Dokumentacja projektu laboratoryjnego numer 1 przedmiot MNUM

Kamil Foryszewski

3 kwietnia 2016

Spis treści

1 Epsilon maszynowy

1.1 Polecenie

Proszę napisać program wyznaczjący dokładność maszynową komputera i wyznaczyć ją na swoim komputerze.

1.2 Opis teoretyczny

Epsilon maszynowy jest to maksymalny błąd względny reprezentacji zmiennoprzecinkowej. Zależy on jedynie od liczby bitów mantysy i nazywany jest dokładnością maszynową. [1] Aby go wyznaczyć należy znaleźć najmniejszą nieujemną liczbę, która dodada do jedności daje wynik różny od jedności. Nie należy mylić go z dużo mniejszą liczbą nazywaną liczbą różną od zera, którą wyznacza się w podobny sposób. Epsylon maszynowy jest zależny od liczby bitów mantysy w reprezentacji zmiennoprzecinkowej. Epsilon maszynowy możemy wyznaczyć przy pomocy następującego algorytmu podanego jako lista kroków:

1. $a = 1, b = 2$
2. dopóki a różne od 1 $eps = x/2, b = 1 + x$
3. wyświetl eps

Poniżej kod programu wyznaczającego epsilon maszynowy w programie Matlab:

1.3 Realizacja w programie Matlab

```
% Obliczanie epsilona maszynowego
 a=1.0; %wartosci poczatkowe
 b=2.0;

% Epsilon maszynowy
 while( b != 1)
     epsilon=a;
     a=a/2;
     b=1.0+a;
 end

 printf('Obliczona wartosc epsilon:\n')
 disp(epsilon)
 printf('Stala epsilon zaimplementowana w Matlabie:\n')
 disp(eps)


% Najmniejsza liczba rozna od 0
 a = 1.0;
 while(a != 0)
   dbl_eps = a;
   a = a/3;
 end
 printf('Obliczona najmniejsza liczba rozna od 0:\n')
 disp(dbl_eps)
```

1.4 Wynik działania programu

Obliczona wartość epsilon:
2.2204e-16
Stala epsilon zaimplementowana w Matlabie:
2.2204e-16
Obliczona najmniejsza liczba różna od 0:
4.9407e-324

1.5 Wnioski

Obliczony epsilon maszynowy jest równy stałej eps występującej w środowisku Matlab, liczba ta jest zgodna z wielkością epsylon dla liczb podwójnej prezyzji w reprezentacji 64-bitowej według standardu IEEE 754. Ponadto obliczony epsilon jest rzędy wielkości większy od obliczonej najmniejszej liczby rożnej od 0. Dlatego nie należy mylić tych pojęć. [2]

2 Metoda elminacji Gaussa z częściowym wyborem elementu głównego

2.1 Polecenie

Proszę napisać program rozwiązujący układ n równań liniowych $Ax = b$ wykorzystując metodę eliminacji Gaussa z częściowym wyborem elementu głównego. Proszę zastosować program do rozwiązania podanych niżej układów równań dla rosnącej liczby równań $n = 10, 20, 40, 80, 160 \ldots$ Liczbę tych równań proszę zwiększać aż do momentu, gdy czas potrzebny na rozwiązanie układu staje się zbyt duży (lub metoda zawodzi).

2.2 Opis teoretyczny

Metoda eliminacji Gaussa należy do metod skończonych, to znaczy że wynik otrzymujemy po określonej skończonej liczbie operacji zależnej od wymiarowości zadania. Aby wyznaczyć rozwiązanie równania mazieżowego $Ax = b$ należy w pierwszej kolejności przeprowadzić eliminację zmniennych. Metoda ta prowadzi do powstania mazieży trókątnej, na podstawie której wyznaczamy wartości poszczególnych składowych wektora rozwiązań, poprzez metodę postępowania odwrotnego. [3]

2.2.1 Metoda LU

Metoda polega na przekształceniu wyjściowej macierzy A do postaci iloczynu macierzy $PA = LU$ gdzie P - macierz permutacji związana z wyborem elementu głównego, L - macierz trójkątna dolna z jedynkami na diagonali oraz U - macierz trójkątna górna. Zakładamy że rozkład $A = LU$ istnieje. Wtedy prawdzie jest równanie z wyeksponowanym pierwszym wierszem i kolumną:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^T & a_{12} \\ a_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ l_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12}^T \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix}$$

Teraz mnożąc blokowo macierz L przez U :

- $u_{11} = a_{11}$ oraz $u_{12} = a_{12} \rightarrow$ pierwszy wiersz U jest kopią pierwszego wiersza A
- $l_{21} = a_{21}/u_{11} \rightarrow$ pierwsza kolumna L powstaje przez podzielenie wektora $a_{2:}$ przez element na diagonali.
- $A_{22} - l_{21}u_{12}^T = L_{22}U_{22} \rightarrow$ znalezienie podmacierzy L_{22}, U_{22} sprowadza się do znalezienia rozkładu LU zmodyfikowanego bloku A_{22} macierzy A o wymiarze $(n-1)\times(n-1)$. Procedurę tą nazywamy uzupełnieniem Schura.

