LACTU2170 - Financial Valuation of Actuarial Liabilities

Projet réalisé par :

Davy Romaric KAMGA BOPDA,
Yvan Bienevenue, DINOCK DINOCK

Faculté des Sciences

Supervisé par : Donatien Hainaut

Résumé

Ce travail présente le calcul du Best Estimate, c'est-à-dire les flux actualisés et probabilisés, ainsi que des indicateurs de sensibilité tels que la convexité et la duration. Les résultats montrent un BE négatif, ce qui signifie que le montant des prestations attendu est inférieur aux primes collectées. Cette situation est favorable pour l'assureur, traduisant une marge bénéficiaire, et inversement, elle représente une perte pour l'assuré. Par ailleurs, bien que le yield, la duration et la convexité aient été calculés, leurs résultats se sont avérés insatisfaisants, compliquant leur interprétation, probablement en raison de l'hypothèse forte d'un taux de mortalité (μ) instantanément constant.

Table des matières

Introduction

Dans le cadre de leur cursus, les étudiants en sciences actuarielles de l'Université Catholique de Louvain (UCL) suivent le cours «financial valuation of actuarial liabilities» ou «valorisation financière des passifs actuariels». Ce cours leur impose de réaliser divers projets pour lesquels ils doivent proposer des solutions et rédiger un rapport correspondant. Le présent document s'inscrit dans cette démarche.

Le projet présenté ici porte sur le calcul du Best Estimate d'un portefeuille d'assurance-vie ainsi que sur l'analyse de sa sensibilité aux variations du yield. Pour cela, il convient de procéder successivement comme suit :

1. Calculer le prix des obligations d'État belges à partir de leur clean price et des intérêts courus ;
2. Bootstrapper les taux zéro ;
3. Lisser la courbe des taux ;
4. Évaluer la sensibilité des passifs aux variations du yield.

Chaque aspect de ce travail est détaillé dans la section qui lui est dédiée ci-dessous.

Chapitre 1

Estimation de la courbe des taux zéros coupons

Dans cette partie, nous évaluons la meilleure estimation d'un portefeuille d'assurances vie, principalement investi en obligations d'État belges (OLO). Les données utilisées (fournies dans le fichier *DATA.xlsx*) concernent les prix « clean » et servent à déterminer les taux zéro coupon via la méthode du bootstrapping.

1.1 Intérêts courus et Dirty Price

Le fichier **Data.xlsx** présente, dans sa première feuille `OLO_data`, les obligations et leurs caractéristiques suivantes : la date de maturité (*Maturity*), le taux de coupon exprimé en pourcentage du principal (*Coupon Rate*), la date à laquelle l'obligation a été récemment vendue (*Trading Date Time*) et le prix (*Price Clean*). Dans cette question et pour les analyses à venir, la date d'évaluation des obligations est fixée au **10/02/2025**, et le prix nominal est établi à **100**.

L'estimation de la courbe des taux zéros-coupons nécessite de connaitre le prix des obligations à la date d'évaluation. Pour cela, il est au préalable indispensable de calculer les intérêts courus. Par intérêts courrus, il faut entendre la fraction du coupon "implicitement perçu" depuis le paiement du dernier coupon jusqu'à la date d'évaluation. Les intérêts courrus sont donc exprimés au prorata du temps écoulé depuis la date de paiement du dernier coupons jusqu'à la date d'évaluation. Pour cela, une base de calcul doit être choisie. Dans le cadre de ce projet, la base de calcul est "real/real". Cela signifie que le temps écoulé entre deux dates se mesures en nombre de jours effectifs et le nombre de jours d'une année est fixé à 365. La formule de calcul des intérêts couru est la suivante :

- Pour le calcul de l'intérêt couru (*Acc*), nous avons utilisé la formule suivante :

$$\boxed{\boldsymbol{Acc = C \times N \times \left(\frac{Date\_Evaluation - Last\_Coupon\_Date}{365}\right)}}$$

