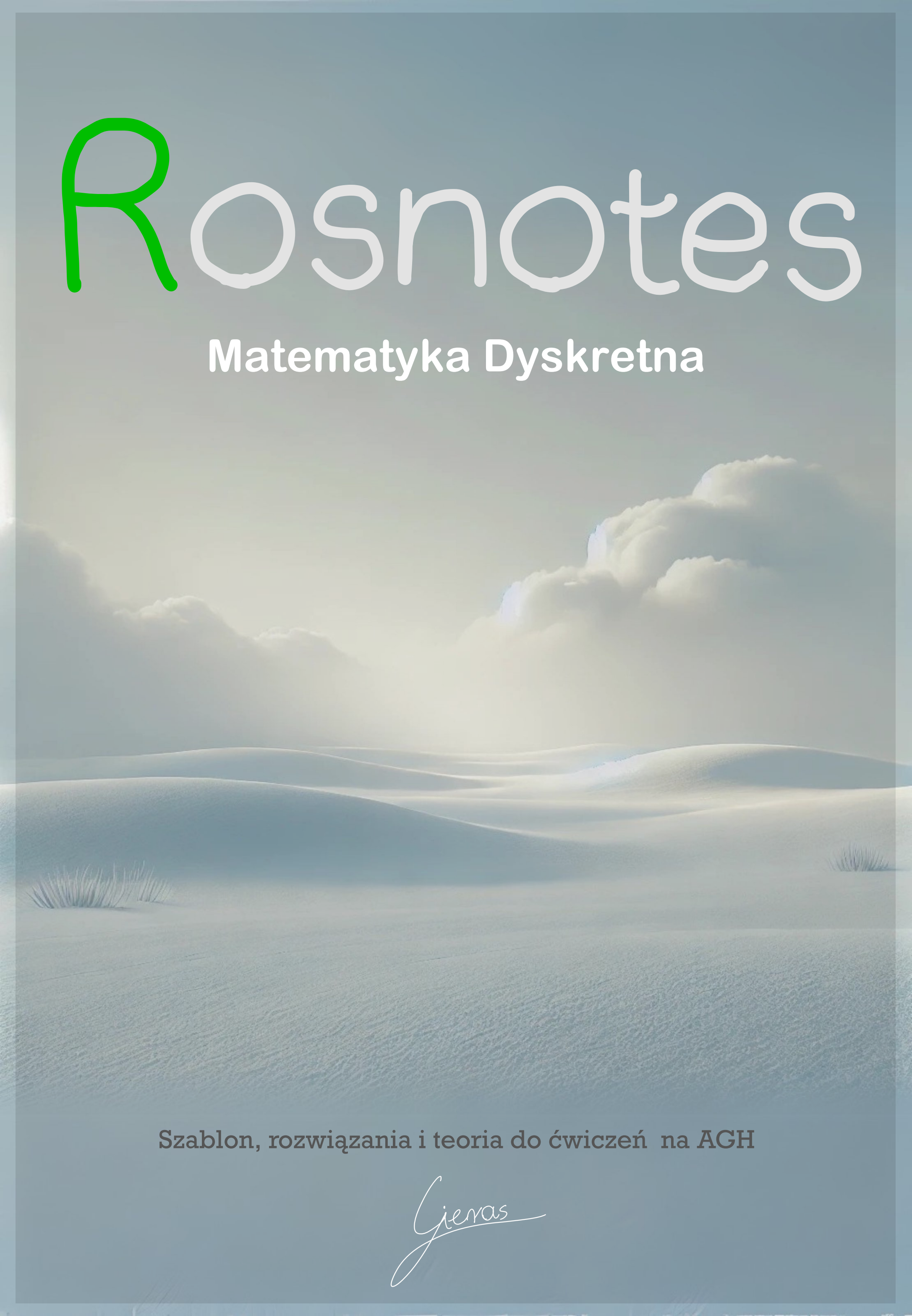


Rosnotes

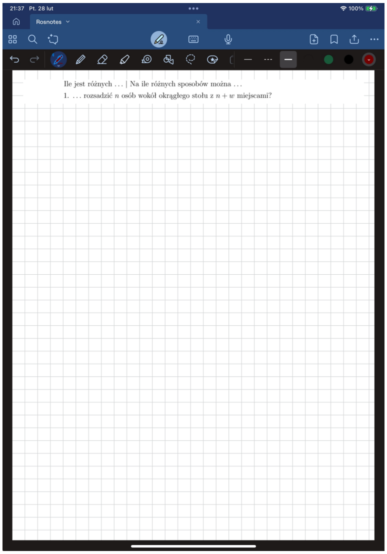
Matematyka Dyskretna

Szablon, rozwiązania i teoria do ćwiczeń na AGH

Gieras

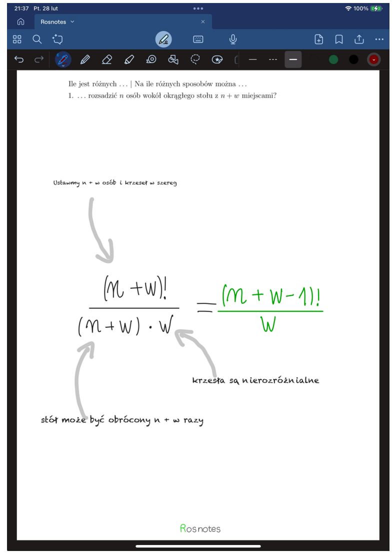
Witaj w Rosnotes

Każde zadanie zawiera szablon, rozwiązane zadanie będzie zawierać dodatkowo rozwiązanie



Szablon

Następna strona



Rozwiazanie

Kolor treści

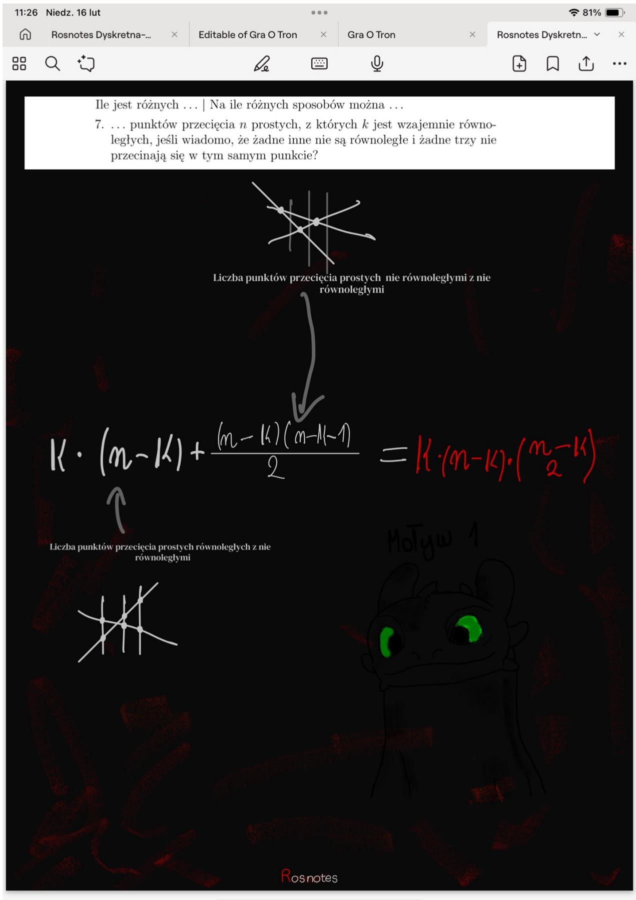
Kolor poboczny

Kolor wyniku

Czcionka Classic

Motywy Encrypted

W zeszytach ukryte są podpowiedzi do haseł motywów ukrytych
Podpowiedzi będą zawsze oznaczone
motyw { numer motywu } podpowiedź



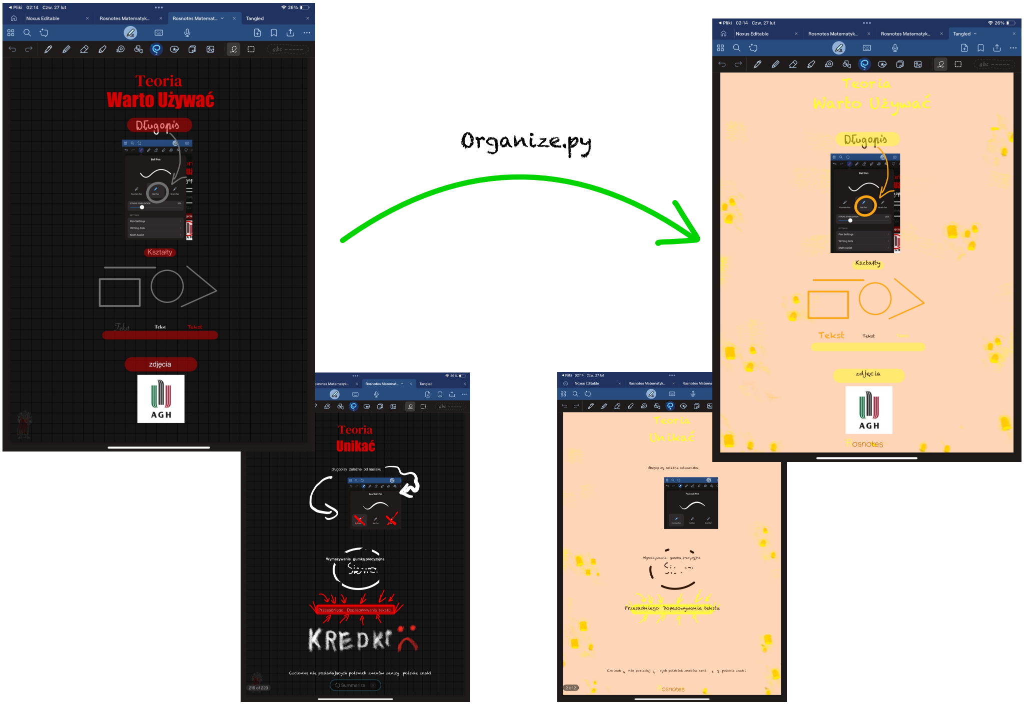
Hasła odnoszą się do tytułów dzieł popkultury i oznaczają jednocześnie
nazwę motywu który odblokowujesz

- Hasła wpisuje się jako hasło do pdf którego pobiera się z repozytorium Rosnotes lub przy instalacji motywu na skrypcie
- Ukryte motywy nie wprowadzają żadnej nowej wartości merytorycznej - są jedynie zmianą wizualną.
- Hasła będą zazwyczaj w języku angielskim, z małych liter i oddzielone spacjami.

Rosnotes

Skrypt przepisujący

Motyw który używasz powstał dzięki **skryptowi** który przepisał inny motyw na twój



Działanie

Wczytanie zeszytu
pdf z folderu skryptu

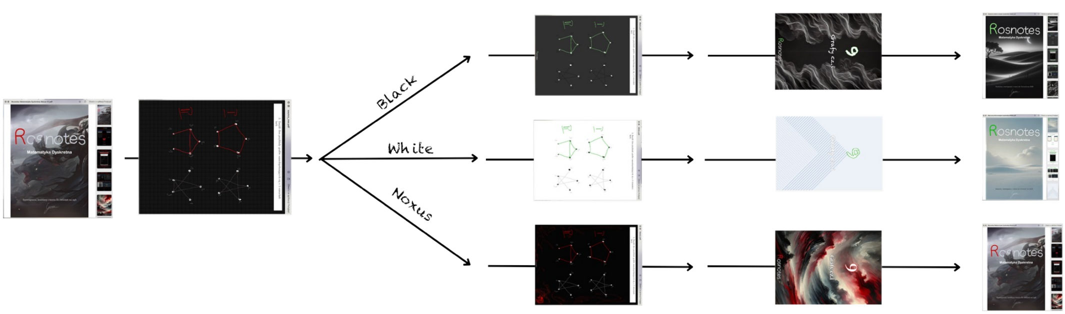
Segregowanie rozwiązań
z zeszytu do folderu Solutions jako surowe źródła rozwiązań

Rozdzielenie skryptu
na wiele procesów każdy proces to jeden motyw

Tworzenie rozwiązań motywu
do Solutions na podstawie surowych źródeł rozwiązani oraz startera motywu

Sklejanie rozwiązań motywu
z folderu Solutions oraz dodawanie do niego szablonów okładek itp na podstawie startera motywu

Zeszyty gotowe
do użycia i udostępniaia

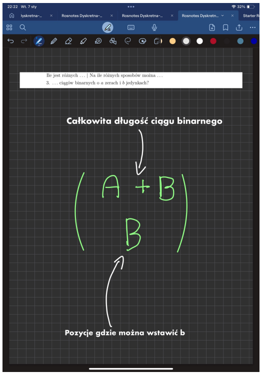


Strzałki oznaczają niezależne funkcje i w pliku skryptu istnieje config który może modyfikować działanie skryptu

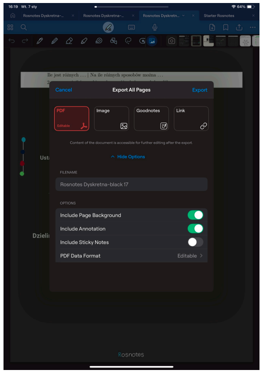
Rosnotes

Aktualizowanie projektu

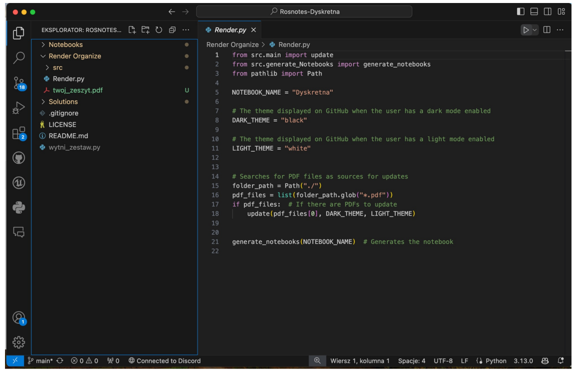
Jeśli chcesz dodać lub zmienić rozwiązania wystarczy ze wypełnisz szablony rozwiązaniami i udostepnisz pdf całego zeszytu do foleru ze skryptem projektu i odpalisz skrypt



kolor wyniku w szablonie oznacza wykonanie zadania

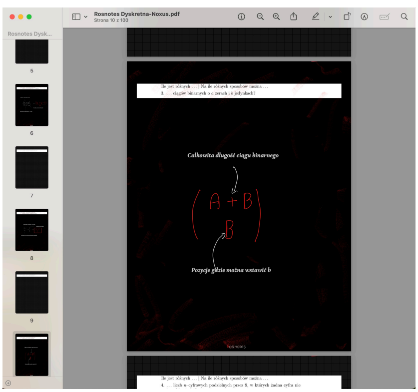


Udostepni pdf jako flattened

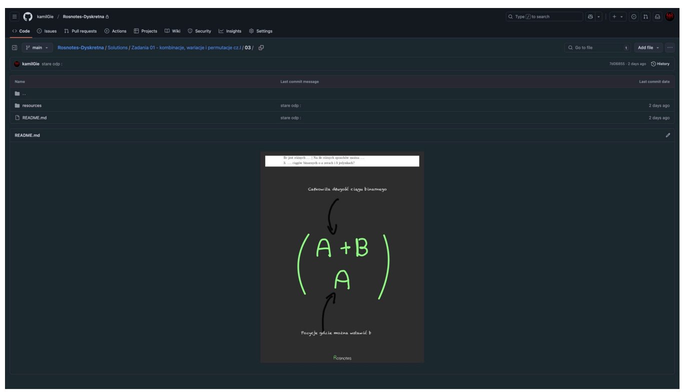


Umieść PDF w projekcie Rosnotes-przedmiot w folderze Organize, a następnie uruchom skrypt organize.py, aby zaktualizować zeszyty i rozwiązania projektu.

