Metody Obliczeniowe

Całkowanie numeryczne

Polecenie: Obliczyć wartość całki korzystając ze wszystkich metod numerycznych:

$$\int_1^7 \mathbf{2x^5 + 2x^4 - 10x^3 + 3x^2 - x + 10} \ dla\ \boldsymbol{n} = \mathbf{6}$$

1. Przygotowanie do stosowania metod numerycznych.

Przed przystąpieniem do faktycznego obliczania całki metodami numerycznymi należy obliczyć wartość kroku całkowania, wartości x_i oraz wartości funkcji podcałkowej y_i.

a) Obliczanie wartości kroku całkowania – h.

Zgodnie ze wzorem:

$$\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}}{\boldsymbol{n}}$$

gdzie: a – granica dolna całkowania, b – granica górna całkowania, n – ilość podprzedziałów.
W naszym przypadku otrzymujemy:

$$a = 1, b = 7, n = 6$$

Stąd:

$$h = \frac{7 - 1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Wniosek: Krok całkowania wynosi 1.

b) Obliczanie wartości x_i.

Zgodnie ze wzorem:

$$\boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{i} * \boldsymbol{h} \rightarrow \boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{i} * \boldsymbol{h}, \quad i = 0, \dots, n$$

gdzie: x_0=a – granica dolna całkowania, h – krok całkowania, i – numer obliczanego x.
W naszym przypadku otrzymujemy:

$x_0 = a = 1$
$x_1 = x_0 + 1 * h = 1 + 1 * 1 = 2$
$x_2 = 1 + 2 = 3$
$x_3 = 1 + 3 = 4$
$x_4 = 1 + 4 = 5$
$x_5 = 1 + 5 = 6$
$x_6 = b = 7$

Uwaga: dla kroku x_n, czyli ostatniej wartości x musimy zawsze otrzymać wartość górnej granicy całkowania. Jeśli otrzymamy inną wartość obliczenia należy powtórzyć.

c) Obliczanie wartości y_i.

Zgodnie ze wzorem:

$$\boldsymbol{y_i} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i}), \quad i = 0,1, \dots, n$$

gdzie: y_i – wartość funkcji podcałkowej dla argumentu x_i.
W naszym przypadku otrzymujemy:

$y_0 = 2 * (x_0)^5 + 2 * (x_0)^4 - 10 * (x_0)^3 + 3 * (x_0)^2 - (x_0)^1 + 10 = 6$
$y_1 = 64 + 32 - 80 + 12 - 2 + 10 = 36$
$y_2 = 486 + 162 - 270 + 27 - 3 + 10 = 412$
$y_3 = 2048 + 512 - 640 + 48 - 4 + 10 = 1974$
$y_4 = 6250 + 1250 - 1250 + 75 - 5 + 10 = 6330$
$y_5 = 15552 + 2592 - 2160 + 108 - 6 + 10 = 16096$
$y_6 = 33614 + 4802 - 3430 + 147 - 7 + 10 = 35136$

2. Metoda prostokątów.

Wyróżniamy dokładnie dwie metody prostokątów:

a) **Wzór prostokątów z niedomiarem:**

$$\int_a^b f(x)dx = h * \sum_{i=0}^{n-1} y_i = h * (y_0 + y_1 + .. + y_{n-1}), \quad i = 0,1, \dots n-1$$

gdzie: h – krok całkowania, y_i – wartość funkcji podcałkowej dla argumentu x_i.

Należy zauważyć, iż:

$$\int_a^b f(x)dx = h * \sum_{i=0}^{n-1} y_i = h * \left(f(a) + f(x_1) + .. + f(x_{n-1})\right)$$

Stąd wynika, iż w metodzie niedomiarowej nie bierzemy pod uwagę ostatniej wartości funkcji podcałkowej dla argumentu $x_n = b$, czyli wartości funkcji dla górnej granicy całkowania.

W naszym przypadku uzyskujemy:

$$h * \sum_{i=0}^{5} y_i \cong 1 * (6 + 36 + 412 + 1974 + 6330 + 16096) = 24854$$

b) **Wzór prostokątów z nadmiarem:**

$$\int_a^b f(x)dx \cong h * \sum_{i=1}^{n} y_i = h * (y_1 + .. + y_n), \quad i = 1, \dots n$$

gdzie: h – krok całkowania, y_i – wartość funkcji podcałkowej dla argumentu x_i.

