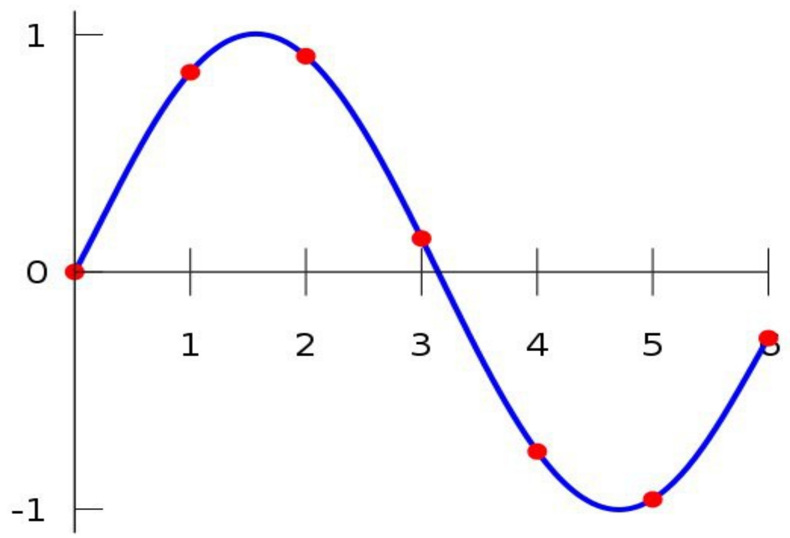
Politechnika Świętokrzyska Wydział Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki **Katedra Zastosowań Informatyki**	
Metody obliczeniowe *– laboratorium*	
Instrukcja laboratoryjna nr 5A: Interpolacja	*Opracował:* ***dr inż. Andrzej Kułakowski*** *Data: 2**3.10.2013 r.***

1. Wprowadzenie

Interpolacja:

Zagadnienie interpolacji można sformułować następująco: W przedziale *<a,b>* danych jest *n+l* punktów: *x0 = a, x1, x2 ... xn = b* nazywanych węzłami interpolacji oraz wartości funkcji *f(xi)* w tych punktach. Interpolacja polega na wyznaczeniu przybliżonych wartości funkcji *f(x)* w punktach innych niż węzły interpolacji. W tym celu należy znaleźć funkcję *F(x),* zwaną funkcją interpolującą, która w węzłach interpolacji przyjmuje takie same wartości jak *f(x)*.

Tak więc interpolacją funkcji nazywa się wyznaczenie przybliżonych wartości funkcji *f(x)* dla dowolnego argumentu *x* w przedziale [a, b], przy znanych jej wartościach $f(x_0)$, $f(x_1)$, …, $f(x_n)$ w ustalonych kolejnych punktach x_0, x_1, …, x_n zwanych węzłami interpolacji.



Rys. 1. Węzły (punkty) interpolacji i wyznaczona krzywa interpolacyjna.

Postać analityczna funkcji F(x) pozwalająca wyznaczyć przybliżone wartości f(x) w punktach innych niż węzłowe jest wyróżnikiem algorytmów interpolujących. W tej instrukcji ograniczono się do interpolacji za pomocą wielomianów.

2. Interpolacja wielomianem Lagrange'a

Wzór wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a:

$$W_n(x)=\sum_{j=0}^{n} y_j\cdot\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\ldots(x-x_{j-1})\cdot(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdot(x_j-x_1)\ldots(x_j-x_{j-1})\cdot(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)} \qquad (1)$$

odstępy pomiędzy punktami x_i mogą być dowolne.

