Modelowanie i identyfkacja - projekt I, zadanie 9

Kamil Foryszewski

19 kwietnia 2017

Spis treści

1 Dynamiczny model ciągły

1.1 Równanie modelu w przestrzeni stanu

Obiekt dynamiczny opisany jest modelem ciągłym w przestrzeni stanu:

$\dot{x}_1 = -\frac{T_1-T_2}{T_1T_2}x_1(t) + x_2(t)$

$\dot{x}_2 = -\frac{1}{T_1T_2}x_1(t) + \frac{K}{T_1T_2}(\alpha_1 u(t) + \alpha_2 u^2(t) + \alpha_3 u^3(t) + \alpha_4 u^4(t))$

$y(t) = x_1(t)$

Gdzie :

$K = 5.5, T_1 = 7, T_2 = 7, \alpha_1 = 0.19, \alpha_2 = -0.05, \alpha_3 = -0.95, \alpha_4 = -0.45,$

Sygnał sterujący spałnia warunek $-1 \leqslant u \leqslant 1$

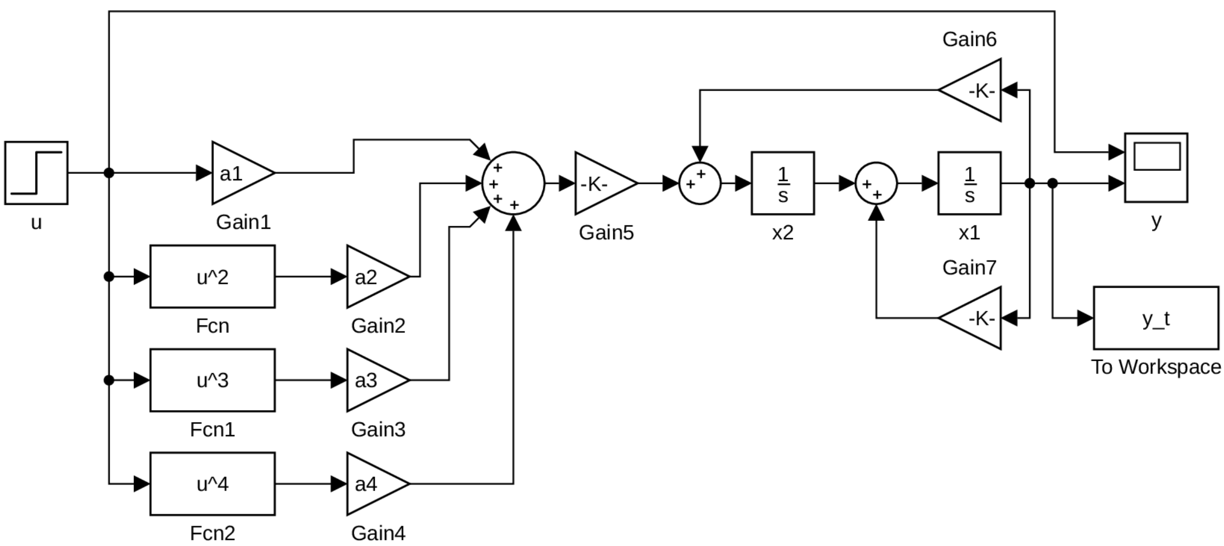
Po podstawieniu:

$\dot{x}_1 = -0.285714286x_1(t) + x_2(t)$

$\dot{x}_2 = -0.020408163x_1(t) - 0.021326531u(t) - 0.005612245u^2(t) - 0.106632653u^3(t) - 0.050510204u^4(t)$

$y(t) = x_1(t)$

1.2 Reprezentacja graficzna dynamicznego modelu ciągłego



Rysunek 1: Reprezentacja graficzna dynamicznego modelu ciągłego

2 Dynamiczny model dyskretny

2.1 Wyprowadzenie równania dynamicznego modelu dyskretnego

Korzystając z metody aproksymacji wstecznej Eulera:

$\frac{x_1(k)-x_1(k-1)}{T_p} = -0.285714286x_1(k-1) + x_2(k-1)$

$\frac{x_2(k)-x_2(k-1)}{T_p} = -0.020408163x_1(k-1) - 0.021326531u(k-1) - 0.005612245u^2(k-1)$
$- 0.106632653u^3(k-1) - 0.050510204u^4(k-1)$

$y(k) = x_1(k)$

Po uproszczeniu:

$x_1(k) = (-0.285714286T_p + 1)x_1(k-1) + T_p x_2(k-1)$

$x_2(k) = -0.020408163T_p x_1(k-1) + x_2(k-1) + T_p(-0.021326531u(k-1) - 0.005612245u^2(k-1)$
$- 0.106632653u^3(k-1) - 0.050510204u^4(k-1))$

$y(k) = x_1(k)$

W zapisie symbolicznym:

$x_1(k) = (1 - \frac{(T_1+T_2)T_p}{T_1T_2})x_1(k-1) + T_p x_2(k-1)$

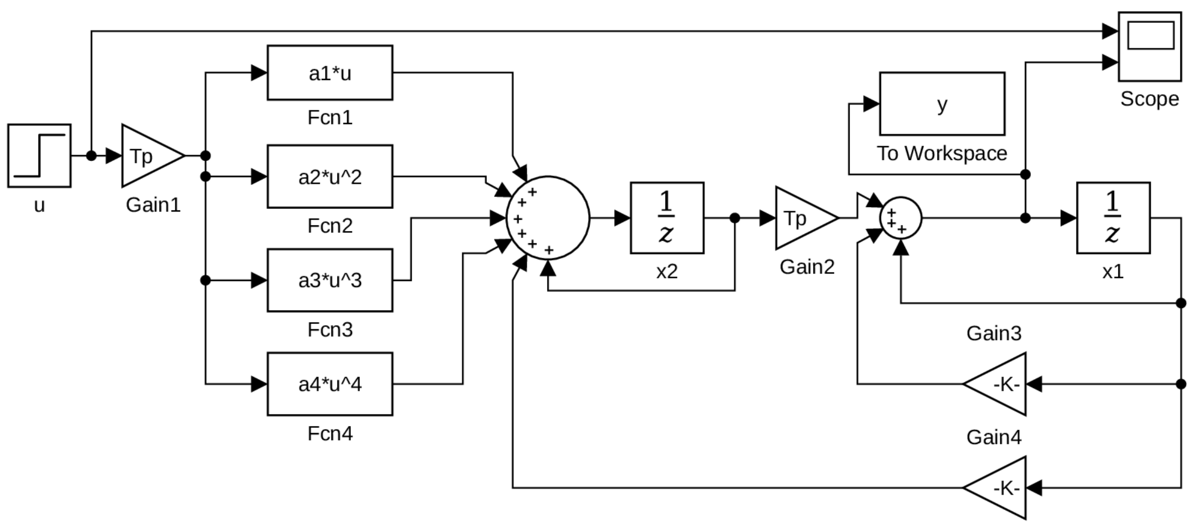
$x_2(k) = -\frac{T_p}{T_1T_2}x_1(k-1) + x_2(k-1) + T_p(\alpha_1 u(k-1) + \alpha_2 u^2(k-1)$
$+ \alpha_3 u^3(k-1) + \alpha_4 u^4(k-1))$

$y(k) = x_1(k)$

Gdzie :

$K = 5.5, T_1 = 7, T_2 = 7, \alpha_1 = 0.19, \alpha_2 = -0.05, \alpha_3 = -0.95, \alpha_4 = -0.45, T_p$ - krok czasowy

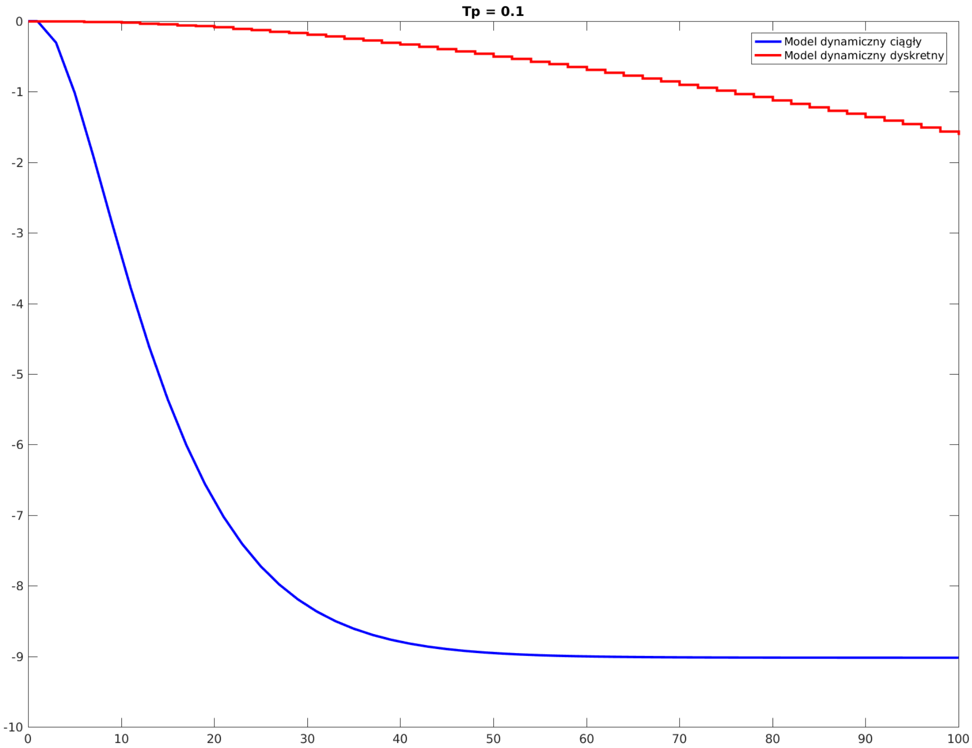
2.2 Reprezentacja graficzna dynamicznego modelu dyskretnego



