\log_t n)$	$O(t\log_t n)$
Delete	$O(\log_t n)$	$O(t\log_t n)$

• B-drzewo o (minimalnym) stopniu t = 2 nazywamy 2-3-4-drzewem (każdy węzeł, nie liść, ma 2 lub 3 lub 4 dzieci)

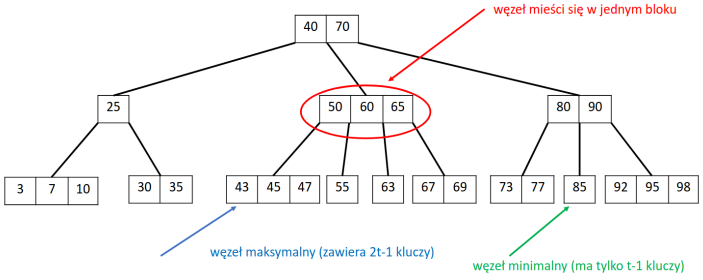
• Korzeń poddrzewa do którego wchodzimy, różny od korzenia, nigdy nie jest minimalny!

• Korzeń poddrzewa do którego wchodzimy nigdy nie jest maksymalny!

• Wysokość drzewa: $h \leqslant \log_t(\frac{n+1}{2})$

• Przykład drzewa

B-drzewo stopnia t = 2 o wysokości h = 2



1.5 Drzewa Czerwono Czarne

• Drzewo czerwono-czarne – drzewo BST, w którym każdy węzeł jest pokolorowany na czerwono lub czarno zgodnie z następującymi regułami:

1. korzeń drzewa jest czarny

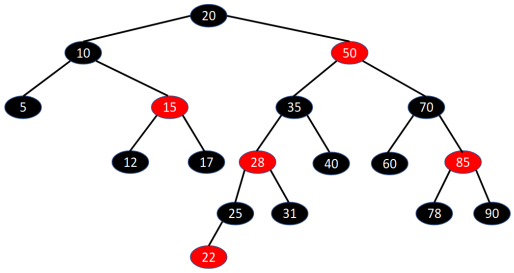
2. każdy czerwony węzeł ma czarnego rodzica

3. każdy węzeł zewnętrzny (NULL) jest czarny

4. każda ścieżka (elementarna) z ustalonego węzła do węzła zewnętrznego w jego poddrzewie zawiera tyle samo węzłów czarnych

- Wysokość drzewa wynosi $h \leqslant 2\log_2(\frac{n+1}{2})$
- Slajdy

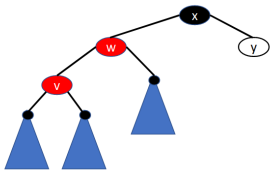
Drzewo **czerwono-czarne**



Wstawianie do drzewa **czerwono-czarnego**

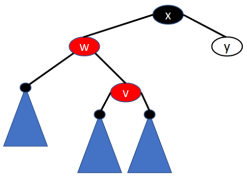
Nowy klucz zostaję umieszczony w nowym węźle v, który zastępuję węzeł zewnętrzny. Węzeł otrzymuje kolor czerwony.

- jeśli v jest korzeniem drzewa zmieniamy mu kolor na **czarny**
- jeśli rodzic P(v) węzeł v jest **czarny**, nic nie trzeba więcej robić
- jeśli rodzic P(v) jest czerwony, zaburzona została własność 2. drzew **czerwono-czarnego**



a) y jest **czerwony**: w i y kolorujemy na **czarno**; jeśli x nie jest korzeniem, kolorujemy x na czerwono i poprawiamy kolorowanie rekurencyjnie w górę drzewa
b) y jest **czarny**: pojedyncza rotacja w prawo (x zostaje prawym dzieckiem w); v otrzymuje kolor **czarny**; jeśli w jest korzeniem kolorujemy w na **czarno**, w przeciwnym razie poprawiamy kolorowanie rekurencyjnie w górę drzewa poczynając od w

Wstawianie do drzewa **czerwono-czarnego**, c.d.