Calcul du Yields désigne la date du dernier paiement effectué avant l'évaluation (10/02/2025). Cette date est déterminée automatiquement à l'aide d'une série de formules Excel qui comparent les mois entre la date d'évaluation et la date de maturité. Cela permet de déterminer l'année appropriée pour la dernière date de paiement du coupon, tout en conservant le jour et le mois de la maturité. Cette information est représentée dans la colonne H du tableau de la feuille `Calcul du Yields`. La formule Excel du calcul du **Last Coupon Date** utilisée est la suivante :

```
=SI(MOIS($F$4)<=MOIS(D7);
DATE(ANNEE($F$4)-1;MOIS(D7);JOUR(D7));
DATE(ANNEE($F$4);MOIS(D7);JOUR(D7)))
```

• Le calcul du Dirty price est déterminé à partir des intérêts courus (Acc) et du Clean price ($Clean\ price$) à l'aide de la formule suivante : $Dirty\_Price = Clean\_price + Acc$

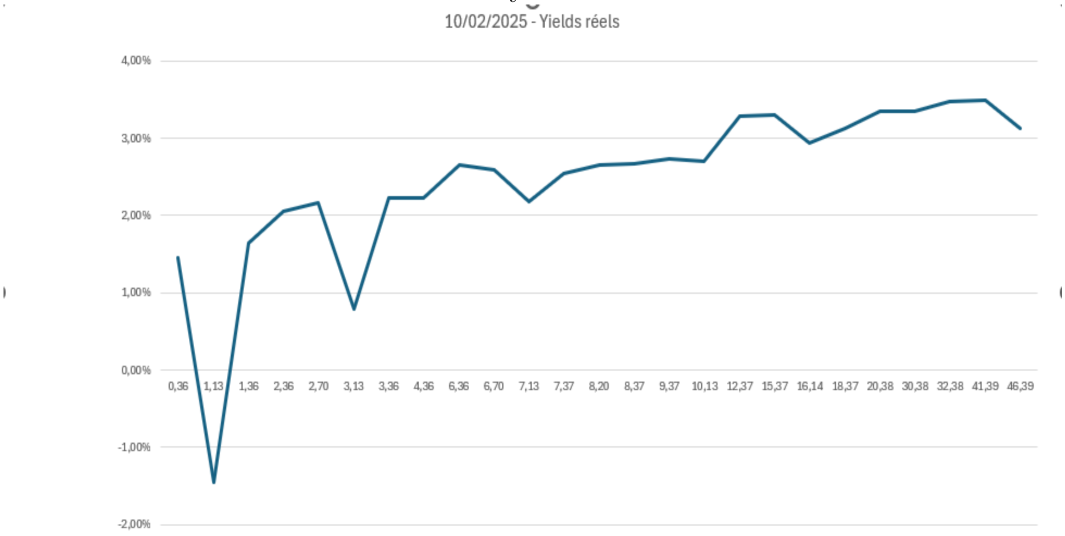
1.2 Rendements des obligations ou yields

Le calcul du rendement (yield) a été réalisé en utilisant la fonction financière d'Excel `RENDEMENT.TITRE`. Les paramètres de la fonction sont les suivants :

1. **Liquidation** : correspond à la date d'évaluation des obligations (cellule F4) ;
2. **Échéance** : correspond à la date de maturité des obligations ;
3. **Taux** : représente le taux du coupon en pourcentage du prix nominal (N) ;
4. **Valeur nominale** : correspond au prix nominal (N = 100) ;
5. **Valeur d'échéance** : correspond au prix actuel des obligations, qui est le prix brut (Dirty price) dans notre cas ;
6. **Fréquence** : indique le nombre de paiements de coupons par an. Si le paiement est annuel, la fréquence = 1 ; s'il est semestriel, la fréquence = 2 ; et s'il est trimestriel, la fréquence = 4. Dans notre cas, la fréquence est annuelle.
7. **Base** : représente le type de base de comptage des jours à utiliser (1 = "Réel/Réel").

Les rendements ainsi calculés sont présentés dans la colonne `yields` de la feuille `Calcul du Yields`. Le graphique (1.1) illustre les rendements en fonction de la maturité. On constate que, de manière générale, les rendements des obligations augmentent avec la maturité. Cette tendance peut s'expliquer par le fait que les investisseurs exigent une prime en raison de : (i) l'inflation future, (ii) le report de la consommation, (iii) les coûts d'opportunité liés à d'autres investissements potentiels, et (iv) diverses incertitudes associées à des horizons temporels plus éloignés. De plus, on observe également que pour les obligations à court et moyen terme (environ 4 ans et moins), les rendements sont très volatils. Cette volatilité est due au risque de taux qui affecte les obligations d'État à court-moyen terme.

