



## **LACTU2170 - Financial Valuation of Actuarial Liabilities**

**Projet réalisé par :**

Davy Romaric KAMGA BOPDA,  
Yvan Bienvenue, DINOCK DINOCK

**Faculté des Sciences**

**Supervisé par :** Donatien Hainaut

## Introduction

Cette étude porte sur l'évaluation d'un produit financier en utilisant trois méthodes de pricing : l'arbre binomial, la simulation de Monte Carlos, et l'analyse des rendements de deux actifs corrélés. L'objectif principal est de comprendre le produit financier en simplifiant au maximum le calcul de la valeur mathématique de la prime  $V_0$ . Par la suite, nous examinerons la convergence des différentes méthodes de pricing mises en œuvre afin d'évaluer leur efficacité et leur précision.

## Expression mathématiques de la prime

Dans cette section, nous détaillons toutes les étapes du calcul de la prime  $V_0$ , afin de la rendre la plus simple possible.

$$\begin{aligned}
 V_0 &= \mathbf{E}^Q \left( \sum_{k=1}^{T-1} c_k e^{-rk} \mathbf{1}_{\{T_x > k\}} \mid \mathcal{F}_0 \right) + \mathbf{E}^Q \left( \max(F_T, K_T) \mathbf{1}_{\{T_x > T\}} e^{-rT} \mid \mathcal{F}_0 \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{T-1} e^{-rk} \mathbf{E}^Q \left( c_k \mathbf{1}_{\{T_x > k\}} \mid \mathcal{F}_0 \right) + \mathbf{E}^Q \left( (K_T + (F_T - K_T)_+) \mathbf{1}_{\{T_x > T\}} e^{-rT} \mid \mathcal{F}_0 \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{T-1} e^{-rk} \mathbf{E}^Q(c_k \mid \mathcal{F}_0) \mathbf{E}^Q(\mathbf{1}_{\{T_x > k\}} \mid \mathcal{F}_0) + e^{-rT} \mathbf{E}^Q(\mathbf{1}_{\{T_x > T\}} \mid \mathcal{F}_0) \mathbf{E}^Q((K_T + (F_T - K_T)_+) \mid \mathcal{F}_0) \\
 &\quad \text{(car la mortalité est indépendante des marchés financiers)} \\
 &= \sum_{k=1}^{T-1} e^{-rk} \mathbf{E}^Q(\gamma F_k \mid \mathcal{F}_0) {}_k p_x + e^{-rT} {}_T p_x (K_T + \mathbf{E}^Q((F_T - K_T)_+ \mid \mathcal{F}_0))
 \end{aligned}$$

$$\text{Or } F_k = F_{k-1} (1 - \gamma) \frac{S_k}{S_{k-1}} \Leftrightarrow \frac{F_k}{F_{k-1}} = (1 - \gamma) \frac{S_k}{S_{k-1}} \Leftrightarrow \frac{F_k}{F_0} = (1 - \gamma)^k \frac{S_k}{S_0} \Leftrightarrow F_k = F_0 (1 - \gamma)^k \frac{S_k}{S_0}.$$

En remplaçant dans  $V_0$ , il vient que :

$$\begin{aligned}
 V_0 &= \gamma \frac{F_0}{S_0} \sum_{k=1}^{T-1} e^{-rk} \mathbf{E}^Q((1 - \gamma)^k S_k \mid \mathcal{F}_0) {}_k p_x + e^{-rT} {}_T p_x (K_T + \mathbf{E}^Q((F_T - K_T)_+ \mid \mathcal{F}_0)) \\
 &= \gamma \frac{F_0}{S_0} \sum_{k=1}^{T-1} {}_k p_x (1 - \gamma)^k \mathbf{E}^Q\left(\frac{S_k}{e^{rk}} \mid \mathcal{F}_0\right) + e^{-rT} {}_T p_x \left(K_T + \mathbf{E}^Q\left(\left(F_0 (1 - \gamma)^T \frac{S_T}{S_0} - K_T\right)_+ \mid \mathcal{F}_0\right)\right) \\
 &= \gamma \frac{F_0}{S_0} \sum_{k=1}^{T-1} {}_k p_x (1 - \gamma)^k S_0 + e^{-rT} {}_T p_x \left(K_T + \mathbf{E}^Q\left(\left(F_0 (1 - \gamma)^T \frac{S_T}{S_0} - K_T\right)_+ \mid \mathcal{F}_0\right)\right) \\
 &\quad \text{(car sous la mesure risque neutre } \frac{S_k}{e^{rk}} \text{ est une martingale, donc } \forall k \mathbf{E}^Q\left(\frac{S_k}{e^{rk}} \mid \mathcal{F}_0\right) = S_0)
 \end{aligned}$$

