Metody Obliczeniowe

Układy równań liniowych

1. Metoda eliminacji Gaussa.

Zapis **układu w postaci macierzowej**:

$$\boldsymbol{A} * \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$$

Układ n równań liniowych zawierających n niewiadomych:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Wygląd **macierzy A:**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Wygląd **wektora B:**

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Wygląd **wektora niewiadomych X:**

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Macierz główną układu równań - macierz A oraz wektor wyrazów wolnych B zapisujemy w postaci **macierzy C**:

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & c_{1,n+1} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & c_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} & c_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

Algorytm działania:

$$\begin{cases} s = 1,2,\dots,n-1 \\ \begin{cases} i = s+1, s+2, \dots n \\ c_{ij}^{(s)} = c_{ij}^{(s-1)} - \dfrac{c_{is}^{(s-1)}}{c_{ss}^{(s-1)}} c_{sj}^{(s-1)}, j = s+1, s+2, \dots, n+1 \end{cases} \end{cases}$$

Algorytm działania po uzyskaniu układu trójkątnego:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_i = \frac{(b_i - \sum_{s=i+1}^{n} a_{is}x_s)}{a_{ii}}, i = n-1, n-2, \dots, 1, a_{ii} \neq 0, i = 1,2,\dots,n$$

Przykład.

Dany jest układ równań:

$$\begin{cases} 6x_1 + 1.5x_2 - 3.5x_3 = 2 \\ 0.75x_1 - 4x_2 + 2.25x_3 = 5 \\ 2.45x_1 + 3.5x_2 + 4.75x_3 = 6 \end{cases}$$

Wyznaczyć wektor współczynników. Sprawdzić wyniki.

Rozwiązanie:

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 1.5 & -3.5 & 2 \\ 0.75 & -4 & 2.25 & 5 \\ 2.45 & 3.5 & 4.75 & 6 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{s = 1, i = 2}$:

$$c_{22}^{(1)} = c_{22} - \frac{c_{21}}{c_{11}} * c_{12} = -4 - \frac{\frac{3}{4}}{6} * 1.5 = -\frac{67}{16}$$

$$c_{23}^{(1)} = c_{23} - \frac{c_{21}}{c_{11}} * c_{13} = 2.25 - \frac{\frac{3}{4}}{6} * (-3.5) = \frac{43}{16}$$

$$c_{24}^{(1)} = c_{24} - \frac{c_{21}}{c_{11}} * c_{14} = 5 - \frac{\frac{3}{4}}{6} * 2 = \frac{76}{16} = \frac{19}{4}$$

$\boldsymbol{s = 1, i = 3}$:

$$c_{32}^{(1)} = c_{32} - \frac{c_{31}}{c_{11}} * c_{12} = 3.5 - \frac{\frac{245}{100}}{6} * 1.5 = \frac{35}{10} - \frac{245}{100} * \frac{1}{6} * \frac{15}{10} = \frac{35}{10} - \frac{3675}{6000} = \frac{21000}{6000} - \frac{3675}{6000} = \frac{17325}{6000} = \frac{231}{80}$$

$$c_{33}^{(1)} = c_{33} - \frac{c_{31}}{c_{11}} * c_{13} = 4.75 - \frac{\frac{245}{100}}{6} * (-3.5) = \frac{1483}{240}$$

$$c_{34}^{(1)} = c_{34} - \frac{c_{31}}{c_{11}} * c_{14} = 6 - \frac{\frac{245}{100}}{6} * 2 = \frac{311}{60}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 6 & 1.5 & -3.5 & 2 \\ 0 & -\frac{67}{16} & \frac{43}{16} & \frac{19}{4} \\ 0 & \frac{231}{80} & \frac{1483}{240} & \frac{311}{60} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{s = 2, i = 3}$:

$$c_{33}^{(2)} = c_{33}^{(1)} - \frac{c_{32}^{(1)}}{c_{22}^{(1)}} * c_{23}^{(1)} = \frac{1483}{240} - \frac{\frac{231}{80}}{-\frac{67}{16}} * \frac{43}{16} = \frac{3229}{402}$$