Figure 1.1 – Évolution des yields en fonction de la maturité



Source : Nos travaux.

1.3 Lissage de la courbe des rendements par le modèle de Svensson

L'estimation de la courbe des taux zéros-coupons demande de disposer d'une courbe de rendements permettant des calculs pour n'importe quelle maturité et donc valable pour des maturités entières. Afin de lisser la courbe des rendements, le modèle de Svensson a été adopté. Il s'agit d'un modèle à 6 paramètres $(b_0, b_{10}, b_{11}, c_1, b_{21}, c_2)$ qui se présente comme suit :

$$\text{yields}(t) = b_0 + \frac{1}{t}\frac{b_{10}}{c_1}\left(1 - e^{-c_1 t}\right) + \frac{1}{t}\frac{b_{11}}{c_1^2}\left(1 - (c_1 t + 1)e^{-c_1 t}\right)$$
$$+ \frac{1}{t}\frac{b_{21}}{c_2^2}\left(1 - (c_2 t + 1)e^{-c_2 t}\right)$$

Afin de lisser la courbe des rendements à l'aide du modèle paramétrique de Svensson, on fait appel au solveur Excel.La méthodologie est donné ci dessous :

1.3.1 Méthodologie

L'objectif consiste à identifier les paramètres optimaux b_0, b_{10}, b_{11}, c_1, b_{21} et c_2 en minimisant l'erreur quadratique moyenne entre les rendements observés et ceux générés par le modèle.

Les rendements des obligations cotées sur le marché servent de base pour calibrer la courbe. Le problème d'optimisation, réalisé à l'aide du Solveur d'Excel, s'exprime comme suit :

$$\min_{(b_0, b_{10}, b_{11}, c_1, b_{21}, c_2) \in \mathbb{R}^6} \sqrt{\frac{1}{30} \sum_{t=1}^{30} (yield_{modele,t} - yield_{reel,t})^2}$$

où $yield_{modele,t}$ désigne les taux d'intérêt estimés via la formule de Svensson, et $yield_{reel,t}$ représente les taux d'intérêt observés.

1. **Préparation des données** : Mise en place d'un tableau Excel comprenant les maturités, les rendements observés ainsi qu'une colonne dédiée aux rendements calculés par le modèle de Svensson.
2. **Initialisation des paramètres** : Définition des cellules variables initiales correspondant aux paramètres du modèle, situées dans les cellules S2 à S6 de la feuille `Modele de Svensson`, avec leurs valeurs initiales indiquées dans les cellules adjacentes en T. Ainsi, les paramètres sont initialisés par $b_0 = 2$; $b_{10} = b_{11} = c_1 = b_{21} = c_2 = 0.01$.
3. **Application de la formule de Svensson** : Utilisation de la formule pour calculer les rendements estimés en fonction des maturités.
4. **Calcul de l'erreur quadratique moyenne** : Évaluation de l'écart entre les rendements observés et ceux estimés.
5. **Optimisation avec le Solveur Excel** : Minimisation de l'erreur quadratique moyenne en ajustant les paramètres du modèle à l'aide de la méthode **GRG non linéaire**.