$$V_0 = \gamma \frac{F_0}{S_0} \sum_{k=1}^{T-1} {}_k p_x (1 - \gamma)^k S_0 + e^{-rT} {}_T p_x \left( K_T + A \cdot \mathbf{E}^Q \left( \left( S_T - \frac{K_T}{A} \right)_+ \mid \mathcal{F}_0 \right) \right)$$

avec  $A = \frac{F_0 (1 - \gamma)^T}{S_0}$

$$V_0 = \gamma F_0 \sum_{k=1}^{T-1} {}_k p_x (1 - \gamma)^k + e^{-rT} {}_T p_x \left( K_T + A \cdot \mathbf{E}^Q \left( \left( S_T - \frac{K_T}{A} \right)_+ \mid \mathcal{F}_0 \right) \right)$$

Pour  $A = \frac{F_0 (1 - \gamma)^T}{S_0}$  l'expression mathématique de la prime est donnée par

$$V_0 = \gamma F_0 \sum_{k=1}^{T-1} {}_k p_x (1 - \gamma)^k + e^{-rT} {}_T p_x \left( K_T + A \cdot \mathbf{E}^Q \left( \left( S_T - \frac{K_T}{A} \right)_+ \mid \mathcal{F}_0 \right) \right)$$

Dans la formule mathématique de  $V_0$  que nous avons établie, nous observons qu'elle se compose de deux parties. La première partie est **fixe**, donnée par

$\gamma F_0 \sum_{k=1}^{T-1} {}_k p_x (1 - \gamma)^k$ , car tous les paramètres sont connus. La seconde partie est

**aléatoire**, représentée par  $\mathbf{E}^Q \left( \left( S_T - \frac{K_T}{A} \right)_+ \mid \mathcal{F}_0 \right)$ . Cette partie aléatoire, qui est liée à l'espérance d'un call, est particulièrement intéressante pour nos simulations futures. En effet, c'est cette partie qui constitue l'élément clé dans nos différentes simulations.

Nous allons évaluer le contrat en calculant la prime  $V_0$  selon trois approches différentes : premièrement en utilisant la méthode des arbres, deuxièmement par simulation de Monte Carlo, et enfin en considérant un modèle à deux actifs corrélés.

## Évaluation numérique par arbre binomial

### Implémentation de l'arbre binomial pour le calcul de la prime $V_0$

Dans cette section, nous développons un modèle d'arbre binomial pour calculer numériquement la prime initiale  $V_0$  du contrat d'assurance variable. Cette méthode de discrétisation est particulièrement adaptée pour modéliser l'évolution stochastique des actifs sous-jacents, un aspect clé des produits financiers comportant des composantes actuarielles.

L'objectif est d'appliquer cette méthode d'arborescence pour évaluer l'option implicite et d'étudier la convergence des résultats en faisant varier le nombre de pas de temps.

### Calcul des facteurs $u$ , $d$ et $p$

Pour modéliser l'évolution de l'actif sous-jacent à chaque étape, les trois paramètres suivants sont utilisés :

—  $u$  : Facteur de montée, calculé par :  $u = \exp \left( \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \right)$

- $d$  : Facteur de descente, calculé par :  $d = \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}\right)$
- $p$  : Probabilité de montée, calculée par :  $p = \frac{\exp(r\Delta t) - d}{u - d}$

## Construction de l'arbre des prix

L'arbre est construit en partant du prix initial  $S_0$ . À chaque étape, les prix sont mis à jour en fonction des facteurs  $u$  et  $d$ , ce qui donne :

```
S[0, 0] = S0
for i in range(1, n+1):
    for j in range(i+1):
        if j == 0:
            S[i, j] = S[i-1, j] * u
        else:
            S[i, j] = S[i-1, j-1] * d
```