Jest to algorytm rekurencyjny, który można zastąpić pętlą, oszczędzając przy tym pamięć i czas. Algorytm będzie wykonywany w miejscu tzn. elementy macierzy L, U będą zapisywane w miejscach elementów macierzy A. Pamiętając o jedynkach na diagoinali.

Wybór elementu głównego

Aby zapobiec sutuacji dzielenia przez zero, dokonujemy kolumnowego wyboru elementu głównego realizując następujące kroki:

- w pierwszej kolumnie podmacierzy $A(k : n, k : n)$ szukamy elementu o największym module.
- zamieniamy wiersze $A(k, 1 : n)$ z wierszem zawierającym element główny.
- zapamiętujemy permutację poprzez wpisanie do (początkowo jednostkowej) macierzy P jedynek w miejscach przecięcia numerów zmienionyh wierszy. Późniejsze pomożenie przez macierz P powoduje zamianę wierszy identyczną jak przy powyższym algorytmie. [4]

Złożoność oblicziowa

Jak wynika z przedstawionego algorytmu k-ty obrót pętli wymaga $2(n-k)^2$ operacji. Stąd łączny koszt rozkładu wynosi w przybliżeniu $\frac{4}{3}n^3$.

Realizacja w programie Matlab

W celu późniejszego wykorzystania metody została ona zaimplementowana jako funcja zwracająca macierz LU oraz macierz permutacji P dla argumentu A.

```
% funkcja zwracajaca podzial LU macierzy kwadratowej
function [LU,P] = lucw (A)

  n = size(A)(1,1);

  if n!=size(A)(1,2)
    print("macierz nie jest kwadratowa");
  endif
  P = eye(n); %macierz transformacji
  LU = A;

  for k = 1:n-1

    [void pos] = max(abs(LU(k:n,k))); %wybor elementu glownego
    pos=pos+k-1;

    if(pos~=k) % zamiana wierszy
      temp = LU(pos,:);
      LU(pos,:) = LU(k,:);
      LU(k,:) = temp;

      P(k,k) = 0; % zapis zmiany wierszy do macierzy transformacji
      P(pos,pos) = 0;
      P(k,pos) = 1;
      P(pos,k) = 1;
    endif

    for i = k+1:n % normalizacja podmacierzy pod elementem glownym

      LU(i,k) = LU(i,k)/LU(k,k); %wyznaczanie k-tej kolumny
      LU(i,(k+1):n) = LU(i,(k+1):n) - LU(i,k)*LU(k,(k+1):n);

    end

  end

endfunction
```

2.2.2 Rozwiązanie układu z macierzą trójkątną

Powstały rozkład LU zostanie wykorzystany do obliczenia wartości wektora rozwiązań x. Aby wyznaczyć rozwiązanie układu należy:

- Obliczyć w pierwszej kolejności $Ly = b$

- Następnie powstałego wektora y użyć do rozwiązania równania $Ux = y$

W pierwszym przypadku należy rozwiązać równanie z macierzą trójkątną dolną. Jest to proste zadanie w którym wyznaczamy elementy wektora wynikowego kolejno. $x_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{i,j} x_j^*$ układ z macierzą trójkątną górną rozwiązujemy metodą podstawiania w tył. $x_i^* := \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{i,j} x_j^*\right) / u_{i,i}$

Złożoność oblliczniowa

Złożoność obliczeniowa przy rozwiązywnaiu układu z macierzą trójkątną wynosi n^2.

Realizacja w programie Matlab

W celu późniejszego wykorzystania metody została ona zaimplementowana jako funkcja zwracająca wektor rozwiązań x dla argumentów LU, P, b.

```
% funkcja wyznaczjaca rozwiazania ukladu dla macierzy LU
function [x] = lufx (LU,P,b)

  n = size(b)(1,1); % zbadanie wymiaru macierzy

  b = (P')*b; % pomnozenie wektora b przez transformowana macierz P

  %macierz trojkatna dolna Ly = Pb

  y(1,1) = b(1,1);

  for i = 2:n

    s = b(i,1);

    for j = 1:i-1
      s = s - LU(i,j)*y(j,1);
    endfor

    y(i,1) = s;

  end

  %macierz trojkatna gorna Ux = y

  x(n,1) = y(n,1)/LU(n,n);

  for i = n-1:-1:1

   p = y(i,1);

    for j = i+1:n
      p = p - LU(i,j)*x(j,1);
    end

    x(i,1) = p/LU(i,i);

  end

endfunction
```

