Metody Obliczeniowe

Interpolacja

1. Interpolacja wielomianem Lagrange'a.

Wzór ogólny:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j * \frac{(x-x_0)*(x-x_1)*..*(x-x_{j-1})*(x-x_{j+1})*..*(x-x_n)}{(x_j-x_0)*(x_j-x_1)*..*(x_j-x_{j-1})*(x_j-x_{j+1})*..*(x_j-x_n)}$$

Polecenie: Wyznacz funkcję interpolacji y=f(x) za pomocą wielomianu Lagrange'a:

i	**0**	**1**	**2**	**3**
x	1	2	3	4
y	3	1	-1	2

Rozwiązanie:

$$W_3(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i * \frac{(x-x_0)*(x-x_1)*..*(x-x_{i-1})*(x-x_{i+1})*..*(x-x_n)}{(x_i-x_0)*(x_i-x_1)*..*(x_i-x_{i-1})*(x_i-x_{i+1})*..*(x_i-x_n)} =$$

$$3*\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} + 1*\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} + (-1)*\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} + 2*\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} =$$

$$3*\frac{(x^2-5x+6)(x-4)}{-6} + \frac{(x^2-4x+3)(x-4)}{2} - \left(\frac{(x^2-3x+2)(x-4)}{-2}\right) + 2*\frac{(x^2-3x+2)(x-3)}{6} =$$

$-\frac{1}{2}(x^3-4x^2-5x^2+6x+20x-24)+\frac{1}{2}(x^3-4x^2-4x^2+3x+16x-12)-\left(-\frac{1}{2}(x^3-3x^2-4x^2+12x+2x-8)\right)+\frac{1}{3}(x^3-3x^2-3x^2+2x+9x-6) = -\frac{1}{2}(x^3-9x^2-26x-24)+\frac{1}{2}(x^3-8x^2+19x-12)+\frac{1}{2}(x^3-7x^2+14x-8)+\frac{1}{3}(x^3-6x^2+11x-6) = -\frac{1}{2}x^3+4.5x^2-13x+12+\frac{1}{2}x^3-4x^2+9.5x-6+\frac{1}{2}x^3-3.5x^2+7x-4+\frac{1}{3}x^3-2x^2+\frac{11}{3}x-2=\frac{5}{6}x^3-5x^2+\frac{43}{6}x+0$

UWAGA! Jeśli wykonujemy obliczenia np. dla y_0 to omijamy zarówno w mianowniku jak i liczniku wartości z x_0!

2. Interpolacja wielomianem Newtona.

Wzór ogólny:

$$W_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} * (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! * h^2} * (x - x_0) * (x - x_1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n! * h^n} * (x - x_0) * \ldots * (x - x_{n-1})$$

Polecenie: Wyznacz funkcję interpolacji y=f(x) za pomocą wielomianu Newtona:

i	**0**	**1**	**2**	**3**
x	1	1.5	2	2.5
y	2	2.5	3.5	4.0

Rozwiązanie:

Wyznaczenie tablic różnic zwykłych:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	1	2	0.5	0.5	-1
1	1.5	2.5	1	-0.5	
2	2	3.5	0.5		
3	2.5	4			

$$W_3(x) = 2 + \frac{0.5}{0.5}(x-1) + \frac{0.5}{2 * 0.25}(x-1)(x-1.5) - \frac{1}{6 * (0.5)^3}(x-1)(x-1.5)(x-2) =$$

$$2 + (x-1) + x^2 - 2.5x + 1.5 - \frac{4}{3}(x^2 - 2.5x + 1.5)(x-2) = x + 1 + x^2 - 2.5x + 1.5$$

$$-\frac{4}{3}(x^3 - 2x^2 - 2.5x^2 + 5x + 1.5x - 3) = x + 1 + x^2 - 2.5x + 1.5 - \frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - \frac{26}{3}x + 4$$

$$= -\frac{4}{3}x^3 + 7x^2 - \frac{61}{6} + 6.5$$