## Calcul des payoffs à la maturité

Une fois l'arbre construit, les payoffs à la maturité sont calculés. Pour une option d'achat européenne, le payoff est donné par :  $\text{Payoff} = \max(0, S_T - \frac{K}{A})$  avec  $A = (1 - \gamma)^T$ , facteur de normalisation. La formule en Python est la suivante :

```
H = np.maximum(0, S[n, :n+1] - K / A)
```

## Induction inverse

Nous utilisons l'induction inverse pour remonter l'arbre et calculer la valeur de l'option à chaque nœud. À chaque étape, la valeur est calculée comme la valeur actualisée des payoffs aux nœuds suivants :  $C_t = e^{-r\Delta t} (pC_{\text{up}} + (1 - p)C_{\text{down}})$  Cette méthode permet d'obtenir la valeur actuelle  $V_0$ .

## Calcul de la prime $V_0$

La prime  $V_0$  est la somme de la partie fixe et de la partie aléatoire, calculée par induction inverse sur l'arbre binomial :  $V_0 = \text{part\_fix} + \text{part\_alea}$  où **part\_alea** est l'espérance actualisée des payoffs de l'option.

Le code Python est donné en annexe et le résultat de l'évaluation de la prime est :  **$V_0 = 231,240.53 \text{ €}$** .

## Incrémentation du pas de temps de l'arbre $n$

En faisant varier le nombre de pas de temps  $n$  dans l'arbre binomial entre 200 et 2520, avec un pas de 30, nous obtenons les courbes présentées dans les figures 1a et 1b. La première figure (1a) montre que, à mesure que le nombre de pas augmente, les prix deviennent de plus en plus précis et convergent vers le prix terminal. Quant à la deuxième figure (1b), elle illustre l'évolution de l'erreur relative des prix intermédiaires par rapport au prix terminal. On observe qu'à partir de 1000 pas,

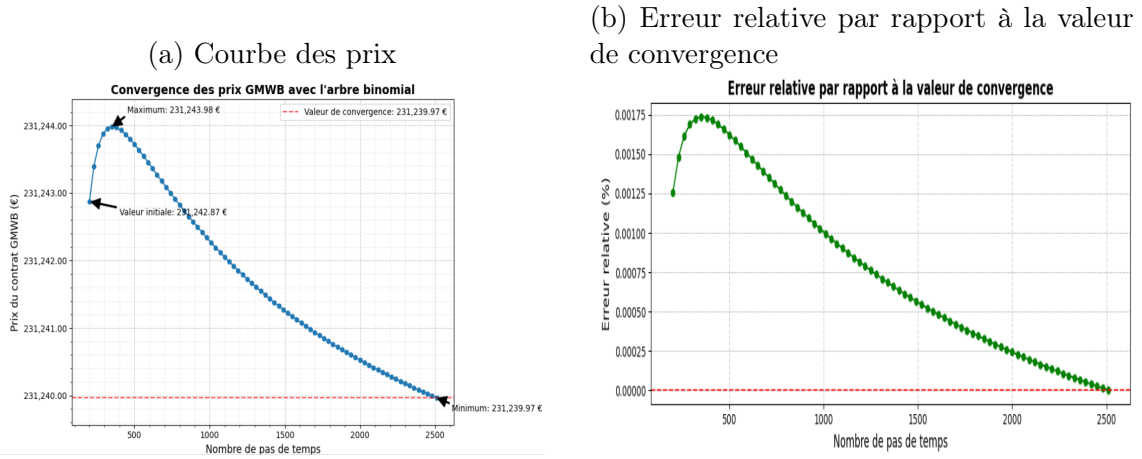


FIGURE 1 – Analyse de convergence de l'arbre binomial

Source : Nos travaux

l'erreur relative devient extrêmement faible (près de 0.0010%). Par conséquent, un découpage à partir de 1000 pas est suffisant, car l'erreur relative entre le prix à ce découpage et le prix terminal reste proche de 0.0010%.