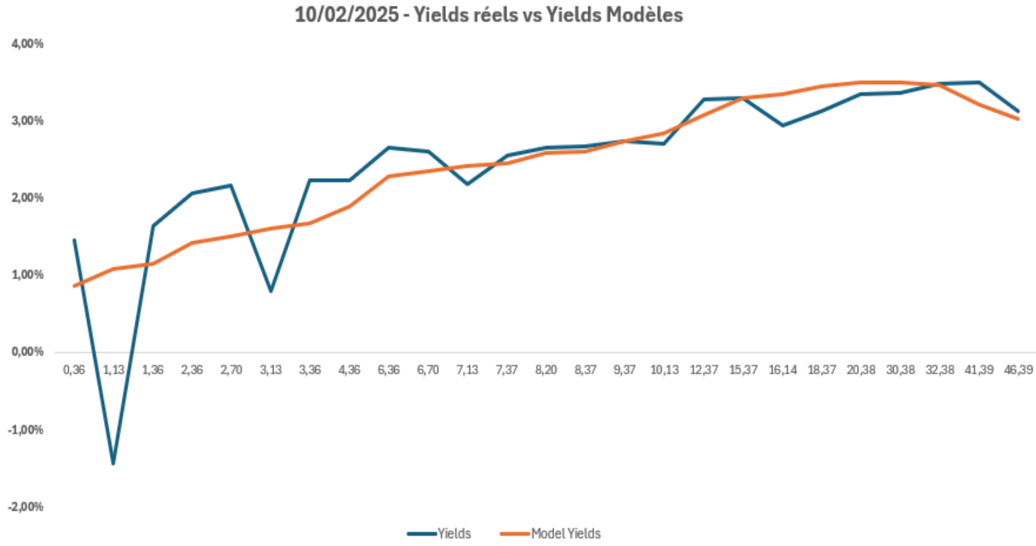
Le solveur modifie ainsi les valeurs des cellules variables jusqu'à ce que la somme des carrés des écarts entre rendements réels et rendements lissés soit minimale. Les paramètres obtenus sont les suivants :

TABLE 1.1 – Paramètres optimaux de la courbe de Svensson

Paramètres	**Valeurs estimées**
b_0	-0,00797774
b_{10}	0,015372789
b_{11}	0,006131204
c_1	0,060530801
b_{21}	0,001166049
c_2	0,060639574

La figure (1.2) illustre que les **rendements réels** (en bleu) et les **rendements modélisés** (en orange) tendent à converger pour des maturités plus longues. Cela suggère que le modèle de Svensson présente de meilleures performances sur le long terme, puisque ses ajustements deviennent plus fluides sur une période prolongée.

Figure 1.2 – Évolution des Yields en fonction de la maturité



Source : Nos travaux.

1.4 Bootstrapping des taux zéro-coupon ou spots

Le bootstrapping des rendements permet d'obtenir les taux spots indispensables au calcul du Best Estimate des passifs d'assurance. Pour réaliser ce bootstrapping, on commence par calculer les rendements pour des maturités entières à partir du modèle de Svensson ajusté précédemment, puis on en déduit les taux zéros-coupons.

Dans la feuille `Calcul des Spot(Boostrap)`, les cellules C1 à C31 affichent les rendements pour les maturités indiquées en B1 à B31, ces rendements étant obtenus selon le modèle de Svensson. Les taux spots bootstrappés se trouvent dans les cellules D1 à D31.

Dans l'algorithme de bootstrapping utilisé, on suppose que le yield issue de la question précédente est égale au coupon à chaque période, ce qui permet d'imposer un prix égal au principal (N). L'algorithme de calcul est défini comme suit :

Pour $T = 1$, on a

$$s(1) = y(1).$$

Pour T allant de 2 à 30, l'algorithme s'exprime par

$$s(T) = \left[\frac{1 + y(T)}{1 - y(T) \times \left(\sum_{k=1}^{T-1} \frac{1}{(1+s(k))^k} \right)} \right]^{1/T} - 1.$$

La formule Excel, appliquée de façon récursive dès T=2 pour déterminer les taux spot, s'énonce comme suit :

```
= ((1 + C3) / (1 - C3 * SOMMEPROD(1 / (1 + D$2:D2) ^ (B$2:B2)))) ^ (1 / B3) - 1
```

Les résultats des calculs sont présentés dans le tableau (1.2) suivant :