2.3 Generowanie danych do obliczeń

Dane do obliczeń zostały wygenerowane przez funkcję której argumentami są: ilość równań oraz podpunkt od 1 do 3 według polecenia:

$$1)\ a_{ij} = \begin{cases} 10 & \text{dla } i = j, \\ 5 & \text{dla } i = j-1 \text{ lub } i = j+1, \\ 0 & \text{dla pozostalych,} \end{cases} \qquad b_i = 2 + 0,3i;$$

$$2)\ a_{ij} = 2(i-j)+1 \qquad a_{ii} = \tfrac{1}{6} \qquad b_i = 1 + 0,4 * i;$$

$$2)\ a_{ij} = \tfrac{8}{9(i+j+1)} \qquad b_i = \tfrac{4}{3i}\ i \text{ parzyste; } b_i = 0\ i \text{ - nieparzyste;}$$

Realizacja w programie Matlab

```
%funkcja generujaca macierz
function [A,B] = create_matrix (n,p)

  if (p==1)
   for i = 1:n
     for j = 1:n
       if (i==j)
         A(i,j) = 10;
       endif
       if (i==j-1)
         A(i,j) = 5;
       endif
       if (i==j+1)
         A(i,j) = 5;
       endif
     end
     B(i,1) = 2 + 0.3*i;
   end
  endif

  if (p==2)
  for i = 1:n
    for j = 1:n
      if (i==j)
        A(i,j) = 1/6;
      else
        A(i,j) = 2*(i-j) + 1;
      endif
    end
    B(i,1) = 1 + 0.4*i;
   end
  endif

  if (p==3)
  for i = 1:n
    for j = 1:n
```

```
        A(i,j) = 8/(9*(i + j + 1));
      end
      if (mod(i, 2) == 0)
        B(i,1) = 4/(3*i);
      else
        B(i,1) = 0;
      endif
    end
  endif

endfunction
```

2.4 Wyniki działania programu

W celu prezentacji wyników działania programu został napisany skrypt, wykorzystujący wcześniej utworzone funkcje do obliczenia błędów rozwiązań dla rozsnącej liczby równań, dla każdego zestawu danych z zadania.

Realizacja w programie Matlab

```
%Skrypt generujacy wyniki oraz wykresy
clear

F = fopen('results.txt','w'); %wynik zapisany do pliku

for i= 1:3 % iteracja po podpunktach

  for j= 0:7 % iteracja po liczbie rownan

  result(1,j+1) = 10*2^j; % zapamietanie liczby rownan

  t = cputime; % poczatek liczenia czasu

  [A,b] = create_matrix(10*2^j,i); % utworznie macierzy

  [LU,P] = lucw(A); % wyznaczenie rozkladu

  x = lufx(LU,P,b); % obliczenie wektora rozwiazan

  res = A*x - b;
  error = norm(res,1); % blad jako norma residuum

  result(2,j+1) = error; % zapamietanie bledu dla liczby rownan

  time = cputime-t; % obliczenie czasu wykonania

  fprintf(F, 'Podpunkt: %d ,Liczba rownan: %d , Blad: %g , Czas: %d sek.
      \n',i,result(1,j+1),result(2,j+1),time);

  endfor
```

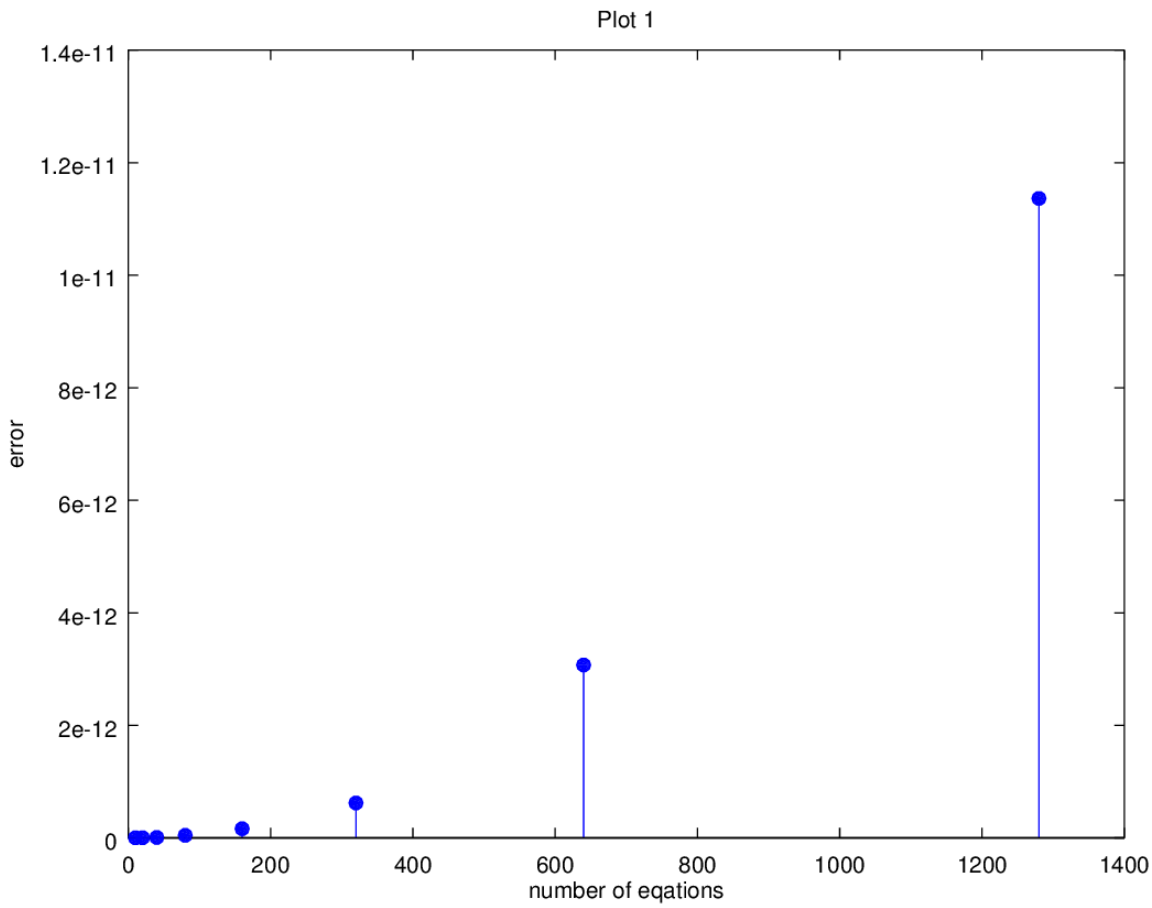
```

  a = stem(result(1,:),result(2,:),"o","filled"); % utworzenie wykresu

  if(i==1)
    title('Plot 1');
    xlabel('number of eqations');
    ylabel('error');
    saveas(a, 'wykres1.png');

  elseif (i==2)
    title('Plot 2');
    xlabel('number of eqations');
    ylabel('error');
    saveas(a, 'wykres2.png');
  else
    title('Plot 3');
    xlabel('number of eqations');
    ylabel('error');
    saveas(a, 'wykres3.png');
  endif


endfor

fclose(F);
```