## Évaluation numérique par des simulations de Monte Carlos

Dans cette section, nous implémentons la méthode de Monte Carlo en utilisant la discrétisation d'Euler pour les rendements (ou les aires) ainsi que la discrétisation d'Euler tenant compte du fait que le produit suit une distribution log-normale. Rappelons l'expression mathématique de la prime  $V_0$  :  $V_0 = \gamma F_0 \sum_{k=1}^{T-1} {}_k p_x (1 - \gamma)^k + e^{-rT} {}_T p_x \left( K_T + A \cdot \mathbf{E}^Q \left( \left( S_T - \frac{K_T}{A} \right)_+ \mid \mathcal{F}_0 \right) \right)$ .

Dans l'algorithme, la partie clé pour nous est  $\mathbf{E}^Q \left( \left( S_T - \frac{K_T}{A} \right)_+ \mid \mathcal{F}_0 \right)$ , que nous allons approximer par :  $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left( S_T^{(j)} - \frac{K_T}{A} \right)_+$  où  $S_T^{(j)}$  représente la  $j$ -ème valeur simulée de  $S_T$ .

### Approche par la méthode de la discrétisation de l'aire

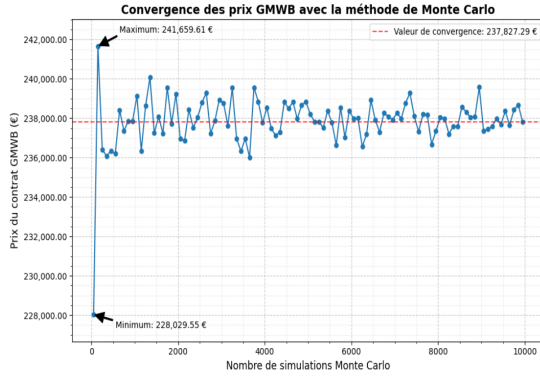
Pour la discrétisation des aires, nous appliquons la méthode suivante pour discrétiser  $S_T$  et simuler plusieurs trajectoires de  $S_T$  à l'aide de la formule :

$$\Delta S_j = r S_{j-1} \Delta t + \sigma S_{j-1} \sqrt{\Delta t} \epsilon$$

En suivant l'algorithme présenté dans le cours, le calcul de la prime avec  $N = 10\,000$  simulations donne  $V_0 = 238,058.12 \text{ €}$ . En faisant varier le nombre de simulations  $N$  de 50 à 10 000, nous constatons que la valeur de la prime  $V_0$  oscille autour de 237,827.29 €, qui correspond à la valeur de convergence (voir figure 2a). La figure

(2b) montre que l'erreur relative fluctue autour de zéro, ce qui est un bon signe. De plus, nous remarquons qu'après 8000 simulations, l'erreur relative devient très faible.

(a) Courbe des prix (Algorithme de Monte Carlo avec discrétisation de l'aire)



(b) Erreur relative par rapport à la valeur de convergence

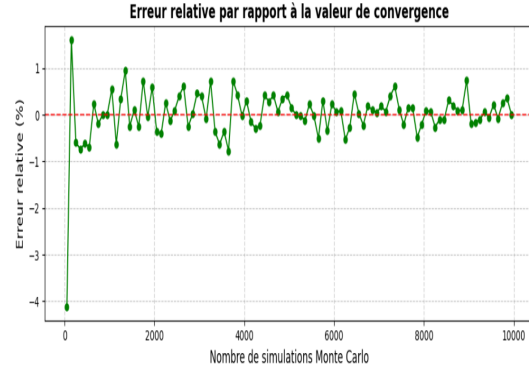


FIGURE 2 – Analyse de convergence de Monte Carlo avec la discrétisation de l'aire  
Source : Nos travaux

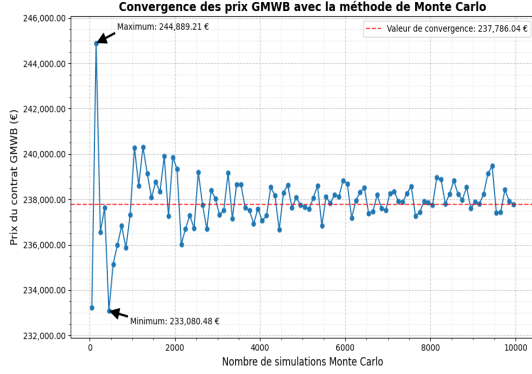
## Évaluation numérique par les simulations de Monte Carlos avec la discrétisation d'Euler log-normal

