Metody Obliczeniowe

Optymalizacja jednowymiarowa – ekstremum lokalne funkcji

Ogólny algorytm działania:

1. Dana jest funkcja $f(x)$, dla której liczymy pierwszą pochodną.
2. Uzyskaną pochodną przyrównujemy do zera i obliczamy wartość x_0 – czyli miejsce, w którym jest równa 0.
3. Następnie obliczamy drugą pochodną w punkcie wyznaczonym w poprzednim etapie, czyli w x_0. Jeżeli wartość drugiej pochodnej w punkcie x_0 będzie równa 0 to należy wyznaczyć trzecią pochodną w punkcie x_0 – jeśli znów wartość będzie równa 0 należy wyznaczać pochodne następnych rzędów do momentu, aż $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Działanie to ma na celu potwierdzenie, czy w danym punkcie x_0 zostało osiągnięte ekstremum lokalne funkcji.
   Jeżeli:
   - jest to pochodna rzędu nieparzystego to funkcja nie osiąga ekstremum w tym punkcie
   - jest to pochodna rzędu parzystego to jeśli jej wartość w punkcie x_0 jest dodatnia to funkcja osiąga **ekstremum lokalne minimum,** a jeśli ujemna to funkcja osiągnie **ekstremum lokalne maksimum** w tym punkcie.

   Koniec.

Przykład 1.

Polecenie: Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x - 18$.

Rozwiązanie:

$$f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x - 18$$

$$f'(x) = -6x^2 - 6x + 12$$

$$-6x^2 - 6x + 12 = 0$$

$$\Delta_x = b^2 - 4ac = 36 - 4 * (-6) * 12 = 36 + 288 = 324$$

$$\sqrt{324} = 18$$

$$x_{0(1)} = x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta_x}}{2a} = \frac{6 - 18}{-12} = \frac{-12}{-12} = 1$$

$$x_{0(2)} = x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta_x}}{2a} = \frac{6 + 18}{-12} = \frac{24}{-12} = -2$$

$$f''(x) = -12x - 6$$

$$f''(1) = -18 \rightarrow ekstremum\ lokalne\ maksimum$$

$$f''(-2) = 18 \rightarrow ekstremum\ lokalne\ minimum$$

Przykład 2.

Polecenie: Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x) = x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 6x^2 - 4$ w przedziale [-3.2,0.3]:

Rozwiązanie:

$$f(x) = x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 6x^2 - 4$$

$$f'(x) = 4x^3 + 8x^2 - 12x$$

$$4x^3 + 8x^2 - 12x = 0$$

$$x(4x^2 + 8x - 12) = 0$$

$$x_{0_{(1)}} = 0 \lor 4x^2 + 8x - 12 = 0$$

$$4x^2 + 8x - 12 = 0$$

$$\Delta_x = 64 - 4 * 4 * (-12) = 64 + 192 = 256$$

$$\sqrt{\Delta_x} = 16$$

$$x_{0_{(2)}} = x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta_x}}{2a} = \frac{-8 - 16}{8} = \frac{-24}{8} = -3$$

$$x_{0_{(3)}} = x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta_x}}{2a} = \frac{-8 + 16}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

$$f''(x) = 12x^2 + 16x - 12$$

$$f''(0) = -12$$

$$f''(-3) = 12 * 9 + 16 * (-3) - 12 = 108 - 48 - 12 = 48$$

$$f''(1) = 12 + 16 - 12 = 28 - 12 = 16$$

Ekstrema w przedziale [-3.2,0.3]:

- w punkcie $x_0 = 0$ funkcja f(x) posiada ekstremum lokalne maksimum
- w punkcie $x_0 = -3$ funkcja f(x) posiada ekstremum lokalne minimum

Opracowano dn. 02.01.2018

Bartłomiej Osak, Tomasz Pasternak