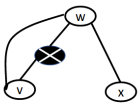
a) y jest **czerwony**: w i y kolorujemy na **czarno**; jeśli x nie jest korzeniem, kolorujemy x na czerwono i poprawiamy kolorowanie rekurencyjnie w górę drzewa
b) y jest **czarny**: podwójna rotacja w prawo (x zostaje prawym dzieckiem v, w – lewym dzieckiem v); w otrzymuje kolor **czarny**; jeśli v jest korzeniem kolorujemy v na **czarno**, w przeciwnym razie poprawiamy kolorowanie rekurencyjnie w górę drzewa poczynając od v

Symetrycznie postępujemy, gdy dwa czerwone węzły są w prawym poddrzewie x.

koszt Insert do drzewa **czerwono-czarnego** – **O(log n)**

Usuwanie z drzewa **czerwono-czarnego**

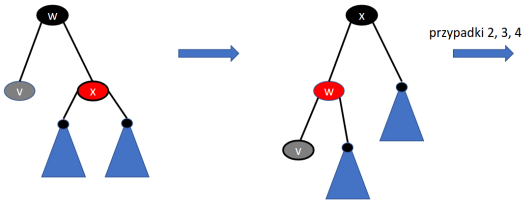
- usuwanie sprowadza się do usunięcia węzła z co najwyżej jednym dzieckiem
- węzeł czerwony zawsze można usunąć
- jeżeli usuwany węzeł jest korzeniem (w = NULL), kolorujemy v na **czarno**
- problem stanowi usuwany węzeł czarny, gdy w jest różny od NULL



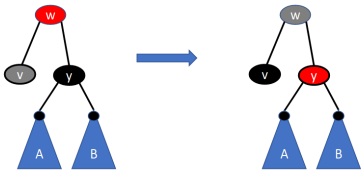
v jest **czerwony** – kolorujemy v na **czarno**, STOP
v **jest czarny** – patrzymy na konfigurację w poddrzewie o korzeniu x; uwaga – v może być równy NULL (węzeł zewnętrzny)

kolor szary oznacza, że rzeczywisty kolor jest czarny, ale na ścieżce do węzła zewnętrznego brakuje 1 węzła czarnego

Przypadek 1 – x jest **czerwony**

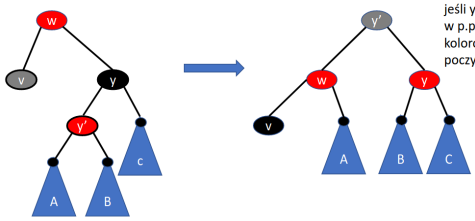


Przypadek 2 – oboje dzieci **czarnego** sąsiada y są **czarne**



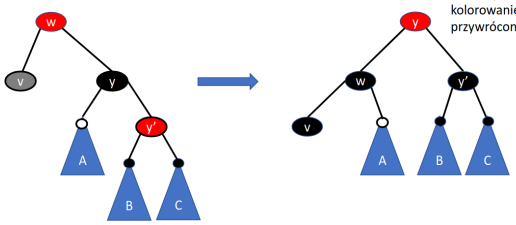
Jeśli w jest korzeniem, to STOP, w p.p. rekurencyjnie poprawiaj kolorowanie w górę drzewa poczynając od w

Przypadek 3 – lewe dziecko **czarnego** sąsiada y jest **czerwone**, a prawe **czarne**



jeśli y' jest korzeniem to STOP, w p.p. rekurencyjnie poprawiaj kolorowanie w górę drzewa poczynając od y'

Przypadek 4 - prawe dziecko **czarnego** sąsiada y jest **czerwone**, a kolor lewego może być dowolny



STOP – prawidłowe kolorowanie zostało przywrócone

Symetrycznie postępujemy, gdy węzeł v jest w prawym poddrzewie w.

koszt Delete z drzewa **czerwono-czarnego** – **O(log n)**

2 Algorytmy grafowe

2.1 Algorytm Floyda-Warshalla

- Problem najlżejszych ścieżek pomiędzy wszystkimi parami wierzchołków
- Idea:

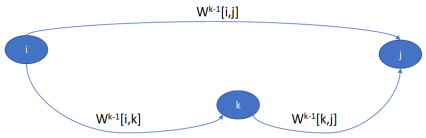
Idea:

$W^k[i,j]$ = waga najlżejszej ścieżki z i do j, na której każdy wewnętrzny wierzchołek (poza i oraz j) jest nie większy od k

Zauważmy, że $W^0[i,j] = A[i,j]$.