Contrairement à la discrétisation des aires, la discrétisation log-normale d'Euler permet de discrétiser  $S_T$  de manière plus robuste en tenant compte de la distribution log-normale des rendements. Cette discrétisation est réalisée à l'aide de la formule suivante :

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} \times \exp \left( \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t} \right)$$

Dans cette approche, la variable  $\epsilon$  représente un tirage aléatoire issu d'une loi normale standard  $N(0, 1)$ , ce qui permet de simuler les variations stochastiques du prix de l'actif en fonction du temps. Cette méthode est particulièrement efficace pour modéliser les processus où les rendements suivent une distribution normale logarithmique, comme c'est le cas pour de nombreux actifs financiers. En prenant 10000 simulations, la valeur de la prime vaut  $V_0 = 238,224.13 \text{ €}$  qui est quasiment la même valeur que celle obtenue en utilisant la discrétisation des aires. En suivant l'algorithme présenté dans le cours, le calcul de la prime avec  $N = 10\,000$  simulations donne  $V_0 = 238,058.12 \text{ €}$ . En faisant varier le nombre de simulations  $N$  de 50 à 10 000, nous constatons que la valeur de la prime  $V_0$  oscille autour de 237,786.04 €, qui correspond à la valeur de convergence (voir figure 3a). La figure (3b) montre que l'erreur relative fluctue autour de zéro, ce qui est un bon signe. De plus, nous remarquons qu'après 8000 simulations, l'erreur relative devient très faible

(a) Courbe des prix (Algorithme de Monte Carlos avec discrétisation de log-normal)



(b) Erreur relative par rapport à la valeur de convergence

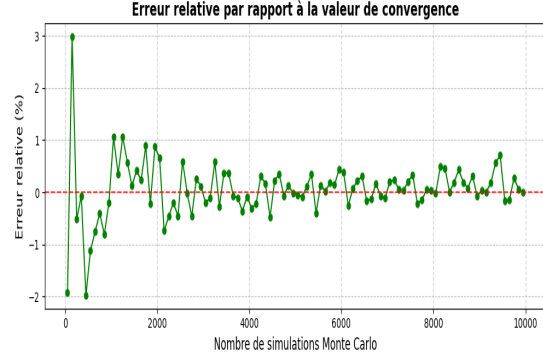


FIGURE 3 – Analyse de convergence de Monte Carlo avec la discrétisation de log-normal

Source : Nos travaux

## Evaluation du GMWB dans le cadre de la stratégie d'investissement alternative

Dans cette partie, on suppose que le rendement journalier du fonds hybride suit la dynamique définie par l'équation différentielle stochastique :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \theta \frac{dS_t^{(1)}}{S_t^{(1)}} + (1 - \theta) \frac{dS_t^{(2)}}{S_t^{(2)}} \quad (1)$$

où  $S_t^{(1)}$  et  $S_t^{(2)}$  sont respectivement des fond d'action et d'obligations et  $\theta \in [0, 1]$  est paramètre d'allocation.

### Calcul des indicateurs de performances historiques des actions et des obligations

Les indicateurs de performances calculés sont les rendements annuels moyens annuel, les écart-types annualisés des rendements annuels ainsi que la corrélation entre les rendements des actions et des obligations. Les formules sont les suivantes : Pour le rendement annuel moyen de l'actif  $i$  avec  $i \in \{1, 2\}$ .

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{T\Delta} \sum_{t=2}^T \ln\left(\frac{S_t^i}{S_{t-1}^i}\right) \quad (2)$$

Pour la volatilité annuelle :

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{j=2}^T (r_j^i - \hat{\mu}_i)^2 \Delta \quad (3)$$

Pour la covariance des rendements des deux actifs :

$$cov(S^i, S^j) = \frac{1}{T-1} \sum_{k=2}^T (r_k^i - \hat{\mu}_i)(r_k^j - \hat{\mu}_j) \quad (4)$$

Pour la corrélation des rendements des deux actifs :

$$\rho_{ij} = \frac{cov(S^i, S^j)}{\sigma_i \sigma_j} \quad (5)$$

où  $\Delta = \frac{1}{257}$  étant donné que l'on considère qu'il y a 257 jours de trading dans une année.

