

## **Anexo introdutório ao laboratório de Física Experimental.**

### **1. Introdução ao laboratório de Física Experimental.**

#### **1.1. Papel do experimento na Física. Grandezas físicas. Unidades. Sistemas de unidades. O Sistema Internacional (SI) de unidades.**

A Física é uma das ciências fundamentais no estudo da natureza. De facto, o próprio vocábulo vem da forma feminina do adjectivo grego *PHYSIKOS*, ou relativo à natureza. Por tanto ela é uma ferramenta essencial no objectivo das engenharias da transformação e o aproveitamento sustentável do entorno natural em benefício do ser humano. O método fundamental da Física, introduzido pelo grande físico, astrónomo e filósofo italiano do Renascimento, Galileo Galilei (às vezes chamado, por essa razão, de “Pai da Ciência Moderna”), é a observação e a experimentação. As leis físicas são descobertas e formuladas como a generalização dum grande número de factos experimentais. Em consequência, o laboratório de Física Experimental é um complemento imprescindível na formação do engenheiro.

Por outro lado, as “grandezas físicas” são os blocos fundamentais da Física. Elas são entendidas como “propriedades dos corpos, das substâncias ou dos fenómenos físicos”, que podem ser determinadas quantitativamente. Através delas são expressadas as leis físicas. São exemplos de grandezas físicas o tempo, o comprimento, a massa, a força, a velocidade, a densidade, a resistência eléctrica, etc. Para obtermos as quantidades particulares das diferentes grandezas, que correspondem a um corpo, substância ou fenómeno, elas devem ser “medidas”, quer dizer, “comparadas” com as quantidades correspondentes a determinados “padrões”, as quais são tomadas, então, como “unidades de medida”. Quando falamos do comprimento duma mesa, não é suficiente falar dum número, mas precisa-se também especificar a unidade de medida, por exemplo, 1,8 m, o que é o resultado da comparação desse objecto com o padrão de comprimento (o metro padrão) ou uma réplica do mesmo, que é o mais prático e comum.

Um conjunto de unidades de medida, definidas de maneira independente e coerente constitui o que se chama de “Sistema de Unidades”. Historicamente têm existido vários sistemas de unidades diferentes e, logo dum trabalho intenso de unificação, tem-se acordado o chamado de “Sistema Internacional de Unidades” (SI).

O explicado anteriormente é válido para as chamadas de “grandezas fundamentais”. No caso da Mecânica (rama da Física que estuda os movimentos mecânicos), as grandezas SI fundamentais são o comprimento (m), o tempo (s) e a massa (kg). Mas também existe um conjunto muito amplo das chamadas grandezas derivadas. São exemplos delas a velocidade, aceleração, força, momento, energia, etc. Elas são definidas a partir das magnitudes fundamentais. No caso dos fenómenos térmicos, agrega-se a temperatura absoluta (K) às magnitudes SI fundamentais e também a quantidade de substância (mol).

## 1.2. Medições de grandezas físicas. Características dos instrumentos e sistemas de medições.

Para a medição (comparação com um padrão) das grandezas físicas fundamentais (e também derivadas), empregam-se geralmente instrumentos ou conjuntos de instrumentos (sistemas de medição), dotados de escalas graduadas em múltiplos ou mais geralmente, em submúltiplos das unidades básicas.

Existem algumas características desses instrumentos e sistemas, que devemos definir claramente pois é muito comum uma certa confusão. **Resolução:** é o menor incremento da grandeza medida, que faz com que o novo valor possa ser apreciado com o instrumento ou sistema de maneira independente do anterior; ou dito de outra forma, é a menor diferença que se pode apreciar entre duas medições independentes com o instrumento. No caso, por exemplo, de uma grandeza, como o comprimento, que mede-se com uma escala, a resolução é geralmente associada à menor divisão da escala. A exceção seria o caso dos instrumentos com nônio, que veremos depois. Como veremos depois, é preciso ter uma resolução o menor possível e a consideração do seu valor é essencial para avaliar o que se conhece como “erro” da medição. **Exactidão:** é a qualidade dum instrumento que caracteriza a sua capacidade para dar um valor da grandeza medida o mais próximo possível do “valor verdadeiro” (“accuracy” em Inglês). Como o valor verdadeiro nunca é conhecido, a avaliação da exactidão dum instrumento apresenta dificuldades. É bom aclarar que em alguns tratamentos em relação à exactidão das medições, especialmente em engenharia, é aceito como o “verdadeiro valor de uma grandeza” aquele que resulta da medição com um instrumento ou método “exemplar”, o que significa que todos os especialistas concordam que é o suficiente bom para os objectivos pretendidos com os resultados a serem obtidos. Os resultados deste instrumento ou método são utilizados para realizar a “calibragem” de todos os outros. No próximo epígrafe voltaremos a essa questão. **Precisão (ou fidelidade):** expressa uma qualidade diferente. Ele refere-se à capacidade do dispositivo de dar o mesmo valor da grandeza medida, se a medição é repetida sucessivamente sob as mesmas condições, independentemente da relação que tenha esse valor com o valor verdadeiro. Um exemplo pode esclarecer a diferença entre os conceitos analisados (figura 1).