Zestaw danych 1

Wynik działania programu:

Podpunkt: 1 ,Liczba rownan: 10 , Blad: 2.22045e-15 , Czas: 0.023333 sek.
Podpunkt: 1 ,Liczba rownan: 20 , Blad: 3.9968e-15 , Czas: 0.04 sek.
Podpunkt: 1 ,Liczba rownan: 40 , Blad: 8.88178e-15 , Czas: 0.103334 sek.
Podpunkt: 1 ,Liczba rownan: 80 , Blad: 4.52971e-14 , Czas: 0.273333 sek.
Podpunkt: 1 ,Liczba rownan: 160 , Blad: 1.63425e-13 , Czas: 1.08 sek.
Podpunkt: 1 ,Liczba rownan: 320 , Blad: 6.21281e-13 , Czas: 4.36667 sek.
Podpunkt: 1 ,Liczba rownan: 640 , Blad: 3.0731e-12 , Czas: 18.1633 sek.
Podpunkt: 1 ,Liczba rownan: 1280 , Blad: 1.13651e-11 , Czas: 77.0833 sek.

Wykres zależności błędu od liczby równań



Wnioski

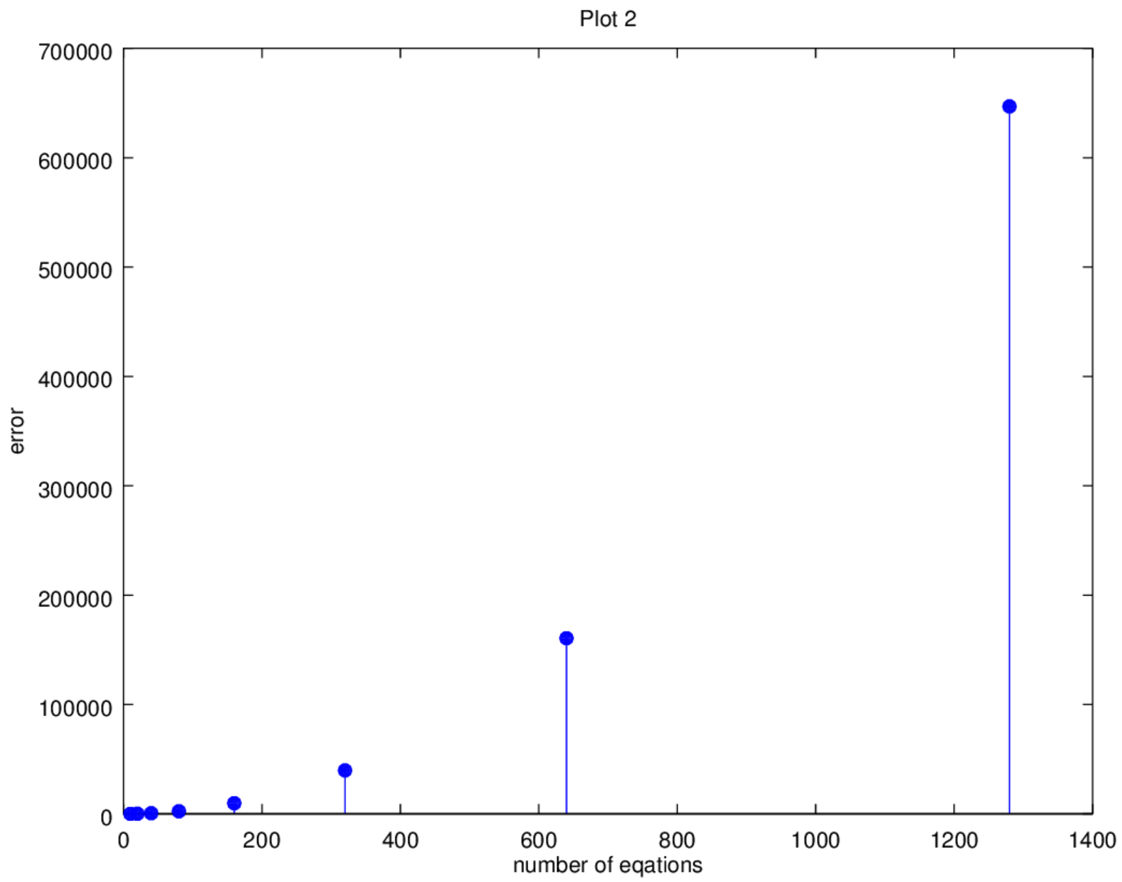
Dla pierwszego zestawu danych błąd rozwiązania jest stosunkowo niewielki i rośnie wraz z liczbą równań. Dla tego zadania macierz A jest dobrze uwarunkowana, ponieważ jest diagonalnie silnie dominująca. Dla liczby równań powyżej 1280 czas potrzebny na rozwiąznie staje się zbyt długi.

