



IEL – protokol k projektu

Kambulat Alakaev
xalaka00

19. prosince 2021

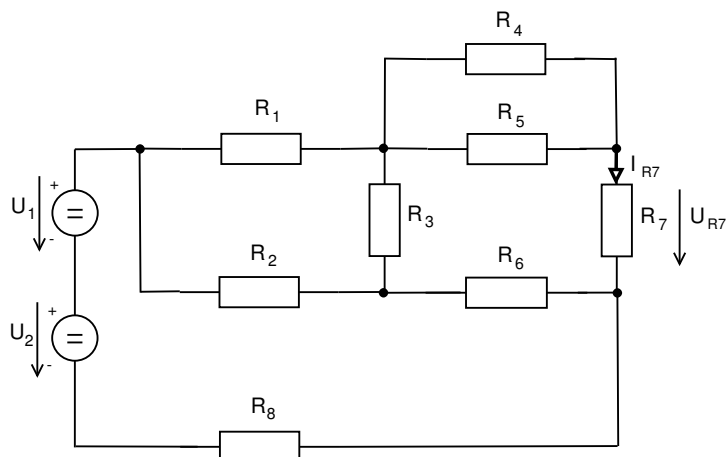
Obsah

1	Příklad 1	2
2	Příklad 2	8
3	Příklad 3	11
4	Příklad 4	14
5	Příklad 5	17
6	Shrnutí výsledků	20

Příklad 1

Stanovte napětí U_{R7} a proud I_{R7} . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]	R_7 [Ω]	R_8 [Ω]
B	95	115	650	730	340	330	410	830	340	220

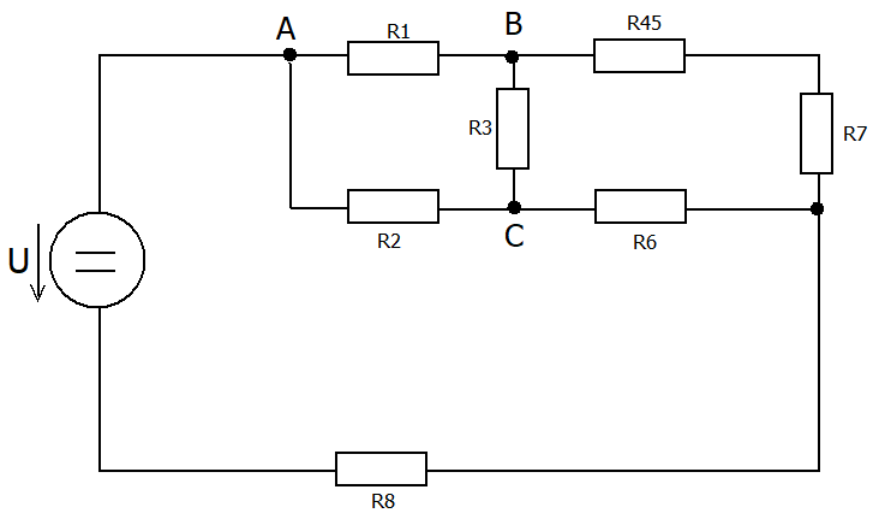


- Odporů R_4 a R_5 jsou paralelní:

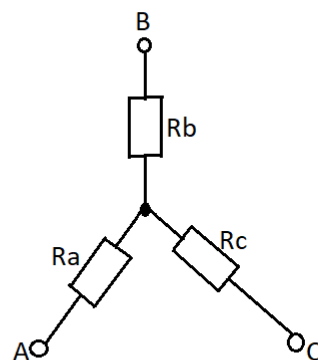
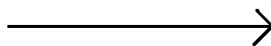
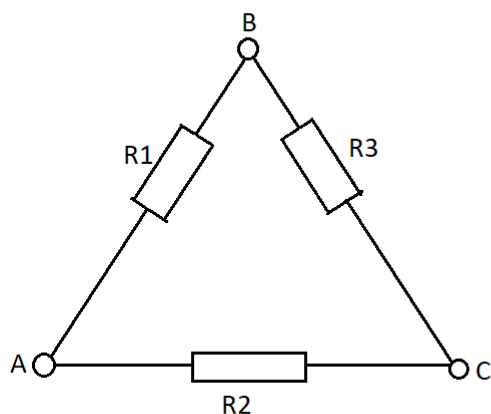
$$R_{45} = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_5} = 182.8378 \Omega$$

- Napětí U_1 a U_2 jsou sériově zapojená napětí:

$$U = U_1 + U_2 = 210V$$



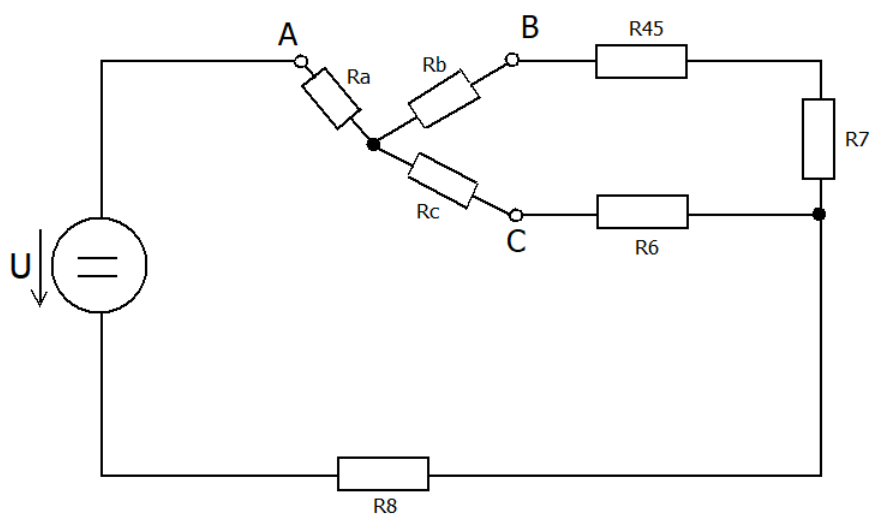
- Využijeme transformaci Trojúhelník-hvězda