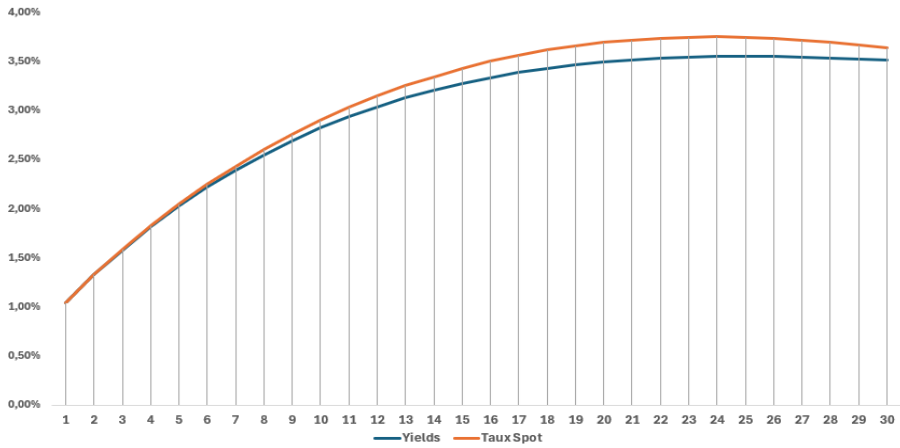
TABLE 1.2 – Taux spots

Maturité	Yields	Taux Spot
1	1,04%	1,04%
2	1,32%	1,33%
3	1,58%	1,58%
4	1,81%	1,82%
5	2,02%	2,04%
6	2,22%	2,24%
7	2,39%	2,43%
8	2,55%	2,60%
9	2,69%	2,76%
10	2,82%	2,90%
11	2,93%	3,03%
12	3,03%	3,14%
13	3,12%	3,25%
14	3,20%	3,34%
15	3,27%	3,43%
16	3,33%	3,50%
17	3,38%	3,56%
18	3,43%	3,61%
19	3,46%	3,66%
20	3,49%	3,69%
21	3,51%	3,72%
22	3,53%	3,73%
23	3,54%	3,75%
24	3,55%	3,75%
25	3,55%	3,74%
26	3,55%	3,73%
27	3,54%	3,72%
28	3,53%	3,69%
29	3,52%	3,67%
30	3,51%	3,63%

Source : Nos travaux.

La courbe (1.3) ci dessous montre comment évoluent les taux spot et les yields en fonction de la maturité des obligations. On constate que les deux courbes croissent, ce qui signifie que les rendements s'accroissent avec la maturité. Cela correspond à la théorie financière, selon laquelle les investisseurs demandent des rendements plus élevés pour compenser le risque accru lié à des horizons plus longs. Par ailleurs, l'analyse révèle que les taux spot (en orange) se situent toujours au dessus des yields (en bleu), ce qui est en accord avec l'intuition.

FIGURE 1.3 – Evolution du spot et yields en fonction de la maturité



Source : Nos travaux.

Chapitre 2

Mesure de la sensibilité du Best Estimate (BE) à des variations légères du yield

Dans cette partie, il est question de mesurer la sensibilité du BE à des variations légères de son yield. Pour cela, il est d'abord question de calculer le BE à partir des flux financiers et des taux spots boostrapés. Ensuite, il s'agira de calculer la duration modifiée et la convexité du BE et faire une petite analyse de sensibilité.

2.1 Pondération de la prime et des Cash-flows vie et décès et calcul du Best Estimate

Dans cette section, nous cherchons à calculer les prestations (vie et décès) ainsi que les primes actualisées et probabilisées, afin d'en déduire le Best Estimate qui correspond à la somme des flux actualisés aux différents taux spots. Le Best Estimate est donné par :

$$BE = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(1+s(k))^k} \, {}_kp_x \left(c_k - \pi_k + d_k^b \, q_{x+1}\right).$$

Ici, d_k^b est ramené à la période entière grâce au taux forward, selon la formule

$$d_k^b = d_k \, \frac{1}{\big(1+F(k,k+1)\big)^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{pour } k = 1, \ldots, n-1,$$

et avec $d_n^b = 0$.

La feuille `Calcul du Best Estimate` détaille le calcul des différents flux et des primes actualisées et probabilisées. Voici la description du tableau :

1. **Colonne C :** `Survival probabilities (tPx)` présente la probabilité de survie, définie par la formule ${}_tp_x = 1 - \exp(-t\mu)$.