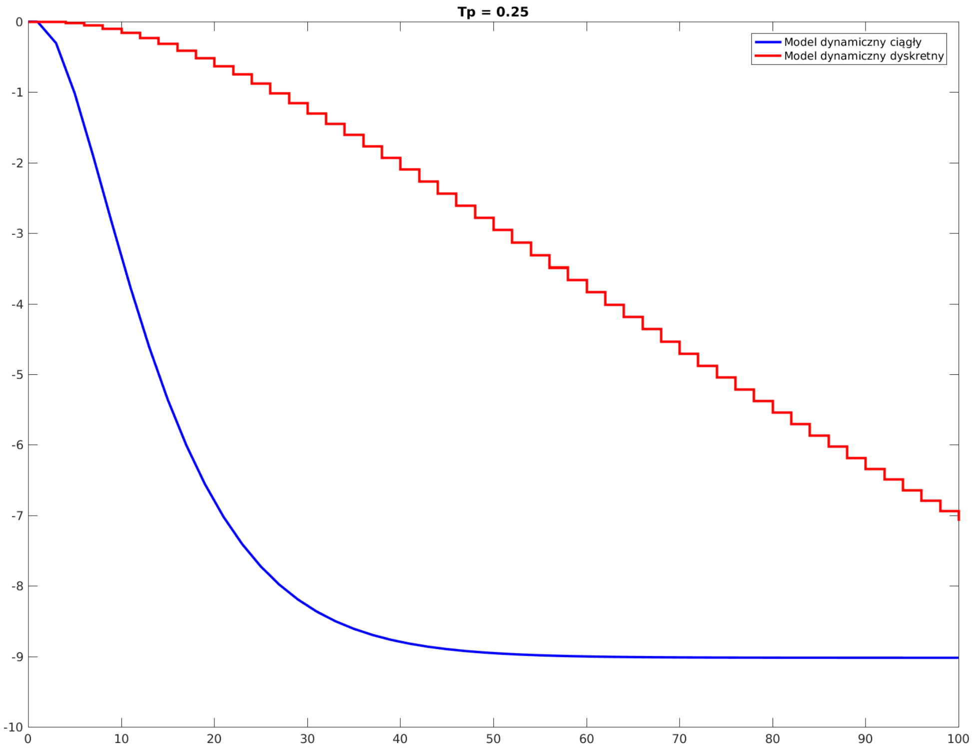
Rysunek 2: Reprezentacja graficzna dynamicznego modelu dyskretnego

3 Symulacje dynamicznego modelu ciągłego i dyskretnego

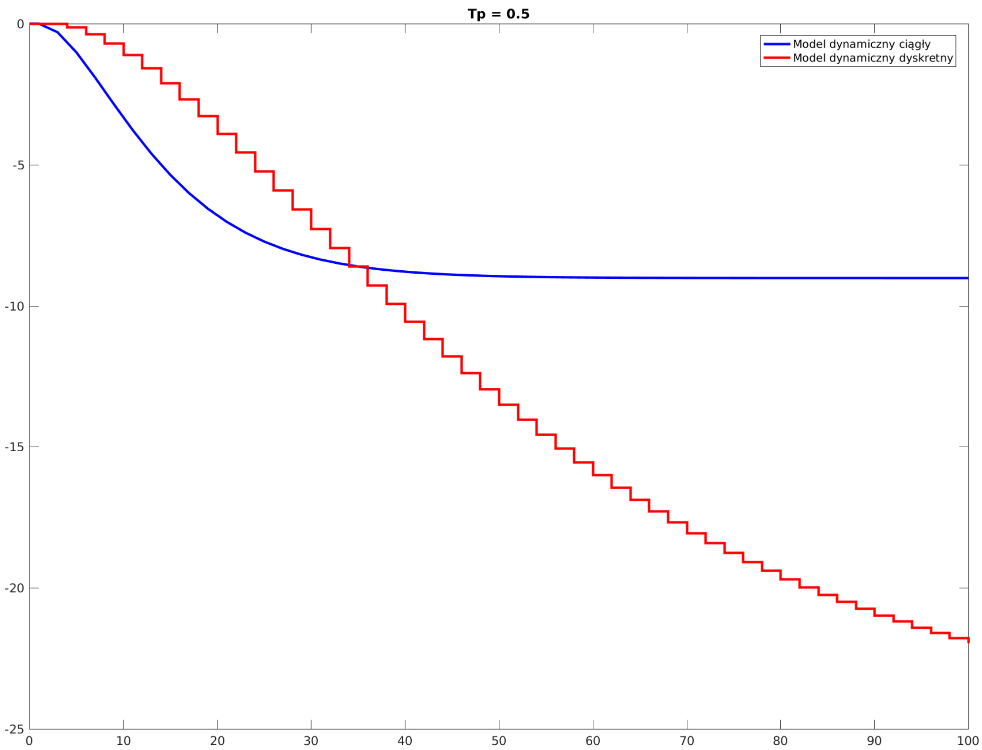
3.1 $T_p = 0.1$



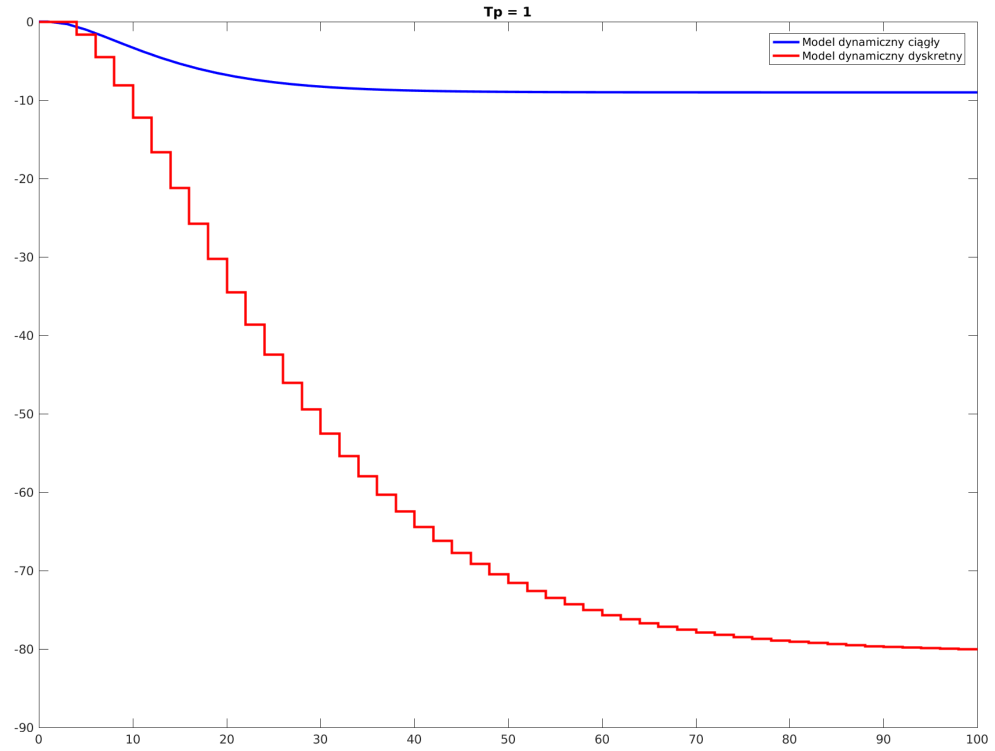
3.2 $T_p = 0.25$



3.3 $T_p = 0.5$

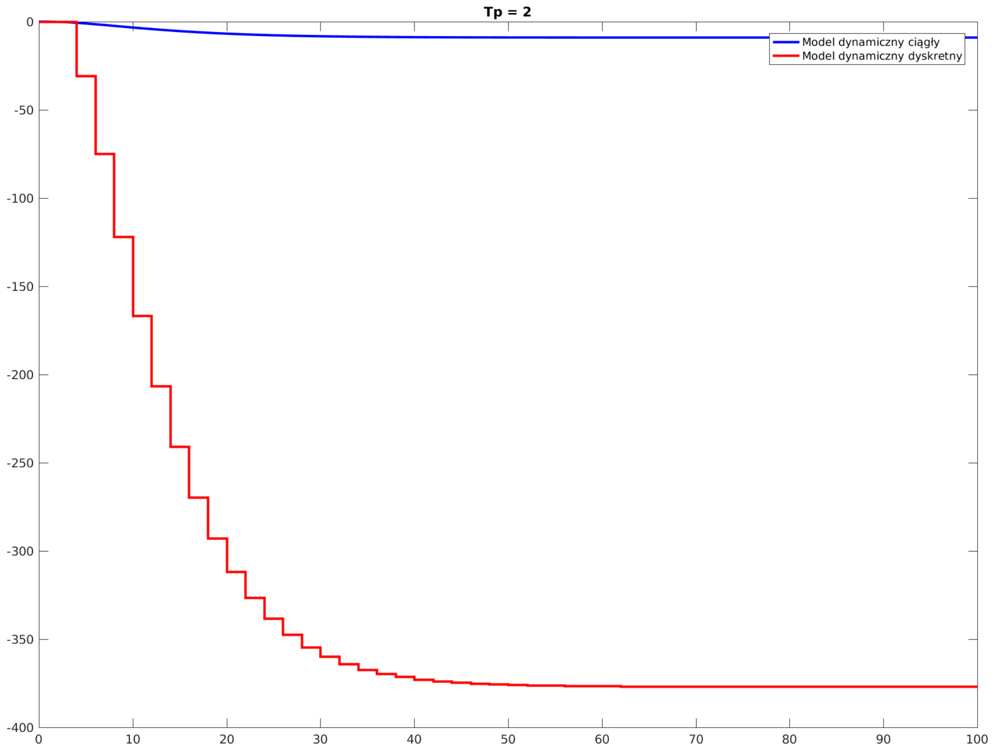


3.4 $T_p = 1$



Tp = 1
Model dynamiczny ciągły
Model dynamiczny dyskretny
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
-90
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

3.5 $T_p = 2$



Tp = 2
Model dynamiczny ciągły
Model dynamiczny dyskretny
0
-50
-100
-150
-200
-250
-300
-350
-400
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

4 Charakterystyka statyczna modelu ciągłego

4.1 Wyprowadzenie

$0 = -\frac{1}{T_1T_2}x_1 + \frac{K}{T_1T_2}(\alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4)$