Zestaw danych 2

Wynik działania programu:

Podpunkt: 2 ,Liczba rownan: 10 , Blad: 30 , Czas: 0.006667 sek.
Podpunkt: 2 ,Liczba rownan: 20 , Blad: 135 , Czas: 0.033333 sek.
Podpunkt: 2 ,Liczba rownan: 40 , Blad: 578 , Czas: 0.193334 sek.
Podpunkt: 2 ,Liczba rownan: 80 , Blad: 2376 , Czas: 0.703333 sek.
Podpunkt: 2 ,Liczba rownan: 160 , Blad: 9750 , Czas: 1.19 sek.
Podpunkt: 2 ,Liczba rownan: 320 , Blad: 39732 , Czas: 4.81333 sek.
Podpunkt: 2 ,Liczba rownan: 640 , Blad: 160625 , Czas: 19.8533 sek.
Podpunkt: 2 ,Liczba rownan: 1280 , Blad: 646893 , Czas: 86.6033 sek.

Wykres zależności błędu od liczby równań



Wnioski

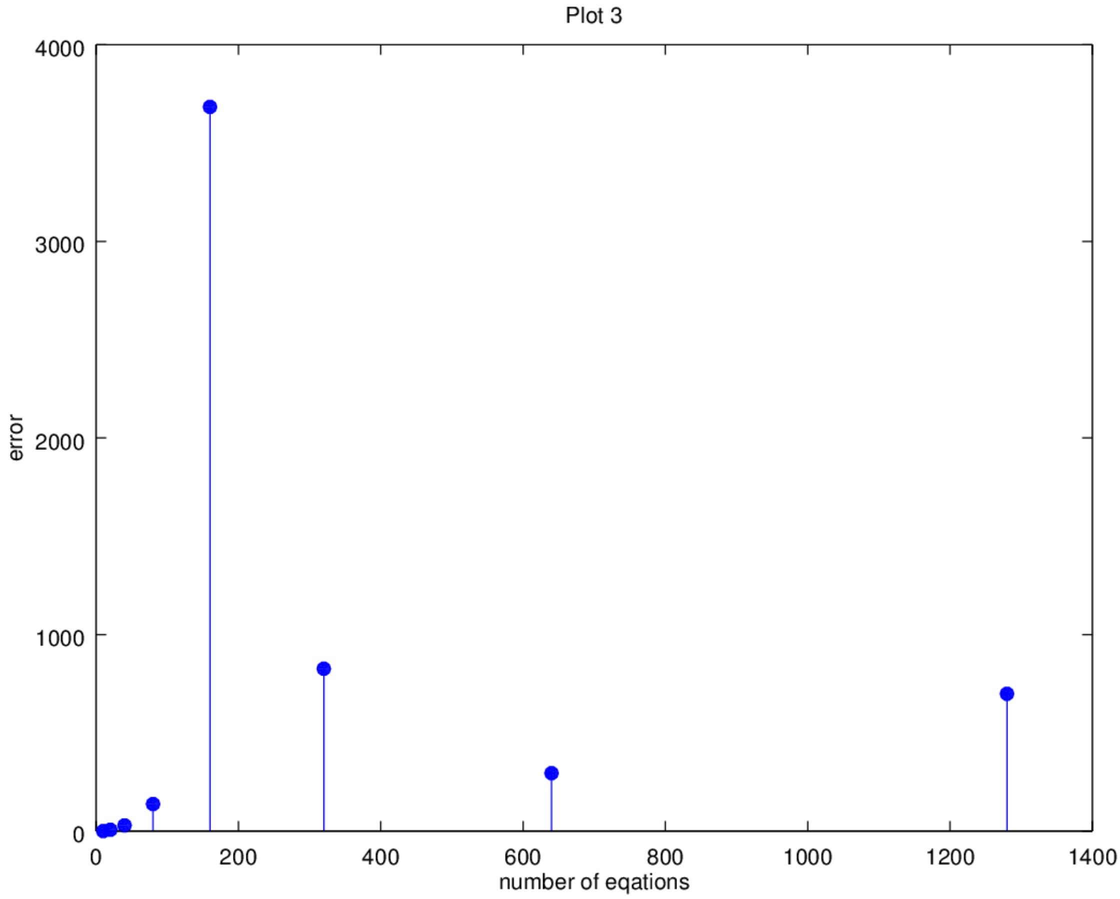
Dla drugiego zestawu danych błąd rozwiązania jest znacznie większy i rośnie wraz z liczbą równań. Elementy na diagonali są znacznie mniejsze co do modułu od pozostałych. Powoduje to pojawianie się wartości bliskich zeru podczas generowania macierzy LU, co prowadzi do dużych błędów w obliczeniach. Dla liczby równań powyżej 1280 czas potrzebny na rozwiąznie staje się zabyt długi.