2. **Colonne D :** `Probability of death (qx+k)` présente le calcul du taux de décès, avec la formule $q_{x+k} = 1 - \exp(-\mu)$, qui reste constant quel que soit l'âge.
3. **Colonne E :** `Spot rate (s_k)` présente les taux spots calculés à la question précédente, récupérés à l'aide de la fonction `RECHERCHEV` d'Excel. .
4. **Colonne F :** `Forward rate (F(k,k+1))` contient le calcul des taux forward.
5. **Colonne J :** `Calcul de d_k b` présente le calcul de d_k^b.
6. **Colonne K :** `(qx+k*d_kb̂)` présente le produit $d_k^b \times q_{x+k}$.
7. **Colonne L :** `Cash flows` présente le calcul des flux financiers via la formule ${}_kp_x\big(c_k - \pi_k + d_k^b\, q_{x+1}\big)$.
8. **Colonne M :** `Cash flows actualisé au taux spot` présente l'actualisation de ces flux aux taux spots.

La cellule M26 affiche le Best Estimate, qui s'élève à $\boxed{BE = -142379,108920195}$

2.2 Calcul du Yield, de la Duration Modifiée et de la Convexité

• **Calcul du Yields :** Le Yield est défini comme le taux qui vérifie la relation suivante :

$$BE(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(1+y)^k}\, {}_kp_x\left(c_k - \pi_k + d_k^b\, q_{x+1}\right)$$

Pour ce calcul, on utilise la colonne L (`Cash flows`) ainsi que le Best Estimate obtenu précédemment. Grâce à la fonction `TRI` d'Excel, qui calcule le taux de rendement interne d'une série de flux de trésorerie se produisant à intervalles réguliers, le Yield est déterminé. La valeur obtenue est affichée dans la cellule M28 et vaut $\boxed{yields = -27.29\%}$.

• **Calcul de la duration modifiée** : La duration modifiée est calculée à partir de la formule suivante :

$$D_{mod} = \frac{1}{BE(y)(1+y)} \sum_{k=0}^{n} k\, \frac{1}{(1+y)^k}\, {}_kp_x\left(c_k - \pi_k + d_k^b\, q_{x+1}\right)$$

Pour ce calcul dans la feuille `Calcul de la Duration+Convexite` a été crée, une colonne intermédiaire a été créée, nommée `(Cash flows actualisé au taux Yields)*k`, qui reprend le calcul des flux de la colonne L actualisés au Yield, multiplié par la période k. Le résultat final est affiché dans la cellule M30, correspondant à la somme de cette colonne multipliée par l'inverse de $BE(y)(1+y)$. La valeur numerique de la duration (D_{mod}) vaut $\boxed{D_{mod} = 102.91}$

• **Calcul de la convexité** : La convexité est déterminée à partir de la formule suivante :

$$C = \frac{1}{BE(y)(1+y)^2} \sum_{k=0}^{n} k(k+1)\, \frac{1}{(1+y)^k}\, {}_kp_x\left(c_k - \pi_k + d_k^b\, q_{x+1}\right)$$

Pour ce calcul, une colonne intermédiaire (O) a été créée, nommée `(Cash flows actualisé au taux Yields)*k*(k+1)`, qui calcule pour chaque période le terme

$$k(k+1)\,\frac{1}{(1+y)^k}\,{}_kp_x\left(c_k - \pi_k + d_k^b\,q_{x+1}\right).$$

Le résultat final est stocké dans la cellule M32, correspondant à la somme de cette colonne multipliée par l'inverse de $BE(y)(1+y)^2$, et vaut $C = 5192.0733$. La synthèse des résultats est résumée dans le tableau ci-dessous :

TABLE 2.1 – Synthese des resultats

Coefficients	**Valeur numérique**
$Yields$	-27.29%
D_{mod}	102.91
C	5192.0733

2.3 Estimation de la variation dy BE pour une variation d'un point du yield

Les estimations faites précédemment pour obtenir la duration et la convexité s'inscrivent dans une logique mathématique d'approximation. En effet, il est connu que toute fonction une fois dérivable en un point peut être approximée au voisinage de ce point par un polynome de degré 1. Si la fonction est 2 fois dérivable alors elle peut y être approximée par un polynome de degré 2. La duration modifiée et la convexité qui sont des dérivées logarithmiques première et seconde du BE permettent donc d'approximer le taux de variation du BE en fonction de la variation du yield.