- $R_a = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 275.8721 \Omega$

- $R_b = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 128.4884 \Omega$

- $R_c = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 144.3023 \Omega$

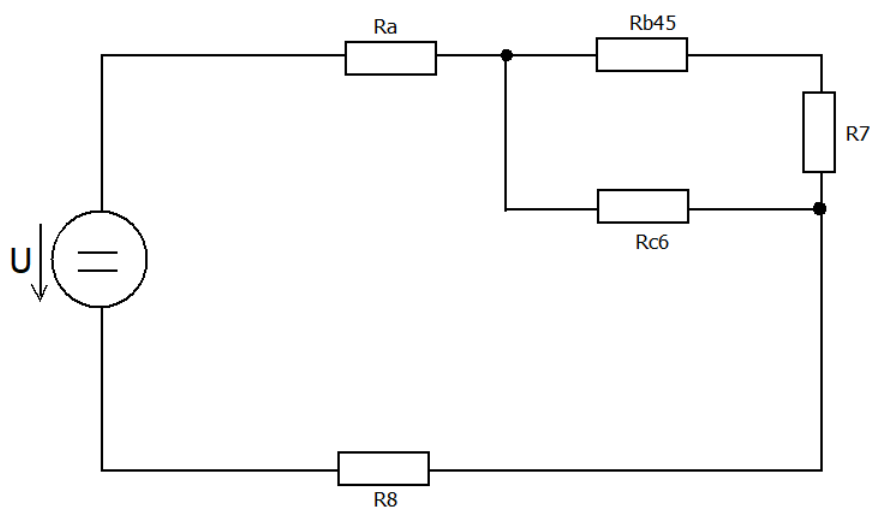


- Odpory R_b a R_{45} jsou seřiové:

$$R_{b45} = R_b + R_{45} = 128.4884 \Omega + 182.8378 \Omega = 311.3262 \Omega$$

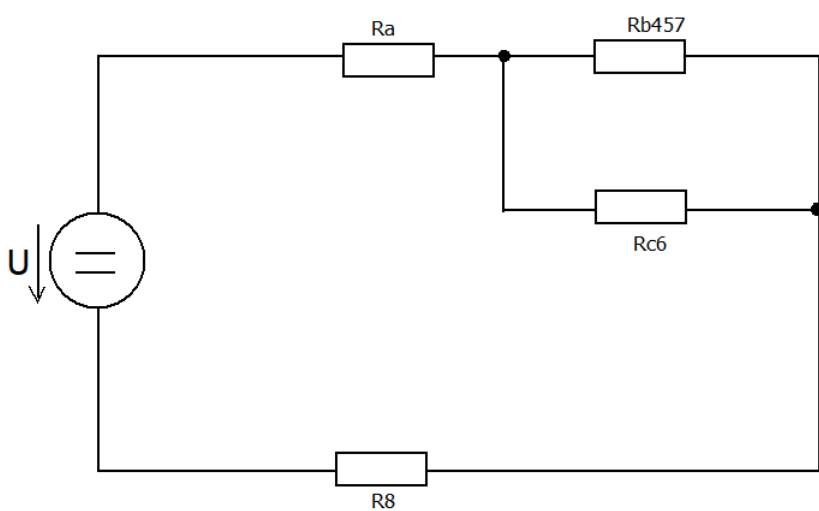
- Odpory R_c a R_6 jsou seřiové:

$$R_{c6} = R_c + R_6 = 144.3023 \Omega + 830 \Omega = 974.3023 \Omega$$



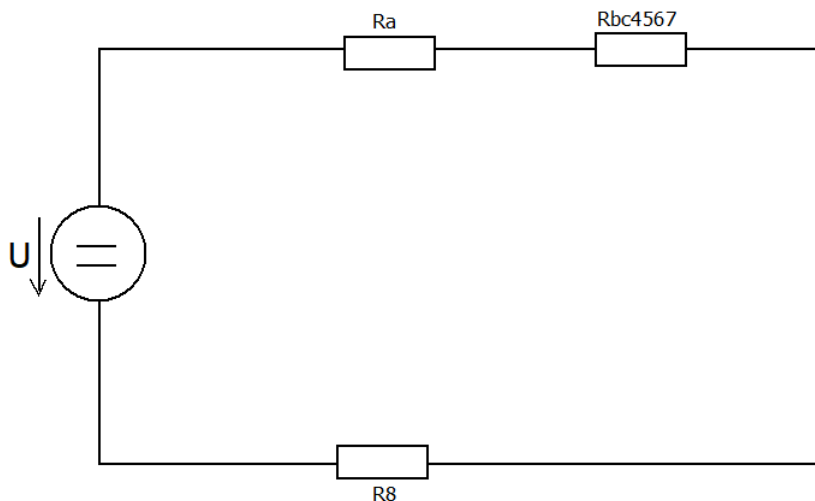
- Odpor R_{b45} a R_7 jsou seřiové:

$$R_{b457} = R_{b45} + R_7 = 311.3262\Omega + 340\Omega = 651.3262\Omega$$



- Odpor R_{b457} a R_{c6} jsou paralelní:

$$R_{bc4567} = \frac{R_{b457} \cdot R_{c6}}{R_{b457} + R_{c6}} = \frac{651.3262 \cdot 974.3023}{651.3262 + 974.3023} = 390.3651\Omega$$



- Odporů R_a , R_{bc4567} a R_8 jsou seřadové:

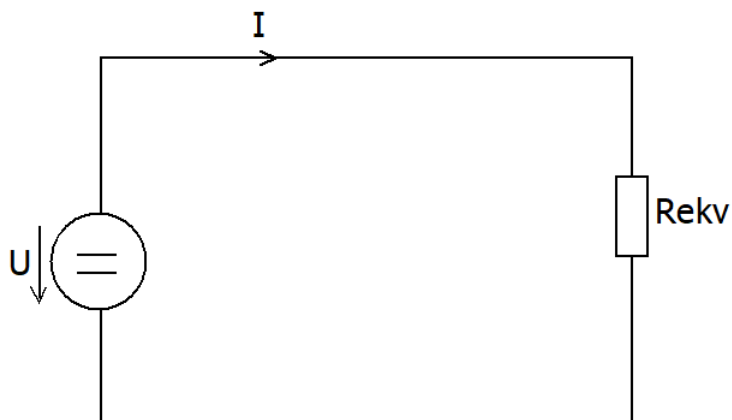
$$R_{ekv} = R_a + R_{bc4567} + R_8 = 275.8721\Omega + 390.3651\Omega + 220\Omega = 886.2372\Omega$$

- Proud I v obvodu:

$$I = \frac{U}{R_{ekv}} = \frac{210V}{886.2372\Omega} = 0.2370A$$

- Kontrola (2 Kirchhoffův zákon):

$$(I \cdot R_{ekv}) - U = (0.2370A \cdot 886.2372\Omega) - 210V = 210.0382V - 210V = 0.0382V \approx 0V$$



- Napětí U_{Ra} :

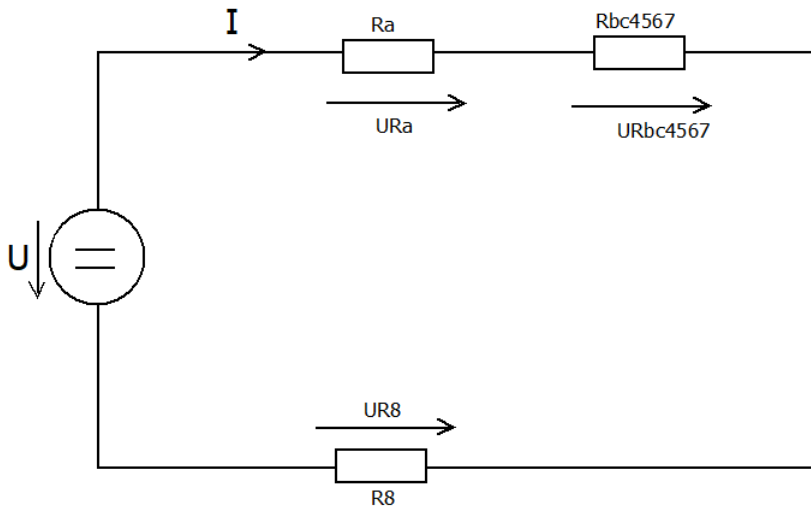
$$U_{Ra} = I \cdot R_a = 0.2370A \cdot 275.8721\Omega = 65.3817V$$

- Napětí $U_{Rbc4567}$:

$$U_{Rbc4567} = I \cdot R_{bc4567} = 0.2370A \cdot 390.3651\Omega = 92.5165V$$

- Napětí U_{R8} :

$$U_{R8} = I \cdot R_8 = 0.2370A \cdot 220\Omega = 52.14V$$



- Proud I_{Rb457} :

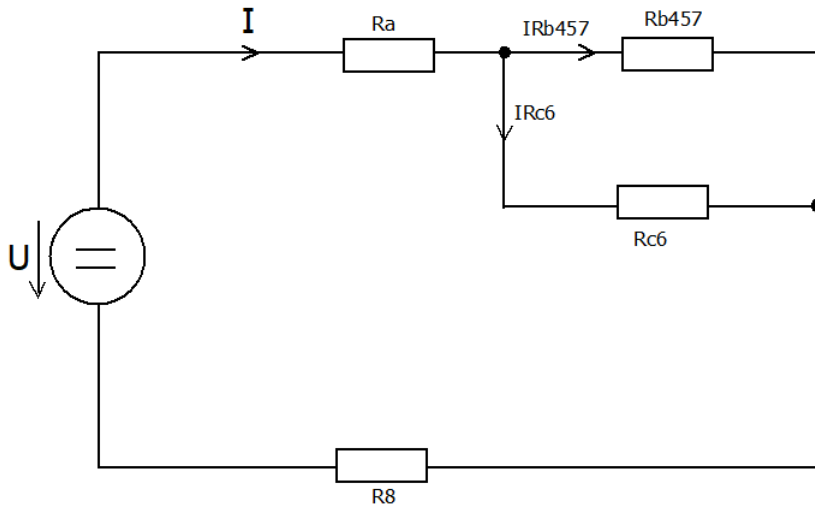
$$I_{Rb457} = \frac{U_{Rbc4567}}{R_{b457}} = \frac{92.5165V}{651.3262\Omega} = 0.1420A$$

- Proud I_{Rc6} :

$$I_{Rc6} = \frac{U_{Rbc4567}}{R_{c6}} = \frac{92.5165V}{974.3023\Omega} = 0.0950A$$

- Kontrola (1 Kirchhoffův zákon):