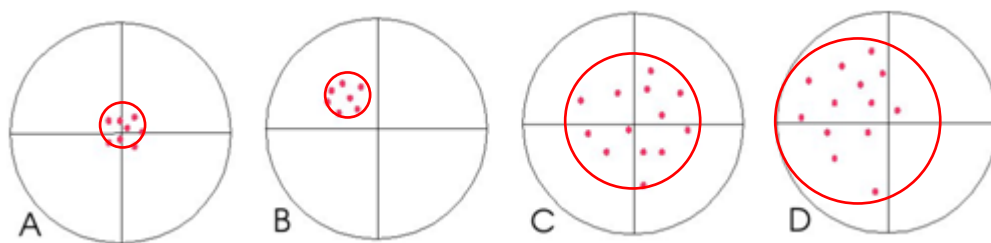


Figura 1.

Suponha que desejamos avaliar a capacidade dum atirador contra um alvo. O objectivo consiste em colocar os disparos no ponto central. Após o lançamento dum grande número de disparos, é traçado um círculo de raio menor possível, contendo todos os pontos onde eles caíram. O raio do círculo é uma medida da precisão dos disparos (e do próprio jogador). Um raio menor significa uma maior precisão ou fidelidade (casos A y B). Além disso, a distância entre o centro do círculo e o centro do alvo é uma medida da exactidão dos tiros. Uma menor distância significa uma maior exactidão (casos A y C). Um jogador pode ser muito preciso, mas pouco exacto (caso B). Isto pode estar relacionado, por exemplo, com um defeito visual do jogador ou um defeito dos óculos, que faz com que a posição do centro do alvo para ele não é a posição verdadeira mas outra fictícia. Inversamente, um jogador pode ser muito exacto, uma vez que o centro do círculo quase poderia corresponder ao centro do alvo (caso C), mas pouco preciso devido ao raio do círculo ser muito grande. Neste exemplo, a resolução está ligada à área do orifício e é evidente que não está relacionada com a exactidão ou a precisão, sempre que seja suficientemente pequena para determinar a posição de cada um deles de maneira independente. Se a resolução não fosse muito pequena, seria possível observar uma elevada precisão à custa de não ser capaz de diferenciar entre as posições dos impactos individuais.

Tudo o descrito neste exemplo é aplicável no processo de medição duma grandeza física. O centro do alvo seria o valor verdadeiro e o centro do círculo, a média dos valores obtidos em sucessivos actos de medição sob as mesmas condições. Vamos a aprofundar nisto no próximo epígrafe.

### **1.3. Erro e incerteza nas medições das magnitudes físicas.**

Quando nos falamos do valor duma grandeza física que foi obtido como resultado duma medição (o qual é muito comum) não é suficiente um número e a unidade correspondente, mas é preciso também especificar o que se conhece comumente como erro da medição. Chamaremos de “erro” da medição da grandeza X, à quantidade:

$$\text{erro} = \text{valor medido} - \text{valor verdadeiro}$$

Claramente, desde que o valor verdadeiro é sempre desconhecido, então o erro também é impossível de avaliar. Ao que se pode aspirar, e que na prática é feito, é a o estabelecimento dum limite ou cota para o erro. Assim, e dado que o erro pode ser negativo ou positivo, considera-se a cota o limite:

$$\delta x = |x - x_0|_{\max} \quad \text{onde } \delta x \text{ é a cota do erro, } x \text{ é o valor medido e } x_0 \text{ é o valor verdadeiro.}$$

Dai,  $\pm \delta x = x - x_0$ , ou  $x_0 = x \pm \delta x$  ( $x - \delta x \leq x_0 \leq x + \delta x$ ). Na prática não fala-se de  $\delta x$  como cota mas simplesmente como erro absoluto da medição, entanto a grandeza  $\delta x/x$  é chamada de erro relativo. O erro absoluto é uma medida da exactidão da medição entanto o erro relativo é uma medida da precisão da mesma.

