Metody Obliczeniowe

Obliczanie błędów metodą różniczki zupełnej

1. **Wzory ogólne:**

   a) **Błąd bezwzględny:**

   $$\Delta = |A - a|, gdzie\ A - wartość\ dokładna, a - wartość\ przybliżona\ (wartość\ zmierzona)$$

   b) **Błąd względny:**

   $$\delta = \frac{\Delta}{|A|}, gdzie\ \Delta - błąd\ bezwzględny, A - wartość\ dokładna$$

   c) **Metoda różniczki zupełnej** - wyznaczanie błędu danej funkcji, gdy dane są błędy wszystkich jej argumentów:

   $$\Delta y = \sum_{i=1}^{i=n} \left|\frac{\delta f}{\delta x_i}\right| * \Delta x_i$$

   $$gdzie: \delta f - różniczka\ z\ funkcji\ f, \delta x_i - różniczka\ po\ argumencie,$$
   $$\Delta x_i - błąd\ bezwzględny\ argumentu$$

   d) **Problem odwrotny teorii błędów** – wyznaczanie błędów bezwzględnych argumentów funkcji tak, aby błąd bezwzględny funkcji nie przekraczał zadanej wartości:

   $$\Delta x_i = \frac{\Delta y}{n * \left|\frac{\delta f}{\delta x_i}\right|}\quad i = 1,2, \dots, n$$

   $$gdzie: \Delta y - błąd\ bezwzględny\ funkcji, n - ilość\ argumentów, \delta f - różniczka\ z\ funkcji,$$
   $$\delta x_i - wskazanie\ po\ czym\ różniczkujemy$$

2. **Przykład zadania – typ 1.**

   Znaleźć kres górny błędu bezwzględnego dla funkcji: $Z = 4ab^3 - \sqrt{ac}$, gdzie:

   $$a = 1 \pm 0.1\quad b = 2 \pm 0.1\quad c = 0.1 \pm 0.01$$

   Rozwiązanie:

   Z podanych danych odczytujemy następujące wartości:

   $\Delta a = 0.1$
   $\Delta b = 0.1$
   $\Delta c = 0.01$
   $Z = 4ab - \sqrt{ac}$

   Przed rozpoczęciem rozwiązywania zadania należy określić, z jakiego wzoru będziemy korzystać. W poleceniu mamy podane wszystkie błędy argumentów funkcji Z, więc w tym przypadku należy zastosować metodę różniczki zupełnej, która jest określona wzorem:

   $$\Delta y = \sum_{i=1}^{i=n} \left|\frac{\delta f}{\delta x_i}\right| * \Delta x_i$$

   $$gdzie: \delta f - różniczka\ z\ funkcji\ f, \delta x_i - różniczka\ po\ argumencie,$$
   $$\Delta x_i - błąd\ bezwzględny\ argumentu$$

   OBLICZAMY POCHODNĄ TYLKO Z TEGO, PO CZYM RÓŻNICZKUJEMY!!!

   Pierwszym krokiem jest obliczenie pochodnych cząstkowych funkcji Z po każdym z jej argumentów.

   Na wstępie obliczamy pochodną **funkcji Z po argumencie a**:

   $$\frac{\delta Z}{\delta a} = (4ab^3 - \sqrt{ac})'$$

   Zgodnie ze wzorem: $(f - g)' = f' - g'$ obliczamy pochodne z 4ab oraz z pierwiastka z iloczynu ac:

   $$\frac{\delta}{\delta a}(4ab) = 4b^3 \rightarrow$$

   $$a\ jest\ traktowana\ jako\ funkcja, reszta\ jest\ stała, więc\ f' = 1$$

$$\frac{\delta}{\delta a}\left(\sqrt{ac}\right) = \frac{1}{2\sqrt{ac}} * c = \frac{c}{2\sqrt{ac}} \rightarrow$$
$$pochodna\ funkcji\ złożonej\ zgodnie\ ze\ wzorem\left[f\left(g(x)\right)\right]' = f'\left(g(x)\right) * g'(x)$$
$$pochodna\ funkcji\ \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Wynik końcowy różniczki funkcji Z po zmiennej a wynosi:

$$\frac{\delta Z}{\delta a} = 4b^3 - \frac{c}{2\sqrt{ac}}$$

Kolejno obliczamy **pochodną funkcji Z po argumencie b**:

$$\frac{\delta Z}{\delta b} = (4ab^3 - \sqrt{ac})'$$

Zgodnie ze wzorem: $(f-g)' = f' - g'$ obliczamy pochodne z 4ab oraz z pierwiastka z iloczynu ac:

$$\frac{\delta}{\delta b}(4ab^3) = 12ab^2 \rightarrow$$
$$pochodna\ funkcji\ (x^n)' = nx^{n-1}$$
$$\frac{\delta}{\delta b}\left(\sqrt{ac}\right) = 0 \rightarrow$$
$$zmienna\ b, po\ której\ różniczkujemy\ nie\ wystąpiła\ w\ tej\ części\ :(\ $$
$$z' = 0\ (z\ jest\ stałą)$$