$$I - I_{Rc6} + I_{Rb457} = 0.2370A - 0.0950A + 0.1420A = 0A$$

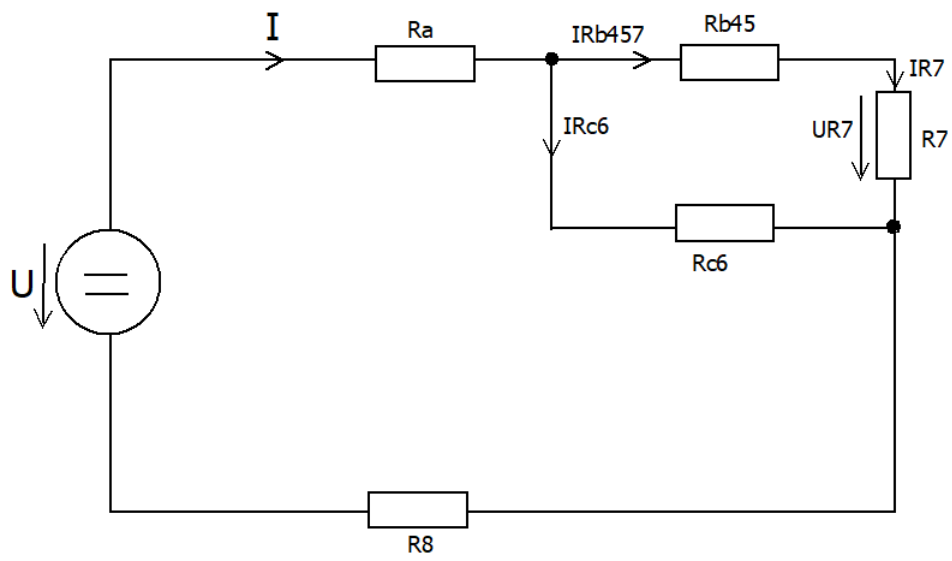


- Proud I_{R7} je proud I_{Rb457} :

$$I_{R7} = I_{Rb457} = 0.1420A$$

- Napětí U_{R7} :

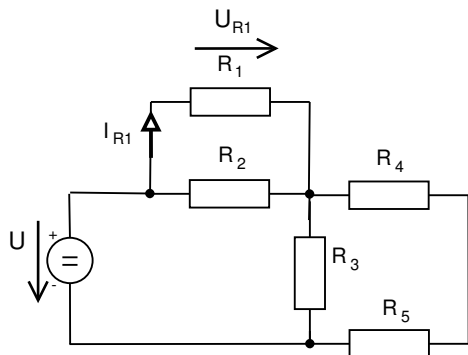
$$U_{R7} = I_{R7} \cdot R7 = 0.1420A \cdot 340\Omega = 48.28V$$



Příklad 2

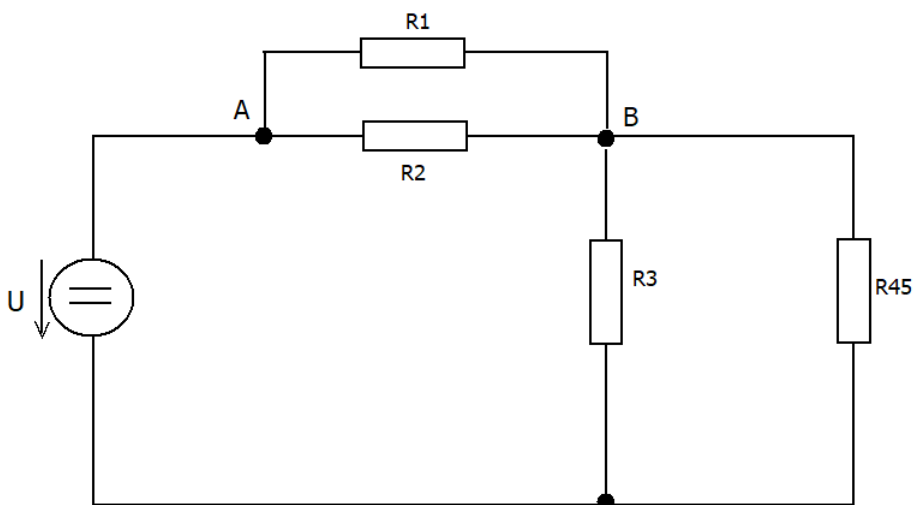
Stanovte napětí U_{R1} a proud I_{R1} . Použijte metodu Théveninovy věty.

sk.	U [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
E	250	150	335	625	245	600



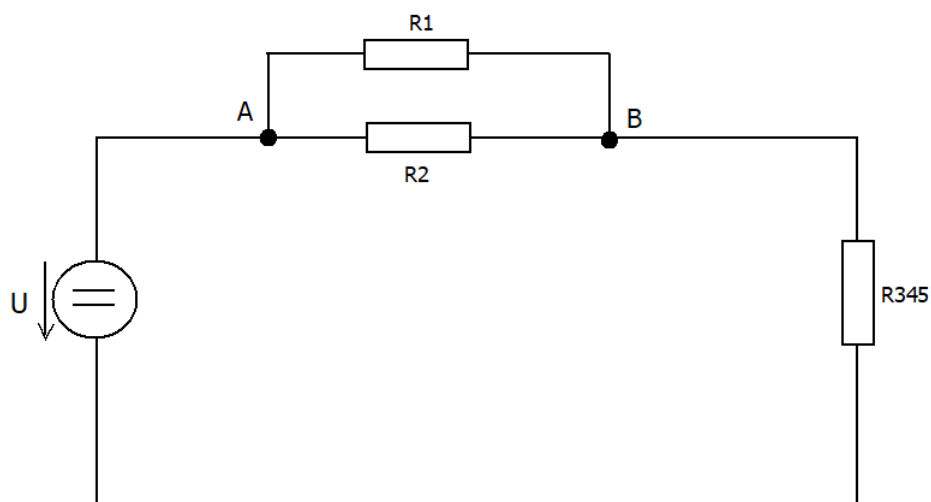
- Odpor R_4 a R_5 jsou seriové:

$$R_{45} = R_4 + R_5 = 845\Omega$$



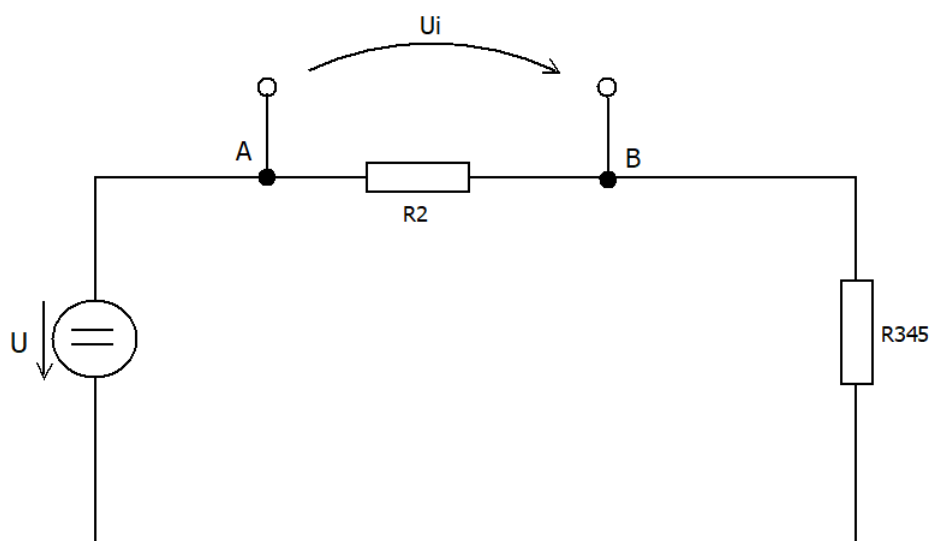
- Odpor R_3 a R_{45} jsou paralelní:

$$R_{345} = \frac{R_3 \cdot R_{45}}{R_3 + R_{45}} = \frac{625 \cdot 845}{625 + 845} = 359.2687\Omega$$



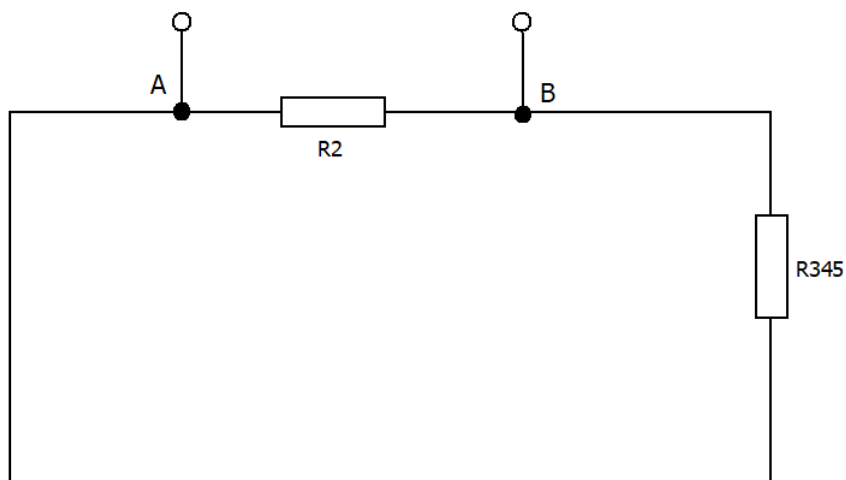
- Najdeme napětí naprázdno mezi svorkami A,B (napětí náhradního zdroje):

$$U_i = U \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_{345}} = 250V \cdot \frac{335\Omega}{335\Omega + 359.2687\Omega} = 120.6305V$$

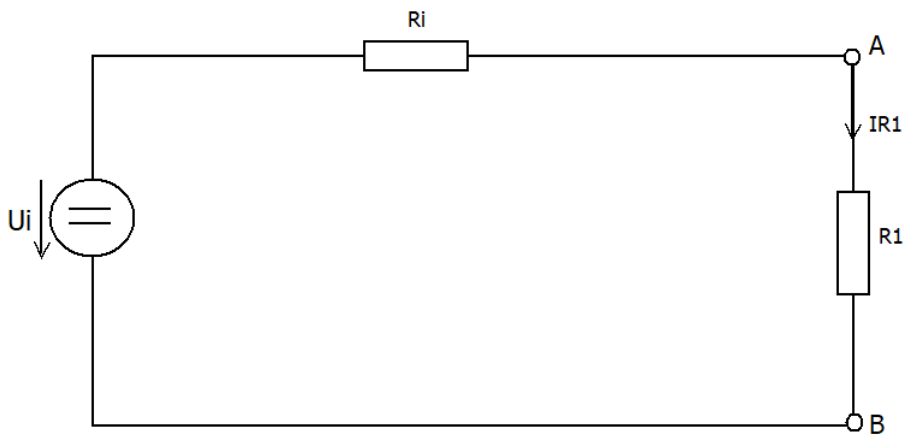


- Najdeme odpor mezi svorkami A,B (odpor náhradního zdroje):

$$R_i = \frac{R_2 \cdot R_{345}}{R_2 + R_{345}} = \frac{335 \cdot 359.2687}{335 + 359.2687} = 173.3551\Omega$$



●Obvod skutečného zdroje napětí:



●Napětí U_{R1} a proud I_{R1} :

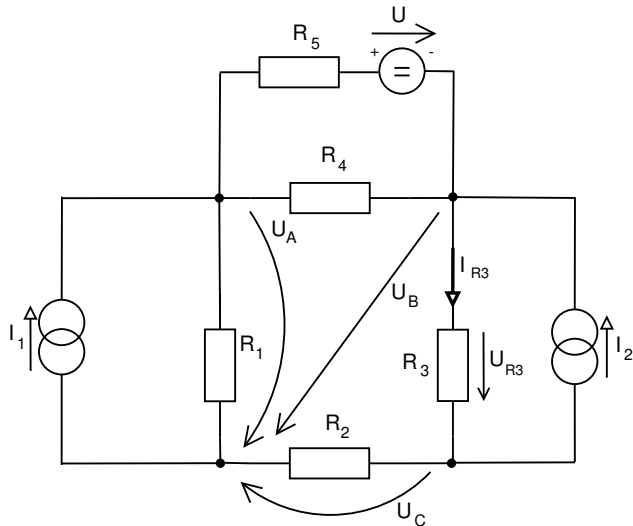
$$I_{R1} = \frac{U_i}{R_i + R_1} = \frac{120.6305V}{173.3551\Omega + 150\Omega} = 0.3731A$$