$W^{k-1} \longrightarrow W^k$

$W^k[i,j] = MIN(W^{k-1}[i,k] + W^{k-1}[k,j], W^{k-1}[i,j])$



2.2 Spójne składowe

- Czas O(n+m) gdzie n to liczba wierzchołków a m liczba krawędzi.
- Dane

G=(V,E) – graf n-wierzchołkowy

Wynik

funkcja C: V →V taka, że C[u] = C[v] wtedy i tylko wtedy, gdy u i v są w tej samej spójne składowej

2.3 Najkrótsze ścieżki

- Czas O(n+m) gdzie n to liczba wierzchołków a m liczba krawędzi.
- Dane

G = (V,E) - graf spójny, n = |V|

s – wyróżniony wierzchołek w G

Wynik

D[1..n] – tablica, w której D[u] to długość najkrótszej ścieżki z wierzchołka s do wierzchołka u mierzona liczbą krawędzi

Metoda

przeszukiwanie grafu, w którym zbiór S implementujemy jako kolejkę FIFO (First In First Out) jest to tzw. przeszukiwanie wszerz (ang. BFS – Breadth First Search)

2.4 Przeszukiwanie wgłąb

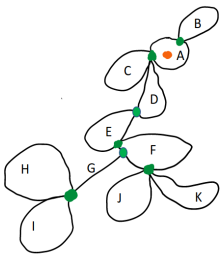
- Własności
- krawędź niedrzewowa łączy zawsze potomka z przodkiem w w drzewie przeszukiwania w głąb
- numer dfs wierzchołka jest zawsze większy od numeru dfs jego właściwego przodka

2.5 Dwuspójne

- Wierzchołek v w grafie G nazywamy rozdzielającym (punktem artykulacji), jeśli jego usunięcie z G (wraz z incydentnymi z nim krawędziami) zwiększa liczbę spójnych składowych w G.
- mostem w grafie G nazywamy krawędź, której usunięcie zwiększa liczbę spójnych składowych grafu.
- spójny graf G jest grafem dwuspójnym wierzchołkowo (krawędziowo), jeśli nie zawiera wierzchołków rozdzielających (mostów)
- Dwuspójną składową grafu G nazywamy każdy jego maksymalny dwuspójny podgraf (z maksymalną możliwą liczbą wierzchołków i krawędzi).
- Istnieje algorytm znajdowania liczby dwuspójnych w grafie w czasie O(n+m) za pomocą funkcji low
- Struktura dwuspójny składowych

Struktura dwuspójnych składowych

- przypomina drzewo
- czerwona kropa, to korzeń drzewa przeszukiwania w głąb
- zielone kropy to wierzchołki rozdzielające
- składowe B, C, H, I, J, K to „liście"



Ważne spostrzeżenie:

- podczas przeszukiwania w głąb, jeśli wejdziemy do liścia-dwuspójnej składowej, to przed jego opuszczeniem „przejrzane" zostaną wszystkie krawędzie tej dwuspójnej składowej
- pierwszą krawędzią przeglądana jest zawsze krawędź drzewowa, którą wchodzimy z wierzchołka rozdzielającego w głąb tej składowej
- jeśli odkładamy krawędzie grafu na stos w kolejności ich przeglądania (krawędź nie drzewowa jest najpierw odkrywana w potomku jej drugiego końca), to po odkryciu wierzchołka rozdzielającego dla liścia w chwili wychodzenia z odpowiadającej jej dwuspójnej składowej, wszystkie krawędzie tej dwuspójnej składowej znajdują się na stosie, a najgłębiej jest położona krawędź drzewowa prowadząca w głąb składowej z wierzchołka rozdzielającego

• Istnieje algorytm znajdowania dwuspójnych składowych w czasie O(m)

3 Kolorowanie

• Kolorowaniem (wierzchołkowym) grafu nieskierowanego nazywamy takie przypisanie kolorów wierzchołkom grafu, że żadne dwa sąsiednie wierzchołki nie mają przypisanych tych samych kolorów.

• Jeżeli istnieje kolorowanie grafu G z użyciem k kolorów, to mówimy że G jest k-kolorowalny.