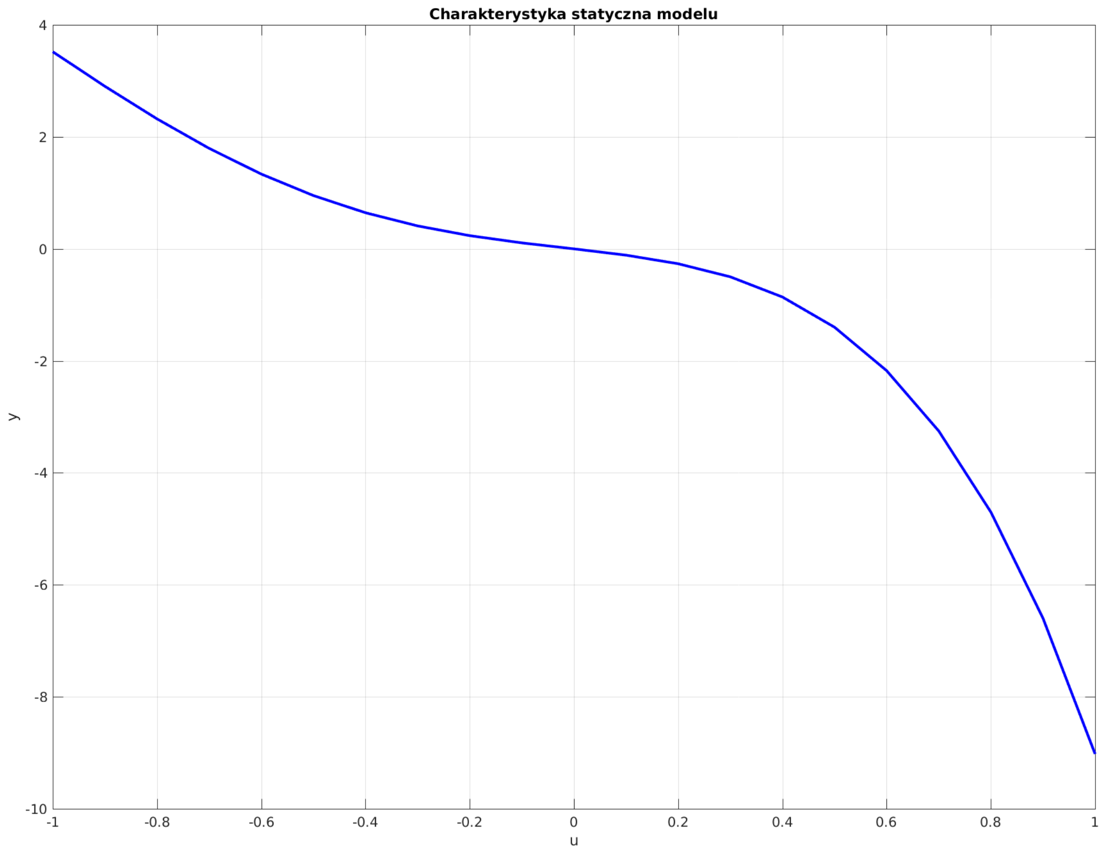
$\frac{1}{T_1T_2}x_1 = \frac{K}{T_1T_2}(\alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4)/\cdot T_1T_2$

$y = x_1 = K(\alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4)$

Gdzie :

$K = 5.5, \alpha_1 = 0.19, \alpha_2 = -0.05, \alpha_3 = -0.95, \alpha_4 = -0.45$

4.2 Wykres



Rysunek 3: Wykres charakterystyki statycznej modelu ciągłego

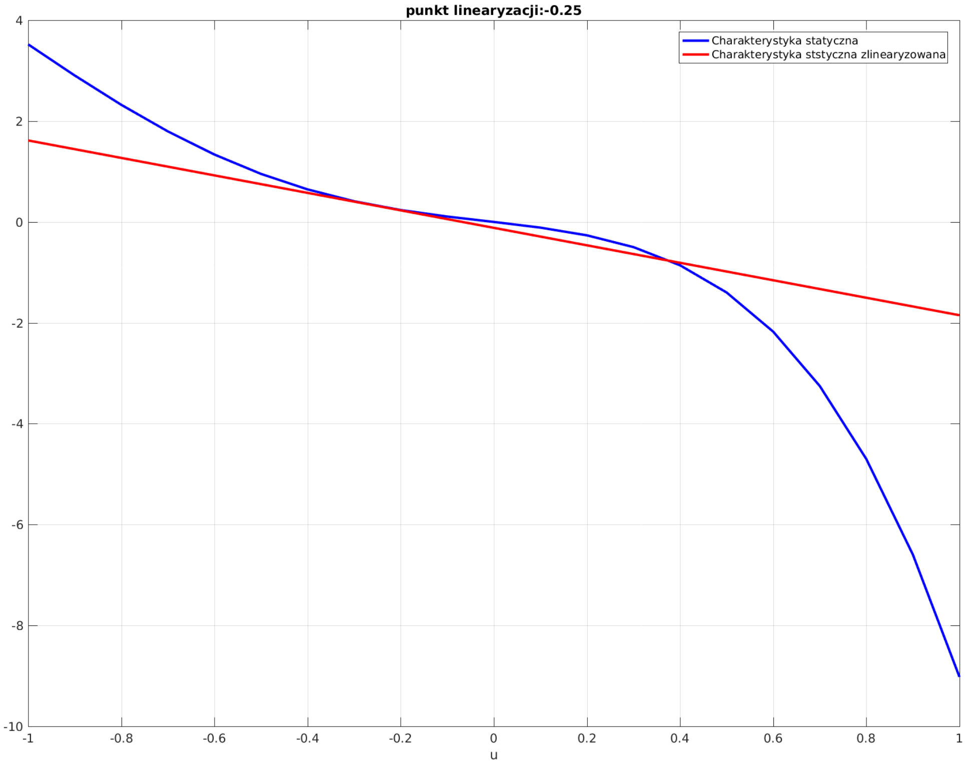
5 Charakterystyka statyczna zlinearyzowana

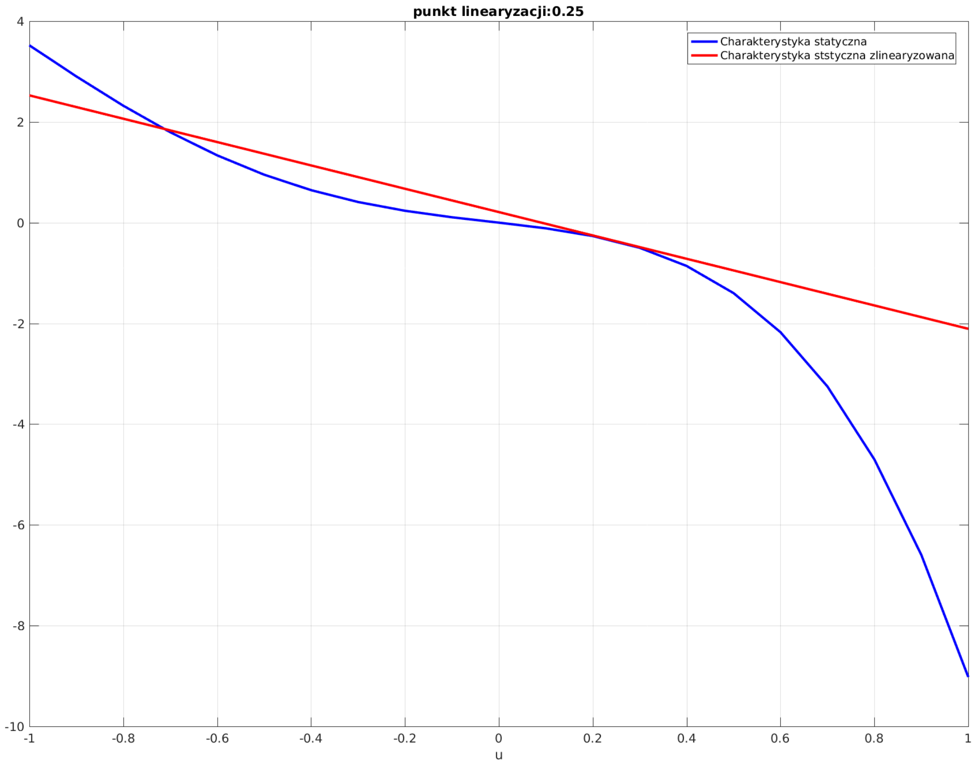
$\overline{u}$ - punkt linearyzacji

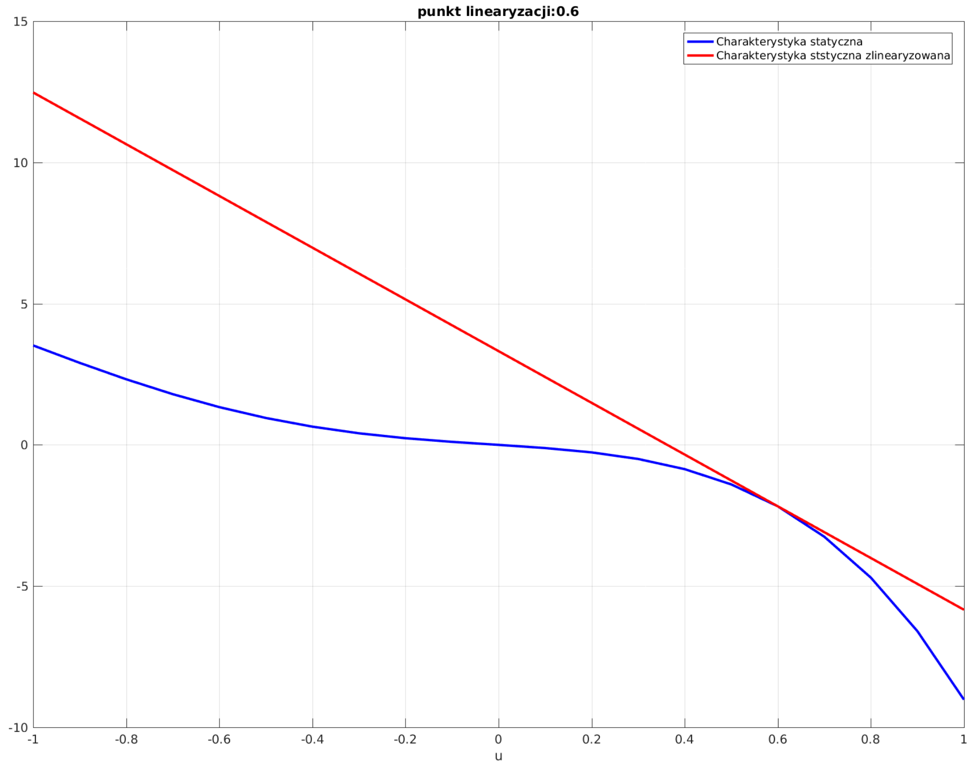
$y_{stat} = K(\alpha_1\overline{u} + \alpha_2\overline{u}^2 + \alpha_3\overline{u}^3 + \alpha_4\overline{u}^4) + K(\alpha_1 + \alpha_2 2\overline{u} + \alpha_3 3\overline{u}^2 + \alpha_4 4\overline{u}^3)(u - \overline{u})$