$$U_{R1} = R_1 \cdot I_{R1} = 150\Omega \cdot 0.3731A = 55.965V$$

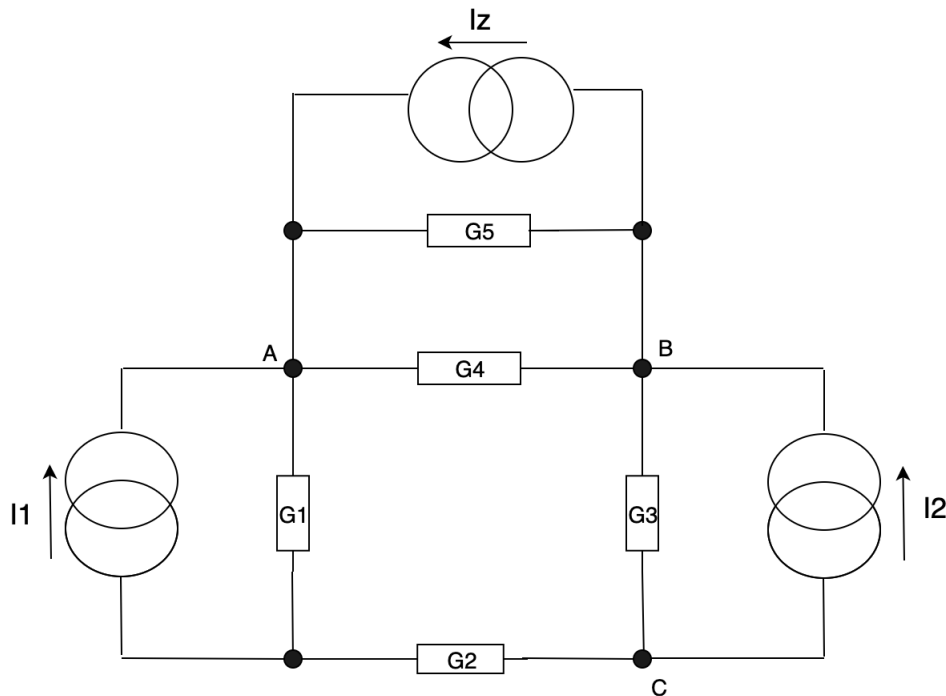
Příklad 3

Stanovte napětí U_{R3} a proud I_{R3} . Použijte metodu uzlových napětí (U_A , U_B , U_C).

sk.	U [V]	I_1 [A]	I_2 [A]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
A	120	0.9	0.7	53	49	65	39	32



- Nahradíme zdroj napětí zdrojem proudu a odpory nahradíme vodivostí:



- Najdeme všechny vodivosti a proud I_z :

$$I_z = \frac{U}{R5} = 3.75A$$

$$G1 = \frac{1}{R1} = 0.0189S$$

$$G2 = \frac{1}{R2} = 0.0204S$$

$$G3 = \frac{1}{R3} = 0.0154S$$

$$G4 = \frac{1}{R4} = 0.0256S$$

$$G5 = \frac{1}{R5} = 0.0312S$$

- Máme soustavu rovnic typu $K \cdot x = B$

- Sestavíme matici vodivosti K:

$$K = \begin{bmatrix} G1 + G4 + G5 & -G4 - G5 & 0 \\ -G4 - G5 & G3 + G4 + G5 & -G3 \\ 0 & -G3 & G2 + G3 \end{bmatrix}$$

- Pak soustava v maticové podobě je:

$$\begin{bmatrix} G1 + G4 + G5 & -G4 - G5 & 0 \\ -G4 - G5 & G3 + G4 + G5 & -G3 \\ 0 & -G3 & G2 + G3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_z + I_1 \\ I_2 - I_z \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

- Dosadíme známé hodnoty do soustavy:

$$\begin{bmatrix} 0.0757 & -0.0568 & 0 \\ -0.0568 & 0.0722 & -0.0154 \\ 0 & -0.0154 & 0.0358 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.65 \\ -3.05 \\ -0.7 \end{bmatrix}$$

- Řešíme soustavu podle Cramerova pravidla:

$$\Delta_K = \begin{vmatrix} 0.0757 & -0.0568 & 0 \\ -0.0568 & 0.0722 & -0.0154 \\ 0 & -0.0154 & 0.0358 \end{vmatrix} =$$

$$= 0.0757 \cdot 0.0722 \cdot 0.0358 - 0.0757 \cdot (-0.0154) \cdot (-0.0154) - (-0.0568) \cdot (-0.0568) \cdot 0.0358 = 6.2213928E - 5$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4.65 & -0.0568 & 0 \\ -3.05 & 0.0722 & -0.0154 \\ -0.7 & -0.0154 & 0.0358 \end{vmatrix} =$$

$$= 4.65 \cdot 0.0722 \cdot 0.0358 + (-0.7) \cdot (-0.0154) \cdot (-0.0568) - 0.0358 \cdot (-3.05) \cdot (-0.0568) - 4.65 \cdot (-0.0154) \cdot (-0.0154) = 0.004102044$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0.0757 & 4.65 & 0 \\ -0.0568 & -3.05 & -0.0154 \\ 0 & -0.7 & 0.0358 \end{vmatrix} =$$

$$= 0.0757 \cdot (-3.05) \cdot 0.03558 - 0.0358 \cdot (-0.0568) \cdot 4.65 - 0.0757 \cdot (-0.7) \cdot (-0.0154) = 0.000373767$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0.0757 & -0.0568 & 4.65 \\ -0.0568 & 0.0722 & -3.05 \\ 0 & -0.0154 & -0.7 \end{vmatrix} =$$

$$= 0.0757 \cdot 0.0722 \cdot (-0.7) + 4.65 \cdot (-0.0568) \cdot (-0.0154) - (-0.7) \cdot (-0.0568) \cdot (-0.0568) - 0.0757 \cdot (-0.0154) \cdot (-3.05) = -0.001055691$$

$$U_A = \frac{\Delta_1}{\Delta_K} = \frac{0.004102044}{6.2213928E-5} = 65.9345V$$

$$U_B = \frac{\Delta_2}{\Delta_K} = \frac{0.000373767}{6.2213928E-5} = 6.0077V$$

$$U_C = \frac{\Delta_3}{\Delta_K} = \frac{-0.001055691}{6.2213928E-5} = -16.9687V$$