Z Zaktualizowanego projektu mozesz udostępnić zeszyty z folderu Notebooks twoim znajomym by zawierały szablony i rozwiazania w różnych motywach ulepszone o twoje rozwiazania lub sforkkwać główne repozytorium by udostępniać twoje rozwiązania publicznie gdyż folder solution zawiera zaawansowane wyświetlanie rozwiązan w readme.md



Zeszyty w różnych motywach ulepszone o twoje rozwiązania



Repozytorium GitHub ulepszone o twoje rozwiązania

Szczegóły

- Zadania które nie chcesz dodawać wystarczy ze nie będą miały koloru wyniku skrypt szuka tylko szablonów z kolorem wynikowym
- Można używać wszystkich kolorów lecz Skrypt zmieni każdy kolor na jeden z 3 kolorów danego motywu w zależności do którego mu najbliżej
- Można tworzyć nowe strony. Skrypt zczyta każdą stronę która zawiera tą samą treść i udostępni pokolei
- Zdjęcia bardzo zakłócają motywy więc mają być ostatecznością. Aby dodać zdjęcie należy udostępnić pdf w formie flattened

Rosnotes

1

Kombinacje, wariacje i permutacje cz. I

Teoria

Liczba podzbiorów zbioru

$$2^N$$

Liczba wszystkich podzbiorów k elementowych zbioru n elementowego

$$\binom{N}{K} = \frac{N!}{K!(N-K)!}$$

Lematy dwumian newtona 1

$$\binom{N}{K} = \binom{N}{N-K}$$

Lematy dwumian newtona 2

$$\binom{N}{K} = \binom{N-1}{K} + \binom{N-1}{K-1}$$

Lematy dwumian newtona 3

$$\binom{N}{K}\binom{K}{M} = \binom{N}{M}\binom{N-M}{N-K}$$

Twierdzenie dwumienne

$$(x+y)^N = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} x^i y^{N-i}$$

Liczba wszystkich podzbiorów k elementowych zbioru n elementowego z powtórzeniami

$$\binom{N+K-1}{K}$$

Ile jest różnych … | Na ile różnych sposobów można …

1. … rozsadzić n osób wokół okrągłego stołu z $n + w$ miejscami?

Ile jest różnych ... | Na ile różnych sposobów można ...

1. ... rozsadzić n osób wokół okrągłego stołu z $n + w$ miejscami?

Ustawmy n + w osób i krzeseł w szereg

$$\frac{(n+w)!}{(n+w)\cdot w} = \frac{(n+w-1)!}{w}$$

krzesła są nierozróżnialne

stół może być obrócony n + w razy

Ile jest różnych ... | Na ile różnych sposobów można ...

2. ... naszyjników zrobionych z n różnokolorowych korali?

Ile jest różnych ... | Na ile różnych sposobów można ...

2. ... naszyjników zrobionych z n różnokolorowych korali?

Ustawiamy n koralików w szeregu

Dzielimy przez odbicie

$$\frac{n!}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{(n-1)!}{2}$$

Dzielimy przez możliwości obrotów naszyjnika

Ile jest różnych ... | Na ile różnych sposobów można ...

3. ... ciągów binarnych o a zerach i b jedynkach?

Ile jest różnych … | Na ile różnych sposobów można …

3. … ciągów binarnych o a zerach i b jedynkach?

Całkowita długość ciągu binarnego

$$\binom{A+B}{A}$$

Pozycje gdzie można wstawić b

Ile jest różnych ... | Na ile różnych sposobów można ...

4. ... liczb n–cyfrowych podzielnych przez 9, w których żadna cyfra nie jest dziewiątką?

Ile jest różnych … | Na ile różnych sposobów można …

4. … liczb n–cyfrowych podzielnych przez 9, w których żadna cyfra nie jest dziewiątką?

Liczby z przodu mogą mieć dowolną konfigurację

n - 1 liczb

Jednak dla każdej konfiguracji aby liczb była podzielna przez 9 ostatnia cyfra może być tylko jedna

Pozostałe n-2 liczb na 9 sposobów

$$8 \cdot 9^{n-2}$$

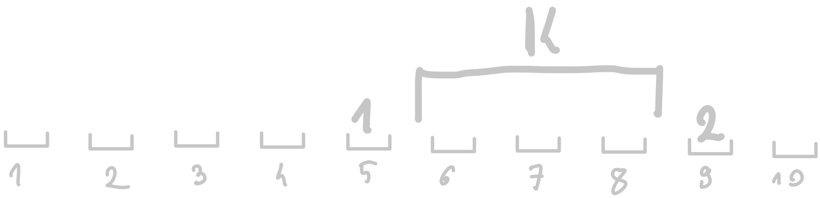
Pierwsza liczba na 8 sposobów bo nie może zaczynać się zerem

Ile jest różnych … | Na ile różnych sposobów można …

5. … ustawić w ciąg liczby $0, 1, \ldots, 9$, tak by między 1 i 2 było dokładnie k innych liczb?

Ile jest różnych ... | Na ile różnych sposobów można ...

5. ... ustawić w ciąg liczby $0, 1, \ldots, 9$, tak by między 1 i 2 było dokładnie k innych liczb?



Spośród 10 miejsc możemy wybrać k + 2 kolejnych

Końce możemy ustawić na 2 sposoby (1 . . . 2 lub 2 . . . 1)

$$(10-(k+2)+1)\cdot 2\cdot 8! = (9-k)\cdot 8!\cdot 2$$

Ta jedynka jest tu dlatego że 10 − (k+2) liczy na ile sposobów można przesunąć blok k+2 i musimy dodać też ustawienie bez przesunięcia

Ustawiamy pozostałe 8 liczb w kolejności

Ile jest różnych ... | Na ile różnych sposobów można ...

6. ... permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ takich, że żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednie?

Ile jest różnych ... | Na ile różnych sposobów można ...

6. ... permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ takich, że żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednie?

Możliwości ustawienia pary nieparzystych jak parzyste na krańcach

Ciąg nieparzystych

$$n! \cdot n! \cdot 3 \cdot (n-1) = 3 \cdot (n!)^2 \cdot (n-1)$$

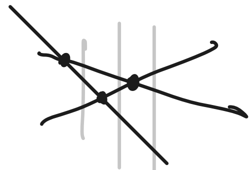
Ciąg parzystych

3 opcje albo na przemian (pnpn . . . n lub npnp ... p) albo parzyste na krańcach i w środku para nie parzystych koło sobie np pnnpnp

7. ... punktów przecięcia n prostych, z których k jest wzajemnie równoległych, jeśli wiadomo, że żadne inne nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w tym samym punkcie?

Ile jest różnych ... | Na ile różnych sposobów można ...

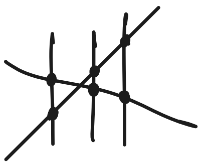
7. ... punktów przecięcia n prostych, z których k jest wzajemnie równoległych, jeśli wiadomo, że żadne inne nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w tym samym punkcie?



Liczba punktów przecięcia prostych nierównoległych z nierównoległymi

$$k \cdot (n-k) + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} = k \cdot (n-k) \cdot \left(\frac{n-k}{2}\right)$$

Liczba punktów przecięcia prostych równoległych z nierównoległymi



Ile jest różnych ... | Na ile różnych sposobów można ...

8. ... podzielić $2n$ osób na pary?

Ile jest różnych … | Na ile różnych sposobów można …

8. … podzielić $2n$ osób na pary?

Dzielimy n osób na 2n dwuosobowych grupek

$$\left(\binom{2n}{2}\cdot\binom{2n-2}{2}\cdot\binom{2n-4}{2}\cdot\ldots\cdot\binom{2}{2}\right)\cdot\frac{1}{n!}=\frac{\binom{2n}{2,2,\ldots,2}}{n!}$$

Pozbywamy się kolejności wyboru grup

Przykłady

$n=1 \rightarrow 1$

$n=2 \rightarrow 3$

$n=3 \rightarrow$

$$\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{3!}=15$$

Rosnotes

Ile jest różnych ... | Na ile różnych sposobów można ...

9. ... permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, 8\}$, w których każda liczba nieparzysta poprzedza (niekoniecznie bezpośrednio) liczbę o 1 od niej większą?

Ile jest różnych ... | Na ile różnych sposobów można ...

9. ... permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, 8\}$, w których każda liczba nieparzysta poprzedza (niekoniecznie bezpośrednio) liczbę o 1 od niej większą?

Przykłady 1 2 3 4 7 8 5 6   1 3 5 7 2 4 6 8   1 3 2 4 5 7 6 8

Wybieram Miejsce liczby nieparzystej i liczby o jednej od niej większej

$$\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1 = 2520$$

Powtarzam z miejscami zajętymi

10. ... wybrać z n osób komitet, a z komitetu jego zarząd, jeśli zarówno komitet, jak i zarząd mogą liczyć od 0 do n osób?

Ile jest różnych ... | Na ile różnych sposobów można ...

10. ... wybrać z n osób komitet, a z komitetu jego zarząd, jeśli zarówno komitet, jak i zarząd mogą liczyć od 0 do n osób?

$$\binom{n}{\text{Komitet}}\binom{\text{Komitet}}{\text{Zarząd}}$$

Wszystkie opcje komitetu

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot 2^{i}=3^{n}$$

Wszystkie opcje zarządu z komitetu

Można też patrzeć na to tak że dla każdej osoby przyporządkujemy czy jest w komitecie czy w zarządzie komitetu czy nigdzie i dlatego 3^n

2

Kombinacje, wariacje i permutacje cz. II

Teoria

Liczba wszystkich odwzorowań zbioru x -> y

$$y^x$$

Liczba wszystkich różnowartościowych odwzorowań zbioru x -> y

$$\frac{y!}{(y-x)!}$$

Liczba wszystkich rosnących odwzorowań zbioru x -> y

$$\binom{y}{x}$$

Liczba wszystkich niemalejących odwzorowań zbioru x -> y

$$\binom{y+x-1}{x}$$

Liczba wszystkich bijektywnych odwzorowań zbioru x -> y
(Permutacja)

$$x!$$

Złożenie permutacji f i g

$$\in X : (g \circ f)(i) = g(f(i))$$

Permutacja identycznościowa

$$e$$

Elementy przechodzą w te same elementy

Permutacja odwrotna

$$f^{-1}$$

Elementy przechodzą w drugą stronę

Permutacje są grupą symetryczną

1) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

2) $f \circ e = e \circ f = f$

3) $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$

Cykl długości k

$$f_k = (x_1^k, x_2^k \dots x_k^k)$$

$$f_k(x_1^k) = x_2^k \; \dots \; f_k(x_k^k) = x_1^k$$

$$\forall x \in f_k \; \exists y \in f_k : f_k(x) = y$$

Typy permutacji

$$(\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n)$$

λ_i oznacza ilości cyklów długości i

Zapis Typu permutacji

$$1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$$

Liczba wszystkich permutacji multizbioru o mocy n

$$\frac{n!}{n_1! \, n_2! \dots n_t!}$$

$n_i =$ Liczba powtórzeń elementu $\quad t =$ Liczba unikalnych elementów

Ile jest różnych ... | Na ile różnych sposobów można ...

1. ... rozsadzić przy okrągłym stole z $k + m$ miejscami k kobiet i m mężczyzn, tak by wszystkie kobiety siedziały obok siebie?

Ile jest różnych ... | Na ile różnych sposobów można ...

1. ... rozsadzić przy okrągłym stole z $k + m$ miejscami k kobiet i m mężczyzn, tak by wszystkie kobiety siedziały obok siebie?

Traktujemy kobiety jako jedną jednostkę przez co musimy ustawić m mężczyzn przy stole oraz grupę kobiet

Ustalamy kolejności kobiet

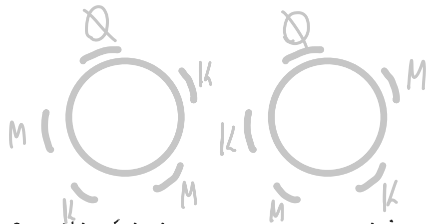
$$\frac{(m+1)! \cdot k!}{(m+1)} = m! \cdot k!$$

Dzielimy przez obroty stołu

2. ... rozsadzić przy okrągłym stole z $2n + 1$ miejscami n kobiet i n mężczyzn, tak by dwie osoby tej samej płci nie siedziały obok siebie?

Ile jest różnych ... | Na ile różnych sposobów można ...

2. ... rozsadzić przy okrągłym stole z $2n + 1$ miejscami n kobiet i n mężczyzn, tak by dwie osoby tej samej płci nie siedziały obok siebie?



2 możliwości pierwszego prawego miejsca
wolnego miejsca albo kobieta albo mężczyzna

Ustawienie mężczyzn

Wybranie pustego miejsca

Ustawienia kobiet

$$\frac{(2n+1)\cdot 2\cdot n!\cdot n!}{2n+1} = 2(n!)^2$$

Dzielimy przez obrót

Ile jest różnych ... | Na ile różnych sposobów można ...

3. ... rozmieścić m rozróżnialnych listów w m rozróżnialnych skrzynkach na listy, tak aby co najmniej 2 były puste?

Ile jest różnych … | Na ile różnych sposobów można …

3. … rozmieścić m rozróżnialnych listów w m rozróżnialnych skrzynkach na listy, tak aby co najmniej 2 były puste?

Rozmieszczenia wszystkie skrzynki zajęte

$$m^m - m! - \binom{m}{2} m!$$

Wszystkie możliwe rozmieszczenia

Rozmieszczenia 1 skrzynka wolna.

Ile jest różnych ... | Na ile różnych sposobów można ...

4. ... wybrać na wyprawę k spośród n rycerzy okrągłego stołu, jeśli nie wolno wybrać żadnych dwóch sąsiadów?

Ile jest różnych ... | Na ile różnych sposobów można ...

4. ... wybrać na wyprawę k spośród n rycerzy okrągłego stołu, jeśli nie wolno wybrać żadnych dwóch sąsiadów?

$$\binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k}{k}$$

5. . . . rozdać 12 nierozróżnialnych jabłek, 1 gruszkę i 1 śliwkę trójce dzieci, tak by każde dostało po przynajmniej jednym owocu?