Um exemplo típico de cota do erro ou erro absoluto é a resolução do instrumento de medição.

Temos de aclarar que as vezes usa-se o termo “incerteza” em lugar do termo erro, ainda que alguns autores estabelecem certa diferença entre esses conceitos. Por exemplo, consideram o termo erro em relação com a cota assinalada anteriormente, como o caso da resolução do instrumento, em tanto usam incerteza para indicar o intervalo de confiança no caso dos erros estatísticos que veremos depois. Outros autores consideram somente o termo incerteza. Realmente com o uso desse termo evita-se ter que utilizar um termo associado a um erro real e ele concorda melhor com a ideia de termos uma margem ou faixa na qual espera-se que, razoavelmente, o valor verdadeiro encontra-se.

Alem da resolução do instrumento, é costume falar ainda de mais dois grandes grupos de erros, os chamados “erros sistemáticos” e “erros aleatórios”. Os primeiros estão associados às imperfeições do método de medição e ainda do próprio experimentador, à influencia de factores externos, etc. Alguns autores chamam a estes erros de “equivocações”, o qual não deixa de ser uma forma muito descritiva para nomeá-los. Efectivamente, é uma equivocação o uso dum método ou aparelho inadequado para medir uma grandeza com certa exactidão, ou permitir a influencia de factores externos sobre os resultados das medições. Na figura 1 B temos um exemplo típico de erro sistemático. Combater esses erros envolve o trabalho inteligente do experimentador. O objectivo é sempre lograr diminuir o mais possível ou eliminar esses erros. Alguns autores incluem a resolução do instrumento dentro desta categoria pois consideram que usar un instrumento con resolução adequada passa pela labor inteligente do experimentador. Nos vamos a considerar a resolução do instrumento como um terceiro tipo de erro, que da uma cota para o mesmo.

A natureza dos erros aleatórios é completamente estatística, pelo qual as vezes eles são chamados de “erros estatísticos”. Nesses casos o que se faz é o estabelecimento do que se chama de “intervalo de confiança”. Este último termo tem um sentido estadístico, como vamos a explicar depois e o procedimento que se segue é o seguinte: determina-se o que se conhece como “o melhor valor” da grandeza medida (a seguir veremos o que entendemos como tal) e determina-se então um intervalo em torno desse valor, no qual, com uma certa probabilidade, encontra-se o valor de qualquer nova medição que seja realizada. Mas, como pode-se encontrar o melhor valor e esse intervalo de confiança?

Se são realizadas repetidamente medições duma certa grandeza física sob as mesmas condições, com um instrumento de adequada resolução, o resultado será diferente cada vez. Podemos eliminar os erros sistemáticos e ainda fazer a dispersão dos valores medidos em torno do valor real, muito pequena, mas nunca poderá ser eliminada. Como discutido a seguir, o controlo dos erros aleatórios passa através da realização de um grande número de medições sob as mesmas condições, assim como o cálculo do valor médio. Ambas operações permitem obter o melhor valor e o intervalo de confiança anteriormente assinalados.

A avaliação do intervalo de confiança da medição duma grandeza física dada, quando só estão presentes erros aleatórios, pode ser feita por métodos estatísticos, a julgar pela natureza estatística desses erros. Não vamos fazer um tratamento estatístico rigoroso porque os objectivos e o tempo da aula não o permite. Mas, vamos dar, sem prova, alguns resultados gerais.

**Considere as seguintes definições importantes:**

Suponhamos que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são os valores da grandeza  $X$ , obtidos através de  $n$  diferentes medições realizadas sob as mesmas condições e com um mesmo instrumento. Assim, a média aritmética ou valor médio desses valores,  $X_m$ , é definido como:

$$X_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

É muito simples demonstrar que a média é o melhor valor da grandeza neste caso, mas para fazer isso e ademais encontrar o intervalo de confiança precisamos duma outra definição. Chama-se de “dispersão” duma medição respeito ao valor médio, o valor:

$$\Delta X_i = X_i - X_m$$

Desde que a dispersão pode ser positiva ou negativa, é evidente que o valor médio da dispersão é nulo. Por isso, é costume considerar a soma dos quadrados das dispersões de todas as medições realizadas. Parece um bom critério, considerar que o melhor valor duma grandeza medida  $X$ ,  $X_{mv}$ , é aquele que faz com que a soma dos quadrados das dispersões das medições respeito a esse valor tenha o valor mínimo, quer dizer, que:

$$\sum_{i=1}^n (X_i - X_{mv})^2 = \text{Minimo} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dX_{mv}} \left( \sum_{i=1}^n (X_i - X_{mv})^2 \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad X_{mv} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = X_m$$