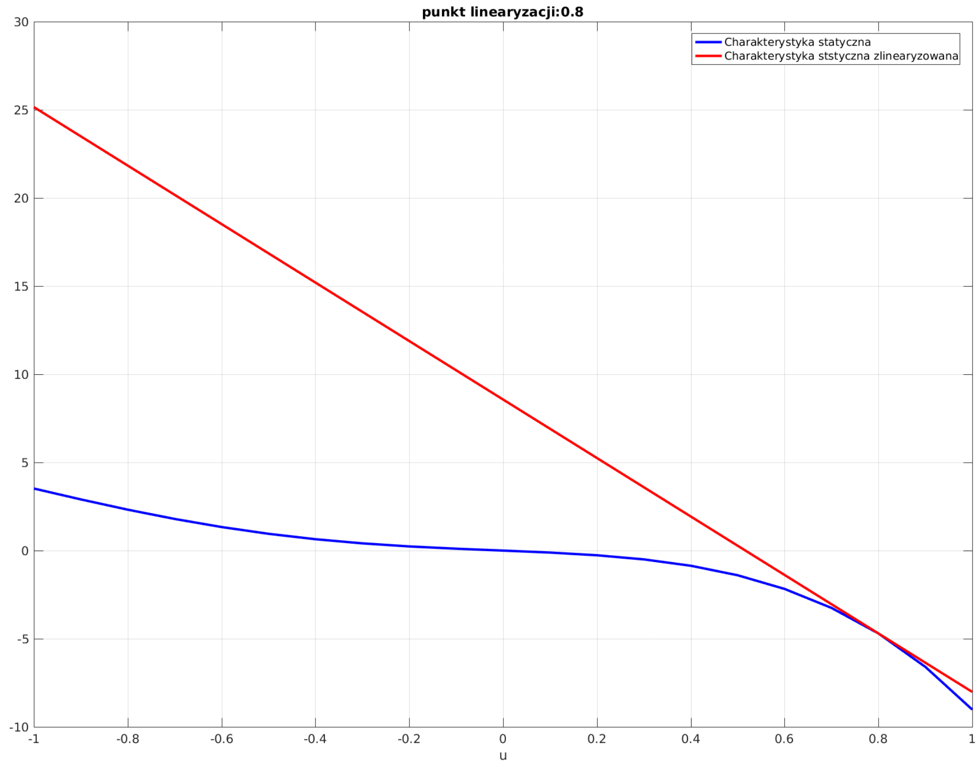
$y_{stat} = K(\alpha_1 u + \alpha_2(2\overline{u}u - \overline{u}^2) + \alpha_3(3\overline{u}^2 u - 2\overline{u}^3) + \alpha_4(4\overline{u}^3 u - 3\overline{u}^4))$

6 Wykresy zlinearyzowanej charakterystyki statycznej






punkt linearyzacji:0.6
Charakterystyka statyczna
Charakterystyka ststyczna zlinearyzowana
15
10
5
0
-5
-10
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
u


punkt linearyzacji:0.8
Charakterystyka statyczna
Charakterystyka ststyczna zlinearyzowana
30
25
20
15
10
5
0
-5
-10
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
u

7 Dynamiczny dyskretny model zlinearyzowany

Dynamiczny model dyskretny opisany jest równianiami:

$$x_1(k) = (1 - \frac{(T_1+T_2)T_p}{T_1T_2})x_1(k-1) + T_px_2(k-1)$$

$$x_2(k) = -\frac{T_p}{T_1T_2}x_1(k-1) + x_2(k-1) + T_p(\alpha_1u(k-1) + \alpha_2u^2(k-1)$$
$$+ \alpha_3u^3(k-1) + \alpha_4u^4(k-1))$$

$$y(k) = x_1(k)$$

Aby otrzymać model liniowy należy zlinearyzować wszystkie nieliniowe elementy równań stanu:

$\overline{u}$ - punkt linearyzacji

$$\alpha_2u^2(k-1) + \alpha_3u^3(k-1) + \alpha_4u^4(k-1) \approx \alpha_2\overline{u}^2 + \alpha_3\overline{u}^3 + \alpha_4\overline{u}^4 + (\alpha_22\overline{u} + \alpha_33\overline{u}^2 + \alpha_44\overline{u}^3)(u - \overline{u})$$
$$\approx \alpha_2(2\overline{u}u - \overline{u}^2) + \alpha_3(3\overline{u}^2u - 2\overline{u}^3) + \alpha_4(4\overline{u}^3u - 3\overline{u}^4)$$

po podstawieniu do równania modelu otrzymujemy:

$$x_1(k) = (1 - \frac{(T_1+T_2)T_p}{T_1T_2})x_1(k-1) + T_px_2(k-1)$$

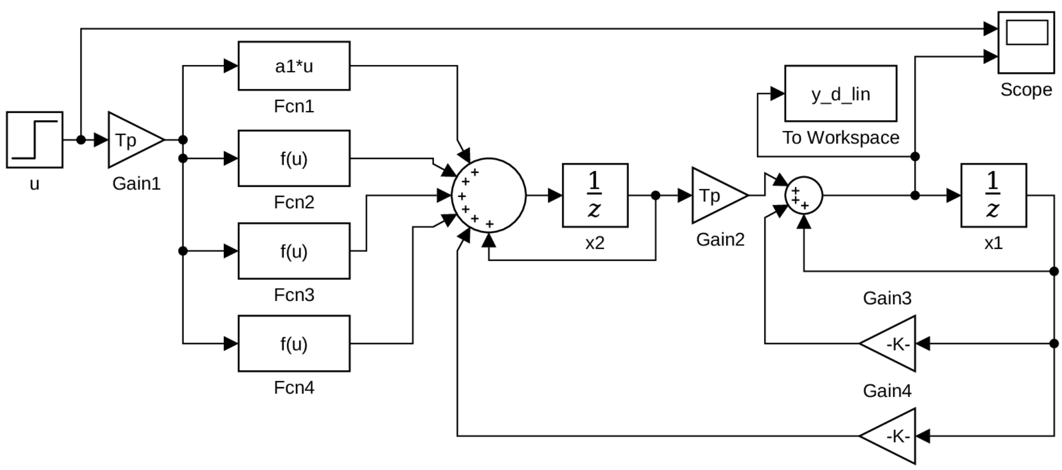
$$x_2(k) = -\frac{T_p}{T_1T_2}x_1(k-1) + x_2(k-1) + T_p(\alpha_1u(k-1) + \alpha_2(2\overline{u}u(k-1) - \overline{u}^2) +$$
$$\alpha_3(3\overline{u}^2u(k-1) - 2\overline{u}^3) + \alpha_4(4\overline{u}^3u(k-1) - 3\overline{u}^4))$$

$$y(k) = x_1(k)$$

Gdzie :

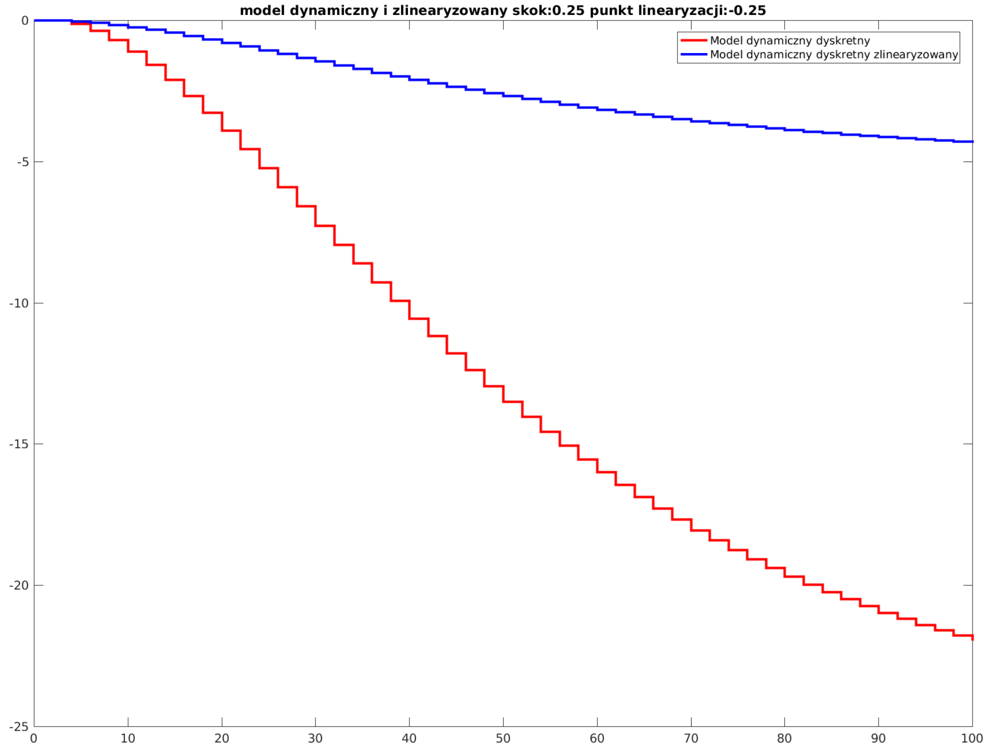
$$K = 5.5, T_1 = 7, T_2 = 7, \alpha_1 = 0.19, \alpha_2 = -0.05, \alpha_3 = -0.95, \alpha_4 = -0.45, T_p \text{ - krok czasowy}$$

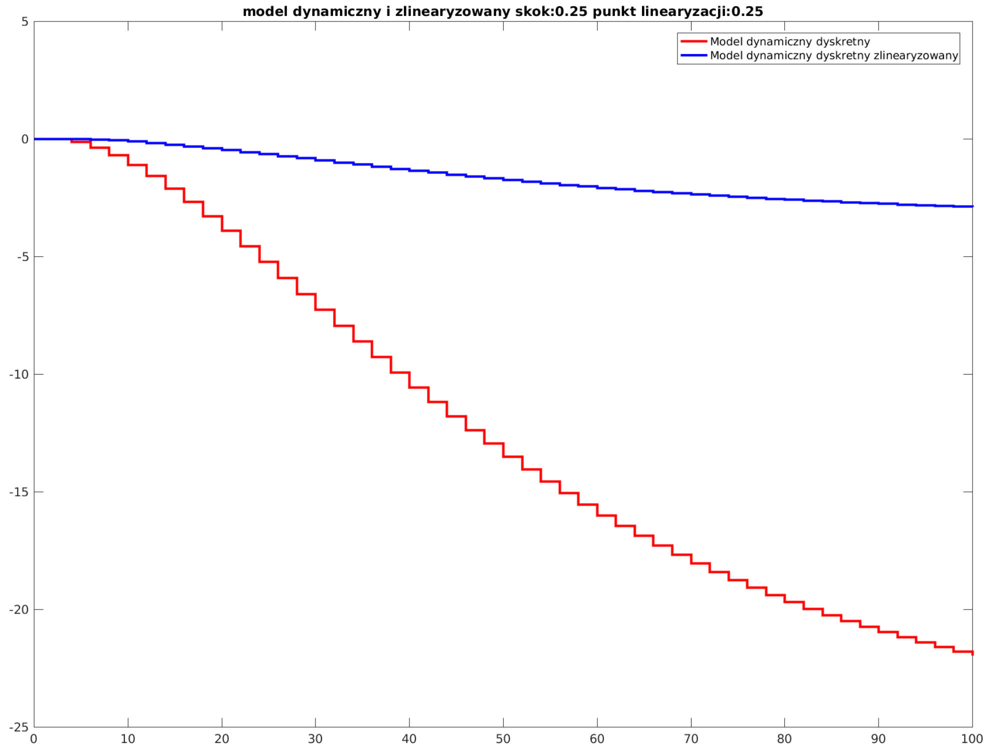
8 Reprezentacja graficzna zlinearyzowanego dynamicznego modelu dyskretnego