• Najdeme U_{R3} a I_{R3} :

$$U_{R3} = U_B - U_A = 6.0077 - (-16.9687) = 22.9764V$$

$$I_{R3} = \frac{U_{R3}}{R3} = \frac{22.9764V}{65\Omega} = 0.3535A$$

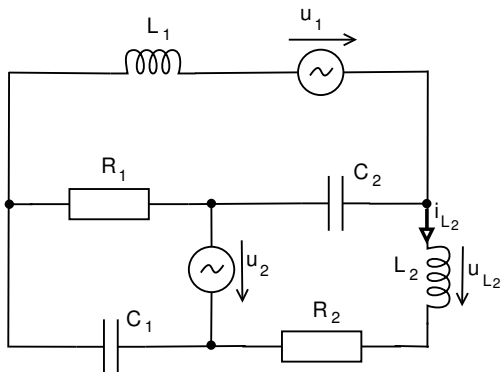
Příklad 4

Pro napájecí napětí platí: $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi ft)$, $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi ft)$.

Ve vztahu pro napětí $u_{L_2} = U_{L_2} \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_{L_2})$ určete $|U_{L_2}|$ a φ_{L_2} . Použijte metodu smyčkových proudů.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$).

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	L_1 [mH]	L_2 [mH]	C_1 [μ F]	C_2 [μ F]	f [Hz]
B	2	4	11	15	100	85	220	95	80



•Převědeme hodnoty cívek a kondenzátorů do základních jednotek a spočítáme ω :

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 80 = 160 \cdot \pi = 502.6548 \text{ Rad}$$

$$L_1 = 100 \text{ mH} = \frac{100}{1000} \text{ H} = 0.1 \text{ H}$$

$$L_2 = 85 \text{ mH} = \frac{85}{1000} \text{ H} = 0.085 \text{ H}$$

$$C_1 = 220 \mu\text{F} = \frac{220}{1000000} \text{ F} = 0.00022 \text{ F}$$

$$C_2 = 95 \mu\text{F} = \frac{95}{1000000} \text{ F} = 0.000095 \text{ F}$$

•Spočítáme impedanci cívek a kondenzátorů:

$$Z_C = \frac{-j}{\omega \cdot C}$$

$$Z_{C1} = \frac{-j}{\omega \cdot C_1} = \frac{-j}{502.6548 \cdot 0.00022} = -9.0429j$$

$$Z_{C2} = \frac{-j}{\omega \cdot C_2} = \frac{-j}{502.6548 \cdot 0.000095} = -20.9414j$$

$$Z_L = j \cdot \omega \cdot L$$

$$Z_{L1} = j \cdot \omega \cdot L_1 = j \cdot 502.6548 \cdot 0.1 = 50.2655j$$

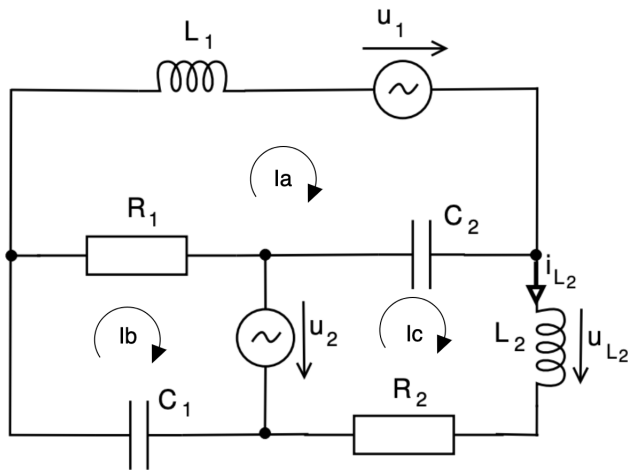
$$Z_{L2} = j \cdot \omega \cdot L_2 = j \cdot 502.6548 \cdot 0.085 = 42.7257j$$

- Zjistíme hodnoty napětí u_1 a u_2 :

$$u_1 = U_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) = U_1 \cdot \sin(\omega \cdot \frac{\pi}{2 \cdot \omega}) = U_1 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) = U_1 \cdot 1 = 2V$$

$$u_2 = U_2 \cdot \sin(\omega \cdot t) = U_2 \cdot \sin(\omega \cdot \frac{\pi}{2 \cdot \omega}) = U_2 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) = U_2 \cdot 1 = 4V$$

- Metodou smyčkových proudů:



$$I_a : \\ Z_{L1} \cdot I_a + Z_{C2} \cdot (I_a - I_c) + R_1 \cdot (I_a - I_b) = -U_1$$

$$I_b : \\ Z_{C1} \cdot I_b + R_1 \cdot (I_b - I_a) = -U_2$$

$$I_c : \\ Z_{L2} \cdot I_c + Z_{C2} \cdot (I_c - I_a) + R_2 \cdot I_c = U_2$$

- Sestavíme matici pro proudové smyčky:

$$\begin{bmatrix} Z_{L1} + Z_{C2} + R_1 & -R_1 & -Z_{C2} \\ -R_1 & Z_{C1} + R_1 & 0 \\ -Z_{C2} & 0 & Z_{L2} + R_2 + Z_{C2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_1 \\ -U_2 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

- Dosadíme hodnoty do matice:

$$\begin{bmatrix} 11 + 29.3241j & -11 & 20.9414j \\ -11 & 11 - 9.0429j & 0 \\ 20.9414j & 0 & 15 + 21.7843j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4559 + 0.0668j \\ -0.5218 - 0.3622j \\ 0.4131 + 0.0366j \end{bmatrix}$$