Ile jest różnych ... | Na ile różnych sposobów można ...

5. ... rozdać 12 nierozróżnialnych jabłek, 1 gruszkę i 1 śliwkę trójce dzieci, tak by każde dostało po przynajmniej jednym owocu?

Rozdzielimy wynik ma 3 przypadki

Rozdzielenie 9 jabłek pomiędzy 2 przegródki. Przegródki zawierają już jedno jabłko dlatego 9 jabłek

3 możliwości trafienia do dziecka dla śliwki i gruszki

1 przypadek każde dziecko dostaje jabłko. Gruszka i śliwka może pójść dla każdego dziecka

$$\binom{11}{9} + 3^2 = 495$$

Wybieramy które dzieci dostaną jabłka

Z wszystkich możliwości rozdania śliwki i gruszek odejmujemy tę gdzie tylko dwójka dzieci dostanie

2 przypadek jabłko dostaje tylko 2 dzieci

$$\binom{11}{10} \cdot \binom{3}{2} \cdot \left(3^2 - 2^2\right) = 165$$

Wybieramy które dziecko dostanie jabłka

Pozostała dwójka dzieci możliwości śliwki i gruszki

3 przypadek jabłko dostaje tylko jedną osobą

$$\binom{11}{11}\binom{3}{1} \cdot 2 = 6$$

Motyw 2

$$495 + 165 + 6 = 666$$

Ile jest różnych ... | Na ile różnych sposobów można ...

6. ... całkowitoliczbowych nieujemnych rozwiązań równania $x_1+x_2+x_3+x_4=12$, takich, że $x_1 \geqslant 1$ i $x_3 \geqslant 2$?

Ile jest różnych … | Na ile różnych sposobów można …

6. … całkowitoliczbowych nieujemnych rozwiązań równania $x_1+x_2+x_3+x_4=12$, takich, że $x_1 \geqslant 1$ i $x_3 \geqslant 2$?

$$y_1 = x_1 - 1 \qquad y_1 \geqslant 0$$

$$y_3 = x_3 - 2 \qquad y_3 \geqslant 0$$

$$(y_1+1) + x_2 + (y_3+2) + x_4 = 12$$

$$y_1 + x_2 + y_3 + x_4 = 9$$

Kombinacja z powtórzeniami

$$\binom{9+4-1}{4-1} = \binom{12}{3} = 220$$

7. ... rozmieścić $6k$ osób przy dwóch prostokątnych stołach z ponumerowanymi miejscami mieszczących odpowiednio $4k$ i $2k$ osób, tak by dwie spośród nich, A i B, siedziały przy większym stole, a między nimi było dokładnie k innych osób?

Ile jest różnych ... | Na ile różnych sposobów można ...

7. ... rozmieścić $6k$ osób przy dwóch prostokątnych stołach z ponumerowanymi miejscami mieszczących odpowiednio $4k$ i $2k$ osób, tak by dwie spośród nich, A i B, siedziały przy większym stole, a między nimi było dokładnie k innych osób?

Wybór gdzie osoby A i B będą siedzieć

Wybór pozostałych osób do większego stołu

$$\binom{6k-2}{2k} \cdot 4k \cdot 2 \cdot (4k-2)! \cdot 2k! \cdot = 16k\,(4k-2)! \cdot \binom{6k-2}{2k}$$

Możliwości wyboru osób do mniejszego stołu

Możliwości usadzenia mniejszego stołu

8. ... najkrótszych dróg prowadzących do miejsca odległego o 5 przecznic na południe i 8 przecznic na wschód w mieście, w którym ulice tworzą idealnie równą kwadratową siatkę, jeśli z powodu upału nie da się iść dwie przecznice na południe pod rząd?

Ile jest różnych . . . | Na ile różnych sposobów można . . .

8. . . . najkrótszych dróg prowadzących do miejsca odległego o 5 przecznic na południe i 8 przecznic na wschód w mieście, w którym ulice tworzą idealnie równą kwadratową siatkę, jeśli z powodu upału nie da się iść dwie przecznice na południe pod rząd?

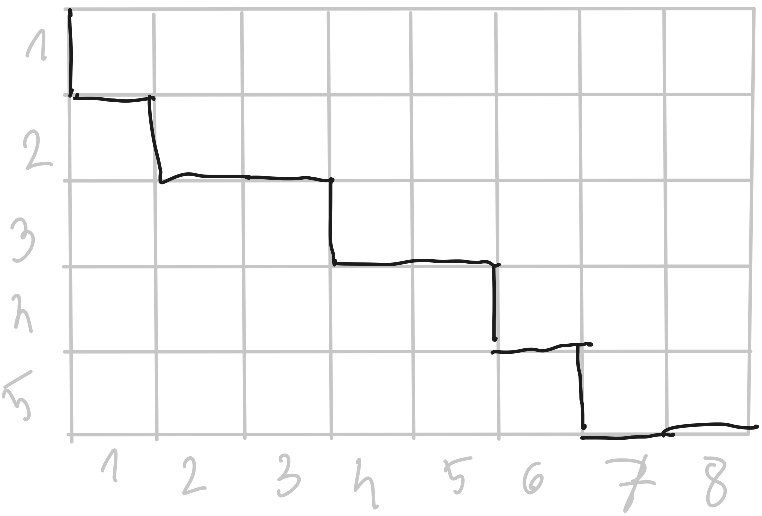
$\downarrow$ 0

$\rightarrow$ 1

0 0 0 0 0

1 1 1 1 1 1 1 1

0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1



_ 1 _ 1 _ 1 _ 1 _ 1 _ 1 _ 1 _ 1 _

W 9 miejsc między 1 mogę wstawić 5 zer

$$\binom{9}{5}$$

3

Zasada szufladkowa dirichleta

Teoria

Zasada pudelkowania

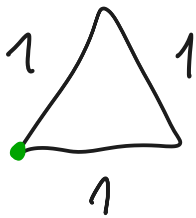
Jeśli n +1 obiektów zostanie umieszczonych w n pudełkach to wśród pudełek znajdzie się takie które zawiera conajmniej 2 elementy

1. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z kolorów: czerwony lub zielony. Wykaż, że istnieją dwa punkty tego samego koloru odległe od siebie o 1.

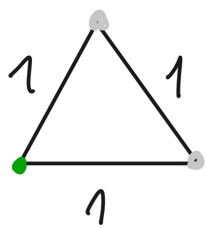
1. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z kolorów: czerwony lub zielony. Wykaż, że istnieją dwa punkty tego samego koloru odległe od siebie o 1.

Powiedzmy ze nie istnieją

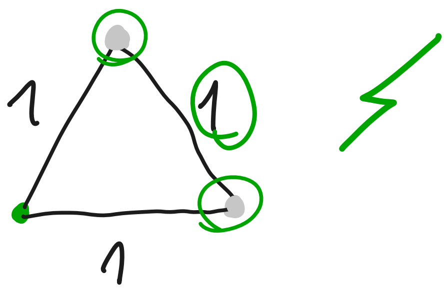
Wybieramy punkt na płaszczyźnie i ustalamy że jest to wierzchołek trójkąta równobocznego o boku 1



Skoro nie ma kolorow odległych od siebie o 1 cm to przeciwne wierzchołki muszą być drugiego koloru



Wiemy jednak że skoro nie ma puntkow odległych od sb o 1 cm to te wierzchołki nie mogą być tego samego koloru co prowadzi nas do sprzeczności



Rosnotes

2. Udowodnij, że w dowolnej grupie $n+2$ różnych liczb całkowitych są dwie, których różnica lub suma dzieli się przez $2n$.

2. Udowodnij, że w dowolnej grupie $n+2$ różnych liczb całkowitych są dwie, których różnica lub suma dzieli się przez $2n$.

Tworzymy n + 1 szufladek w postaci

$$\{0\}, \{1, 2n-1\}, \{2, 2n-2\}, \ldots, \{n-1, n+1\}, \{n\}$$

Teraz rozważamy reszty z dzielenia przez 2n zadanych liczb. Szufladek jest n+1 a reszt n + 2 więc będzie szufladka z 2 elementami

$$\{i, 2n-i\}$$

Prostą zauważyć że taka liczba w sumie lub w różnicy będzie dawała liczbę podzielna przez 2n

3. Udowodnij, że wśród k punktów dowolnie wybranych z koła o promieniu 1 są dwa, których odległość nie przekracza 1, jeżeli

   a) $k = 7$.

   b) $k = 6$.

3. Udowodnij, że wśród k punktów dowolnie wybranych z koła o promieniu 1 są dwa, których odległość nie przekracza 1, jeżeli

a) $k = 7$.

b) $k = 6$.

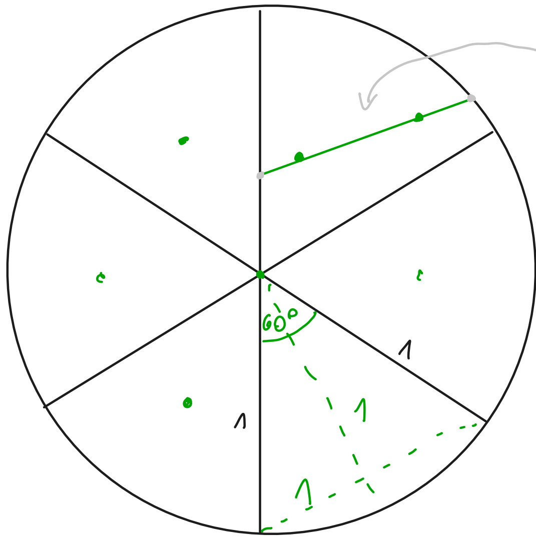
A)

Podzielimy na równe 6 części.

W taki sposób mamy obszary w których jakąkolwiek odległości nie przekracza jeden.

W przypadkach brzegowych takich jak ustawienie na krańcach odległości jest dokładnie jeden bo mamy tam trójkąt równoboczny

Obszarów mamy 6 punktów 7 wiec z zasady pudełkowania jest to spełnione



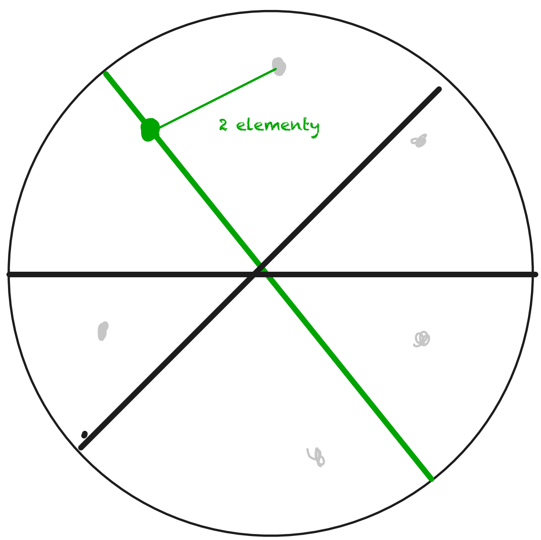
Odległości jest co najwyżej jeden bo prowadząc prosta przechodząca przez oba punkty to odległości jest mniejsza niż odległości tych 2 punktów granicznych
A punkty graniczne już udowodniliśmy że nie może być większa niż 1

B)

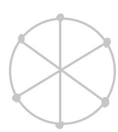
Wybieramy jeden punkt i przez niego prowadzimy podział na 6 części

Takim sposobem jeden punkt jest jednocześnie w 2 miejscach

Takim sposobem mamy 6 obszarów a każdy obszar sumarycznie ma conajmniej 7 punktów więc z zasady pudełkowania jest to spełnione



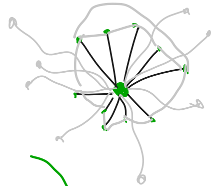
Napisałem conajmniej bo idąc tym tokiem myślenia w przypadku takim że punkty są na przecięciach to każdy z punktów jest w 2 wiec mamy 12 punktów sumarycznie



4. W pewnym kraju jest 66 miast. Każde dwa połączone są jednym z czterech środków komunikacji (kolej, autobus, statek, samolot). Wykaż, że istnieją trzy miasta, takie, że można odbyć podróż pomiędzy nimi "po trójkącie" używając tylko jednego środka komunikacji.

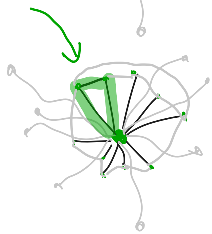
4. W pewnym kraju jest 66 miast. Każde dwa połączone są jednym z czterech środków komunikacji (kolej, autobus, statek, samolot). Wykaż, że istnieją trzy miasta, takie, że można odbyć podróż pomiędzy nimi "po trójkącie" używając tylko jednego środka komunikacji.

Wyróżnijmy jeden z tych punktów i nazwijmy go X, jest on połączony z każdym z pozostałych 65 punktów, wówczas z zasady pudełkowania przynajmniej 17 z nich jest z X połączonych tym samym transportem.



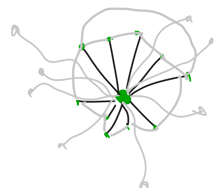
17 połączeń takich samych

Jeśli którekolwiek z opisanych wyżej punktów są połączone tym środkiem transportu, to razem z punktem X tworzą one trójkąt.



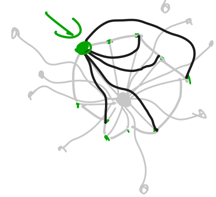
Wśród nich jedno takie same

W przeciwnym przypadku wszystkie 17 punktów jest połączonych wyłącznie za pomocą innego środku transportu.



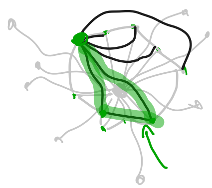
Nie są takie same więc od nowa to samo zadanie ale z 3 środkami transportu i 17 punktami

Wybierzmy teraz jeden z tych punktów i oznaczmy go Y, jest on połączony z pozostałymi 16 więc z zasady — pudełkowania przynajmniej sześć z nich łączy się z Y tym samym środkiem.



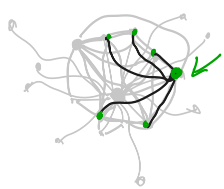
6 połączeń takich samych

Jeśli z tych sześciu punktów którekolwiek dwa połączone są Tym Samym, to razem z Y tworzą one trójkąt



Wśród nich jedno takie same

W przeciwnym przypadku mamy sześć punktów, które łączą się jedyne za pomocą dwóch pozostałych środków transportu, więc z zasady pudełkowania musi być conajmniej 3 połączone tym samym transportem



I od nowa to samo zadanie ale z 2 środkami transportu i 6 punktami

W tych 3 albo jest jedno połączenie takie same i mamy trójkąt

Albo wszystkie są innego tego ostatniego transportu, czyli mamy 3 połączenia tego samego typu co daje trójkąt

5. Wykaż, że w dowolnym ciągu n liczb naturalnych można wskazać pewną liczbę kolejnych wyrazów, których suma jest podzielna przez n.

5. Wykaż, że w dowolnym ciągu n liczb naturalnych można wskazać pewną liczbę kolejnych wyrazów, których suma jest podzielna przez n.