Ou seja, que o melhor valor é justamente a média dos valores das medições realizadas. O método anterior é chamado de “Método dos Quadrados Mínimos” ou “Método de Gauss”.

Resta agora obter o intervalo de confiança. Para isso usa-se o chamado de “Desvio Padrão ou Standard” definido pela expressão (valor positivo):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta X_i)^2}{n - 1}}$$

É muito comum, quando se realiza um número muito grande (em princípio infinito) de medições duma certa grandeza física, que a função que descreve as probabilidades (por unidade do intervalo de valores ou densidade de probabilidade) de que o valor da grandeza esteja num entorno de certo valor  $x$ , siga um padrão simétrico em torno do valor

mais provável, constituindo o que se chama de “Distribuição Normal ou de Gauss”. A curva correspondente chama-se de “gaussiana” (figura 2), e a sua expressão matemática é:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_m)^2}{2\sigma^2}}$$

Nesses casos, é possível demonstrar que pode-se tomar o desvio padrão como intervalo de confiança com uma probabilidade de 68% de que o valor de uma medição qualquer esteja compreendido no intervalo  $(X_m - \sigma, X_m + \sigma)$ . Se consideramos o intervalo  $(X_m - 2\sigma, X_m + 2\sigma)$ , então a probabilidade eleva-se até o 95 % (figura 3).

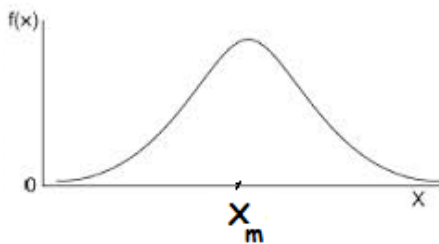


Figura 2

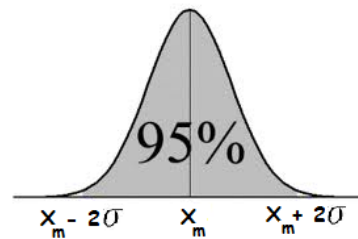


Figura 3

Em resumo, se só estão presentes erros aleatórios e a resolução do instrumento ou sistema de medição fosse menor do que esses erros, para medir experimentalmente uma certa grandeza física devemos fazer um número elevado de medições, achar o valor médio dos valores obtidos,  $X_m$ , e o desvio padrão,  $\sigma$ . Então podemos dizer que o valor de qualquer outra medição da grandeza estará compreendido no intervalo  $(X_m - \sigma, X_m + \sigma)$ , com um 68 % de probabilidade. Isto também se pode escrever como  $X = X_m \pm \sigma$ , onde, não deve esquecer-se que  $\sigma$  representa só o intervalo de confiança com a probabilidade assinalada e não uma cota ou limite do erro, como é o caso da resolução do instrumento.

Há varias observações que devemos, finalmente, fazer:

- a) O desvio padrão é uma medida da precisão da medição (dispersão). Ele está associado á distribuição (gaussiana), a qual depende do método e dos instrumentos de medição, mas não varia se aumenta o número de medições. Porem, nesse caso define-se melhor a curva, quer dizer, o intervalo de confiança é mais real do ponto de vista estadístico.
- b) Tendo em conta o anterior,  $\sigma$  não caracteriza o erro da serie completa de medições. Devemos lembrar que os valores que tomamos para a grandeza medida é o valor médio  $X_m$ , que é o melhor valor, como temos demonstrado anteriormente. Más, se nos repetimos a serie de medições, obtemos o mesmo valor médio? O desvio padrão não responde essa pergunta. Quer dizer, ele não caracteriza o erro da média, e por tanto também não completamente o erro da medição. O valor que geralmente é utilizado

chamase de “erro da média”, o qual, como veremos a seguir, também expressa-se como um intervalo de confiança, mas esta vez respeito ao valor da média.