Les résultats des calculs sur base des séries fournies sont consignés dans le tableau 1 suivant :

	<b>Actions</b>	<b>Obligations</b>
<b>Rendement moyen annuel</b>	0.19592402	0.00030134
<b>Volatilité annuelle</b>	0.22677423	0.03939005

TABLE 1 – Indicateurs de performance historique

Par ailleurs, la corrélation (de Pearson) entre les deux fonds est de  $\rho = -0.081$ .

## Evaluation du GMWB pour différentes allocations

### Principe algorithmique

Rappelons que la prime du GMWB se présente comme suit :

$$V_0 = \gamma F_0 \sum_{k=1}^{T-1} {}_k p_x (1 - \gamma)^k + e^{-rT} {}_T p_x (K_T + \cdot \mathbf{E}^Q((F_T - K_T)_+ | \mathcal{F}_0))$$

avec  $F_T = F_0(1 - \gamma)^T \frac{S_T}{S_0}$ . Le bloc  $\gamma F_0 \sum_{k=1}^{T-1} {}_k p_x (1 - \gamma)^k$  qualifié de partie fixe dans le code est relativement aisé à calculé. Pour avoir la prime du GMWB, il faut donc estimer :

$$e^{-rT} {}_T p_x (K_T + \cdot \mathbf{E}^Q((F_T - K_T)_+ | \mathcal{F}_0)) = e^{-rT} {}_T p_x (\mathbf{E}^Q(\max(F_T, K_T) | \mathcal{F}_0)) \quad (6)$$

que l'on appelle partie variable dans le code. Cette partie variable est une fonction du ratio  $\frac{S_T}{S_0}$  qui est une variable aléatoire qui dépend du paramètre  $\theta$ . La fonction **Prix GMWB** du code prend en entrée la part d'actions  $\theta$  et renvoie le prix du GMWB correspondant à cette allocation. Dans cette fonction, l'on simule sous mesure risque neutre 10000 trajectoires possible du fonds hybride  $S$ , ayant posé au départ  $S_0 = 100$ . Il est en effet question d'obtenir une estimation fiable de valeur terminale du fonds hybride  $S_T$  avec  $\hat{S}_T = \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} S_{Ti} \implies \hat{F}_T = F_0(1 - \gamma) \frac{\hat{S}_T}{S_0}$ .



Dans chacune des trajectoires, une réalisation du rendement journalier des actifs composites est obtenue par l'équation :

$$\begin{pmatrix} \frac{dS_t^{(1)}}{S_t^{(1)}} \\ \frac{dS_t^{(2)}}{S_t^{(2)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} \Delta + \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{\Delta}$$

où  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  sont deux réalisations d'une gaussienne standard et la matrice  $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2 \end{pmatrix}$  est obtenue par décomposition de Cholesky de la matrice de variance-covariance des actions et des obligations.  $\rho$  désigne le coefficient de corrélation de Pearson.

Après avoir obtenu des réalisations des rendements journaliers des actions et des obligations, le rendement journalier du fond est calculé par moyenne pondérée de ces rendements en utilisant l'équation (1). Par suite, l'exponentiel de ce rendement est multiplié par la valeur du fonds hybride de la journée précédente pour obtenir la valeur de ce fonds la journée suivante.

De fil en aiguille, l'on parvient à une réalisation d'une valeur terminale du fonds hybride pour chacune des trajectoires simulées et par conséquent l'on dispose du ratio  $S_T/S_0$  pour chacune des 10000 trajectoires. Chacune des réalisations de  $S_T/S_0$  donne lieu à une réalisation de  $F_T$  et donc d'un payoffs. L'on calcule donc par suite l'espérance des payoffs comme moyenne empirique sur les 10000 trajectoires des payoffs simulés. Enfin, pour chacune des valeurs possible de paramètre d'allocation  $\theta$ , l'on fait appel à la fonction Prix\_GMWB pour obtenir la prime correspondante.