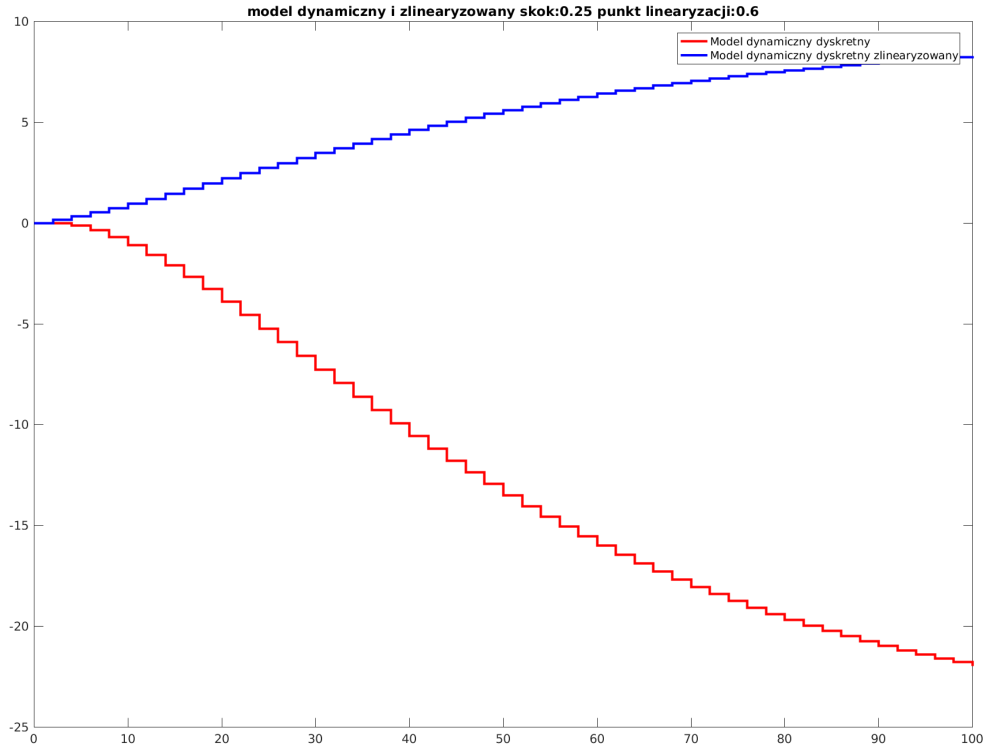


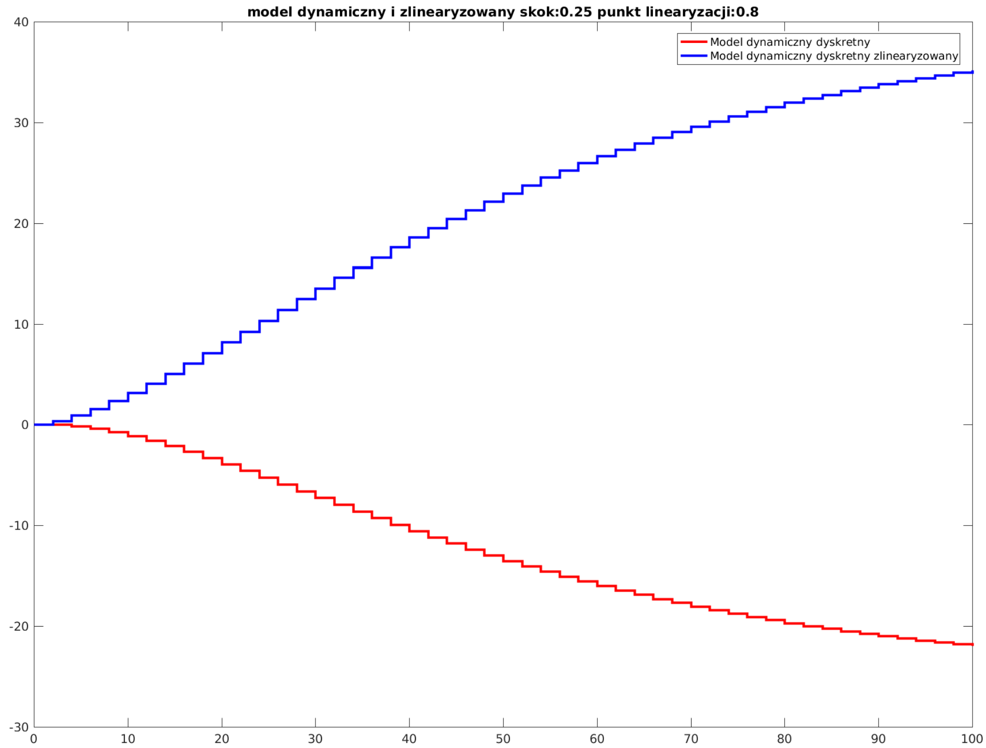
Rysunek 4: Reprezentacja graficzna dynamicznego modelu dyskretnego zlinearyzowanego

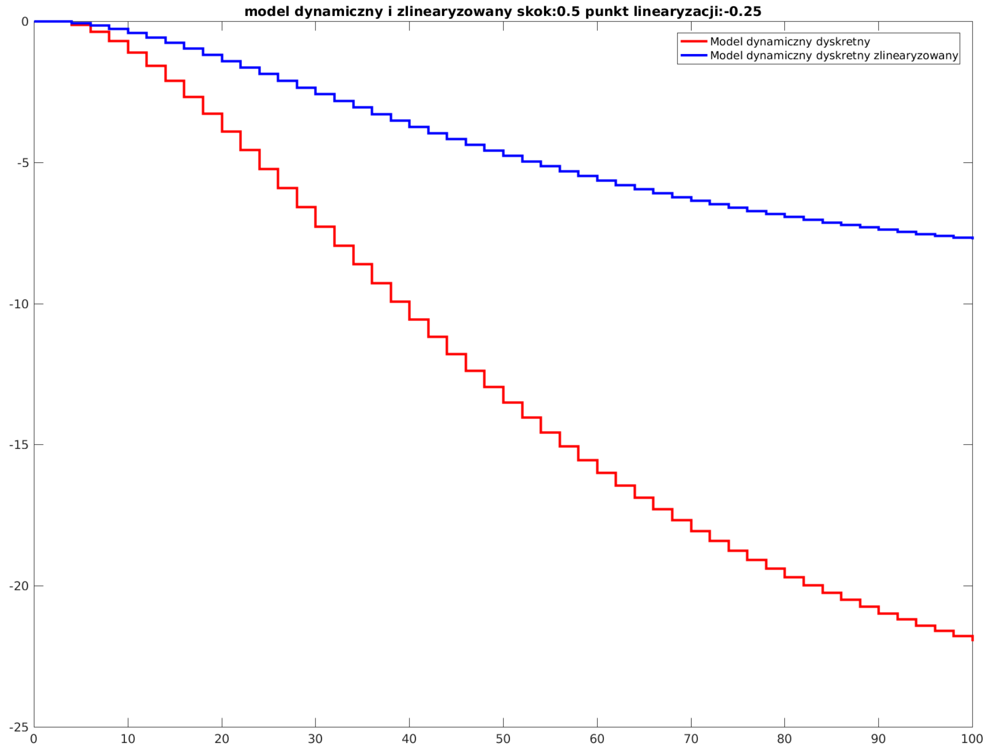
9 Symulacja dynamicznego modelu dyskretnego