Zestaw danych 3

Wynik działania programu:

Podpunkt: 3 ,Liczba rownan: 10 , Blad: 0.267628 , Czas: 0.01 sek.
Podpunkt: 3 ,Liczba rownan: 20 , Blad: 6.71819 , Czas: 0.046666 sek.
Podpunkt: 3 ,Liczba rownan: 40 , Blad: 29.2936 , Czas: 0.113333 sek.
Podpunkt: 3 ,Liczba rownan: 80 , Blad: 137.833 , Czas: 0.316667 sek.
Podpunkt: 3 ,Liczba rownan: 160 , Blad: 3683.93 , Czas: 1.15333 sek.
Podpunkt: 3 ,Liczba rownan: 320 , Blad: 826 , Czas: 4.68667 sek.
Podpunkt: 3 ,Liczba rownan: 640 , Blad: 294.727 , Czas: 19.2033 sek.
Podpunkt: 3 ,Liczba rownan: 1280 , Blad: 698.679 , Czas: 82.4 sek.

Wykres zależności błędu od liczby równań



Wnioski

Dla trzeciego zestawu danych błąd rozwiązania jest duży, jednak nie można zdefiniować zależności pomiędzy nim a liczbą równań. Elementy macierzy A są na tyle małe że podczas obliczeń przetwarzane są liczby w granicach dokładności obliczeniowej. Promień spektralny macierzy jest jednak niewieli dlatego błędy obliczeniowe nie są tak wysokie jak w przypadku podpunktu 2. Dla liczby równań powyżej 1280 czas potrzebny na rozwiąznie staje się zabyt długi.

2.5 Poprawianie iteracyjne

Dla liczby równań 10 zostało przeprowadzone iteracyjne poprawianie rozwiązań. Polega ono na wyznaczeniu *residuum* czyli błędu rozwiązania według wzoru $r = Ax - b$. Dzięki temu możemy wyznaczyć jaka zmiana δx generuje nasz błąd. [5] Poprawienia dokładności rozwiązania możemy dokonać postępując następująco:

- Wyznaczamy resztę $r = Ax - b$.
- Rozwiązujemy układ $A\delta x = r$
- Wyznaczamy nowy wektor rozwiązań $x^{(2)} = x^{(1)} - \delta x$.
- Obliczamy kolejny raz resztę tym razem dla nowego x i sprawdzamy czy spełnia założenia dokładności.

Realizacja w programie Matlab

```
% Funkcja realizujaca iteracyjne poprawianie
function [x] = grow (A,x,b,LU,P)

  r = A*x-b; % obliczenie reszty
  while (norm(r)>2*eps) % wykonuj jezeli blad wiekszy od 2eps
    o = r;
    r = A*x-b;
    if(norm(r)<norm(o)) % jezeli blad rosnie zakoncz
      break;
    endif
    dx = lufx(LU,P,r); % obliczenie delta x
    x = x-dx; odjecie od wektora delta x
  endwhile

endfunction
```

```

% Sktypt wyznaczajacy blad po poprawianu iteracyjnym
clear;

for i= 1:3 % iteracja po podpunktach

  [A,b] = create_matrix(10,i);

  [LU,P] = lucw(A);

  x = lufx(LU,P,b);

  res = A*x - b;
  error = norm(res,1);

  printf('Blad dla zestawu: %d przed: %g,',i,error);

  res1 = A*grow(A,x,b,LU,P) - b;% Poprawianie
  error1 = norm(res1,1);

  printf('Blad dla zestawu: %d po poprawianiu: %g,\n',i,error1);

endfor
```