- c) No processo de medição é importante fazer uma valoração inicial da relação entre os erros aleatórios (vamos supor que os erros sistemáticos tem sido eliminados) e a resolução dos instrumentos ou sistemas de medição utilizados. Um exemplo pode esclarecer melhor esta ideia. Suponhamos que queremos medir directamente com um paquímetro (depois veremos exactamente o que é isso) o comprimento A do lado dum cubo para depois determinar, de maneira indirecta, o volume do mesmo e a densidade da substância. Seja a resolução do instrumento (menor divisão da escala) de 0,1 mm. Começamos por fazer varias medições segundo as várias caras do corpo. Se observamos que não há diferença entre os resultados das medições, quer dizer, todas dão um mesmo valor  $X_c$ , com aproximação até a décima de mm, isso significa que o erro sistemático devido a o corpo não ser um cubo perfeito, e por tanto, usar um modelo incorrecto para o corpo, é menor do que a resolução do instrumento. Então o erro estará determinado simplesmente pela resolução do paquímetro (0,1 mm). Tomaremos como valor da medição  $A = X_c \pm 0,1$  mm. Mas se as variações entre as diferentes medições são de várias décimas de mm, então a resolução do instrumento não é decisiva; procedemos a realizar um conjunto de medições pelas diferentes caras do cubo (as já feitas podem-se aproveitar), achamos o valor médio e o desvio padrão e procedemos como foi descrito anteriormente. Ou seja, assumimos um tratamento de erros aleatórios.
- d) No caso de instrumentos de medição mais complexos, como por exemplo, os instrumentos de medições eléctricas (voltímetros, amperímetros etc) é comum que os fabricantes dêem o valor do erro numa medição qualquer com o instrumento como um certo % do valor medido ou do valor a plena escala, nas diferentes franjas de medição. Por tanto, para determinar o erro devemos procurar a informação que vem de fábrica e não simplesmente considerar a resolução que observamos na escala como cota do erro.

### **Erro do valor médio ou erro da média.**

Voltamos ao problema do erro da média. Si nos repetimos a serie de medições y voltamos a calcular a média, o novo valor vai diferir ligeiramente do anterior. A própria teoria das probabilidade permite demonstrar que o erro da média,  $\delta X_m$ , vem dado pelo desvio padrão e o número de medições através da seguinte expressão:

$$\delta x_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - x_m)^2}$$

É costume reportar, como valor da grandeza medida, se estão presentes erros aleatórios,  $X_m \pm \delta X_m$ . Mesmo que no caso anterior, esse erro expressa-se a través dum intervalo de confiança, obtido mediante o tratamento estatístico da curva da distribuição normal. A

probabilidade de encontrar o valor médio numa nova serie de medições no intervalo  $X_m - \delta X_m \leq X_m \leq X_m + \delta X_m$  é de 68 % e, para levar essa probabilidade até 95 %, há que usar o intervalo  $X_m - 2\delta X_m \leq X_m \leq X_m + 2\delta X_m$ .

### Observação importante:

Deve observar-se que o erro da média, que é o que vamos reportar como erro estatístico, diminui com o aumento do número de medições. Mas, isso não quer dizer que sempre precisasse de um número muito grande delas, só o número que seja necessário para que o erro estatístico ( $\delta X_m$ ) seja menor do que o erro devido à resolução do instrumento ( $e$ ), e para que o valor  $\delta X_m$  tenha sentido do ponto de vista estatístico. Se eles são da mesma ordem e não queremos fazer mais medições, podemos compor ambos os erros quadraticamente (só válido se os erros são independentes, como é o caso), ou seja, o erro absoluto total da grandeza,  $\delta x$ , será:

### 1.4. Propagação dos erros.

É muito comum trabalhar com grandezas que não são medidas directamente, mas calculadas a partir de outras que são, através de funções delas. Nesses casos, é importante determinar como são reflectidos os erros das grandezas medidas, nas calculadas. Para isso analisa-se o que se chama de “propagação dos erros”.

Nos temos feito referência aos erros em dois sentidos diferentes: as chamadas de “cotas dos erros” exemplo das quais são as resoluções dos instrumentos e os erros estatísticos caracterizados pelo desvio padrão ou o erro da média. A propagação dos erros tem diferenças em ambos os casos como vamos a ver neste epígrafe.