Wynik końcowy różniczki funkcji Z po zmiennej b wynosi:

$$\frac{\delta Z}{\delta b} = 12ab^2$$

Kolejno obliczamy pochodną funkcji Z po argumencie c:

$$\frac{\delta Z}{\delta c} = (4ab^3 - \sqrt{ac})'$$

Zgodnie ze wzorem: $(f-g)' = f' - g'$ obliczamy pochodne z 4ab oraz z pierwiastka z iloczynu ac:

$$\frac{\delta}{\delta c}(4ab^3) = 0 \rightarrow$$
$$zmienna\ c, po\ której\ różniczkujemy\ nie\ wystąpiła\ w\ tej\ części\ :(\ $$
$$z' = 0\ (z\ jest\ stałą)$$
$$\frac{\delta}{\delta c}\left(\sqrt{ac}\right) = \frac{1}{2\sqrt{ac}} * a = \frac{a}{2\sqrt{ac}}$$
$$pochodna\ funkcji\ złożonej\ zgodnie\ ze\ wzorem\left[f\left(g(x)\right)\right]' = f'\left(g(x)\right) * g'(x)$$
$$pochodna\ funkcji\ \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Wynik końcowy różniczki funkcji Z po zmiennej c wynosi:

$$\frac{\delta Z}{\delta c} = 0 - \frac{a}{2\sqrt{ac}} = -\frac{a}{2\sqrt{ac}}$$

Drugim krokiem jest obliczenie błędu bezwzględnego funkcji Z za pomocą metody różniczki zupełnej. Zgodnie ze wzorem otrzymujemy:

$$\Delta Z = \sum_{i=1}^{3}\left|\frac{\delta Z}{\delta x_i}\right| * |\Delta x_i| = \left|\frac{\delta Z}{\delta a}\right| * |\Delta a| + \left|\frac{\delta Z}{\delta b}\right| * |\Delta b| + \left|\frac{\delta Z}{\delta c}\right| * |\Delta c|$$

Podstawiamy dane:

$$\Delta Z = \left|4b^3 - \frac{c}{2\sqrt{ac}}\right| * |\Delta a| + |12ab^2| * |\Delta b| + \left|-\frac{a}{2\sqrt{ac}}\right| * |\Delta c| \cong 3.184 + 4.8 + 0.0158 = 7.9998$$

Odpowiedź:

$$Z = 4ab^3 - \sqrt{ac} = 31.683 \pm 7.9998$$

3. **Przykład zadania – typ 2.**

Jakie mogą być błędy bezwzględne argumentów funkcji $Z = 3a^2b + \cos(ac)$, aby błąd bezwzględny funkcji nie przekraczał zadanej wartości – 0.1, gdy $a = 1, b = 3, c = 0.1$?

Rozwiązanie:

Z podanych danych odczytujemy następujące wartości:

$a = 1$

$b = 3$

$c = 0.1$

$\Delta Z = 0.1$

$n = 3 - ilość\ zmiennych$

Czego szukamy?

$\Delta \mathrm{a}, \Delta \mathrm{b}, \Delta \mathrm{c}$

Przed rozpoczęciem rozwiązywania zadania należy określić, z jakiego wzoru będziemy korzystać. W poleceniu mamy podaną jedynie wartość ΔZ, więc stosujemy wzór na odwrotną teorię błędów:

$$\Delta x_i = \frac{\Delta y}{n * \left|\frac{\delta f}{\delta x_i}\right|} \quad i = 1,2, \dots, n$$

$$gdzie: \Delta y - błąd\ bezwzględny\ funkcji, n - ilość\ argumentów, \delta f - różniczka\ z\ funkcji,$$
$$\delta x_i - wskazanie\ po\ czym\ różniczkujemy$$

OBLICZAMY POCHODNĄ TYLKO Z TEGO, PO CZYM RÓŻNICZKUJEMY!!!

Pierwszym krokiem jest obliczenie pochodnych cząstkowych funkcji Z po każdym z jej argumentów.