## Résultats

La prime  $P(\theta)$  du GMWB en fonction du paramètre d'allocation est donnée dans le tableau 2 suivant :

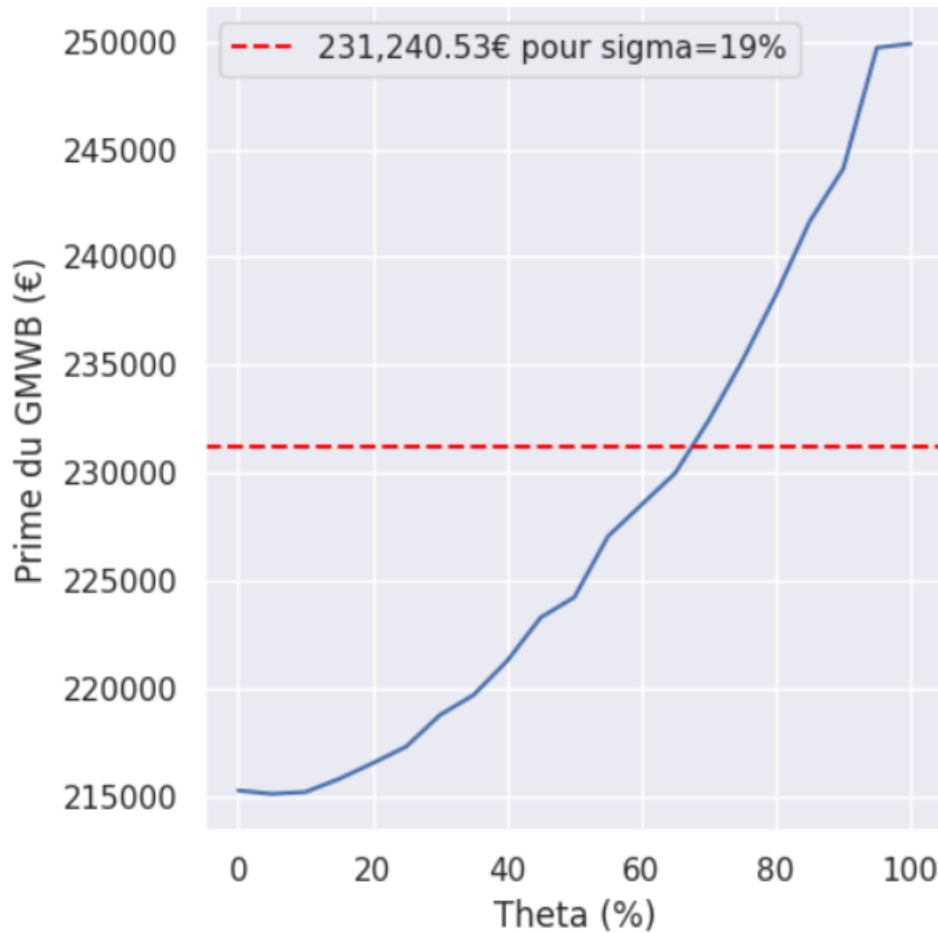
$\theta(\%)$	$\mathbf{P}(\theta)$ en euros	$\theta(\%)$	$\mathbf{P}(\theta)$ en euros
0	215,320.6009	5	215,161.9891
10	215,245.3466	15	215,853.1918
20	216,582.0420	25	217,352.4480
30	218,811.5553	35	219,737.0867
40	221,314.7573	45	223,327.7554
50	224,266.2528	55	227,083.6288
60	228,551.9338	65	230,012.5248
70	232,466.3185	75	235,228.1082
80	238,283.0270	85	241,661.8706
90	244,108.8771	95	249,708.2035
100	249,891.3028	-	-

TABLE 2 – Prime du GMWB en fonction de l'allocation

Les données du tableau précédent sont reportées dans le graphique 4 suivant. Comme

on peut le voir, la prime augmente (assez rapidement) avec la part d'action dans le rendement du fonds hybride. Cette évolution de la prime est due au fait que les

FIGURE 4 – Évolution de la prime en fonction de la part d'actions



Source : Calculs des auteurs à partir des données

actions sont plus risquées que les obligations. Rappelons que la volatilité des actions calculée est de l'ordre de 22.68% contre 3.93% pour les obligations. Cette volatilité élevée accroît la dérive dans la dynamique des rendements des actions. Ainsi, plus la part des actions augmente, plus la dynamique des rendements du fonds est portée par celle des actions qui ayant une dérive élevée augmentent la valeur de la prime. Dans un autre sens, plus la part des actions est faible plus celle des obligations est élevée et la dynamique des rendements du fonds hybride est portée par celle des obligations. Ces dernières ayant une volatilité faible, leur dérive l'est tout autant et le prix du GMWB est donc faible. Par ailleurs, l'on peut observer qu'avec 70% du fonds hybride en action, la prime du GMWB égale déjà plus ou moins celle calculée par la méthode d'arbre dans laquelle la volatilité du fonds hybride était supposée de 19%.