#### Vamos analisar primeiramente o caso das cotas dos erros.

Há um método universal para analisar a propagação dos erros e é o uso do conceito de diferencial. A ideia é substituir os diferenciais pelos erros absolutos respectivos, supondo que os mesmos são pequenos. Analisemos primeiramente o caso de uma função de uma só variável,  $y = f(x)$ . Suponhamos que  $x_0$  é um valor compreendido no intervalo  $(x - \delta x, x + \delta x)$ , onde  $x$  é o valor medido experimentalmente e  $\delta x$  o seu erro absoluto (cota do erro realmente). Então vamos aceitar que o valor  $y_0$ , está compreendido no intervalo  $(y - \delta y, y + \delta y)$ ,

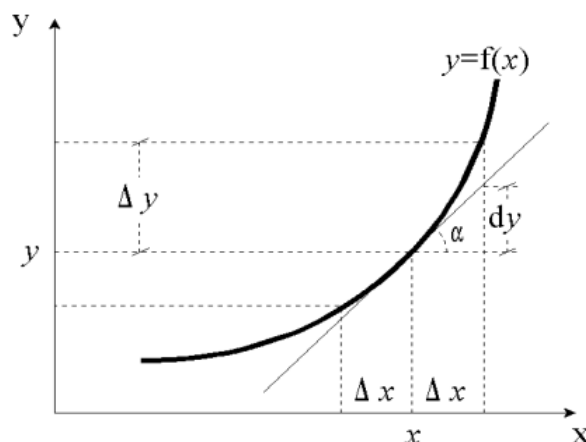




Figura 3

onde  $\delta y$  é o erro absoluto que afeita o cálculo de  $y$  pela expressão  $y = f(x)$ . A pergunta é como podemos determinar  $\delta y$ . A resposta vem dada pelo diferencial (ver figura 3).

Vemos que:

Falando em linguagem dos erros temos  $dy \approx \Delta y = \delta y \approx \delta x$ , ou seja,  $\delta y \approx \delta x$ . Tomamos o valor absoluto da derivada pois o erro é sempre positivo, mas a derivada não.

Assim, por exemplo, se  $y = \sin x$ , então  $\delta y = |\cos x| \delta x$ .

Vamos supor agora que  $y$  é uma função das  $n$  variáveis independentes  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , onde cada uma dessas variáveis representa uma grandeza com cotas de erros  $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n$ . Então a cota do erro ou erro absoluto  $\delta y$  é:

onde são tomados os módulos das derivadas parciais pois é uma cota superior

#### Exemplos:

- 1- Seja  $y = x_1 + x_2$ , com cotas  $\delta x_1$  e  $\delta x_2$ , então  $\delta y = \delta x_1 + \delta x_2$ . O resultado se pode generalizar para um número qualquer de termos da soma. No caso da resta, de todas maneiras se toma a soma das cotas pois num caso o erro pode ser por defeito e noutro por excesso.
- 2- Seja  $y = x_1 x_2$ , com cotas  $\delta x_1$  e  $\delta x_2$ , então  $\delta y = |x_2| \delta x_1 + |x_1| \delta x_2$ . Observe que o erro relativo nesse caso é  $\frac{\delta y}{y} = \frac{\delta x_1}{x_1} + \frac{\delta x_2}{x_2}$ . No caso do quociente  $y = \frac{x_1}{x_2}$ , o erro relativo é o mesmo que no caso anterior.

#### Vejamos agora o caso da propagação dos erros aleatórios.

Nesses casos, os termos da soma no diferencial são elevados ao quadrado e o erro é a raiz quadrada da soma desses quadrados, mesmo que o desvio padrão para o caso das medições independentes. Fala-se da propagação quadrática dos erros aleatórios. Quer dizer:

#### Exemplos:

- 1- .
- 2- Se  $y = x_1^2 + x_2^2$ , temos .

- 3- O período  $T$  dum pêndulo simples relaciona-se com o seu comprimento  $\ell$  e com a aceleração gravítica  $g$  através da expressão . Numa experiência, mediu-se o período várias vezes e encontrou-se o valor  $T = 2,04 \pm 0,02$  s. O comprimento mediu-se com uma cinta milimétrica por vários alunos e o resultado final foi  $\ell = 1,042 \pm 0,013$ . Calcule o valor de  $g$  com o seu erro aleatório.