Rozważmy zbiór sum ciągów

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_k = a_1 + a_2 + \ldots a_k$$

Jeśli jakaś suma dzieli się przez n to mamy tezę

W innym przypadku reszta z dzielenia przez n może być na n-1 przypadków

Mamy n sum oraz n - 1 możliwych reszt więc wiemy że jakieś sumy są równe modulo n

Wówczas to oznacza

$$S_j \equiv S_i \pmod{n} \quad j > i$$

$$n \mid S_j - S_i$$

$$n \mid (a_1 + a_2 + \ldots a_j) - (a_1 + a_2 + \ldots a_i)$$

$$n \mid (a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_j)$$

$$n \mid \sum_{k=i+1}^{j} a_k$$

6. Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej istnieje taka jej niezerowa wielokrotność, którą można zapisać w systemie dziesiętnym używając wyłącznie cyfr 0 i 1.

6. Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej istnieje taka jej niezerowa wielokrotność, którą można zapisać w systemie dziesiętnym używając wyłącznie cyfr 0 i 1.

N = nasza liczba

Pythonowa składnia

Zabieramy n + 1 liczba złożonych z samych 1 $A = \{1, 11, 111, \ldots, 1 * N{+}1\}$

Z zasady pudełkowania wiemy że 2 z nich dają taką samą resztę bo mamy n reszt oraz n+1 liczb

$A_i \equiv A_j \pmod{n} \qquad A_i > A_j$

$N \mid A_i - A_j$

Liczba ta jest złożona z samych zer i jedynek

Przykład $n = 3$

$A = \{1, 11, 111, 1111\}$

Reszty = $\{\underline{1}, 2, 0, \underline{1}\}$

Wyniki = $1111 - 1 = 1110$

$3 \cdot k = 1110$

$\underline{k = 370}$

Rosnotes

7. Uzasadnij, że istnieje niezerowa liczba całkowita k, dla której cześć ułamkowa (*mantysa* x czyli $x - \lfloor x \rfloor$) liczby $k\sqrt{2}$ jest mniejsza od 0,01.

7. Uzasadnij, że istnieje niezerowa liczba całkowita k, dla której cześć ułamkowa (*mantysa* x czyli $x - \lfloor x \rfloor$) liczby $k\sqrt{2}$ jest mniejsza od 0,01.

$$A_i = \left[\frac{i}{100}, \frac{i+1}{100}\right) \qquad 0 \leq i \leq 100$$

$$a_i = k \cdot \sqrt{2} \qquad 1 \leq i < 103$$

co daje nam sto jeden liczb, więc dwie z nich trafiają do jednego zbioru Ai (oznaczmy je ai1 oraz ai2),

$$a_{i2} - a_{i1} < 0{,}01 \quad : \quad a_{i2} > a_{i1}$$

Rosnotes

8. Wykaż, że z dowolnego zbioru n liczb całkowitych $(n \geqslant 3)$ da się wybrać trzy parami różne elementy a, b, c w taki sposób, ze liczba $a(b-c)$ jest podzielna przez n.

8. Wykaż, że z dowolnego zbioru n liczb całkowitych ($n \geqslant 3$) da się wybrać trzy parami różne elementy a, b, c w taki sposób, ze liczba $a(b-c)$ jest podzielna przez n.

Analizuje zbiór reszt z dzielenia n przez zbiór $R = Z \bmod N$

Jeśli jakaś reszta równa się n to teza jest spełniona bo ustalam że ta liczba to a i mamy podzielności przez n $\longrightarrow N \mid R_0 (b-c)\ \forall_{b,c} \in Z$

$N \mid Z_0 (b-c)$

Teraz zakładając że żadna reszta nie równa się n. Mamy n - 1 reszt a liczb n więc wiem że jakaś reszta się powtarza z zasady pudełkowania

$$R_i \equiv R_j \pmod N \quad R_i > R_j$$

$$N \mid R_i - R_j$$

$$N \mid a(R_i - R_j) \quad \forall a \in Z$$

$$N \mid a(Z_i - Z_j)$$

4

Zasada włączeń i wyłączeń

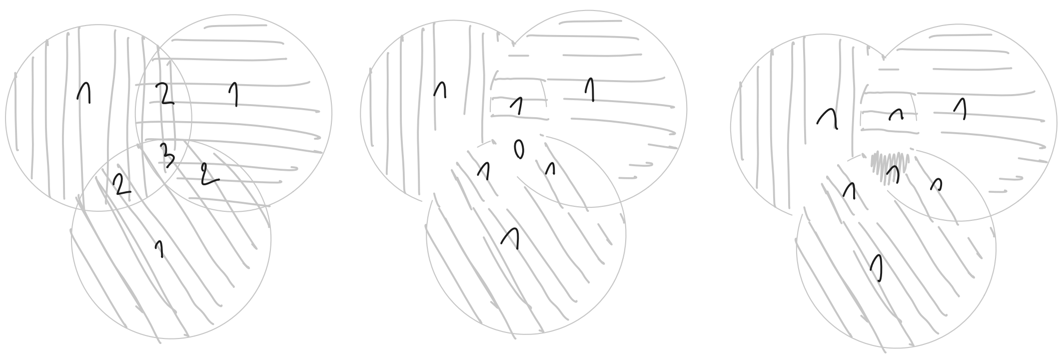
Teoria

Liczba elementów sumy zbiorów

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_t| =$$

$$\sum_{1 \leq i \leq t} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq t} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j \leq k \leq t} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{t+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_t|.$$

$\sum A_i \quad - \quad \sum A_i \cap A_j \quad + \quad \sum A_i \cap A_j \cap A_k$



Ile jest różnych ... | Na ile różnych sposobów można ...

1. ... dzielników liczby 10! podzielnych przez 20, 24 lub 32?

Ile jest różnych … | Na ile różnych sposobów można …

1. … dzielników liczby 10! podzielnych przez 20, 24 lub 32?

$$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$$

$$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot (2 \cdot 5)$$

$$10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$$

A Dzielniki podzielne przez 20 $\frac{10!}{20} = \frac{2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7}{2^2 \cdot 5} = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$

+1

$2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \xrightarrow{\text{Dzielników jest tyle ile mamy możliwości dobrania liczb}} 7 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$

B Dzielniki podzielne przez 24 $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \to 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

C Dzielniki podzielne przez 32 $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \to 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2$

$$|A \cap B| = \frac{10!}{NWW\ (20,24)} = \frac{2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7}{2^3 \cdot 3 \cdot 5} = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \to 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2$$

$$|A \cap C| = \frac{10!}{160} = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \to 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$$

$$|B \cap C| = \frac{10!}{96} = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \to 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2$$

$$|A \cap B \cap C| = \frac{10!}{480} = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \to 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$140 + 144 + 120 - 96 - 80 - 96 + 64 = 196$$

Rosnotes

Ile jest różnych ... | Na ile różnych sposobów można ...

2. ... rozsadzić cztery małżeństwa przy okrągłym stole, tak aby by nikt nie siedział obok swojego małżonka?

Ile jest różnych ... | Na ile różnych sposobów można ...

2. ... rozsadzić cztery małżeństwa przy okrągłym stole, tak aby by nikt nie siedział obok swojego małżonka?

Wszystkie możliwości okrągłego stołu

$$\frac{8!}{8} = 7!$$

Para może zmieniać się miejscami

$$|P_i| = 2 \cdot \frac{7!}{7}$$

Okrągły stół gdzie uznajemy małżeństwo ‚i' za jedną jednostkę

$$|P_i \cap P_j| = 2^2 \frac{6!}{6}$$

$$|P_i \cap P_j \cap P_k| = 2^3 \frac{5!}{5}$$

$$|P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4| = 2^4 \cdot \frac{4!}{4}$$

Dobór małżeństw siedzących obok siebi

$$7! - \binom{4}{1} 2 \cdot 6! + \binom{4}{2} 4 \cdot 5! - \binom{4}{3} \cdot 8 \cdot 4! + \binom{4}{4} \cdot 16 \cdot 3! =$$

$$5040 - 5760 + 2880 - 768 + 96 =$$

$$1488$$

Rosnotes

3. ... rozsadzić cztery kobiety i czterech mężczyzn przy okrągłym stole, tak aby żadne dwie kobiety nie siedziały naprzeciw siebie?

Ile jest różnych . . . | Na ile różnych sposobów można . . .

3. . . . rozsadzić cztery kobiety i czterech mężczyzn przy okrągłym stole, tak aby żadne dwie kobiety nie siedziały naprzeciw siebie?

https://matematykaszkolna.pl/forum/380628.html

1152

4. ... ciągów długości n złożonych z cyfr $\{0, 1, \ldots, 9\}$, w których każda z cyfr $1, 3, 6$ występuje co najmniej raz?

Ile jest różnych … | Na ile różnych sposobów można …

4. … ciągów długości n złożonych z cyfr $\{0, 1, \ldots, 9\}$, w których każda z cyfr $1, 3, 6$ występuje co najmniej raz?

Ciągi nie posiadające 1 oraz 3

Wszystkie ciągi

Ciągi nie posiadające 3

Ciągi nie posiadające 1 6 9

Ciągi nie posiadające 1

$$10^n - 9^n - 9^n - 9^n + 8^n + 8^n + 8^n - 7^n$$

$$10^n - 3 \cdot 9^n + 3 \cdot 8^n - 7^n$$

5. . . . zestawów składających się z 11 owoców, jeżeli mamy do dyspozycji 13 bananów, 10 jabłek i 4 pomarańcze, a każdy zestaw musi zawierać przynajmniej dwa banany i nie może zawierać więcej niż trzy jabłka?

Ile jest różnych … | Na ile różnych sposobów można …

5. … zestawów składających się z 11 owoców, jeżeli mamy do dyspozycji 13 bananów, 10 jabłek i 4 pomarańcze, a każdy zestaw musi zawierać przynajmniej dwa banany i nie może zawierać więcej niż trzy jabłka?

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

$2 \leq x_1 \leq 13$ Banany

$x_2 \leq 3 \leq 10$ Jabłka

$x_3 \leq 4$ Pomarańcze

$y_1 = x_1 - 2, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 9$$

$|X| = \binom{9+3-1}{9} = 55$ Kombinacje z powtórzeniami

$P_1 \to 14$ BANANÓW $\to 0$

$P_2 \to 4$ JABŁKA $\to \binom{7}{5} = 21$ $\binom{11-4}{9-4}$

$P_3 \to 5$ POMARAŃCZY $\to \binom{6}{4} = 15$

$P_1 \cap P_2 \to 0$

$P_1 \cap P_3 \to 0$

$P_2 \cap P_3 \to 1$

$P_1 \cap P_2 \cap P_3 \to 0$

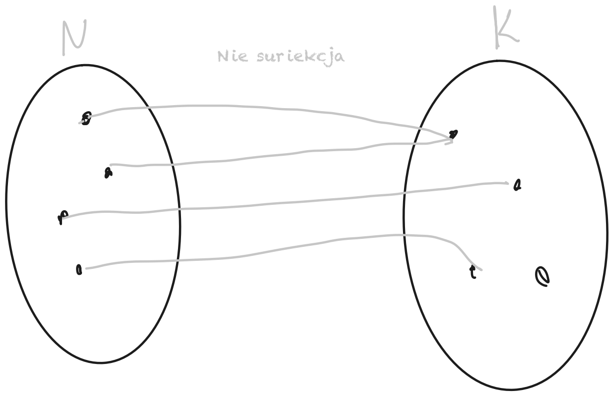
$$55 - 0 - 21 - 15 + 1 = 20$$

Rosnotes

6. ... funkcji ze zbioru n-elementowego na k-elementowy, które nie są surjekcjami?

Ile jest różnych … | Na ile różnych sposobów można …

6. … funkcji ze zbioru n-elementowego na k-elementowy, które nie są surjekcjami?



$$K^N - \left(\sum_{i=0}^{N} (-1)^i \binom{K}{i} \cdot (K-i)^N \right) \qquad K \geq N$$

Wszystkie funkcje

Wszystkie suriekcje

(Wyprowadzone na wykładzie)

Ile jest różnych ... | Na ile różnych sposobów można ...

7. ... ciągów długości $2n$ takich, że każda liczba $i \in \{1, \dots, n\}$ występuje dokładnie dwa razy, przy czym żadne dwa kolejne wyrazy nie są równe?

Ile jest różnych … | Na ile różnych sposobów można …

7. … ciągów długości $2n$ takich, że każda liczba $i \in \{1, \ldots, n\}$ występuje dokładnie dwa razy, przy czym żadne dwa kolejne wyrazy nie są równe?

Liczba wszystkich ciągów

Liczba wszystkich ciągów z dwoma parami liczb sklejonych

$$\frac{2N}{2^N} - \left(\binom{N}{1} \frac{(2N-1)!}{2^{N-1}} - \binom{N}{2} \frac{(2N-2)!}{2^{N-2}} + \ldots + (-1)^{n+1} \binom{N}{N} N! \right)$$

Liczba wszystkich ciągów z jedną parą liczb sklejonych

8. ... informatyków, filozofów i ludożerców na pewnej wyspie, na której mieszka 300 dzikusów, z których każdy jest informatykiem, filozofem lub ludożercą, jeżeli połowa ludożerców to filozofowie, połowa filozofów to informatycy, połowa informatyków to ludożercy, a żaden z ludożerców nie zajmuje się filozofią i informatyką jednocześnie?

Ile jest różnych ... | Na ile różnych sposobów można ...

8. ... informatyków, filozofów i ludożerców na pewnej wyspie, na której mieszka 300 dzikusów, z których każdy jest informatykiem, filozofem lub ludożercą, jeżeli połowa ludożerców to filozofowie, połowa filozofów to informatycy, połowa informatyków to ludożercy, a żaden z ludożerców nie zajmuje się filozofią i informatyką jednocześnie?