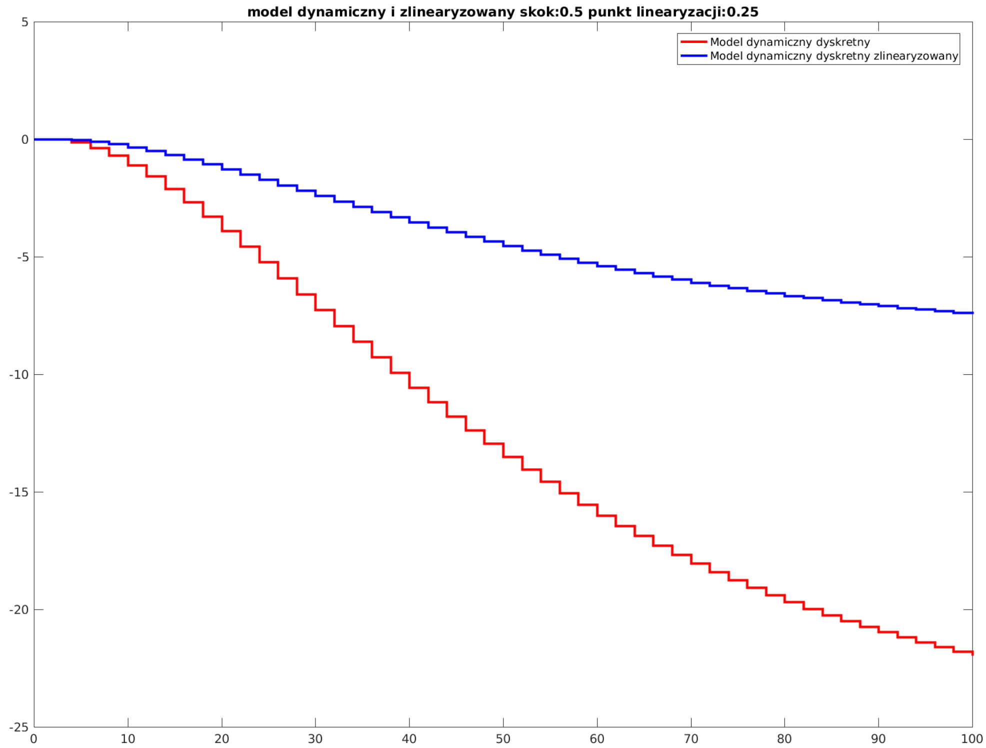


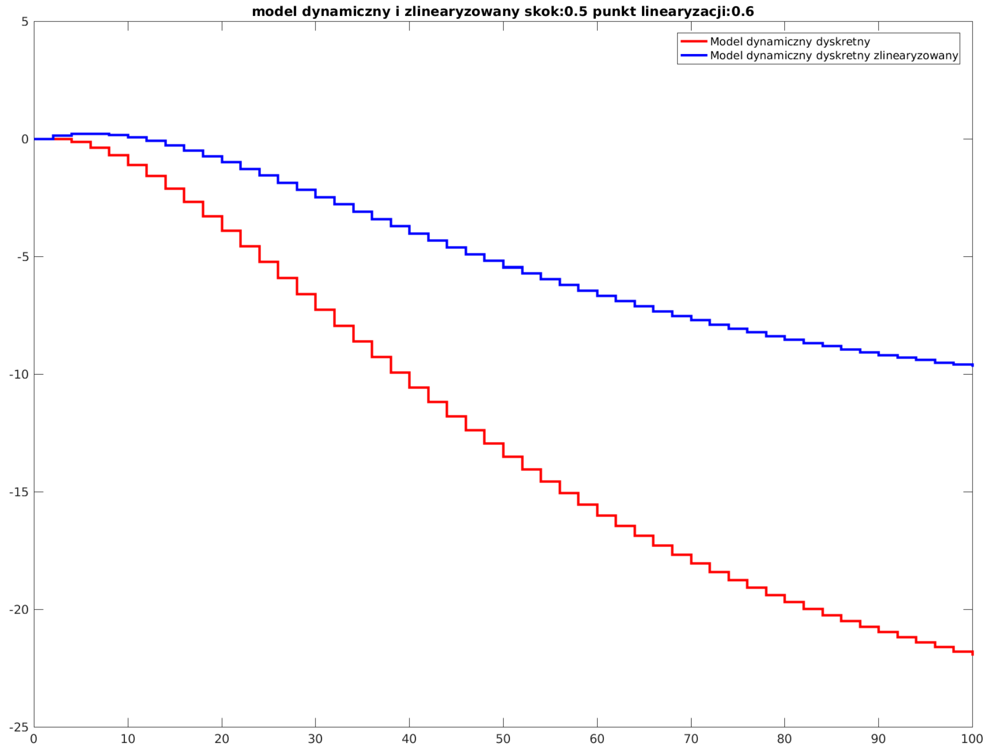


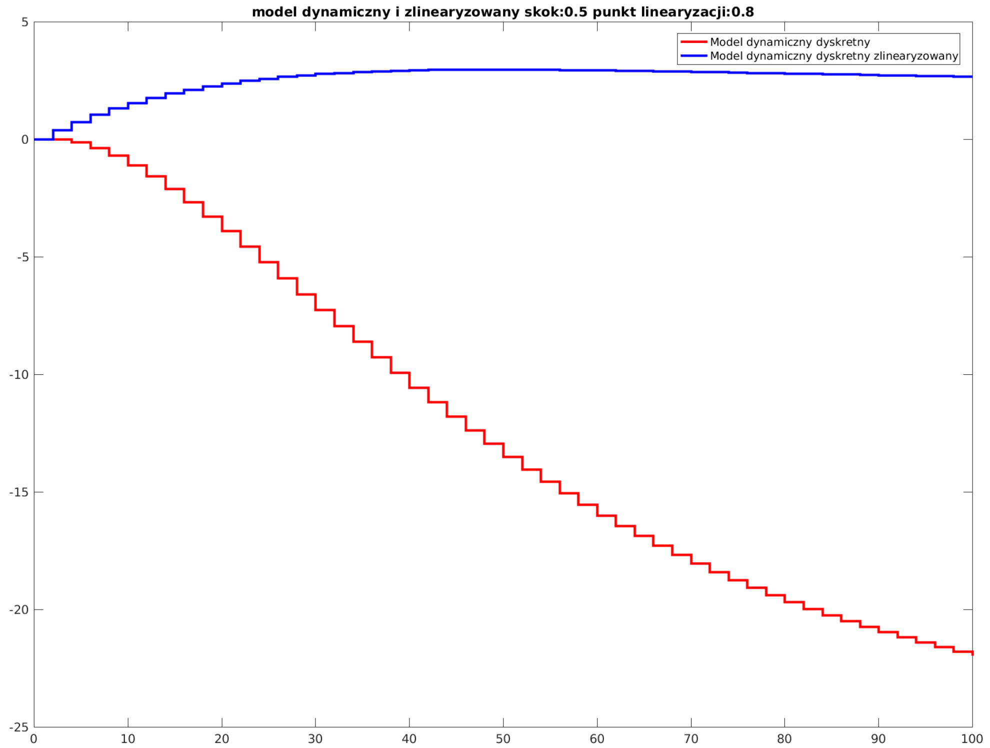

model dynamiczny i zlinearyzowany skok:0.25 punkt linearyzacji:0.6
Model dynamiczny dyskretny
Model dynamiczny dyskretny zlinearyzowany
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

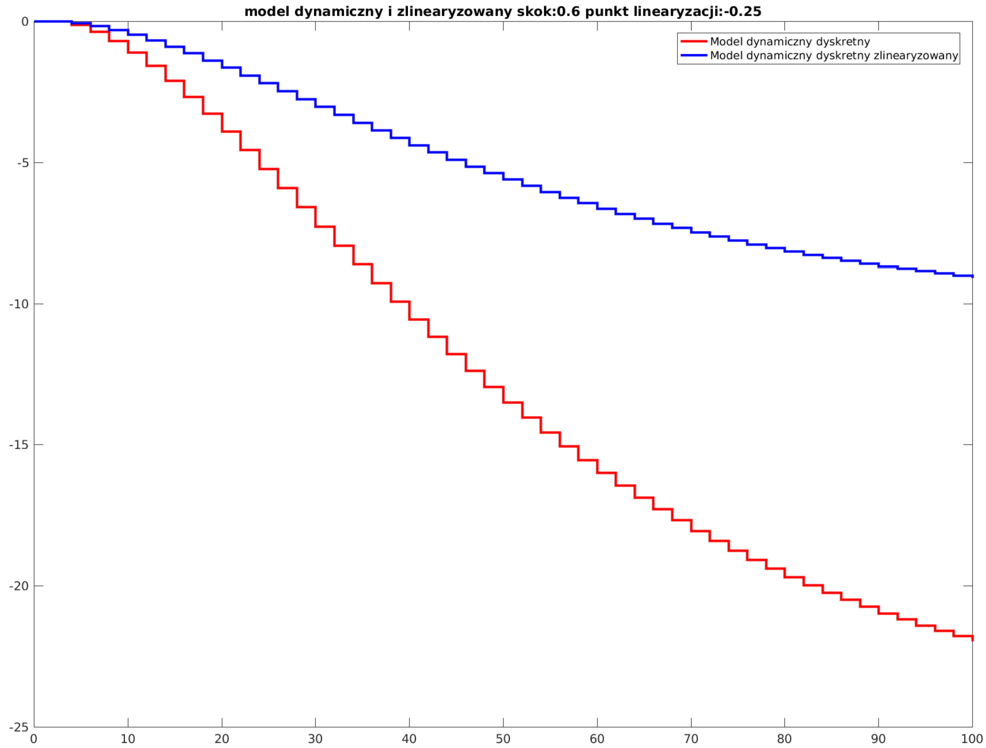

model dynamiczny i zlinearyzowany skok:0.25 punkt linearyzacji:0.8
Model dynamiczny dyskretny
Model dynamiczny dyskretny zlinearyzowany
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

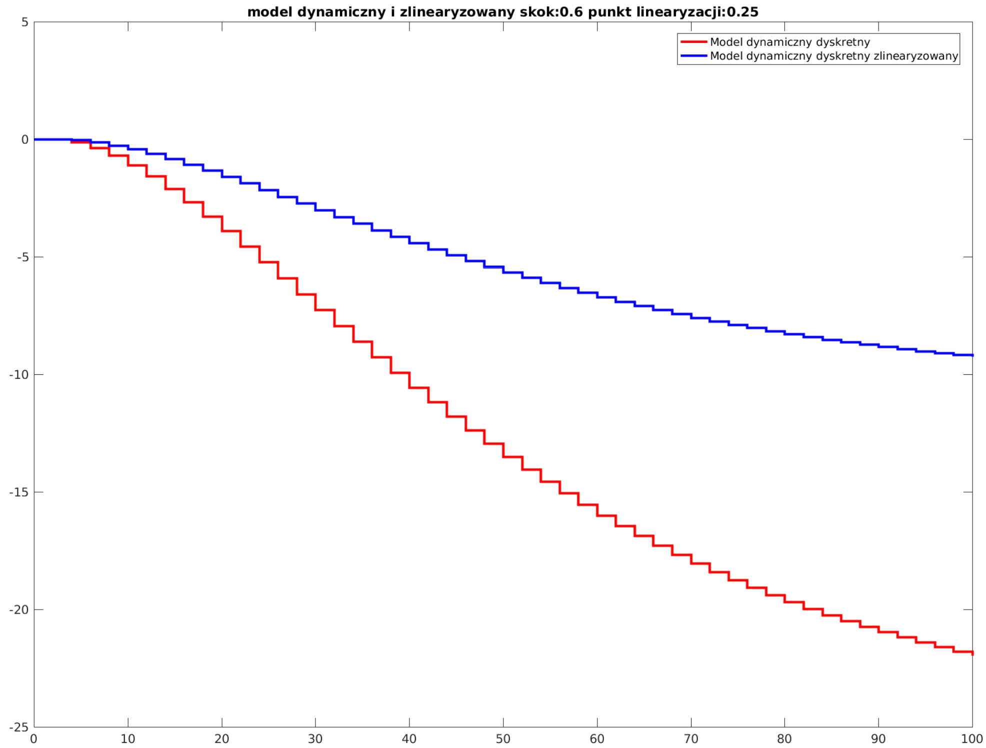

model dynamiczny i zlinearyzowany skok:0.5 punkt linearyzacji:-0.25
Model dynamiczny dyskretny
Model dynamiczny dyskretny zlinearyzowany
0
-5
-10
-15
-20
-25
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

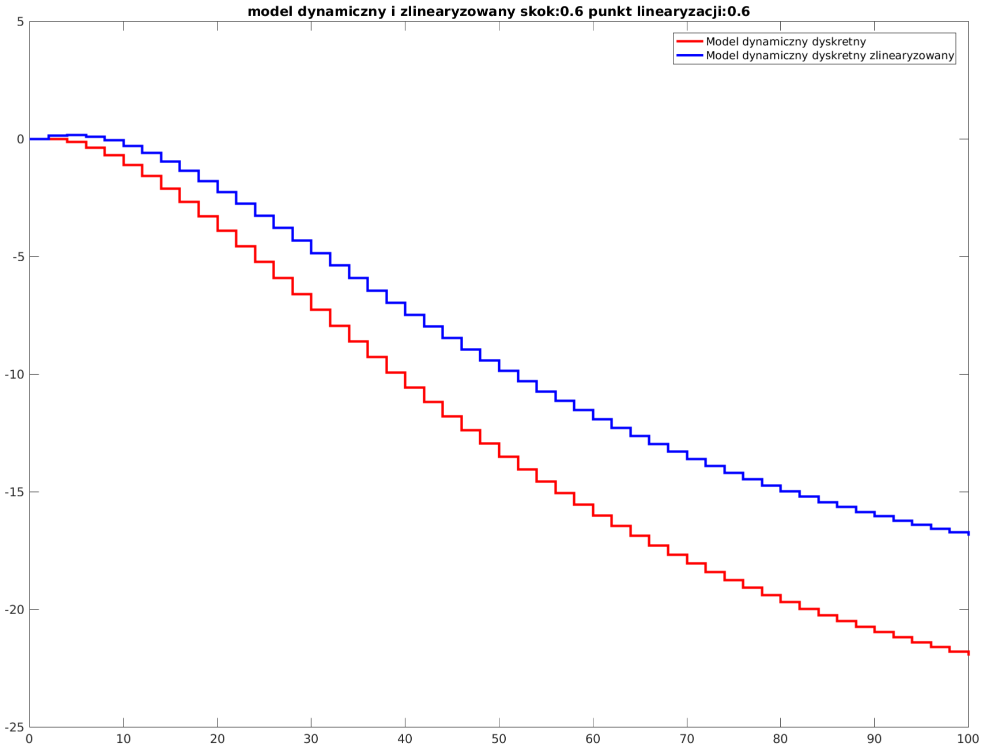

model dynamiczny i zlinearyzowany skok:0.5 punkt linearyzacji:0.25
Model dynamiczny dyskretny
Model dynamiczny dyskretny zlinearyzowany
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