Należy zauważyć, iż:

$$\int_a^b f(x)dx \cong h * \sum_{i=1}^{n} y_i = h * \left(f(x_1) + .. + f(b)\right)$$

Stąd wynika, iż w metodzie nadmiarowej nie bierzemy pod uwagę pierwszej wartości funkcji podcałkowej dla argumentu $x_0 = a$, czyli wartości funkcji dla dolnej granicy całkowania.

W naszym przypadku uzyskujemy:

$$h * \sum_{i=1}^{6} y_i = 1 * (36 + 412 + 1974 + 6330 + 16096 + 35136) = 59984$$

3. Metoda trapezów.

$$\int_a^b f(x)dx \cong h * \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right]$$

gdzie: h – krok całkowania, y_i – wartość funkcji podcałkowej dla argumentu x_i.

Należy zauważyć, iż:

$$\int_a^b f(x)dx \cong h * \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

Stąd wynika, iż w metodzie trapezów wykonujemy dzielenie sumy wartości funkcji podcałkowej dla dolnej i górnej granicy całkowania przez 2. Następnie do niej dodajemy sumę wartości funkcji podcałkowej dla argumentów x_i, gdzie i=1,2,...,n-1, czyli bez pierwszego i ostatniego x (bez a oraz b). Ostatecznie cały wynik mnożony jest przez h, czyli przez krok całkowania.

W naszym przypadku uzyskujemy:

$$h * \left[\frac{f(1) + f(7)}{2} + \sum_{i=1}^{5} f(x_i)\right] = 1 * \left[\frac{6 + 35136}{2} + 36 + 412 + 1974 + 6330 + 16096\right] = 42419$$

4. **Metoda Simpsona.**

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3} * (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + .. + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

gdzie: h – krok całkowania, y_i – wartość funkcji podcałkowej dla argumentu x_i.

Należy zauważyć, iż:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3} * \left(f(a) + f(b) + 4 * f(x_1) + 2 * f(x_2) + 4 * f(x_3) + .. + 2 * f(x_{n-2}) + 4 * f(x_{n-1})\right)$$

Stąd wynika, iż w metodzie Simpsona wykonujemy sumę wartości funkcji podcałkowej dla wszystkich argumentów x_i, czyli począwszy od dolnej granicy całkowania włącznie do górnej granicy całkowania. Następnie wynik sumy jest mnożony przez iloraz kroku całkowania przez 3.

W naszym przypadku uzyskujemy:

$$\frac{1}{3} * [(6 + 35136) + 4 * 36 + 2 * 412 + 4 * 1974 + 2 * 6330 + 4 * 16096] = 40350$$

5. **Przykład praktyczny.**

Polecenie: Obliczyć wartość całki stosując metody numeryczne: trapez oraz Simpson.

$$\int_1^5 2x^2 + sin(x),\ n = 8$$

$h = \frac{5-1}{8} = \frac{1}{2} = 0.5$
$x_0 = a = 1$
$x_1 = 1 + 0.5 * 1 = 1.5$
$x_2 = 1 + 0.5 * 2 = 2$
$x_3 = 1 + 0.5 * 3 = 2.5$
$x_4 = 1 + 0.5 * 4 = 3$
$x_5 = 1 + 0.5 * 5 = 3.5$
$x_6 = 1 + 0.5 * 6 = 4$
$x_7 = 1 + 0.5 * 7 = 4.5$
$x_8 = 1 + 0.5 * 8 = 5$

$y_0 = 2 + \sin(1) \cong 0.841$
$y_1 \cong 6.494$
$y_2 \cong 9.818$
$y_3 \cong 13.696$
$y_4 \cong 18.282$
$y_5 \cong 23.798$
$y_6 \cong 30.486$
$y_7 \cong 38.544$
$y_8 \cong 48.082$

Metoda trapezów:

$$\int_1^5 2x^2 + sin(x) \cong 0.5 * \left[\frac{0.841 + 48.082}{2} + 6.494 + 9.818 + 13.696 + 18.282 + 23.798 + 30.486 + 38.544\right] = 83$$

Metoda Simpsona:

$$\int_1^5 2x^2 + sin(x) \cong \frac{0.5}{3} * [0.841 + 48.082 + 4 * 6.494 + 2 * 9.818 + 4 * 13.696 + 2 * 18.282 + 4 * 23.798 + 2 * 30.486 + 4 * 38.544] = 82.923$$

Opracowano dn. 04.11.2017

Bartłomiej Osak, Tomasz Odzimek