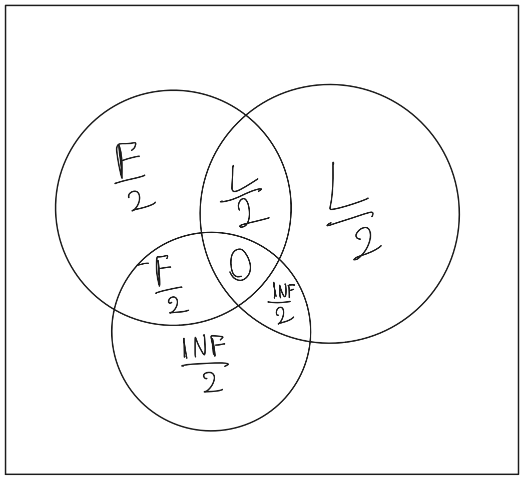
$$L \cup INF \cup F = 300$$

$$L \cap INF \cap F = 0$$

$$\frac{F}{2} \geq \frac{L}{2}$$

$$\frac{INF}{2} \geq \frac{F}{2}$$

$$\frac{L}{2} \geq \frac{INF}{2}$$



$$\frac{L}{2} \geq \frac{INF}{2} \geq \frac{F}{2} \geq \frac{L}{2}$$

$$\frac{F}{2} = \frac{INF}{2} = \frac{L}{2}$$

$$F = INF = L = \frac{300}{3} = 100$$

100 informatyków, 100 filozofów, 100 ludożerców

Motyw 3

Logo Rosnotes na githubie

5

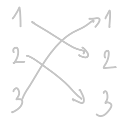
Podziały i nieporządki

Teoria

Permutacja nie przeprowadzająca wartości w samą siebie

Nieporządek

$$1 \leqslant i \leqslant N \quad f(i) \neq i$$



Liczba nieporządków zbioru n elemtowego

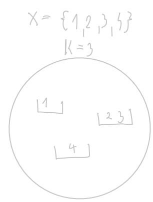
$$D_N = \sum_{i=0}^{N} (-1)^i \binom{N}{i} (N-i)!$$

Podział n elementowego zbioru X na k bloków

$$X = \{B_1, B_2 \ldots B_K\}$$

$$B_i \neq \emptyset, \quad B_i \cap B_j = \emptyset,$$

$$B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_K = X$$



Liczba podziałów zbioru n elementowego na k bloków

Liczba Stirlinga drugiego rodzaju

$$S(N,K) = S(N-1,K-1) + K \cdot S(N-1,K) \qquad 0 < K < N$$

$$S(N,N) = 1 \qquad N \geqslant 0$$

$$S(N,0) = 0 \qquad N > 0$$

Liczba podziałów zbioru n elementowego

Liczba Bella

$$B(N) \sum_{K=0}^{N} S(N,K)$$

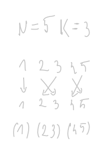
Liczba możliwych k cykli permutacji n elementowej

Liczba Stirlinga pierwszego rodzaju

$$s(N,K) = s(N-1,K-1) + (N-1) \cdot s(N-1,K) \qquad 0 < K < N$$

$$s(N,N) = 1 \qquad N \geqslant 0$$

$$s(N,0) = 0 \qquad N > 0$$



Teoria

Podział liczby n na k składników

$N=10 \quad K=3$

$10 = 5, 4, 1$
$10 = 6, 3, 1$
$10 = 3, 3, 4$
$10 = \ldots$

$$\langle u_1, u_2 \ldots u_k \rangle$$

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3$$

$$u_1 + u_2 + \ldots u_k = N$$

Liczba podziałów

Liczba k podziałów

$$P(N, K)$$

$$P(N, K) = 0 \qquad N < K$$

$$P(N, N) = 1 \qquad N \geq 0$$

$$P(N, 0) = 0 \qquad N > 0$$

$$P(N, K) = \sum_{i=0}^{K} P(N-K, i)$$

Liczba podziałów

$$P(N)$$

$$P(0, 0) = 1$$

$$P(N) = \sum_{K=0}^{N} P(N, K)$$

Ile jest różnych ... | na ile różnych sposobów można ...

1. ... ulokować n osób w dokładnie k spośród m ponumerowanych pokoi?

Ile jest różnych … | na ile różnych sposobów można …

1. … ulokować n osób w dokładnie k spośród m ponumerowanych pokoi?

Wybór pokoi

Numeracja pokoi

$$\binom{m}{k} \cdot S(n,k) \cdot k!$$

Rozłożenie pokoi

Ile jest różnych ... | na ile różnych sposobów można ...

2. ... liczb co najwyżej 20-cyfrowych, które zawierają wszystkie 10 cyfr?

Ile jest różnych ... | na ile różnych sposobów można ...

2. ... liczb co najwyżej 20-cyfrowych, które zawierają wszystkie 10 cyfr?

Pudełka na liczby w których jest miejsce w liczbę gdzie się będzie znajdywać

Ustawienie reszty pudelek

$$\sum_{k=10}^{20} \left(S(k,10) \cdot 9 \cdot 9! \right)$$

Wybieramy pudełko które zawiera pozycję 0 mamy 9 takich pudełek bo nie możemy wybrać pudełka z pierwszym indeksem

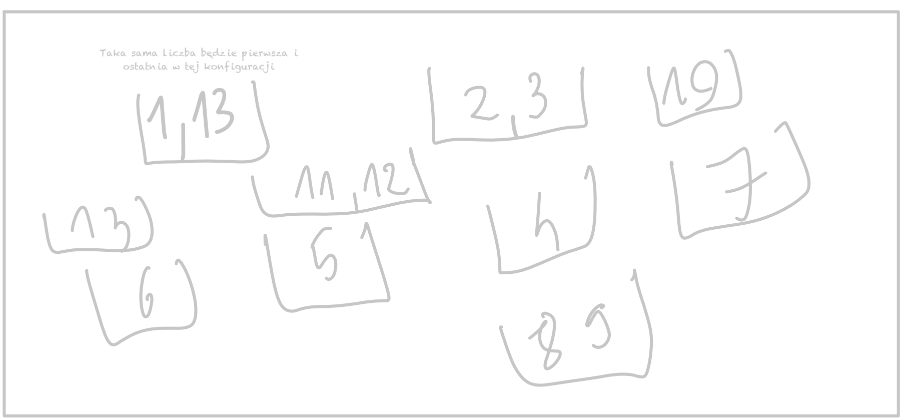
Przykład

Nie może do pudełka z indeksem jeden

Liczby 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

$K=13$

Pudełka pozycji



Ile jest różnych ... | na ile różnych sposobów można ...

3. ... składać w listopadzie codzienne wizyty u jednej z 12 koleżanek, tak by ostatecznie odwiedzić wszystkie z nich?

Ile jest różnych … | na ile różnych sposobów można …

3. … składać w listopadzie codzienne wizyty u jednej z 12 koleżanek, tak by ostatecznie odwiedzić wszystkie z nich?

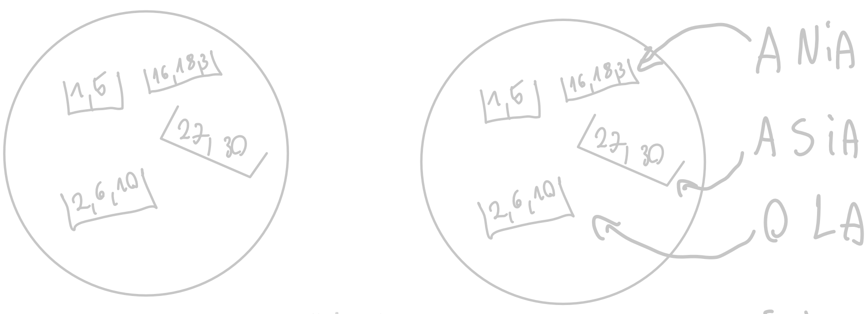
Dobieramy koleżanki do pudełka

$$S(30,12)\cdot 12!$$

12 pudełek z 30 dniami

Powinno być 12 pudełek
Oraz 30 dni

Wybieramy dwunastu
koleżankom jedno pudełko



Motyw 4
Król rocka, hip-hopu i disco Polo

Ile jest różnych ... | na ile różnych sposobów można ...

4. ... przydzielić 12 z 20 rycerzy do obrony dokładnie 3 z 4 baszt zamku?

Ile jest różnych … | na ile różnych sposobów można …

4. … przydzielić 12 z 20 rycerzy do obrony dokładnie 3 z 4 baszt zamku?

Rycerze

Zamki

Składy rycerzy

Jaki skład do jakiego zamku

$$\binom{20}{12}\binom{4}{3} S(12,3)\cdot 3!$$

Ile jest różnych ... | na ile różnych sposobów można ...

5. ... kapitan piratów może ukryć skarb złożony z tysiąca złotych dukatów w 13 identycznych dostatecznie dużych skrzyniach?

Ile jest różnych . . . | na ile różnych sposobów można . . .

5. . . . kapitan piratów może ukryć skarb złożony z tysiąca złotych dukatów w 13 identycznych dostatecznie dużych skrzyniach?

Może użyć od 1 do 13 skrzyń

Podział liczby 1000 na i skrzyń

$$\sum_{i=1}^{13} P(1000 \mid i)$$

Rosnotes

6. . . . rozmieścić w n skrytkach zapasowe klucze do nich tak, aby w każdej był jeden klucz i tak by istniało k takich skrytek, do których włamanie się pozwoli otworzyć wszystkie pozostałe?

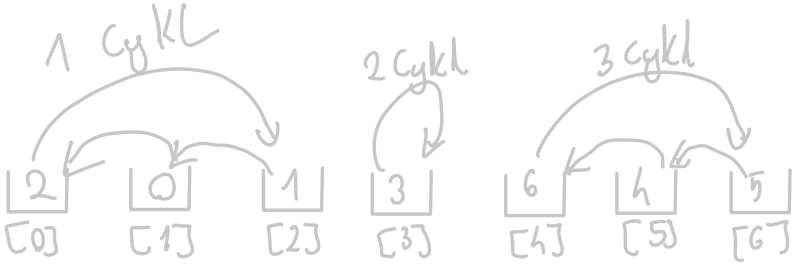
Ile jest różnych . . . | na ile różnych sposobów można . . .

6. . . . rozmieścić w n skrytkach zapasowe klucze do nich tak, aby w każdej był jeden klucz i tak by istniało k takich skrytek, do których włamanie się pozwoli otworzyć wszystkie pozostałe?

Stirling 1 rodzaju do tworzenia cykli max k elementowych

$$\sum_{i=1}^{k} s(N, i)$$

Do 1 do k aby otworzyć wszystkie cykle



W przykładzie 3 klucze wystarczą

Ile jest różnych ... | na ile różnych sposobów można ...

7. ... permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ mających k cykli, takich, że jedynka jest w cyklu l-elementowym?

Ile jest różnych … | na ile różnych sposobów można …

7. … permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ mających k cykli, takich, że jedynka jest w cyklu l-elementowym?

Wybieram elementy do stołu z jedynką

Pozostałe cykle pomniejsze o elementy z cyklu z jedynką

$$\binom{N-1}{L-1} \cdot (L-1)! \cdot S(n-L, K-1)$$

Permutacja jest okrągłym stołem więc liczę liczbę ustawień permutacji z jedynką

Ile jest różnych ... | na ile różnych sposobów można ...

8. ... permutacji zbioru A, w których liczby parzyste są na przemian z nieparzystymi i nie ma punktów stałych, gdy:

   a) $A = \{1, 2, \ldots, 9\}$?

   b) $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$?

Ile jest różnych ... | na ile różnych sposobów można ...

8. ... permutacji zbioru A, w których liczby parzyste są na przemian z nieparzystymi i nie ma punktów stałych, gdy:

   a) $A = \{1, 2, \ldots, 9\}$?

   b) $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$?

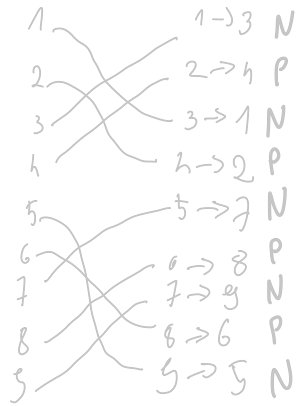
a)

Nieporządek nieparzystych

$$D_4 \cdot D_5$$

Nieporządek parzystych

Nieparzystych jest mniej więc muszą być na początku i końcu



B)

Przypadek jak zaczynamy od parzystej bierzemy liczbę permutacji bo identyczności i tak nie będzie bo parzyste idą w nieparzyste i na odwrót

$$(D_5 \cdot D_5) + (5! \cdot 5!)$$

Przypadek jak zaczynamy od nieparzystych bierzemy nieporządek aby nie mieć identyczności

Ile jest różnych ... | na ile różnych sposobów można ...

9. ... podać obiad $2n$ osobom, z których każda zamówiła inną zupę i inne drugie danie, tak aby połowa z nich dostała swoją zupę, ale nie swoje drugie danie, a druga połowa odwrotnie?

Ile jest różnych … | na ile różnych sposobów można …

9. … podać obiad $2n$ osobom, z których każda zamówiła inną zupę i inne drugie danie, tak aby połowa z nich dostała swoją zupę, ale nie swoje drugie danie, a druga połowa odwrotnie?

Nie dostaną swoich zup

$$\binom{2n}{n} D_n D_n$$

Dzielimy na połowy

Nie dostaną swojego 2 dania

6

Ciągi rekurencyjne

Teoria

Liniowe równanie rekurencyjne stopnia k

$$h_n = a_1 h_{N-1} + a_2 h_{N-2} + \ldots + a_k h_{N-k} + B \quad (n \geq k)$$

Wartości początkowe

Są potrzebne do wyznaczenia równania

$$h_0, h_1 \ldots h_k$$

Równanie rekurencyjne homogeniczne

Wyraz wolny jest równy 0

$$B = 0$$

Równanie rekurencyjne ze stałymi współczynnikami

$$a_1, a_2 \ldots a_k =$$ Liczba Stała

Wielomian charakterystyczny

$$X^k - a_1 X^{k-1} - a_2 X^{k-2} \ldots a_k = 0$$

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$$
$$\Downarrow$$
$$R^2 - 2R - 1 = 0$$

Pierwiastki charakterysytyczne

Pierwiastki wielomianu charakterystycznego

Ogólna postać rozwiązania dla q1,q2...qk pierwiastków rozwiązania

$$h_n = C_1 q_1^N + C_2 q_2^N + \ldots C_k q_k^N$$ Różne pierwiastki

$$h_n = C_1 q_1^N + C_2 N^1 q_2^N + C_3 N^2 q_3^N + \ldots C_k N^k q_k^N$$ Dla takich samych pierwiastkowm

$$h_n = C_1 q_1^N + C_2 N^1 q_2^N + C_3 N^2 q_3^N + C_4 q^N$$ Przykład gdy q1=q2=q3, q4 !=q1

Stałe c wylicza się podstawiając równanie do wartości początkowych

Teoria

Rozwiązanie niehomogenicznego równania rekurencyjnego

$a_n = a_{n-1} + 5n$

1) Podajemy postać ogólną równania jakby było homogeniczne czyli usuwamy wyraz wolny

$$h_n = h_{n-1} + \cancel{2(n-1)}$$

2) Rozwiązujemy równanie podstawiając za Rozwiązanie współczynnik wielomianowy lub wykładniczy

$$h_n = h_{n-1} + 2(n^1 - 1) \longrightarrow an^1 + b = a(n-1) + b + 2(n-1)$$

W przypadku gdy rozwiązanie tego wielomianu będzie zależne od n to przyjmujemy współczynnik o większy stopniu

$$h_n = h_{n-1} + 3 \cdot 2^n \longrightarrow a2^n = a2^{n-1} + 3 \cdot 2^n$$

3) Łączymy oba rozwiązania z wykorzystaniem wartości początkowych

$$h_{0,1\ldots} = 1) + 2)$$

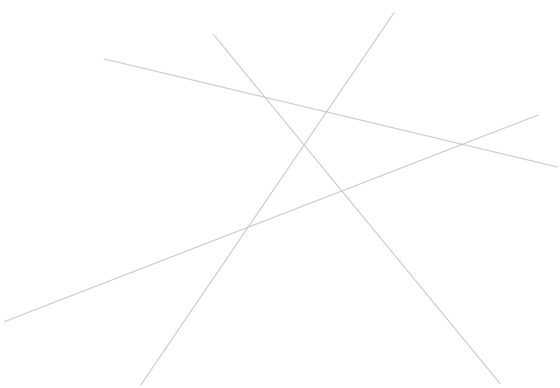
1. Na ile obszarów dzieli płaszczyznę n prostych, z których żadne dwie nie są równoległe, ani żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie? Znajdź zależność rekurencyjną.