Na wstępie obliczamy pochodną **funkcji Z po argumencie a**:

$$\frac{\delta Z}{\delta a} = (3a^2b + \cos(ac))'$$

Zgodnie ze wzorem: $(f + g)' = f' + g'$ obliczamy pochodne z $3a^2b$ oraz z $\cos(ac)$:

$$\frac{\delta}{\delta a}(3a^2b) = 6ab \rightarrow$$
$$pochodna\ funkcji\ (x^n)' = nx^{n-1}$$
$$\frac{\delta}{\delta a}(\cos(ac)) = -\sin(ac) * c = -csin(ac)$$
$$pochodna\ funkcji\ złożonej\ zgodnie\ ze\ wzorem \left[f\big(g(x)\big)\right]' = f'\big(g(x)\big) * g'(x)$$
$$pochodna\ funkcji\ (\cos(x))' = -\sin(x)$$

Wynik końcowy różniczki funkcji Z po zmiennej a wynosi:

$$\frac{\delta Z}{\delta a} = 6ab - csin(ac)$$

Kolejno obliczamy **pochodną funkcji Z po argumencie b**:

$$\frac{\delta Z}{\delta b} = (3a^2b + \cos(ac))'$$

Zgodnie ze wzorem: $(f + g)' = f' + g'$ obliczamy pochodne z $3a^2b$ oraz z $\cos(ac)$:

$$\frac{\delta}{\delta b}(3a^2b) = 3a^2 \rightarrow$$
$$pochodna\ funkcji\ (f)' = 1$$
$$\frac{\delta}{\delta b}(\cos(ac)) = 0 \rightarrow$$
$$zmienna\ b, po\ której\ różniczkujemy\ nie\ wystąpiła\ w\ tej\ części : ($$
$$z' = 0\ (z\ jest\ stałą)$$

Wynik końcowy różniczki funkcji Z po zmiennej b wynosi:

$$\frac{\delta Z}{\delta b} = 3a^2$$

Kolejno obliczamy pochodną funkcji Z po argumencie c:

$$\frac{\delta Z}{\delta c} = (3a^2b + \cos(ac))'$$

Zgodnie ze wzorem: $(f+g)' = f' + g'$ obliczamy pochodne z $3a^2b$ oraz z $\cos(ac)$:

$$\frac{\delta}{\delta c}(3a^2b) = 0 \rightarrow$$

$$zmienna\ c, po\ której\ różniczkujemy\ nie\ wystąpiła\ w\ tej\ części: ($$

$$z' = 0\ (z\ jest\ stałą)$$

$$\frac{\delta}{\delta c}(\cos(ac)) = -\sin(ac) * a = -a\sin(ac)$$

$$pochodna\ funkcji\ złożonej\ zgodnie\ ze\ wzorem \left[f\left(g(x)\right)\right]' = f'\left(g(x)\right) * g'(x)$$

$$pochodna\ funkcji\ (\cos(x))' = -\sin(x)$$

Wynik końcowy różniczki funkcji Z po zmiennej c wynosi:

$$\frac{\delta Z}{\delta c} = -a\sin(ac)$$

Drugim krokiem jest obliczenie wartości faktycznych wyliczonych powyżej różniczek po argumentach. Podstawiamy dane podane w poleceniu do wyników.

$$\frac{\delta Z}{\delta a} = 6ab - c sin(ac) \cong 17.999$$

$$\frac{\delta Z}{\delta b} = 3a^2 = 3$$

$$\frac{\delta Z}{\delta c} = -a\sin(ac) \cong -0.0998$$

Trzecim krokiem jest obliczenie szukanych wartości zgodnie we wzorem problemu odwrotnego teorii błędów:

$$\Delta x_i = \frac{\Delta y}{n * \left|\frac{\delta f}{\delta x_i}\right|}\ i = 1,2,\dots,n$$

Obliczamy i uzyskujemy **odpowiedź**:

$$\Delta a = \frac{\Delta Z}{n * \left|\frac{\delta Z}{\delta a}\right|} = \frac{0.1}{3 * 17.999} < 0.00185$$

$$\Delta b = \frac{\Delta Z}{n * \left|\frac{\delta Z}{\delta b}\right|} = \frac{0.1}{3 * 3} < 0.01111$$

$$\Delta c = \frac{\Delta Z}{n * \left|\frac{\delta Z}{\delta c}\right|} = \frac{0.1}{3 * 0.0998} < 0.334$$

Opracowano dn. 27.10.2017

Bartłomiej Osak, Tomasz Odzimek