En utilisant uniquement la duration modifiée, D_{mod}, une approximation du taux de variation du BE est donnée par :

$$\frac{BE(y+\Delta y) - BE(y)}{BE(y)} = -D_{mod}(y)\Delta y$$

Pour une duration modifiée de 102.91 et une variation du yield de $+1\%$, une variation relative du BE est donc approximativement -102.91%. En utilisant la duration modifiée et la convexité, la formule d'approximation devient :

$$\frac{BE(y+\Delta y) - BE(y)}{BE(y)} = -D_{mod}(y)\Delta y + \frac{1}{2}C(\Delta y)^2$$

En l'appliquant, on obtient une variation relative approximée de -76.96%.Il faut donc comparer ces valeurs au taux de variation réel du BE afin d'apprécier la qualité des approximations.

Afin d'obtenir le BE en $y + \Delta y$, l'on réestime le BE à partir des taux spot corrigés de $\forall k \ \Delta S(k) = \Delta y$. En effet, un déplacement de la courbe des yields de Δy traduit un déplacement de la courbe des spots d'une même ampleur. Dans la feuille `Variation de BE`, les contenus des cellules P5 :P24 sont obtenues d'une manière similaires à ceux des cellules M5 :M24 permettant le calcul du BE aux conditions initiales sauf que cette fois les taux augmentent de $\Delta y = +1\%$. La somme de ces valeurs qui donne le BE en $y + 1\%$ est contenue dans la cellule L36. Le taux de variation réel est quant à lui contenu dans la cellule L37 et vaut -0.97%.

D'une manière similaire au cas $\Delta y = 1\%$, l'on approxime le taux de variation du BE par les mêmes formules en remplaçant simplement $\Delta y = +1\%$ par $\Delta y = -1\%$. Cette fois-ci les flux actualisés aux taux spots corrigés sont contenus dans les cellules Q5 :Q24. Avec $\Delta y = -1\%$, le taux de variation approximé du BE est 102.92% si l'on utilise uniquement la duration modifiée et 128.88% en combinant duration modifiée et convexité. Le taux de variation réel quant à lui, obtenu d'une manière similaire à la précédente donne -2.49%. Le tableau ci-dessous récapitule les résultats des calculs.

Table 2.2 – Synthèse des résultats d'approximation de $\frac{\Delta BE}{BE}$

Taux act.	**BE**	**Var. rel. réelle**	$-D_{mod}\Delta y$	$-D_{mod}\Delta y + C\frac{(\Delta y)^2}{2}$
ZC+1%	-140,993.66	-0.97%	-102.92%	-76.96%
ZC-1%	-138,828.4181	-2.49%	102.92 %	128.88%

Chapitre 3

Conclusion

Le calcul du Best Estimate occupe une place centrale dans la pratique actuarielle des compagnies d'assurance. Il permet aux compagnies (d'assurance) dans un premier temps de connaitre leurs passifs aux taux de marché ce qui leur permet d'apprécier l'écart avec ce même passif évalué aux conditions technique i.e. aux engagements contractuels. Dans un second lieu, le BE est une directive de la norme solvabilité II que les entreprises d'assurance européennes se doivent de respecter.

L'estimation du BE demande de connaitre la structuration de l'actif de la compagnie. Dans le cas présent, la commagnie investit majoritairement dans les obligations d'Etat belges. Aussi, ce sont ces obligations qui ont permis de base pour le calcul par bootstrap des taux spots indispensables pour le calcul du BE qui s'élève à **-142.379,109** euros pour un yield correspondant de **-27,29%**.

L'analyse de la sensibilité du BE aux variations du yield donne cependant des résultats mitigés. Par exemple, dans le cas d'une variation de yield $\Delta y = +1\%$, alors que l'on obtient par approximation notamment grâce à la duration modifiée une variation du BE de l'ordre 102.92%, la variation réelle s'établit quant à elle aux alentours de 0.97%. Cette inadéquation implique d'une part de réviser les hypothèses d'estimation notamment celle sur la mortalité indiquant que le risque de mortalité est constant sur une période de 20 ans.