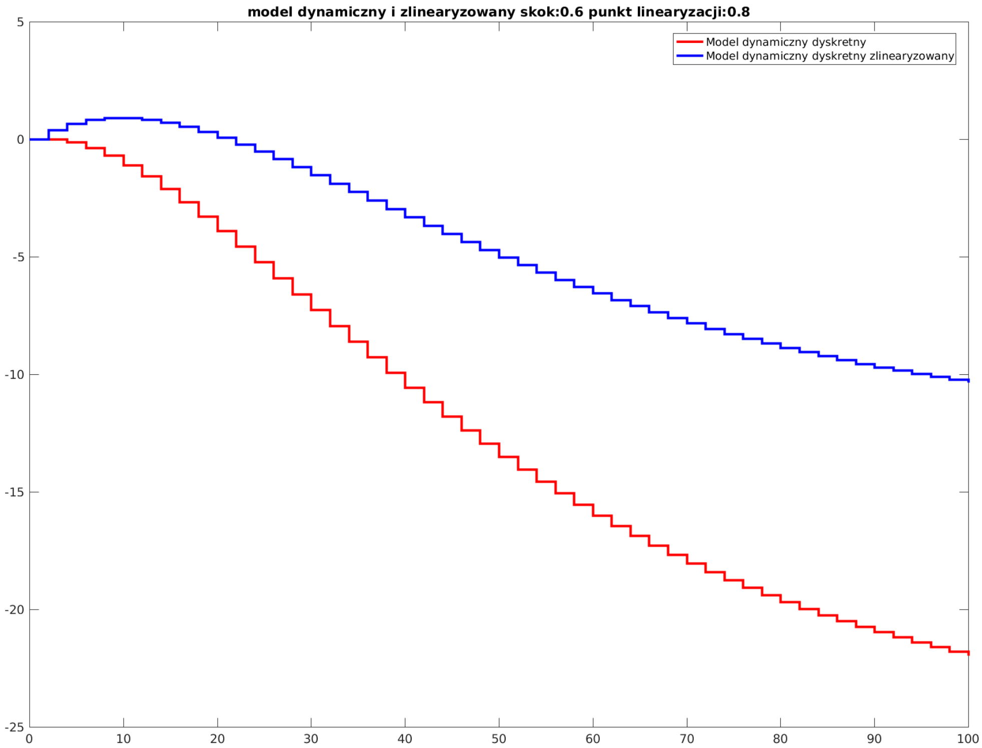

model dynamiczny i zlinearyzowany skok:0.5 punkt linearyzacji:0.6
Model dynamiczny dyskretny
Model dynamiczny dyskretny zlinearyzowany
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

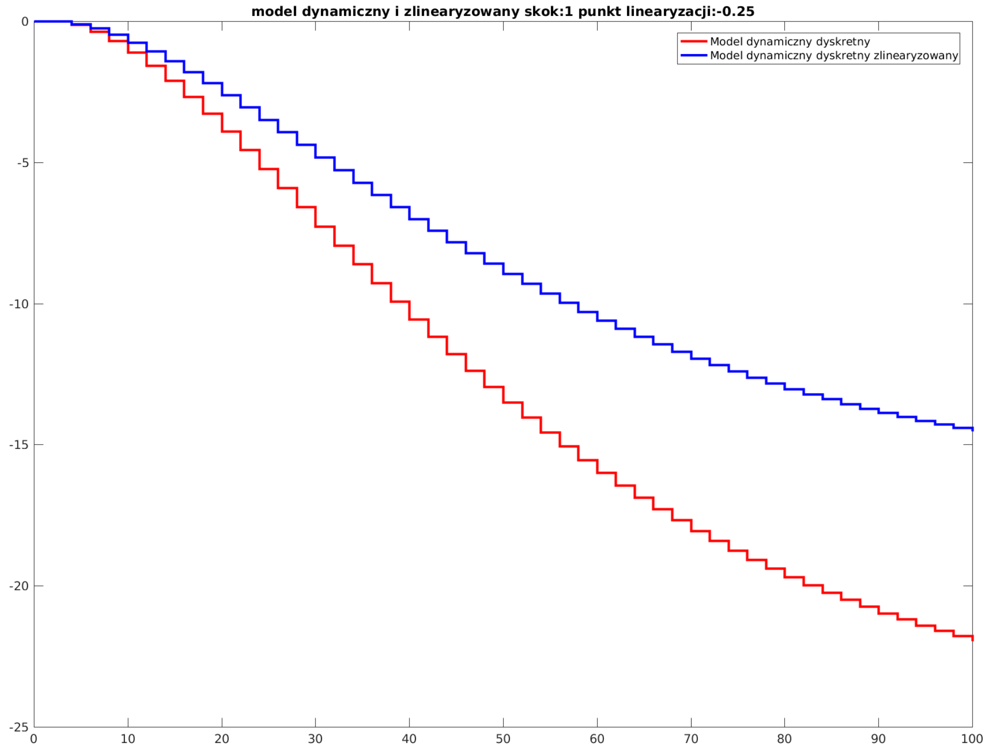

model dynamiczny i zlinearyzowany skok:0.5 punkt linearyzacji:0.8
Model dynamiczny dyskretny
Model dynamiczny dyskretny zlinearyzowany
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

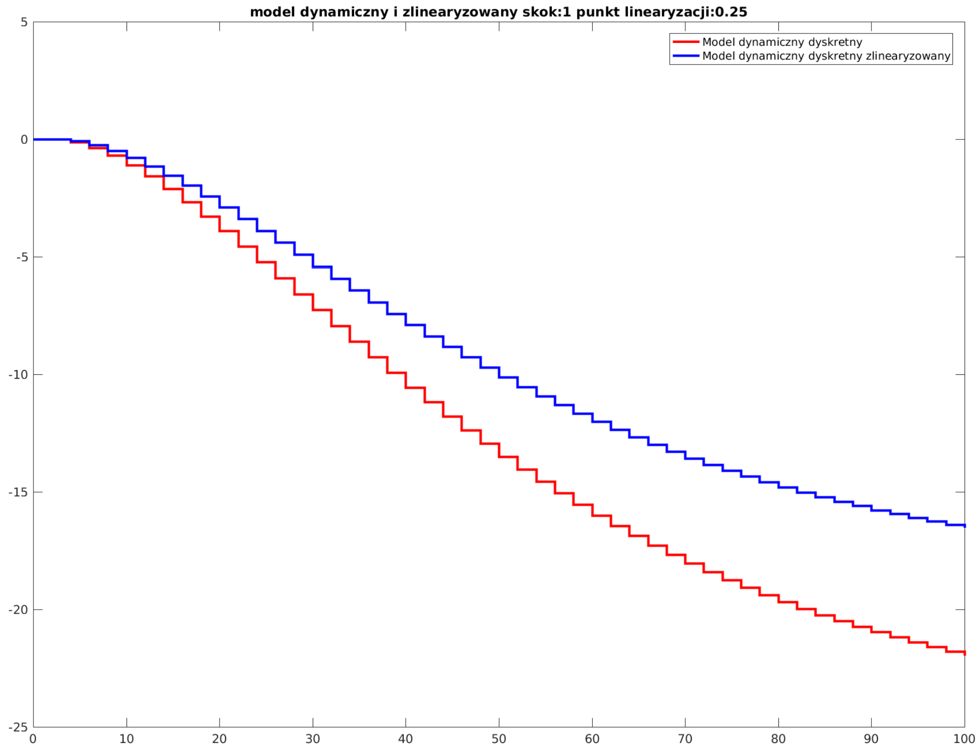

model dynamiczny i zlinearyzowany skok:0.6 punkt linearyzacji:-0.25
Model dynamiczny dyskretny
Model dynamiczny dyskretny zlinearyzowany
0
-5
-10
-15
-20
-25
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

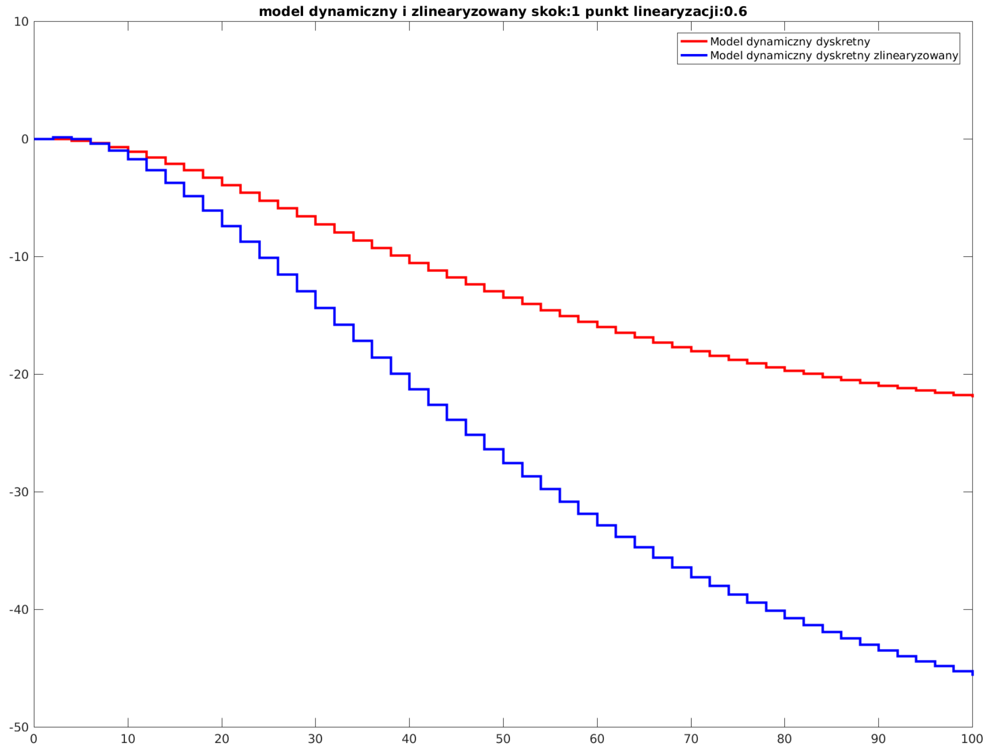

model dynamiczny i zlinearyzowany skok:0.6 punkt linearyzacji:0.25
Model dynamiczny dyskretny
Model dynamiczny dyskretny zlinearyzowany
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