• Minimalną liczbę kolorów, którymi można pokolorować graf G nazywamy jego liczbą chromatyczną i oznaczamy przez χ G

• Przez Δ(G) oznaczamy maksymalny stopień wierzchołka w grafie G (stopień wierzchołka to liczba jego sąsiadów w tym grafie)

• Oczywiste: χ G $\leqslant$ Δ(G) + 1.

3.1 Brooks

• Każdy graf G różny od cyklu nieparzystej długości i grafu pełnego można pokolorować Δ(G) kolorami.

• Graf jest k-kolorowalny wtedy i tylko wtedy, gdy każda jego dwuspójna składowa jest k-kolorowalna.

• Algorytm kolorowania Brooksa+ działa w czasie O(n+m)

• Slajd:

Kolorowanie Brooks'a+
Dane
G=(V,E) – dwuspójny graf G o co najmniej 4 wierzchołkach
a, b, c ∈ V – trzy wierzchołki takie, że a, b nie są połączone krawędzią, natomiast c jest sąsiadem zarówno a, jak i b (odległość pomiędzy a i b w grafie G wynosi 2) oraz G\{a,b} jest spójny
Wynik
Color[1..n] – tablica kolorów wierzchołków taka, że 1 ≤ Color[i] ≤ Δ(G) oraz Color[i] ≠ Color[j], jeśli tylko i-j ∈ E

Idea

- kolorujemy wierzchołki a i b kolorem 1
- przeglądamy w głąb graf G\{a,b} poczynając od c i numerujemy wierzchołki w kolejności odwiedzania
- kolorujemy wierzchołki w kolejności od największego do najmniejszego numeru, kolorując każdy wierzchołek najmniejszym kolorem, który nie został jeszcze użyty do pokolorowania jego sąsiadów w całym grafie G

4 Grafy

• Lem. o uściskach dł.: $\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$;

• H podgrafem indukowanym $G \iff \forall_{u,v \in V[H]} \{ u, v \} \in E[G] \implies \{ u, v \} \in E[H]$;

• Droga nie powtarza krawędzi, a ścieżka wierzchołków;

• G spójny $\iff \forall_{u,v \in V[G]} \exists e_{uv}$;

• G k-reguralny $\iff \forall_v deg(v) = k$;

• G dwudzielny, gdy $V[G] = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset$ i każda krawędź ma jeden koniec w V_1, a drugi w V_2;

• $K_{|V|,|U|}$ pełny dwudzielny, gdy $E = \{ \{ v, u \}, v \in V, u \in U \}$;

• v rozcinający, gdy usunięcie v zwiększa l. spójnych s.;

• Tw.: G dwudzielny $\iff$ nie zawiera cykli nieparz. dł.;

4.1 Cykle

• C. E. — krawędzie; C. H. — wierzchołki; Graf h. — graf z c. H.;

• Tw. Eulera: G ma c. E. $\iff \forall_{v \in V[G]} 2|deg(v)$;

• Tw.: Silnie spójny G ma skierowany c. E. $\iff \forall_{v \in V[G]} deg_{in}(v) = deg_{out}(v)$;

• G ma c. H., to po usunięciu dow. k wierz. rozpada się na co najw. k spójnych s.;

• $G = \langle V, U; E \rangle$ dwudzielny ma c. H., to $|V| = |U|$;

• Tw.: Każdy turniej jest półhamilton. (zawiera ś. H.);

• Tw.: Turniej ma c. H. $\iff$ jest silnie spójny;

• Tw.: Turniej spójny, to ma c. H.;

• Tw. (Ore): $n = |V| \geqslant 3$ i $\forall_{\{v,w\} \notin E} deg(v) + deg(w) \geqslant n$, to G ma c. H.;

• Każdy turniej hamiltonowski jest silnie spójny;

• G silnie spójny $\implies$ G zawiera skierowany k-cykl;

4.2 Drzewa

• Tw. (Cayley): Jest n^{n-2} etykietowanych drzew n-wierzchołkowych;

• Równoważne są:
G jest drzewem,
każde dwa wierzchołki w G są połączone dokładnie jedną droga,
G jest minimalny spójny,
G jest maksymalny acykliczny,
G jest spójny i $|V| = |E| + 1$