1. Na ile obszarów dzieli płaszczyznę n prostych, z których żadne dwie nie są równoległe, ani żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie? Znajdź zależność rekurencyjną.

Nowa linia się z
każdą przecina
tworząc nowy obszar

$$\begin{cases} A_0 = 1 \\ A_N = A_{N-1} + N \end{cases}$$

Tyle ile było obszarów poprzednio



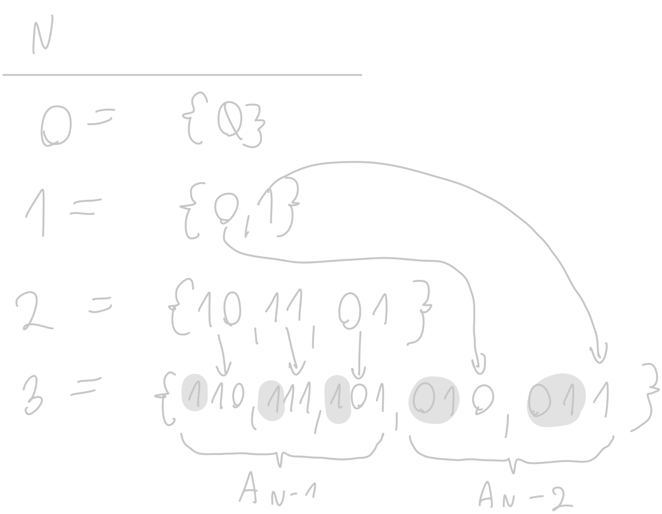
2. Ile jest różnych ciągów binarnych długości n, w których nie ma dwóch kolejnych zer? Znajdź zależność rekurencyjną.

2. Ile jest różnych ciągów binarnych długości n, w których nie ma dwóch kolejnych zer? Znajdź zależność rekurencyjną.

Ciąg zaczyna się od 0 jak następna jest jedynka więc do każdego z ciągów o 2 poprzednie dodaje „01”

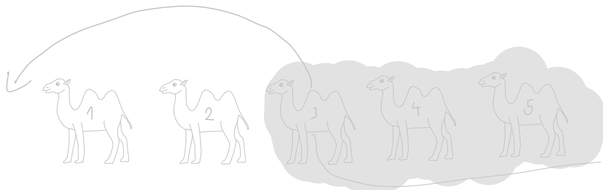
$$\begin{cases} A_0 = 1 \\ A_1 = 2 \\ A_N = A_{N-1} + A_{N-2} \end{cases}$$

Do każdego ciągu poprzedniego możemy dodać 1 na początek



3. Na ile różnych sposobów można przestawić karawanę idących przez pustynię jednym rzędem n wielbłądów, aby każdemu zmienić widok (tzn. aby żaden wielbłąd nie szedł za wielbłądem za którym szedł dotąd i by pierwszy wielbłąd nie szedł pierwszy)? Znajdź zależność rekurencyjną.

3. Na ile różnych sposobów można przestawić karawanę idących przez pustynię jednym rzędem n wielbłądów, aby każdemu zmienić widok (tzn. aby żaden wielbłąd nie szedł za wielbłądem za którym szedł dotąd i by pierwszy wielbłąd nie szedł pierwszy)? Znajdź zależność rekurencyjną.



Wybieramy wielbłąda na nowy początek

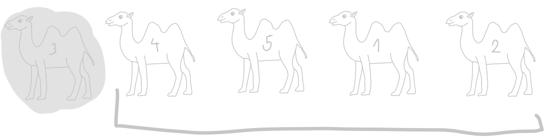
$$A_1 = 0$$

$$A_2 = 1$$

$$A_N = (N-1)\cdot(A_{N-1} + A_{N-2}) = D_N$$

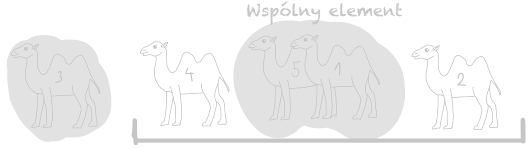
Od nowa permutujemy dla pozostałych n-1 elementów

Dodajemy permutacje gdzie ostatni jest za pierwszym więc sklejam te wielbłądy i obliczamy permutacje dla n-2 Elementów



A_{N-1}

Wspólny element



A_{N-2}

Poprawności wzoru sprawdzona na skrypcie pythonowym liczącym te permutacje

$A_1 = 0,\ A_2 = 1,\ A_3 = 2,\ A_4 = 9,\ A_5 = 44,\ A_6 = 265,\ A_7 = 1854$

4. Znajdź i uzasadnij zależność rekurencyjną na:

   a) liczbę Stirlinga I rodzaju
   b) liczbę Stirlinga II rodzaju
   c) liczbę nieporządków
   d) liczbę podziałów liczby n na k składników dodatnich

4. Znajdź i uzasadnij zależność rekurencyjną na:

   a) liczbę Stirlinga I rodzaju
   b) liczbę Stirlinga II rodzaju
   c) liczbę nieporządków
   d) liczbę podziałów liczby n na k składników dodatnich

el

Tworzymy cykle bez elementu

A)

Na początku Wybieram element

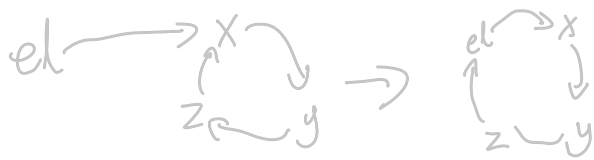
Element może być pojedynczym cyklem, identyczności

$$S_I(N,K) = S_I(N-1,K-1) + ((N-1)\cdot S_I(N-1,K))$$

$$S_I(N,N) = 1$$

$$S_I(N,0) = 0$$

Wybieramy na jaki inny element nasz elementy będzie wskazywać aby potem „wcisnąć" sie w jego cykl



{el}

B)

Wybieramy element

Element może być pojedynczym zbiorem singletonem

Tworzymy zbiory bez elementu

$$S_{II}(N,K) = S_{II}(N-1,K-1) + K\cdot S_{II}(N-1,K) \qquad N>K>0$$

$$S_{II}(N,N) = 1 \qquad N\geq 0$$

$$S_{II}(N,0) = 0 \qquad N>0$$

Wybieram do jakiego zbioru element dojdzie

4. Znajdź i uzasadnij zależność rekurencyjną na:

a) liczbę Stirlinga I rodzaju

b) liczbę Stirlinga II rodzaju

c) liczbę nieporządków

d) liczbę podziałów liczby n na k składników dodatnich

c)

Wybieramy dla elementu numer 1 jaką liczbę dostanie. Powiedzmy że dostanie element „i”

Elementy „i” dostał pierwszy elementy więc mamy nieporządek bez 2 elementów

$$D_N = (N-1)(D_{N-1} + D_{N-2}) \qquad N \geq 2$$

$$D_1 = 0$$

$$D_2 = 1$$

Element „i” nie dostał elementu pierwszego więc musimy wybrać nieporządek bez elementu pierwszego taki ze element „i” musi nie dostać elementu 1

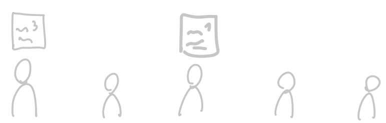
Przykład

Mamy 5 osób i każda pisała sprawdzian I chcemy rozdać sprawdziany by każdy dostał nie swój

$(n-1)$

Wybieram pierwszej osobie jaki sprawdzian będzie pisać

1 opcja osoba numer 3 nie dostała sprawdzianu pierwszego więc musimy pozostałym 4 osobą rozdać tak sprawdziany by nie dostali swojego a 3 ma nie dostać 1



2 opcja osoba numer 3 dostała sprawdzianu pierwszego więc musimy pozostałym 3 osobą rozdać tak sprawdziany by nie dostali swojego

D_{N-1}

D_{N-2}

4. Znajdź i uzasadnij zależność rekurencyjną na:

a) liczbę Stirlinga I rodzaju

b) liczbę Stirlinga II rodzaju

c) liczbę nieporządków

d) liczbę podziałów liczby n na k składników dodatnich

d)

Najmniejszy składnik to 1

Jeśli najmniejszy składnik to nie 1 to odejmuje od każdego z składników 1 i „sprawdzam dalej"

$$P(N,K) = P(N-1, K-1) + P(N-K, K)$$

$$P(N,K) = 0 \qquad K > N$$

$$P(N,1) = 1$$

$$P(N,N) = 1$$

Przykład

Jeden składnik będzie samą jedynką więc liczymy dalsze podziały

5 nie da się podzielić na 3 pudełka tak że w każdym będzie conajmniej 2 więc dobrze nam wyznacza że to będzie 0

$$P(5,3) = P(4,2) + P(2,3)$$

$$P(4,2) = P(3,1) + P(2,2)$$

$$P(5,3) = 2$$

$$\{3,1,1\}, \{2,2,1\}$$

5. Rozwiąż równania rekurencyjne:

a) $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2} - 2x_{n-3}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$

b) $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

c) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2^n$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

d) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 5^n + n$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

e) $x_{n+1} = x_n + n^3$, $x_0 = 1$,

5. Rozwiąż równania rekurencyjne:

a) $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2} - 2x_{n-3}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$

b) $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

c) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2^n$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

d) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 5^n + n$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

e) $x_{n+1} = x_n + n^3$, $x_0 = 1$,

a) $X_N - 2X_{N-1} - X_{N-2} + 2X_{N-3} = 0$

$R^3 - 2R^2 - R + 2 = 0$

$R^2(R-2) - 1(R-2) = 0$

$(R^2-1)(R-2) = 0$

$R_1 = 1,\ R_2 = -1,\ R_3 = 2$

$X_N = C_1 1^N + C_2(-1)^N + C_3 2^N$

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 + C_3 \\ 2 = C_1 - C_2 + 2C_3 \\ 0 = C_1 + C_2 + 4C_3 \end{cases}$$

$C_3 = 0,\ C_2 = -1,\ C_1 = 1$

$X_N = 1 - (-1)^N$

5. Rozwiąż równania rekurencyjne:

a) $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2} - 2x_{n-3}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$

b) $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

c) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2^n$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

d) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 5^n + n$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

e) $x_{n+1} = x_n + n^3$, $x_0 = 1$,

b) $X_N - X_{N-1} - X_{N-2}$

$$R^2 - R - 1 = 0$$

$$R_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$X_N = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^N + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^N$$

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ 1 = C_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$1 = C_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} - C_1 \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$1 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$X_N = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^N - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^N$$

5. Rozwiąż równania rekurencyjne:

a) $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2} - 2x_{n-3}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$

b) $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

c) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2^n$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

d) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 5^n + n$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

e) $x_{n+1} = x_n + n^3$, $x_0 = 1$,

c)

1) $R^2 - 5R + 6 = 0$ Wyliczamy równanie jednorodne

$(R-2)(R-3) = 0$

$R_1 = 2!, R_2 = 3$

$X_N = C_1 2^N + C_2 3^N$

2) $X_N^P = C \cdot N \cdot 2^N$ $\quad : X_N^P = C \cdot 2^N$ 2 jest rozwiązaniem równania jednorodnego więc musimy pomnożyć razy n

$(C(N+2)2^{N+2}) - 5(C \cdot (n+1) \cdot 2^{N+1}) + 6(C \cdot N \cdot 2^N) = 2^N \quad / : 2^N$

$C(N+2) \cdot 4 - 5 \cdot C \cdot (n+1) \cdot 2 + 6CN = 1$

$4CN + 8C - 10C(N+1) + 6CN = 1$

$10CN + 8C - 10CN - 10C = 1$

$C = -\frac{1}{2}$

$X_N^P = -\frac{1}{2} \cdot N \cdot 2^N$

3) $X_N = \underbrace{C_1 \cdot 3^N + C_2 \cdot 2^N}_{1)} \underbrace{- \frac{1}{2} \cdot N \cdot 2^N}_{2)}$

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ 1 = 3C_1 + 2C_2 - 1 \end{cases}$$

$C_1 = 2 \quad C_2 = -2$

$X_N = 2 \cdot 3^N - 2 \cdot 2^N - \frac{1}{2} \cdot N \cdot 2^N$

7

Funkcje tworzące

Teoria

Nie umiem tego działu więc słaby poziom będzie

$$\frac{1}{1-x} = \left(1 + x + x^2 + x^3 + \dots\right)$$

$$\frac{1}{1-x^N} = \left(1 + x^N + x^{2N} + x^{3N} + \dots\right)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{-x} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-x)^N}{N!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)$$

Na egzamin nauczyłem się tych 6 wzorów i jakoś trzeba gotować xd

1. Znajdź ciąg, którego funkcją tworzącą jest:

   a) $f(x) = \frac{x}{1-x}$

   b) $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+4}$

   c) $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+13}$

1. Znajdź ciąg, którego funkcją tworzącą jest:

a) $f(x) = \frac{x}{1-x}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+4}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+13}$

a) $x \cdot \frac{1}{1-x}$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$f(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & : n = 0 \\ 1 & : n \geq 1 \end{cases}$$

1. Znajdź ciąg, którego funkcją tworzącą jest:

   a) $f(x) = \frac{x}{1-x}$

   b) $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+4}$

   c) $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+13}$

b) $$\frac{1}{(x-2)^2}$$

$$y = x-2$$

$$f(y+2) = \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{1}{y^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n y^{n-2}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n (x-2)^{n-2}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n 2^{n-2} \left(\frac{x-2}{2}\right)^{n-2}$$

$$a_n = n 2^{n-2}$$

2. Znajdź funkcję tworzącą ciągu:

   a) $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$,
   $a_0 = 1,\ a_1 = 1$

   b) $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$,
   $a_0 = 0,\ a_1 = 2,\ a_2 = 0$

2. Znajdź funkcję tworzącą ciągu:

a) $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$,
$a_0 = 1,\ a_1 = 1$

b) $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$,
$a_0 = 0,\ a_1 = 2,\ a_2 = 0$

b) $$\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n = 2\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1}x^n + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2}x^n - 2\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3}x^n$$

$$A_x - a_0 - a_1x - a_2x^2 = 2x(A(x) - a_0 - a_1x) + x^2(A(x) - a_0) - 2x^3A(x)$$

Podstawiam warunki początkowe

$$A(x) - 2x = 2x(A(x) - 2x) + x^2A(x) - 2x^3A(x)$$

$$A(x)(1 - 2x - x^2 + 2x^3) = 2x(1-x)$$

Znajdujemy funkcję twierdzącą

$$A(x) = \frac{2x(1-x)}{(1+x)(1-x)^2} = \frac{2x}{(1+x)(1-x)}$$

Rozkład na ułamki proste

$$A(x) = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{(1-x)^2}$$

$$\begin{cases} 2x = A(1-x)^2 + B(1+x)(1-x) + C(1+x) \\ 2x = A(1-2x+x^2) + B(1-x^2) + C(1+x) \end{cases}$$

$$A = -1 \quad B = 1 \quad C = 1$$

$$A(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=1} n x^n$$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1 - (-1)^n) x^n$$

$$a_n = n + 1 - (-1)^n$$

3. Podaj funkcję tworzącą, której współczynnik przy x^{20} jest liczbą całkowitoliczbowych nieujemnych rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$, takich, że $x_2 \geqslant 2$, $x_3 \leqslant 5$, a x_4 jest parzyste.