Solução:

Isolando  $g$  da equação temos . Substituindo valores:

Para achar o erro aleatório e determinar o número das cifras significativas do valor anterior propagamos os erros. Vamos achar diretamente o erro relativo dividendo por  $g$ :

. Por tanto

. Logo, .

Nota: É costume dar o erro com uma só cifra significativa. Assim, neste caso poderíamos escrever:  $\delta g \approx 0,2 \text{ m/s}^2$  e, por tanto,  $g = 9,9 \pm 0,2 \text{ m/s}^2$ . Deve observar-se como o número de cifras do valor reportado da grandeza vai depender do número de cifras do erro.

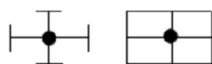
### 1.5. Os gráficos experimentais.

A representação gráfica dos resultados das medições tem um papel relevante no laboratório de Física Experimental. Ela permite visualizar de maneira simples e direta o comportamento das grandezas medidas e, o que é mais importante ainda, a relação funcional entre diferentes grandezas. É muito comum obter os resultados das medições das grandezas no laboratório e expressá-las por meio de tabelas, mas depois elas são levadas ao gráfico, geralmente em coordenadas cartesianas. No caso mais simples de duas grandezas (variáveis),  $x$  e  $y$ , entre as quais existe uma relação funcional dada pela expressão  $y = f(x)$ , a partir do gráfico onde são representados todos os pares ordenados de valores  $(x, y)$  obtidos no experimento, é possível determinar a expressão analítica mediante o processamento adequado desses dados. Outras vezes é conhecida a relação funcional e o que se pretende é obter do experimento determinado parâmetro, por exemplo, na função podemos necessitar determinar a constante  $k$ . Isso se pode fazer mediante o chamado de “ajuste” dessa expressão aos dados experimentais. Em efeito, se são medidos os valores de  $x$  e de  $y$  e levamos ao gráfico os valores de  $(x, y)$ , devemos obter uma linha reta cuja pendente é precisamente o parâmetro  $k$ . Por tanto, o ajuste desses pontos experimentais à “melhor” reta resolve o problema.

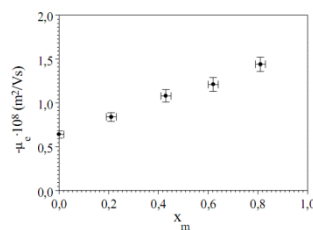
Um aspecto de singular importância ao fazer um gráfico experimental é o relativo às escalas dos eixos coordenados desde dois pontos de vista diferentes. O primeiro é fácil de compreender e tem que ver com a “resolução” da escala no sentido de não perder cifras

significativas dos valores experimentais. O segundo está relacionado com o tipo de escala, podendo-se apresentar fundamentalmente as escalas linear y logarítmica. Neste último caso a escala é numerada de maneira que as distâncias nelas representam o logaritmo em base 10 do número indicado. Então se apresentam três casos básicos segundo as escalas dos dois eixos (supondo só duas variáveis,  $x$  e  $y$ ): linear-linear, linear-logarítmica e logarítmica- logarítmica. Antes do desenvolvimento atual dos computadores e os softwares de processamento de gráficos, usavam-se os papeis milimétricos para o traçado dos gráficos no primeiro caso, os chamados de papeis semilog para o segundo e os papeis log-log para o terceiro. Para entender o uso e a vantagem desses papeis suponhamos que conhecemos que as grandezas  $x$  e  $y$  estão relacionadas pela expressão  $y = A 10^{kx}$ , que podemos medir essas grandezas experimentalmente e que necessitamos determinar as constantes  $A$  e  $k$ . Mas, a partir dessa expressão obtemos  $\log y = \log A + kx$ . Então se levamos diretamente os valores  $(x,y)$  medidos no experimento ao papel semilog com o eixo horizontal OX em escala natural (linear) e o eixo vertical OY em escala logarítmica, obtemos uma linha reta cuja pendente é  $k$  e cujo intercepto com o eixo OY é  $\log A$ . Isso permite obter os dois parâmetros desejados. Se a função fosse, por exemplo,  $y = A x^k$ , é evidente que  $\log y = \log A + k \log x$ . Por tanto, se levamos os valores experimentais  $(x,y)$  ao gráfico no papel log-log também obtemos uma reta de pendente  $k$  e intercepto com o eixo OY igual a  $\log A$ . Realmente hoje o uso desses tipos de papeis é só limitado a uma avaliação aproximada e rápida no trabalho experimental. Os programas de processamento de gráficos diretamente fazem todo o trabalho com muita maior rapidez e precisão, a escala dos eixos pode ser mudada com só fazer uma indicação e a pendente e o intercepto calculados expeditamente. Só precisa-se introduzir a tabela de valores das duas variáveis e tudo o resto é feito automaticamente.