4.3 Planarność

• Wz. Eulera: $n - m + f = 2$, gdzie $m = |E[G]|$;

• Tw.: W grafie plan. z $n \geqslant 3$ mamy $m \leqslant 3n - 6$;

• Mocniejszym twierdzeniem jest gdy graf nie zawiera trójkątów $m \leqslant 2n - 3$;

• Tw. Kuratowskiego: G nieplan. $\iff$ G zawiera podgraf homeomorficzny z $K_{3,3}$ lub z K_5 (homeomorficzny, czyli izomorficzny po ew. dołożeniu wierzchołków na krawędziach);

• G planarny $\implies \exists_{v \in G[V]} deg(v) \leqslant 5$;

4.4 Kolorowanie wierzchołków

• Kolorowanie G za pomocą k kolorów to $f : V[G] \to \{ 1, \ldots, k \}$ t., że $f(u) \neq f(v)$ dla $\{ u, v \} \in E[G]$. Najm. k t., że $\exists k$-kolorowanie G to liczba chromatyczna $\chi(G)$.

• $\chi(G) \leqslant 2 \Leftrightarrow G$ dwudzielny;

• $\chi(G) \leqslant k \Leftrightarrow \chi(B) \leqslant k$ dla każdej dwuspójnej s. B grafu G;

• Tw. o 4 barwach: G plan. $\implies \chi(G) \leqslant 4$;

• Tw. Brooksa: G spójny, nie cykl nieparz. dł., nie klika, to $\chi(G) \leqslant \Delta$, gdzie Δ to maks. stop. wierz. w G;

• Tw.: $\chi(G) \leqslant \Delta + 1$;

• $f_G(t)$ — wielomian chrom. (liczba kolorowań G za pomocą t kolorów);

• W. ch.: • K_n — $t^{\underline{n}}$, • $\overline{K_n}$ — t^n, • Drzewo$_n$ — $t(t-1)^{n-1}$, • Cykl$_n$ — $(t-1)^n + (-1)^n(t-1)$, • $K_{n,m}$ — $\sum_{a,b} \left\{ {n \atop a} \right\} \left\{ {m \atop b} \right\} t^{\underline{a+b}}$;

• Tw.: $e = \{ v, w \} \notin E[G]$, to $f_G(t) = f_{G \cup e}(t) + f_{G/e}(t)$;

4.5 Kolorowanie krawędzi

• Funkcja $f : E[G] \to \{ 1, \ldots, k \}$ to kolorowanie krawędziowe, jeśli kraw. incydentne mają różne kolory. Indeks chromatyczny $\chi_e(G)$ to najmniejsze k, dla którego istnieje k-kolorowanie kraw.;

• Tw. Vizinga: $\forall_G \chi_e(G) \leqslant \Delta(G) + 1$;

• Tw. (König): G dwudzielny, to $\chi_e(G) = \Delta(G)$;

4.6 Systemy różnych reprezentantów

• SRR dla rodziny zbiorów $\langle A_i \rangle_{i \in I}$, to ciąg elem. $\langle a_i \rangle_{i \in I}$ t., że $\forall_{i \in I} a_i \in A_i$ oraz $a_i \neq a_j$ (skojarzenia w g. dwudzielnym);

• Tw. (Hall): SRR dla skończonej r. zb. skończonych $\langle A_i \rangle_{i=1}^n$, istnieje $\iff \forall_{J \subseteq \{1,\ldots,n\}} |\bigcup_{j \in J} A_j| \geqslant |J|$;

• G dwudzielny r-regularny $\Rightarrow$ r-kolorowalny kraw.;

• G dwudzielny, regularny ma pełne skojarzenie;

• G $(n-m)$-regularny $\Rightarrow \exists$ pełne skojarzenie;

• Tw.: Podziały $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ mają wspólny SRR $\Leftrightarrow \forall_{J \subseteq I} |\bigcup_{j \in J} g(A_j)| \geqslant |J|$, gdzie $g(C) = \{ j \mid C \cap B_j \neq \emptyset \}$;

• $A_1 \cup \cdots \cup A_n = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ i $\forall_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i| = |B_i| = r \Rightarrow \mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ mają SRR;