$$c_{34}^{(2)} = c_{34}^{(1)} - \frac{c_{32}^{(1)}}{c_{22}^{(1)}} * c_{24}^{(1)} = \frac{311}{60} - \frac{\frac{231}{80}}{-\frac{67}{16}} * \frac{19}{4} = \frac{8501}{1005}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 6 & 1.5 & -3.5 & 2 \\ 0 & -\frac{67}{16} & \frac{43}{16} & \frac{19}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3229}{402} & \frac{8501}{1005} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 1.5 & -3.5 \\ 0 & -\frac{67}{16} & \frac{43}{16} \\ 0 & 0 & \frac{3229}{402} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{19}{4} \\ \frac{8501}{1005} \end{bmatrix} \quad \textit{Macierz trójkątna}$$

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} = \frac{\frac{8501}{1005}}{\frac{3229}{402}} \cong 1.0531$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{23}x_3}{a_{22}} = \frac{\frac{19}{4} - \frac{43}{16} * \frac{10531}{10000}}{-\frac{67}{16}} \cong -0.4585$$

$$x_1 = \frac{b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3)}{a_{11}} = \frac{2 - \frac{15}{10} * \left(-\frac{4585}{10000}\right) - \left(-\frac{35}{10}\right) * \frac{10531}{10000}}{6} \cong 1.0623$$

Uzyskany wektor niewiadomych: $X = \begin{bmatrix} 1.0623 \\ -0.4585 \\ 1.0531 \end{bmatrix}$

Sprawdzenie:

$$\begin{cases} 6 * 1.0623 + 1.5 * -0.4585 - 3.5 * 1.0531 = 2 \\ 0.75 * 1.0623 - 4 * -0.4585 + 2.25 * 1.0531 = 5 \\ 2.45 * 1.0623 + 3.5 * -0.4585 + 4.75 * 1.0531 = 6 \end{cases}$$

Sprawdzenie metodą Cramera:

$$|W| = \begin{bmatrix} 6 & 1.5 & -3.5 \\ 0.75 & -4 & 2.25 \\ 2.45 & 3.5 & 4.75 \\ 6 & 1.5 & -3.5 \\ 2.45 & 3.5 & 4.75 \end{bmatrix}$$

$$= (6 * (-4) * 4.75 + 0.75 * 3.5 * (-3.5) + 2.45 * 1.5 * 4.75) - ((-3.5) * (-4) * 2.45 + 2.25 * 3.5 * 6 + 4.75 * 1.5 * 2.45) = -201.8125$$

$$|W_1| = \begin{bmatrix} 2 & 1.5 & -3.5 \\ 5 & -4 & 2.25 \\ 6 & 3.5 & 4.75 \\ 2 & 1.5 & -3.5 \\ 5 & 3.5 & 4.75 \end{bmatrix} = -214.375$$

$$|W_2| = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3.5 \\ 0.75 & 5 & 2.25 \\ 2.45 & 6 & 4.75 \\ 6 & 2 & -3.5 \\ 0.75 & 5 & 4.75 \end{bmatrix} = 92.525$$

$$|W_3| = \begin{bmatrix} 6 & 1.5 & 2 \\ 0.75 & -4 & 5 \\ 2.45 & 3.5 & 6 \\ 6 & 1.5 & 2 \\ 0.75 & -4 & 5 \end{bmatrix} = -212.525$$

Obliczamy wartości wektora X niewiadomych:

$$X = \begin{bmatrix} \frac{|W_1|}{|W|} \\ \frac{|W_2|}{|W|} \\ \frac{|W_3|}{|W|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0623 \\ -0.4585 \\ 1.0531 \end{bmatrix}$$

Jak można zauważyć sprawdzenie oraz metoda Cramera potwierdziła wynik uzyskany metodą Gaussa. Reasumując są to metody bardzo łatwe i pomocne w obliczaniu układów równań liniowych.

Opracowano dn. 01.12.2017

Bartłomiej Osak, Tomasz Odzimek