3. Podaj funkcję tworzącą, której współczynnik przy x^{20} jest liczbą całkowitoliczbowych nieujemnych rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$, takich, że $x_2 \geqslant 2$, $x_3 \leqslant 5$, a x_4 jest parzyste.

$$\underbrace{(1+x+x^2+x^3+\ldots)}_{x_1}\cdot\underbrace{(x^2+x^3+x^4+\ldots)}_{x_2}\cdot\underbrace{(1+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5)}_{x_3}\cdot\underbrace{(1+x^2+x^4+x^6+\ldots)}_{x_4}$$

$$F(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{x^2}{1-x}\right)\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$$

4. Podaj wykładniczą funkcję tworzącą, której współczynnik przy $\frac{x^6}{6!}$ jest liczbą ciągów długości 6 złożonych z cyfr 1,2,3,4 takich, że 1 i 2 pojawiają się parzystą liczbę razy, a 3 i 4 nieparzystą.

4. Podaj wykładniczą funkcję tworzącą, której współczynnik przy $\frac{x^6}{6!}$ jest liczbą ciągów długości 6 złożonych z cyfr 1,2,3,4 takich, że 1 i 2 pojawiają się parzystą liczbę razy, a 3 i 4 nieparzystą.

$$\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots\right)^2\left(\frac{x^1}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots\right)^2$$

$$f(x)=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2=\left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{4}\right)^2$$

8

Lemat cauchy'ego-frobeniusa-burnside'a

Teoria

Grupa permutacji zbioru { 1,2...n}

$$G$$

Zbiór wszystkich pokolorowań zbioru

$$C$$

Pokolorowania równoważne

Dostajemy jedno pokolorowanie z drugiego poprzez pewną permutację najczęściej obrót lub symetrie

$$c_1 \sim c_2$$

Zbiór wszystkich permutacji które nie zmieniają pokolorowania

Stabilizator kolorowania c

$$G(c)$$

pokolorowania których dana permutacja f nie zmieni

$$C(F)$$

Liczba ta będzie ilością kolorów do potęgi cykli permutacji f

Naprzykład dla 2 kolorów i permutacji

$$f = (1)(2\,3)(4\,5)$$

$$\underline{2^3}$$

Liczba równoważnych pokolorowań dla pokolorowania c

$$\frac{|G|}{|G(c)|}$$

Teoria

Liczba wszystkich nierównoważnych pokolorowań zbioru C poprzez grupę permutacji G

Lemat Burnside

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|} \sum_{f \in G} |C(f)|$$

Liczba cykli w permutacji

$$z_i^{\lambda_i}$$

$i =$ Długości cyklu $\qquad \lambda_i =$ Ile razy ten cykl się powtarza

Przykład

$(1)\ (2\,3)(4\,5)(6\,7)(8\,9\,10)$

$z_1^1 z_2^3 z_3^1 z_4^0 \dots z_N^0$

Cykliczny indeks grupy

$$P_G(z_1, z_2 \dots z_N) = \frac{1}{|G|} \sum_{f \in G} z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} \dots z_N^{\lambda_N}$$

Liczba wszystkich nierównoważnych pokolorowań k kolorowych zbioru C poprzez grupę permutacji G używając cyklicznego indeksu grupy

$$N(G, C) = P_G(k, k \dots k)$$

Zliczanie poszczególnych kombinacji pokolorowań

Twierdzenie pólyi

1. Ile istotnie różnych naszyjników złożonych z ośmiu koralików można utworzyć, jeśli koraliki są tylko białe i czerwone oraz w naszyjniku powinno być więcej koralików białych niż czerwonych?

1. Ile istotnie różnych naszyjników złożonych z ośmiu koralików można utworzyć, jeśli koraliki są tylko białe i czerwone oraz w naszyjniku powinno być więcej koralików białych niż czerwonych?

Obroty

id ✓

(1 2 3 4 5 6 7 8) ✓

(1 3 5 7)(2 4 6 8) ✓

(1 4 7 2 5 8 3 6) ✓

(1 5)(2 6)(3 7)(4 8) ✓

(1 6 3 8 5 2 7 4) ✓

(1 7 5 3)(2 8 6 4) ✓

(1 8 7 6 5 4 3 2) ✓

(1 2)(8 3)(7 4)(6 5) ✓

(2 3)(1 4)(8 5)(7 6) ✓

(3 4)(2 5)(1 6)(8 7) ✓

(4 5)(3 6)(7 2)(8 1) ✓

(1)(5)(2 8)(3 7)(4 6) ✓

(2)(6)(5 7)(8 4)(1 3) ✓

(3)(7)(2 4)(1 5)(8 6) ✓

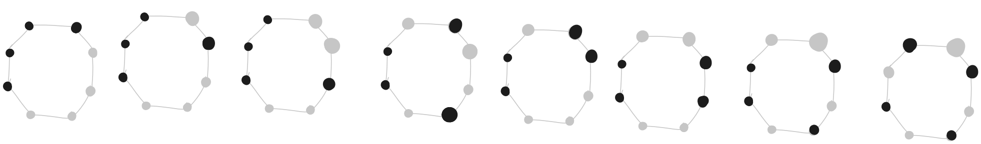
(4)(8)(3 5)(6 2)(1 7) ✓

$$N(G,C) = \frac{1}{16}\left(z_1^8 + 4z_8^1 + 2z_4^2 + z_2^4 + 4z_2^4 + 4z_2^3 z_1^2\right)$$

Teraz są 2 drogi albo twierdzenie pólyi i zliczamy konfigurację posiadające więcej białych albo od wszystkich konfiguracje odejmujemy konfigurację gdzie jest po równo białych czerwonych i dzielimy na pół

$$\text{Wynik} = \frac{N(G,C) - |4\text{ Białe }4\text{ czerwone}|}{2}$$

8 możliwości aby było po równo



Motyw 5

$$\frac{\frac{1}{16}\left(2^8 + 4\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + 2^4 + 4\cdot 2^4 + 4\cdot 2^3\cdot 2^2\right) - 8}{2} = 11$$

2. Ile jest różnych (ze względu na obroty) pokolorowań szachownicy 5×5 trzema kolorami jeśli:

   a) szachownica jest jednostronna (np. namalowana na desce)?

   b) szachownica jest obustronna (np. namalowana na szkle)?

2. Ile jest różnych (ze względu na obroty) pokolorowań szachownicy 5×5 trzema kolorami jeśli:

   a) szachownica jest jednostronna (np. namalowana na desce)?

   b) szachownica jest obustronna (np. namalowana na szkle)?

a)

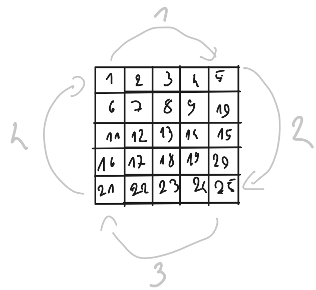
$90^\circ \quad z_4^6 z_1^1$

$180^\circ \quad z_2^{12} z_1^1$

$270^\circ \quad z_4^6 z_1^1$

$360^\circ \quad z_1^{25}$

4 obroty



$$\frac{1}{4}\left(z^{25} + 2z_4^6 z_1^1 + z_2^{12} z_1^1\right)$$

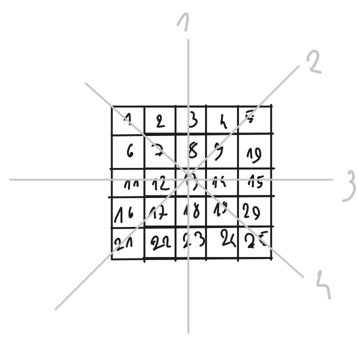
$$\frac{1}{4}\left(3^{25} + 2\cdot 3^6 \cdot 3 + 3^{12}\cdot 3\right)$$

4 symetrie

b) $4\cdot(z_2^{10} z_1^5)$

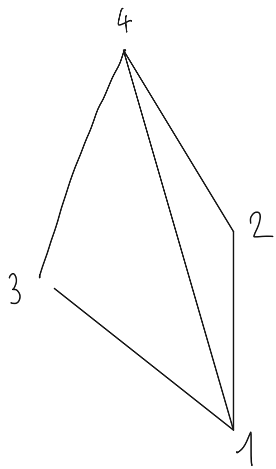
Wynik to obroty plus symetrie

$$\frac{1}{8}\left(3^{25} + 2\cdot 3^7 + 3^{13} + 4\cdot 3^{15}\right)$$



3. Na ile różnych sposobów można pokolorować ściany czworościanu foremnego przy użyciu trzech kolorów jeżeli pokolorowania różniące się tylko obrotem uznajemy za identyczne?

3. Na ile różnych sposobów można pokolorować ściany czworościanu foremnego przy użyciu trzech kolorów jeżeli pokolorowania różniące się tylko obrotem uznajemy za identyczne?



id

(1)(2)(3)(4)

120°

(123)(4)

(124)(3)

(134)(2)

(234)(1)

240°

(132)(4)

(142)(3)

(143)(2)

(243)(1)

180°

(12)(34)

(13)(24)

(14)(23)

$$P_G(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{12}\left(z_1^4 + 3z_2^2 + 8z_1z_3\right)$$

$$P_G(3,3,3,3) = \frac{3^4 + 8\cdot 9 + 3\cdot 9}{12} = 15$$

4. Ile różnych układów barw baniek (wersja dla nie-krakusów: bombek) na choince można uzyskać, jeśli na najwyższym poziomie jest jedna, na środkowym dwie, a na dolnym trzy, każda z nich jest w jednej z trzech barw AGH, a układy różniące się tylko zamianą baniek (wersja dla nie-krakusów: bombek) na tym samym poziomie uznajemy za identyczne?

4. Ile różnych układów barw baniek (wersja dla nie-krakusów: bombek) na choince można uzyskać, jeśli na najwyższym poziomie jest jedna, na środkowym dwie, a na dolnym trzy, każda z nich jest w jednej z trzech barw AGH, a układy różniące się tylko zamianą baniek (wersja dla nie-krakusów: bombek) na tym samym poziomie uznajemy za identyczne?

Nie z burnside

$$\underbrace{3}_{\text{Górna bombka}} \cdot \underbrace{\binom{3+2-1}{2}}_{\text{Środkowe bombki}} \cdot \underbrace{\binom{3+3-1}{3}}_{\text{Dolne bombki}} = 180$$

Burnside

$id = 3^6$

$(1)(23)(4)(5)(6) = 3^5$

$(1)(23)(45)(6) = 3^4$

$(1)(23)(4)(56) = 3^4$

$(1)(23)(46)(5) = 3^4$

$(1)(23)(456) = 3^3$

$(1)(23)(465) = 3^3$

$(1)(2)(3)(45)(6) = 3^5$

$(1)(2)(3)(4)(56) = 3^5$

$(1)(2)(3)(46)(5) = 3^5$

$(1)(2)(3)(456) = 3^4$

$(1)(2)(3)(465) = 3^4$

$|G| = 12$

$\frac{2160}{12} = 180$

9

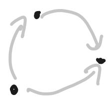
Grafy cz. i

Teoria

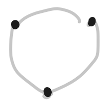
Graf

$$G = (V, E)$$

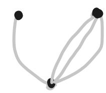
$V =$ Zbiór wierzchołków $E =$ Zbiór krawedzi $\{u, v\}$



Digraf



Graf



Multigraf

Rząd grafu

$N =$ Ilości wierzchołków

Rozmiar grafu

$M =$ Ilość krawędzi

Stopień wierzchołka

Liczba krawędzi która z wierzchołka wychodzi

$\Delta(G) =$ Największy stopień wierzchołka grafu

$\delta(G) =$ Najmniejszy stopień wierzchołka grafu

Lematy o stopniu

Suma wszystkich stopni wierzchołków jest parzysta

Liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest parzysta

Teoria

Spacer w grafie

⟨1 5 4 3 2 5 4 2 6⟩

Ciąg wierzchołków po których „chodzimy” przez krawędzie bez ograniczeń

Droga

⟨1 5 4 3 2 ~~5 4~~ 2 6⟩

Spacer z ograniczeniem że nie możemy powtarzać krawędzi

Ścieżka

⟨1 5 4 3 2 ~~5 4~~ ~~2~~ 6⟩

Droga z ograniczeniem że nie możemy powtarzać wierzchołków

P_N — Ścieżka o n wierzchołkach

Zamknięta droga

Istnieje krawędź łącząca ostatnie elementy drogi

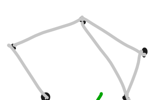
Cykl

Ścieżka gdzie Istnieje krawędź łącząca ostatnie elementy drogi

C_N — Cykl o n wierzchołkach

Graf spójny

Graf w którym da się stworzyć spacer z dowolnych 2 wierzchołków



✓

X

Graf pełny

Graf posiadający n wierzchołków w których wszystkie są połączone ze soba

K_N

Liczba krawędzi grafu pełnego

$$\binom{N}{2}$$

Teoria

Odległości wierzchołków

Minimalna długości ścieżki z wierzchołków

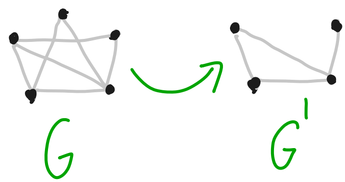
$$d(w_1, w_2)$$

Średnica

Największa odległości wierzchołków

Podgraf

Graf który zawiera się w krawędziach i wierzchołkach grafu



Podgraf indukowany

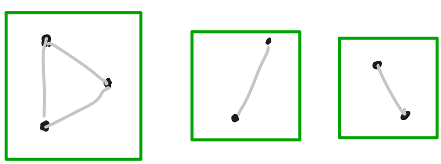
Podgraf który zawiera wszystkie krawędzie wierzchołków które wchodzą w skład podgrafu

Podgraf spinający

Podgraf który zawiera wszystkie wierzchołki które wchodzą w skład podgrafu

Spójne składowe

Największe spójne Podgraf

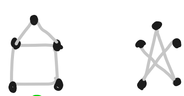


Izomorfizm grafów

Istnienie bijekcji pomiędzy wierzchołkami takimi że krawędzie przechodzą na swoje odwzorowane wierzchołki