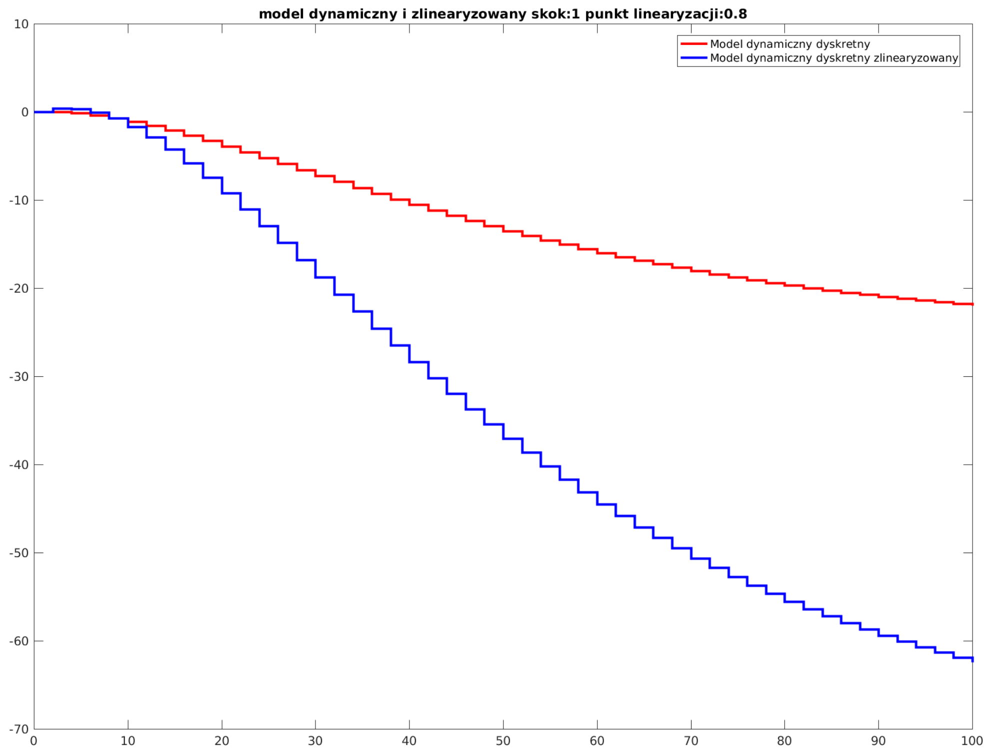

model dynamiczny i zlinearyzowany skok:0.6 punkt linearyzacji:0.6
Model dynamiczny dyskretny
Model dynamiczny dyskretny zlinearyzowany
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100


model dynamiczny i zlinearyzowany skok:0.6 punkt linearyzacji:0.8
Model dynamiczny dyskretny
Model dynamiczny dyskretny zlinearyzowany
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100


model dynamiczny i zlinearyzowany skok:1 punkt linearyzacji:-0.25
Model dynamiczny dyskretny
Model dynamiczny dyskretny zlinearyzowany
0
-5
-10
-15
-20
-25
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100


model dynamiczny i zlinearyzowany skok:1 punkt linearyzacji:0.25
Model dynamiczny dyskretny
Model dynamiczny dyskretny zlinearyzowany
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100


model dynamiczny i zlinearyzowany skok:1 punkt linearyzacji:0.6
Model dynamiczny dyskretny
Model dynamiczny dyskretny zlinearyzowany
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100


model dynamiczny i zlinearyzowany skok:1 punkt linearyzacji:0.8
Model dynamiczny dyskretny
Model dynamiczny dyskretny zlinearyzowany
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

10 Transmitancja zlinearyzowanego dynamicznego modelu ciągłego

Zlinearyzowany dynamiczny model ciągły:

$\dot{x}_1 = -\frac{T_1 - T_2}{T_1 T_2} x_1(t) + x_2(t)$

$\dot{x}_2 = -\frac{1}{T_1 T_2} x_1(t) + \frac{K}{T_1 T_2}(\alpha_1 u(t) + \alpha_2(2\overline{u}u(t) - \overline{u}^2) + \alpha_3(3\overline{u}^2 u(t) - 2\overline{u}^3) + \alpha_4(4\overline{u}^3 u(t) - 3\overline{u}^4))$

$y(t) = x_1(t)$

Po opuszczeniu składowych stałych otrzymyjemy:

$\dot{x}_1 = -\frac{T_1 - T_2}{T_1 T_2} x_1(t) + x_2(t)$

$\dot{x}_2 = -\frac{1}{T_1 T_2} x_1(t) + \frac{K}{T_1 T_2} u(t)(\alpha_1 + 2\alpha_2\overline{u} + 3\alpha_3\overline{u}^2 + 4\alpha_4\overline{u}^3)$

$y(t) = x_1(t)$

Transmitancję obliczymy ze wzoru:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Poszczególne macierze wynoszą:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{T_1+T_2}{T_1T_2} & 1 \\ -\frac{1}{T_1T_2} & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{T_1T_2}(\alpha_1 + 2\alpha_2\overline{u} + 3\alpha_3\overline{u}^2 + 4\alpha_4\overline{u}^3) \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = 0$$

Korzystając z obliczeń symbolicznych pakietu matlab otrzymujemy:

$$G(s) = \frac{K(\alpha_1 + 2\alpha_2\overline{u} + 3\alpha_3\overline{u}^2 + 4\alpha_4\overline{u}^3)}{T_1T_2s^2 + (T_1 + T_2)s + 1}$$

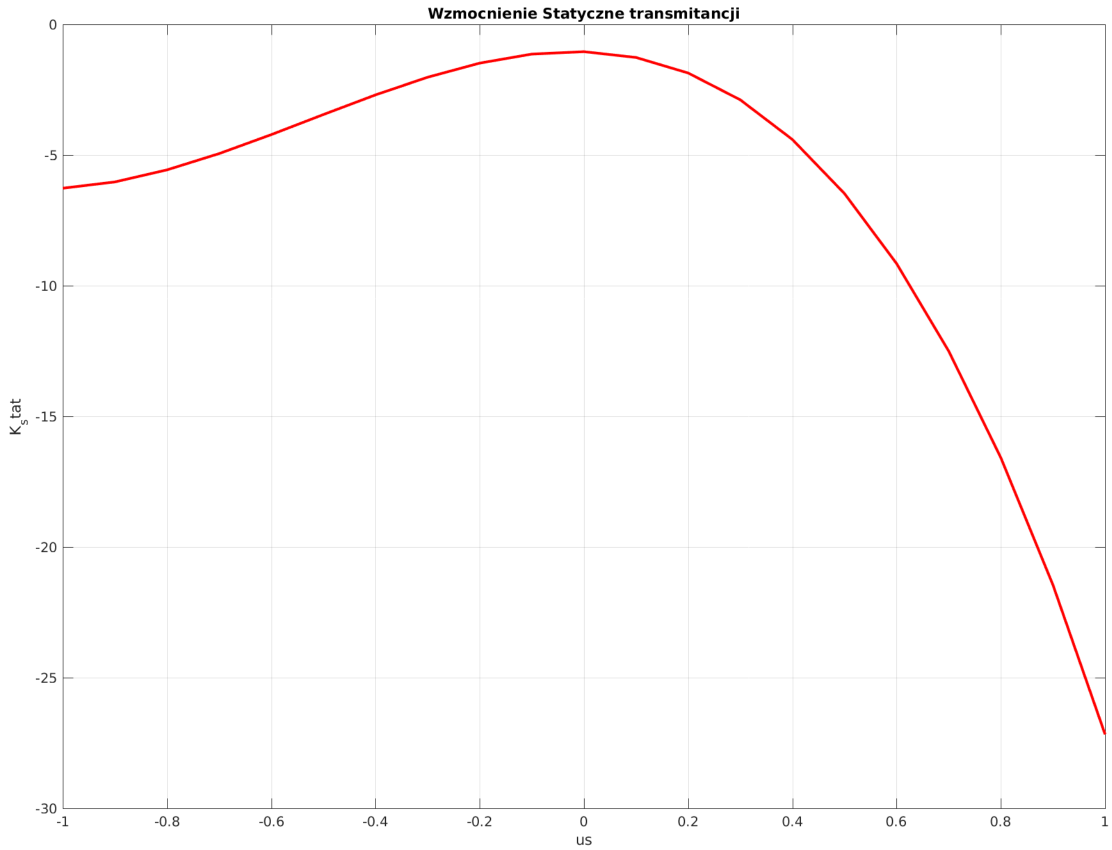
Gdzie :

$K = 5.5, T_1 = 7, T_2 = 7, \alpha_1 = 0.19, \alpha_2 = -0.05, \alpha_3 = -0.95, \alpha_4 = -0.45, \overline{u}$ - punkt linearyzacji

11 Wzmocnienie statyczne transmitancji

$$K_{stat} = \lim_{s \to 0} G(s) = K(\alpha_1 + 2\alpha_2\overline{u} + 3\alpha_3\overline{u}^2 + 4\alpha_4\overline{u}^3)$$

11.1 Wykres wzmocnienia statycznego w zależności od punktu linearyzacji



Rysunek 5: Wykres wzmocnienia statycznego transmitancji w zależności od punktu linearyzacji

12 Sprawdzenie dla modelu ststycznego i dynamicznego

Wzmocnienie statyczne transmitancji odpowiada wzmocnieniu dynamicznego układu zlinearyzowanego, którego odpowiedzi obserwowaliśmy w zadaniu 9. Jak wynika z wykresu wzmocnienia statycznego, dla punktu linearyzacji równego 0.25, K przyjmuje wartość ≈ -2.5 i taką samą wartość przyjmuje sygnał na wyjściu zlinearyzowanego modelu dla punktu linearyzacji równego 0.25 dla sygnału sterującego będącego skokiem jednostkowym do wartości 0.25. Tak samo jest w przypadku innych, wcześniej badanych, punktów linearyzacji. Potwierdza to zgodność wzmocnienia statycznego transmitancji i wzmocnienia dynamicznego układu zlinearyzowanego. Wzmocnienie dynamiczne układu zlinearyzowanego zostało odczytane z wykresu jako wartość funkcji w stanie ustalonym. Dla niektórych wartości sterowania niemożliwe było odczytanie wzmocnienia układu ze względu na zbyt krótki horyzont czasowy symulacji.