Metody Obliczeniowe

Równania nieliniowe

1. Sprawdzanie przedziału izolacji pierwiastka równania.

Ogólna zasada:

- Dana jest funkcja $F(x)$ oraz przedział $[a, b]$.
- Sprawdzić, czy podany przedział jest przedziałem izolacji jednego pierwiastka $F(x) = 0$.
  - Obliczamy wartość podanej funkcji $F(x)$ w punktach granicznych przedziału $[a, b]$.
    $$F(a)\ oraz\ F(b)$$
  - Wykonujemy iloczyn otrzymanych wartości i sprawdzamy, czy wartość uzyskana jest mniejsza od zera:
    $$F(a) * F(b) < 0$$
  - Jeżeli powyższe **spełnione** to oznacza to, że pomiędzy punktami a i b znajduje się co najmniej jeden pierwiastek $F(x) = 0$.
    - Wyznaczamy pierwszą pochodną dla $F(x)$.
      $$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$
    - Obliczamy wartość otrzymanej pochodnej w punktach granicznych przedziału $[a, b]$.
      $$F'(a)\ oraz\ F'(b)$$
    - Sprawdzamy signum od wartości pochodnych.
      $$sgnF'(x)\ dla\ x \in [a, b]$$
      - Jeżeli powyższe jest **const,** czyli funkcja ma stały znak w przedziale, to przedział $[a, b]$ jest przedziałem izolacji jednego pierwiastka $F(x) = 0$. KONIEC.
      - Jeżeli powyższe jest $\neq$ **const** to należy obrać inny przedział.
  - Jeżeli powyższe **niespełnione** to oznacza to, że pomiędzy punktami a i b nie znajduje się co najmniej jeden pierwiastek $F(x) = 0$. Należy obrać inny przedział.

Przykład:

Sprawdzić, czy podany przedział jest przedziałem izolacji jednego pierwiastka równania $F(x) = 0$, gdzie:
$$F(x) = x^3 - 3\sqrt{3x}, [a, b] = [1,2].$$

Rozwiązanie:
$$F(1) = 1^3 - 3\sqrt{3} \cong -4.196$$
$$F(2) = 2^3 - 3\sqrt{6} = 8 - 3\sqrt{6} \cong 0.652$$
$$F(1) * F(2) = -4.196 * 0.652 \cong -2.736$$
$$-2.736 < 0 \rightarrow spełnione$$
$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \left(x^3 - 3\sqrt{3x}\right)' = 3x^2 - 3 * \frac{1}{2\sqrt{3x}} * 3 = 3x^2 - \frac{9}{2\sqrt{3x}}$$
$$F'(1) \cong 0.402$$
$$F'(2) \cong 10.163$$
$$sgnF'(x) = const \rightarrow spełnione$$

2. Metoda bisekcji (połowienia).

Ogólna zasada:

- Do zmiennej x_1 *oraz* x_2 przypisujemy kolejno dolną oraz górną granice przedziału $[a, b]$.
- Metoda iteracji, aż do $|F(x_i)| < \varepsilon$.
  - Wyznaczamy wartość x:
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$
  - Obliczamy wartość funkcji $F(x)$:
$$F(x) = F\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$
  - Obliczamy wartość funkcji $F(x_1)$.
  - Jeżeli $F(x_1) * F(x) > 0$ to do zmiennej x_1 przypisujemy wartość x.
  - Jeżeli $F(x_1) * F(x) < 0$ to do zmiennej x_2 przypisujemy wartość x.
  - Operacje powtarzamy do: $|F(x_i)| < \varepsilon$.

Przykład.

Dla funkcji i przedziału izolacji z poprzedniego przykładu obliczyć metodą bisekcji pierwiastek równania $F(x) = 0$ z dokładnością $\varepsilon = 0.1$.

$$x_1 = 1, x_2 = 2$$
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$
$$F(x) = F(1.5) = 1.5^3 - 3\sqrt{3} * 1.5 \cong -2.989 \to |F(x)| > \varepsilon$$
$$F(x_1) = F(1) = 1^3 - 3\sqrt{3} \cong -4.196$$
$$F(x) * F(x_1) = -2.989 * -4.196 = 12.542 > 0 \to x_1 = x = 1.5$$

$$x_1 = 1.5, x_2 = 2$$
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{7}{2}}{2} = 1.75$$
$$F(1.75) \cong -1.514 \to |F(x)| > \varepsilon$$
$$F(1.5) \cong -2.989$$
$$F(1.75) * F(1.5) = -1.514 * (-2.989) = 4.525 > 0 \to x_1 = x = 1.75$$

$$x_1 = 1.75, x_2 = 2$$
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{15}{4}}{2} = 1.875$$
$$F(1.875) \cong -0.523 \to |F(x)| > \varepsilon$$
$$F(1.75) \cong -1.514$$
$$F(1.875) * F(1.75) \cong 0.792 > 0 \to x_1 = x = 1.875$$

$$x_1 = 1.875, x_2 = 2$$
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{31}{16} = 1.9375$$
$$F(1.9375) \cong 0.04 \to |F(x)| < \varepsilon \to SPEŁNIONE \to KONIEC$$
$$x = 1.9375$$

3. Metoda cięciw (siecznych).

Ogólna zasada:

- Określenie punktu pęku cięciw x_k:

$$z = \frac{a+b}{2}$$
$$F'(z) = \frac{dF(z)}{dz}$$
$$F''(z) = \frac{d^2F(z)}{d^2z}$$
$$F'(z) * F''(z) < 0 \rightarrow x_k = a, x_1 = b$$

- Wyznaczamy wartości x_i:

$$x_i = x_{i-1} - F(x_{i-1}) * \frac{x_k - x_{i-1}}{F(x_k) - F(x_{i-1})}$$

- Wyznaczamy wartość funkcji $F(x_i)$:

$$F(x_i)$$

- Sprawdzamy:

$$|F(x_i)| < \varepsilon$$

  - Gdy spełnione to $x = x_i$
  - Gdy niespełnione to obliczamy następny element x.

Przykład.

Dla funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 5$ i przedziału izolacji $[1,2]$ obliczyć metodą cięciw pierwiastek równania $F(x) = 0$ z dokładnością $\varepsilon = 0.1$.

$$z = \frac{3}{2} = 1.5$$
$$F'(x) = 3x^2 - 6x - 2$$
$$F''(x) = 6x - 6$$
$$F'(z) = F'(1.5) = -4.25$$
$$F''(z) = F''(1.5) = 3$$
$$F'(z) * F''(z) = -4.25 * 3 = -12.75 < 0 \rightarrow x_k = a = 1, x_1 = b = 2$$
$$F(x_k) = 1$$
$$F(x_1) = -3$$

$$x_2 = 2 + 3 * \frac{1-2}{1+3} = 2 + 3 * -\frac{1}{4} = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$$
$$F(x_2) = F(1.25) = \left(\frac{5}{4}\right)^3 - 3 * \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 2 * \frac{5}{4} + 5 = \frac{125}{64} - 3 * \left(\frac{25}{16}\right) - \frac{10}{4} + \frac{20}{4} = \frac{125}{64} - \frac{75}{16} - \frac{10}{4} + \frac{20}{4} =$$
$$\frac{125}{64} - \frac{300}{64} - \frac{160}{64} + \frac{320}{64} = -\frac{15}{64} \cong -0.234$$
$$|-0.234| > \varepsilon$$

$$x_3 = \frac{5}{4} + \frac{15}{64} * \frac{1 - \frac{5}{4}}{1 + \frac{15}{64}} = \frac{80}{64} + \frac{15}{64} * \frac{\frac{64}{64} - \frac{80}{64}}{\frac{64}{64} + \frac{15}{64}} = \frac{80}{64} + \frac{15}{64} * \left(-\frac{16}{64}\right) * \frac{64}{79} = \frac{80}{64} + \frac{15}{64} * \left(-\frac{16}{79}\right) = \frac{80}{64} - \frac{240}{5056} = \frac{6080}{5056} \cong 1.203$$
$$F\left(\frac{6080}{5056}\right) = F(1.203) = -0.006634573$$
$$|-0.006634573| < \varepsilon \rightarrow x = 1.203$$

4. Metoda stycznych (Newtona).

Ogólna zasada:

- Określenie punktu początkowego x_1:

$$z = \frac{a+b}{2}$$
$$F'(z) = \frac{dF(z)}{dz}$$
$$F''(z) = \frac{d^2F(z)}{d^2z}$$
$$F'(z) * F''(z) < 0 \rightarrow x_1 = a$$

- Wyznaczamy wartości x_i:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{F(x_{i-1})}{F'(x_{i-1})}$$

- Wyznaczamy wartość funkcji $F(x_i)$:

$$F(x_i)$$

- Sprawdzamy:

$$|F(x_i)| < \varepsilon$$

  - Gdy spełnione to $x = x_2$
  - Gdy niespełnione to obliczamy następny element x.

Przykład:

Dla funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 5$ i przedziału izolacji $[1,2]$ obliczyć metodą Newtona pierwiastek równania $F(x) = 0$ z dokładnością $\varepsilon = 0.1$.

$$z = \frac{3}{2} = 1.5$$
$$F'(x) = 3x^2 - 6x - 2$$
$$F''(x) = 6x - 6$$
$$F'(1.5) = -4.25$$
$$F''(1.5) = 3$$
$$-4.25 * 3 = -12.75 < 0 \rightarrow x_1 = a = 1$$
$$F(x_1) = F(1) = 1$$
$$F'(x_1) = F'(1) = -5$$

$$x_2 = 1 - \frac{1}{-5} = 1 + \frac{1}{5} = 1.2$$
$$F(x_2) = \left(\frac{6}{5}\right)^3 - 3 * \left(\frac{6}{5}\right)^2 - 2 * \left(\frac{6}{5}\right) + 5 = \frac{216}{125} - 3 * \left(\frac{36}{25}\right) - 2 * \left(\frac{6}{5}\right) + 5 = \frac{216}{125} - \frac{108}{25} - \frac{12}{5} + 5$$
$$= \frac{216}{125} - \frac{540}{125} - \frac{300}{125} + \frac{625}{125} = \frac{1}{125} = 0.008$$
$$|0.008| < \varepsilon \rightarrow x = 1.2$$

Opracowano dn. 08.12.2017

Bartłomiej Osak, Tomasz Odzimek