Wyniki działania programu

Blad dla zestawu: 1 przed: 2.22045e-15,Blad dla zestawu: 1 po poprawianiu: 1.33227e-15,
Blad dla zestawu: 2 przed: 30,Blad dla zestawu: 2 po poprawianiu: 23.2,
Blad dla zestawu: 3 przed: 0.267628,Blad dla zestawu: 3 po poprawianiu: NaN,

Wnioski

Pętla iteracyjnego poprawiania wykonywała się do czasu wystąpienia dokładności rzędu $2eps$ lub do czasu kiedy błąd przestał maleć. Dla zestawów 1 i 2, iteracyjne poprawianie dało dokładniejszy wynik. Natomiast dla zestawu 3 metoda iteracyjnego poprawiania zawiodła. Stało się tak ponieważ wektor rozwiązań stanowiły liczby naprzemieie dodatnie i ujemne. Norma tego wektora była coraz mniejsza dlatego algorytm postępował dalej. Po wielu krokach iteracji wartości wektora rozwiązań zaczęły przekraczać zakresy reprezentacji liczb, stąd wynik NaN.

3 Metoda Jacobiego

3.1 Polecenie

Proszę napisać program rozwiązujący n równań liniowych $Ax = b$ wykorzystując metodę Jacobiego i użyć go do rozwiązania danego układu równań liniowych:

$14x_1 - x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1$
$x_1 - 7x_2 - 4x_3 - x_4 = 0$
$2x_1 - 4x_2 - 12x_3 - x_4 = -10$
$x_1 - x_2 + 6x_3 - 16x_4 = -2$

Proszę sprawdzić dokładność rozwiązania oraz spróbować zastosować zaprogramowaną metodę do rozwiązania układów równań z zadania 2.

3.2 Opis teoretyczny

Metoda Jacobiego jest metodą iteracyjną. Oznacza to że aby uzyskać wynik należy wykonywać powtarzające się operacje na macierzy wyjściowej do momentu spełnienia założeń o wyniku działania. Aby rozwiązać układ równań $Ax = b$ należy dokonać dekompozycji macierzy $A = L + D + U$ gdzie macierz L jest macierzą złożoną z elementów macierzy A znajdującymi się pod diagonalą, macierz D to macierz diagonalna skłądająca się z diagonali macierzy A natomiast macierz U składa się z elementów nad diagonalą A.
Układ $Ax = b$ można zapisać w postaci

$$Dx = -(L + U)x + b$$

Możemy więc zapisać :

$$x^{(i+1)} = -D^{-1}(L + U)x^{(i)} + D^{-1}b \text{ gdzie } i \in 1...n$$

Obliczanie należy wykonywać do momentu uzyskania jak najdokładniejszgo wyniku, jeżeli jest to możliwe. Warunkiem zbieżności metody jest silna dominacja diagonalna macierzy. [6]

3.3 Generowanie danych do obliczeń

W zadaniu należy sprawdzić metodę dla podanego układu równań oraz dla układów z drugirgo zadania. Układ podany w zadaniu jest stały, więc należy wprowadzić jego macierz do programu statycznie. Natomiast dla układów z zadania 2 zostanie użyta funkcja generuąca opisana wyżej.

4 Realizacja w programie Matlab

Do realizacji zadania została napisana funkcja wyznaczająca rozwiązanie dla argumentów A, b oraz skrypt wykorzystujący funkcję do realizacji obliczeń podanych w zadaniu.

```
%Rowziazywanie ukladow rownan metoda Jacobiego
function [x] = jacobi(A,b)

  n = size(A)(1,1); %wyznaczenie rozmiaru ukladu

  U = L = zeros(n); %macierze U i L poczatkowo rowne 0

  for i = 1:n % dekompozycja macierzy na U D L

      for j = 1:n

      if(i==j)
          D(i,j) = 1/A(i,j);% macierz D powstaje jako D'
      endif

      if(i<j)
        U(i,j) = A(i,j);
      endif

      if (j<i)
        L(i,j) = A(i,j);
      endif

    end

  end

  M = -D*(L+U); % skrocenie zapisu

  x = zeros(n,1); % pierwotna wartosc rozwiazania

  err = norm(A*x -b,1);

  while (1) % iteracja obliczjaca coraz dokladniejsze wartosci x

    err = norm(A*x -b,1);

    x = M*x + D*b;

    lerr = norm(A*x -b,1);

    if(lerr>err) % jezeli prezyzja maleje zakoncz iteracje
      break;
    endif

  end

endfunction
```

```
%Skrypt generujacy rozwiazania do zadania 3
clear;

A = [14 -1 -3 5;1 -7 -4 -1;2 -4 -12 -1;1 -1 6 -16]; %macierz z zadania
b = [1;0;-10;2]; %wektor rozwiazan
```

```
x = jacobi(A,b); %obloicznie x wczesniej napisna funkcja

res  = A*x - b;
error = norm(res,1); %blad jako norma residuum
printf('Rozwiazanie ukladu z zadaina:\n');
printf('%g\n',x);
printf('Blad dla ukladu z zadaina: %g,\n',error);
printf('Zastosowanie metody do ukladow z zadania 2:\n');

for i= 1:3 % iteracja po podpunktach z zadania 2

  for j= 0:7 % iteracja po liczbie rownan

  result(1,j+1) = 10*2^j; % liczby rownan

  t = cputime;

  [A,b] = create_matrix(10*2^j,i); %utworzenie macierzy

  x = jacobi(A,b); % obliczanie rozwiazania

  res = A*x - b;
  error = norm(res,1); %blad jako norma residuum

  result(2,j+1) = error; %zapis wynikow

  time = cputime-t; % obliczenie czasu wykonania

  if(time>120) % dla czasu pow 2minut przerwanie wykonania
    break;
  endif

  printf('Podpunkt: %d ,Liczba rownan: %d , Blad: %g , Czas: %d sek. \n',
     i,result(1,j+1),result(2,j+1),time);

  endfor

endfor
```