É bom aclarar que nos gráficos, os erros dos valores medidos são introduzidos como pequenas barras horizontais e verticais de comprimento igual a duas vezes o erro em torno do ponto cujas coordenadas representam os valores  $(x,y)$ . As vezes essas barras estão limitadas nos extremos ou usamos retângulos para representar os pontos experimentais (figura 4 e 5).



**1.6. !Figura 4** Ajuste recta.



**.Figura 5**

**linear. Determinação da melhor**

É um facto bem conhecido que na imensa maioria dos casos, os fenômenos físicos acontecem de maneira tal que as relações que se estabelecem entre duas variáveis que caracterizam esses fenômenos são do tipo linear e, por tanto, os pontos experimentais correspondentes devem pertencer a uma linha recta. Tendo em conta isso, uma vez fixados os pontos no gráfico pode, em primeira aproximação, trazarse manualmente a recta de maneira que o maior número possível de pontos estejam contidos na mesma. Se o número for fosse grande, ainda pode tentarse que a distribuição dos pontos fora seja simétrica no sentido de estar o mesmo número de pontos a ambos os lados da recta. Esta, no entanto, é

uma maneira grosseira de fazer as coisas. Existe um método de obter analiticamente a equação da melhor recta, que é chamado de “Método dos Mínimos Quadrados”, a partir do conjunto de pontos experimentais  $\{(x_i, y_i)\}$ . A ideia é a seguinte. Vamos supor que a equação buscada é  $y = a + bx$ , onde precisamos encontrar  $a$  e  $b$ . Se  $y_i$  é o valor medido experimentalmente para a variável  $y$  correspondente ao valor medido  $x_i$ , então o valor calculado pela equação anterior será  $a + bx_i$  e o desvio será  $y_i - (a + bx_i)$ . Vamos procurar encontrar os valores de  $a$  e  $b$  tais que a soma dos quadrados dos desvios seja mínima, quer dizer, tais que:

$$s \equiv \sum_{i=1}^n [y_i - (a + b x_i)]^2$$

seja mínima. Para isso deve cumprir-se que:

$$\frac{\partial s}{\partial a} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial s}{\partial b} = 0$$

O anterior conduz ao seguinte sistema de duas equações com duas incógnitas:

$$\begin{aligned} 1) \frac{\partial s}{\partial a} &= - \sum_{i=1}^n 2(y_i - a - b x_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n y_i = a n + b \sum_{i=1}^n x_i \\ 2) \frac{\partial s}{\partial b} &= - \sum_{i=1}^n 2(y_i - a - b x_i)(x_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{aligned}$$

A solução é:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i}{\left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i - n \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

### **Critério para determinar que tão bom seja o ajuste à linha reta**

Faz-se através do chamado de “coeficiente de correlação, r”. Se y depende linearmente de x a través da equação  $y = a + bx$  (a), então também x depende linearmente de y através duma equação do tipo  $x = a' + b'y$  (b), resultando, para os parâmetros a' e b' as seguintes expressões:

$$a' = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n y_i^2 \sum_{i=1}^n x_i}{\left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n y_i^2}$$

$$b' = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i - n \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n y_i^2}$$

Da equação (b) podemos isolar y obtendo . Comparando as equações (a) e (c) obtemos: e . A partir de (e) obtemos .

Definimos o coeficiente de correlação como , quer dizer:

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{\left[ n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] \left[ n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right]}}$$

Assim definido, o coeficiente de correlação está entre -1 e 1.

Se  $r = 0$  não existe correlação linear nenhuma.

Se  $|r| = 1$ , existe uma correlação linear absoluta entre  $x$  e  $y$ .

Quanto mais próximo esteja  $|r|$  de 1 melhor será a correlação linear entre  $x$  e  $y$  e ao invés, quanto mais próximo esteja de 0, pior será dita correlação.

Finalmente assinalemos que os atuais programas de processamento de gráficos, como o EXCEL, permitem obtermos muito rapidamente os valores de  $a$  e  $b$  bem como o valor do coeficiente de correlação linear, tudo a partir dos valores experimentais  $\{(x_i, y_i)\}$ .