• Najdeme proud I_{L2} a napětí U_{L2} :

$$I_{L2} = I_c = (0.4131 + 0.0366j)A$$

$$U_{L2} = I_{L2} \cdot Z_{L2} = (0.4131 + 0.0366j) \cdot 42.7257j = -1.5638 + 17.65j$$

• Najdeme amplitudu $|U_{L2}|$ a fazový posun φ_{L2} :

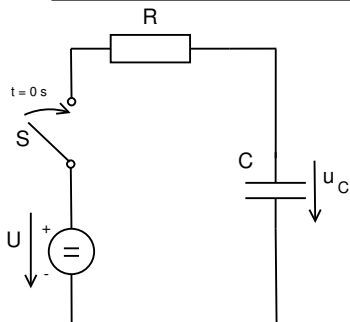
$$|U_{L2}| = \sqrt{(-1.5638)^2 + 17.65^2} = \sqrt{2.4455 + 311.5225} = \sqrt{313.968} = 17.7191V$$

$$\varphi_{L2} = \pi + \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(U_{L2})}{\operatorname{Re}(U_{L2})}\right) \cdot \frac{\pi}{180} = \pi + \arctan\left(\frac{17.65}{-1.5638}\right) \cdot \frac{\pi}{180} = (\pi + \arctan(-11.2866) \cdot \frac{\pi}{180}) \cdot \frac{180}{\pi} = 95.0632^\circ$$

Příklad 5

V obvodu na obrázku níže v čase $t = 0$ [s] sepne spínač S . Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení $u_C = f(t)$. Proveďte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

sk.	U [V]	R [Ω]	C [F]	$u_C(0)$ [V]
E	50	30	40	10



• Víme, že:

- 1) $i = U_R / R$ (v obvodu teče stejný stejný proud)
- 2) $U_R + U_C = U$ (podle II Kirchhoffova zákona)
- 3) $U'_C = \frac{i}{C}$

• Sestavíme rovnici s U_C, U'_C :

dosadíme 1) do 3): $U'_C = \frac{U_R}{R \cdot C}$

vyjádříme U_R z 2) : $U'_C = \frac{U - U_C}{R \cdot C}$

• Vznikla diferenciální rovnice:

$$U'_C - \frac{U - U_C}{R \cdot C} = 0$$

• Počáteční úloha (při $U_C(0) = 10V$):

$$U'_C - \frac{50 - U_C}{1200} = 0$$

$$U'_C - \frac{50}{1200} + \frac{U_C}{1200} = 0$$

$$U'_C + \frac{U_C}{1200} = \frac{50}{1200}$$

$$U'_C + \frac{U_C}{1200} = \frac{1}{24}$$

• Očekávané řešení:

$$U_C(t) = k(t) \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

- Sestavíme charakteristickou rovnici ($U'_C \Leftrightarrow \lambda$, $U_C \Leftrightarrow 1$):

$$\lambda + \frac{1}{1200} = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{1200}$$

- Dosadíme λ do funkce $U_C(t)$:

$$U_C(t) = k(t) \cdot e^{\frac{-t}{1200}}$$

- Najdeme $U'_C(t)$:

$$U'_C(t) = k'(t) \cdot e^{\frac{-t}{1200}} + k(t) \cdot \left(\frac{-1}{1200}\right) \cdot e^{\frac{-t}{1200}}$$

- Dosadíme U'_C a U_C do počáteční úlohy:

$$k'(t) \cdot e^{\frac{-t}{1200}} + \left(\frac{-1}{1200}\right) \cdot k(t) \cdot e^{\frac{-t}{1200}} + \frac{1}{1200} \cdot k(t) \cdot e^{\frac{-t}{1200}} = \frac{1}{24}$$

$$k'(t) \cdot e^{\frac{-t}{1200}} = \frac{1}{24}$$

$$k'(t) = \frac{1}{24 \cdot e^{\frac{-t}{1200}}}$$

$$k'(t) = \frac{e^{\frac{t}{1200}}}{24}$$

- Najdeme integrál $k'(t)$:

$$k(t) = 50 \cdot e^{\frac{t}{1200}} + K, \text{ kde } K - \text{ integrační konstanta}$$

- Dosadíme $k(t)$ do $U_C(t)$:

$$U_C(t) = (50 \cdot e^{\frac{t}{1200}} + K) \cdot e^{\frac{-t}{1200}}$$

$$U_C(t) = 50 + K \cdot e^{\frac{-t}{1200}}$$

- Nahradíme $U_C(t)$ počáteční podmínkou $U_C(0)$:

$$U_C(0) = 50 + K \cdot e^0$$

$$10 = 50 + K$$

$$K = -40$$

- Dosadíme K do $U_C(t)$ a dostaneme konečnou funkci:

$$U_C(t) = 50 - 40 \cdot e^{\frac{-t}{1200}}$$

Kontrola

$$U'_C(t) = \frac{40 \cdot e^{\frac{-t}{1200}}}{1200}$$

• Dosadíme U'_C a U_C do počáteční úlohy:

$$\frac{40 \cdot e^{\frac{-t}{1200}}}{1200} + \frac{50 - 40 \cdot e^{\frac{-t}{1200}}}{1200} = \frac{1}{24}$$

$$\frac{40 \cdot e^{\frac{-t}{1200}}}{1200} - \frac{40 \cdot e^{\frac{-t}{1200}}}{1200} + \frac{50}{1200} = \frac{1}{24}$$

$$\frac{1}{24} = \frac{1}{24}$$

Shrnutí výsledků

Příklad	Skupina	Výsledky	
1	B	$U_{R7} = 48.28V$	$I_{R7} = 0.1420A$
2	E	$U_{R1} = 55.965V$	$I_{R1} = 0.3731A$
3	A	$U_{R3} = 22.9764V$	$I_{R3} = 0.3535A$
4	B	$ U_{L2} = 17.7191V$	$\varphi_{L2} = 95.0632^\circ$
5	E	$u_C = 50 - 40 \cdot e^{\frac{-t}{1200}}$	