Au vu de ces résultats, il se pose la question de savoir quelle allocation l'on pourrait recommander. L'on pourrait de prime abord dire qu'une part plus élevée en

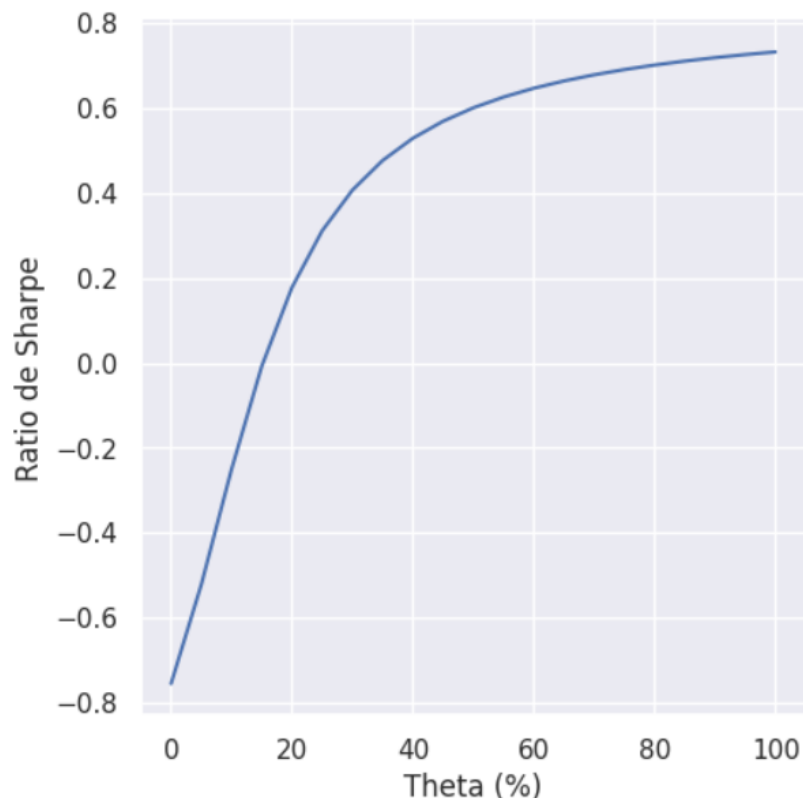
action accroît en mesure réelle le rendement du fonds hybride mais le rend tout aussi plus risqué. Il faut donc une mesure du gain réel d'une prise de risque. Pour mesurer ce gain, l'on utilise les ratios de Sharpe pour comparer les gains pour différentes valeurs de  $\theta$ . Le ratio de Sharpe s'obtient par la formule :

$$SR(\theta) = \frac{\mu(\theta) - r}{\sigma(\theta)}$$

où  $\mu(\theta)$  et  $\sigma(\theta)$  représentent respectivement le rendement moyen annuel et la volatilité annuelle du fonds hybride. les ratios de Sharpe peuvent être calculés sur base des données historiques ou sur base de simulation de trajectoires. Ceux présentés ci-dessous l'ont été sur base des données historiques fournies.

Le graphique 5 ci-dessous donne l'évolution du ration de Sharpe en fonction de la composition du fonds hybride. Cette courbe est croissante et convexe. Cela signifie qu'il y a des gains à la prise de risque en allouant une plus grande part aux actions dans le portefeuille mais que ces gains diminuent également avec cette part. Aux alentours de 30% en actions, le ratio de Sharpe croît à taux décroissant : c'est à partir de ce seuil que les gains lié à la prise de risque augmentent de moins en moins. L'on peut donc considérer que 30% en action dans le fonds hybride est optimal.

FIGURE 5 – Ratio de Sharpe en fonction de la composition du fonds hybride



Source : Calculs des auteurs à partir des données