<u>Przykład 1:</u>

Znaleźć wielomian interpolacyjny metodą Lagrange'a:

Punkty do obliczeń:

i	0	1	2	3
x	1	2	3	4
y	3	1	-1	2

Wzór interpolacyjny Lagrange'a dla 4 punktów:

$$W_3(x)=y_0\cdot\frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot(x_0-x_3)}+y_1\cdot\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)}+$$
$$+y_2\cdot\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_3)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)}+y_3\cdot\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_3-x_0)\cdot(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)} \qquad (2)$$

Po podstawieniu punktów z tabeli:

$$W_3(x)=3\cdot\frac{(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{(1-2)\cdot(1-3)\cdot(1-4)}+1\cdot\frac{(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{(2-1)\cdot(2-3)\cdot(2-4)}+$$
$$+(-1)\cdot\frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-4)}{(3-1)\cdot(3-2)\cdot(3-4)}+2\cdot\frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)}{(4-1)\cdot(4-2)\cdot(4-3)} \qquad (3)$$

ciąg dalszy po wykonaniu obliczeń:

$$=-\frac{1}{2}\cdot(x^3-9\cdot x^2+26\cdot x-24)+\frac{1}{2}\cdot(x^3-8\cdot x^2+19\cdot x-12)+\frac{1}{2}\cdot(x^3-7\cdot x^2+14\cdot x-8)+\frac{1}{3}\cdot(x^3-6\cdot x^2+11\cdot x-6)$$

$$=\frac{5}{6}\cdot x^3-5\cdot x^2+\frac{43}{6}\cdot x+0$$

Jest to wynik – wielomian - którego szukaliśmy.

3. Interpolacja wielomianem Newton'a

Wzór wielomianu interpolacyjnego Newton'a:

$$W_n(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{h}\cdot(x-x_0)+\frac{\Delta^2 y_0}{2!\cdot h^2}\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\Delta^n y_0}{n!\cdot h^n}\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1}) \qquad (4)$$

Metoda Newtona zakłada, że odstępy pomiędzy punktami x_i są jednakowe i równe h.

We wzorze mamy wykorzystane operatory różnic zwykłych, które obliczamy wg schematu:

Obliczenia operatorów w tablicy różnic zwykłych:

i	x_i	$f(x_i)=y_i$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$
0	x_0	$f(x_0)$	$\Delta f(x_0)$	$\Delta^2 f(x_0)$	$\Delta^3 f(x_0)$
1	x_0+h	$f(x_0+h)$	$\Delta f(x_0)+h$	$\Delta^2 f(x_0)+h$	
2	x_0+2h	$f(x_0+2\text{h})$	$\Delta f(x_0)+2\text{h}$		
3	x_0+3h	$f(x_0+3\text{h})$			

Przykład 2:

Znaleźć wielomian interpolacyjny metodą Newtona:

Punkty do obliczeń:

i	0	1	2	3
x	1	1.5	2	2.5
y	2	2.5	3.5	4.0

Obliczenia operatorów w tablicy różnic zwykłych:

i	x_i	$f(x_i)=y_i$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$
0	1.0	2.0	0.5	0.5	-1.0
1	1.5	2.5	1.0	-0.5	
2	2.0	3.5	0.5		
3	2.5	4.0			

Po podstawieniu punktów i operatorów oraz wyliczeniu:

$$W_3(x)=2.0+\frac{0.5}{\frac{1}{2}}\cdot(x-1)+\frac{0.5}{2!\cdot\frac{1}{2}^2}\cdot(x-1)\cdot(x-1.5)+\frac{-1.0}{3!\cdot\frac{1}{2}^3}\cdot(x-1)\cdot(x-1.5)\cdot(x-2)$$

$$=-\frac{4}{3}\cdot x^3+7\cdot x^2-10\frac{1}{6}\cdot x+6\frac{1}{2}$$

Jest to wynik – wielomian - którego szukaliśmy.

4. Zadania do wykonania

a) dla podanego przez prowadzącego zajęcia przykładu, obliczyć wielomian interpolacyjny wybraną metodą.
b) dla podanego przez prowadzącego zajęcia zadania domowego:

- napisać program komputerowy obliczający wielomian interpolacyjny wybraną metodą,
- opisać inną metodę interpolacji.

5. Literatura

literatura z poprzednich instrukcji,
literatura podana dla przedmiotu Metody Obliczeniowe,