4.1 Wyniki

Wynik działania skryptu:
Rozwiazanie ukladu z zadaina:
0.138426
-0.616647
1.03606
0.310715
Blad dla ukladu z zadaina: 8.10463e-15,
Zastosowanie metody do ukladow z zadania 2:
Podpunkt: 1 ,Liczba rownan: 10 , Blad: 9.05942e-14 , Czas: 0.106667 sek.
Podpunkt: 1 ,Liczba rownan: 20 , Blad: 1.3114e-12 , Czas: 0.14 sek.
Podpunkt: 1 ,Liczba rownan: 40 , Blad: 2.00293e-11 , Czas: 0.453333 sek.
Podpunkt: 1 ,Liczba rownan: 80 , Blad: 3.06838e-10 , Czas: 2.48 sek.

Podpunkt: 1 ,Liczba rownan: 160 , Blad: 4.30151e-09 , Czas: 21.95 sek.
Podpunkt: 2 ,Liczba rownan: 10 , Blad: 9604.8 , Czas: 0.003334 sek.
Podpunkt: 2 ,Liczba rownan: 20 , Blad: 129974 , Czas: 0.01 sek.
Podpunkt: 2 ,Liczba rownan: 40 , Blad: 1.88941e+06 , Czas: 0.04 sek.
Podpunkt: 2 ,Liczba rownan: 80 , Blad: 2.87567e+07 , Czas: 0.16 sek.
Podpunkt: 2 ,Liczba rownan: 160 , Blad: 4.48441e+08 , Czas: 0.64 sek.
Podpunkt: 2 ,Liczba rownan: 320 , Blad: 7.08253e+09 , Czas: 2.56 sek.
Podpunkt: 2 ,Liczba rownan: 640 , Blad: 1.12583e+11 , Czas: 10.61 sek.
Podpunkt: 2 ,Liczba rownan: 1280 , Blad: 1.79545e+12 , Czas: 44.93 sek.
Podpunkt: 3 ,Liczba rownan: 10 , Blad: 12.3057 , Czas: 0.006666 sek.
Podpunkt: 3 ,Liczba rownan: 20 , Blad: 29.403 , Czas: 0.01 sek.
Podpunkt: 3 ,Liczba rownan: 40 , Blad: 65.1874 , Czas: 0.04 sek.
Podpunkt: 3 ,Liczba rownan: 80 , Blad: 138.204 , Czas: 0.156667 sek.
Podpunkt: 3 ,Liczba rownan: 160 , Blad: 285.452 , Czas: 0.6 sek.
Podpunkt: 3 ,Liczba rownan: 320 , Blad: 580.88 , Czas: 2.39 sek.
Podpunkt: 3 ,Liczba rownan: 640 , Blad: 1172.37 , Czas: 9.99 sek.
Podpunkt: 3 ,Liczba rownan: 1280 , Blad: 2355.66 , Czas: 42.4867 sek.

4.2 Winoski

Macierz w zadaniu 3 jest silnie diagonalnie dominujaca dlatego metoda daje dosyć dokładny wynik po kilku iteracjach. Dla układów z zadania 1 metoda również się sprawdza, dając rezultaty zbliżone a niekiedy lepsze od metody Gaussa. Jest jednak od niej znacznie wolniejsza. W przypadku podpunktu pierwszego z zadania 2 już dla 320 równań, czas na rozwiązanie staje się zbyt długi. Macierze z podpunktów 2 i 3 z zadania 2 nie są dominujące diagonalnie dlatego metoda generuje dość duże błędy szczególnie w podpunkcie 2.

Literatura

[1] Piotr Tatjewski "Metody numeryczne": Rozdział 1.1
Warszawa 2013

[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Machine_epsilon`

[3] Piotr Tatjewski "Metody numeryczne": Rozdział 2.3.4
Warszawa 2013

[4] Piotr Tatjewski "Metody numeryczne": Rozdział 2.3.4 (2.29)
Warszawa 2013

[5] Piotr Tatjewski "Metody numeryczne": Rozdział 2.3.5
Warszawa 2013

[6] Piotr Tatjewski "Metody numeryczne": Rozdział 2.6.1
Warszawa 2013