Dopełnienie grafów

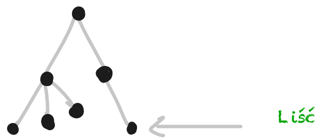
Graf z takimi samymi wierzchołkami lecz z krawędziami których nie było w wejściowym grafie



Teoria

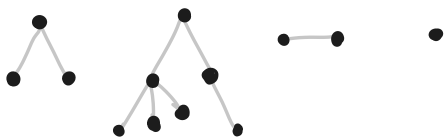
Drzewo

Graf spójny acyklicznyn



Las

Graf acykliczny (zbiór rozłącznych drzew)



Rozmiar drzewa rzędu n

$$N-1$$

Liczba liści w drzewie

$$2 \leq \text{LIŚCIE} < N-1 \qquad N \geq 3$$

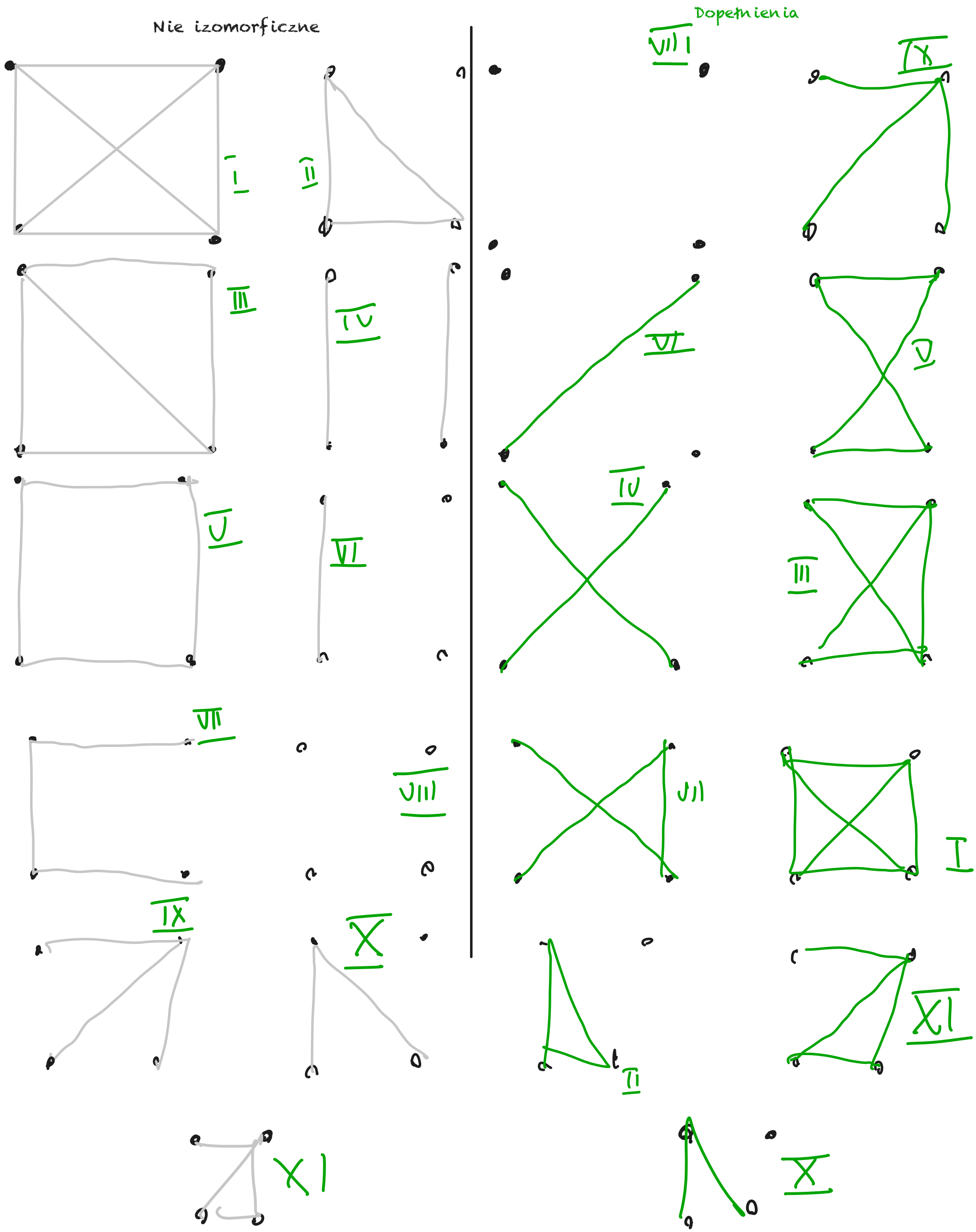
Motyw 6

Koniec teori teraz z Determinacją trzeba rozwiązać zadania

Wystarczająca teoria do zrobienia zestawu „Grafy cz I” kontynuacja w „Grafy cz II”

1. Znajdź wszystkie dopełnienia nieizomorficznych grafów o 4 wierzchołkach.

1. Znajdź wszystkie dopełnienia nieizomorficznych grafów o 4 wierzchołkach.



2. Dla jakich n mogą istnieć *grafy samodopełniające się* (tzn. izomorficzne ze swoim dopełnieniem) o n wierzchołkach?

2. Dla jakich n mogą istnieć *grafy samodopełniające się* (tzn. izomorficzne ze swoim dopełnieniem) o n wierzchołkach?

wszystkich krawędzi

Ilości krawędzi grafu

Wymagam by pozostała taka sama

$$\binom{N}{2} - |E| = |E|$$

$$\frac{n(n-1)}{2} = 2|E|$$

$$\frac{n(n-1)}{4} = |E|$$

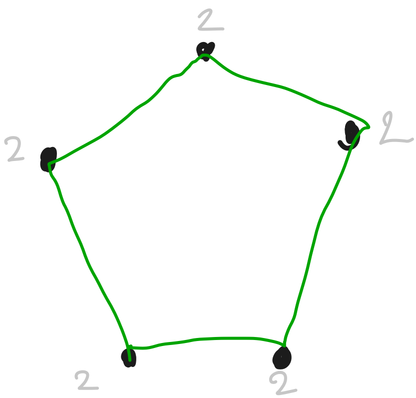
Liczba krawędzi musi być liczbą całkowitą więc wynik to

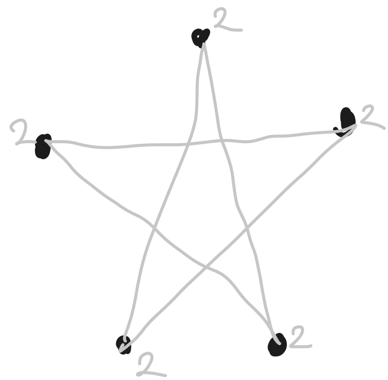
$$4 \mid n \lor 4 \mid n-1$$

3. Znajdź dwa przykłady grafów samodopełniających się o 5 wierzchołkach.

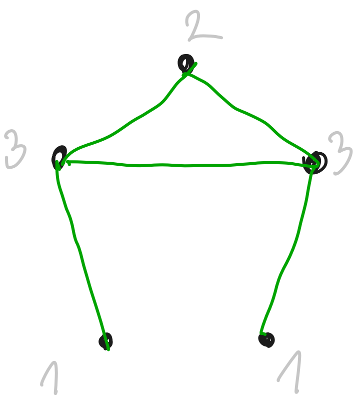
3. Znajdź dwa przykłady grafów samodopełniających się o 5 wierzchołkach.

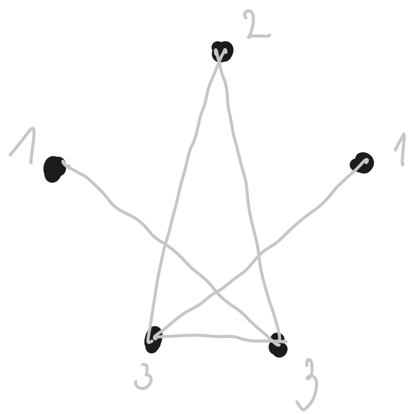
I





II





4. Niech $\bar{G}$ oznacza dopełnienie grafu G. Udowodnij lub znajdź kontrprzykład:

   a) G-spójny $\Rightarrow$ $\bar{G}$-spójny
   b) G-spójny $\Rightarrow$ $\bar{G}$-niespójny
   c) G-niespójny $\Rightarrow$ $\bar{G}$-niespójny
   d) G-niespójny $\Rightarrow$ $\bar{G}$-spójny.

4. Niech $\bar{G}$ oznacza dopełnienie grafu G. Udowodnij lub znajdź kontrprzykład:

a) G-spójny $\Rightarrow$ $\bar{G}$-spójny

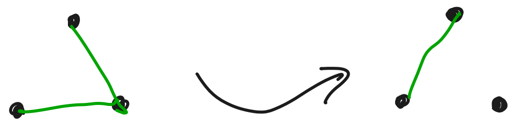
b) G-spójny $\Rightarrow$ $\bar{G}$-niespójny

c) G-niespójny $\Rightarrow$ $\bar{G}$-niespójny

d) G-niespójny $\Rightarrow$ $\bar{G}$-spójny.

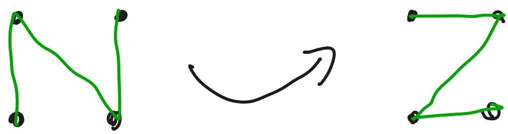
a) Kontrprzykład

Spójny | Nie spójny



b) Kontrprzykład

Spójny | Spójny



c) Kontrprzykład

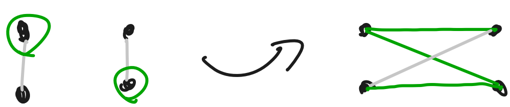
Nie spójny | Spójny

d) Prawda

Jeśli graf G jest niespójny, to jego wierzchołki można podzielić na rozłączne zbiory V1, V2, ..., Vk, gdzie k >= 2, i nie ma krawędzi między wierzchołkami z różnych zbiorów. W dopełnieniu G2, brak tych krawędzi w G oznacza, że w G2 każdy wierzchołek z jednego zbioru Vi jest połączony z każdym wierzchołkiem z innego zbioru Vj. Dzięki temu wystarczy wybrać dwa wierzchołki z różnych zbiorów, by zbudować ścieżkę łączącą każdy wierzchołek w G. W ten sposób wszystkie zbiory wierzchołków stają się połączone, co sprawia, że G jest grafem spójnym.

Przykład

Nie spójny | Zawsze spójny



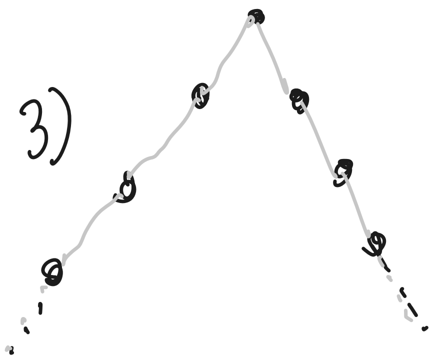
2 wierzchołki Z oddzielnych zbiorów | Punkt łączy się z każdym puntem nie swojego zbioru

5. Podaj wszystkie nieizomorficzne drzewa, które są *grafami regularnymi* (tzn. takimi, w których wszystkie wierzchołki mają ten sam stopień).

5. Podaj wszystkie nieizomorficzne drzewa, które są *grafami regularnymi* (tzn. takimi, w których wszystkie wierzchołki mają ten sam stopień).

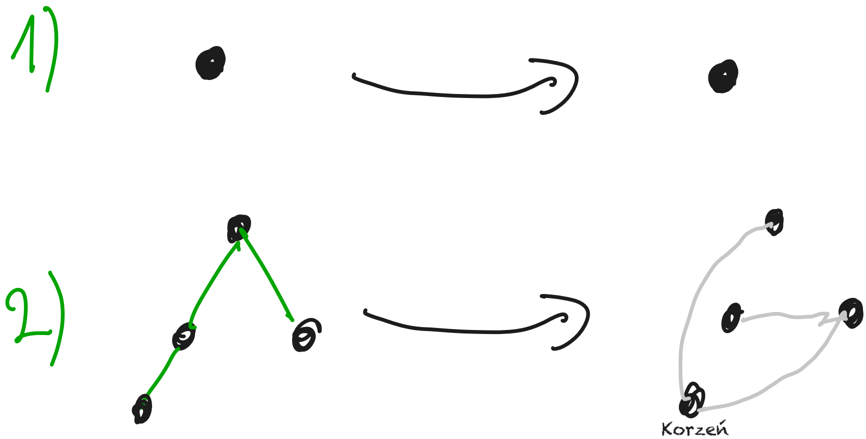
1)  Zerowy stopień

2)  Pierwszy stopień

3)  Drugi stopień zakładał by nieskończony graf

6. Podaj wszystkie nieizomorficzne drzewa, których dopełnienia są drzewami.

6. Podaj wszystkie nieizomorficzne drzewa, których dopełnienia są drzewami.



7. Czy jest prawdą, że w dowolnym grafie liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest parzysta?

7. Czy jest prawdą, że w dowolnym grafie liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest parzysta?

Suma wszystkich stopni to liczba krawędzi razy 2

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = m \cdot 2$$

Suma wszystkich stopni to też suma stopni wierzchołków parzystych i nieparzystych

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{P \in V_P} \deg(P) + \sum_{N \in V_{NP}} \deg(N)$$

Co oznacza że suma wierzchołków nieparzystych musi być parzysta

$$\sum_{N \in V_{NP}} \deg(N) \,|\, 2$$

A więc wierzchołków nieparzystych musi być parzysta ilości

8. Czy jest prawdą, że w każdym grafie istnieje ścieżka długości δ?

8. Czy jest prawdą, że w każdym grafie istnieje ścieżka długości δ?

Rozważmy najdłuższą ścieżkę w grafie. Jeśli jej długość to L, to każdy wierzchołek na tej ścieżce ma wszystkie swoje sąsiedztwo zawarte w ścieżce (w przeciwnym razie można by ją wydłużyć).

W szczególności, startując z wierzchołka o minimalnym stopniu, możemy skonstruować ścieżkę długości stopnia minimalnego przechodząc przez jego sąsiadów.

9. Czy jest prawdą, że w każdym grafie, w którym $\delta > 1$ istnieje cykl długości $\delta + 1$ lub większej?

9. Czy jest prawdą, że w każdym grafie, w którym $\delta > 1$ istnieje cykl długości $\delta + 1$ lub większej?

Ten sam dowód co poprzednie zadanie

Rozważmy najdłuższą ścieżkę w grafie. Jeśli jej długość to L, to każdy wierzchołek na tej ścieżce ma wszystkie swoje sąsiedztwo zawarte w ścieżce (w przeciwnym razie można by ją wydłużyć).

W szczególności, startując z wierzchołka o minimalnym stopniu, możemy skonstruować ścieżkę długości stopnia minimalnego przechodząc przez jego sąsiadów i wracając do tego z którego wystartowaliśmy

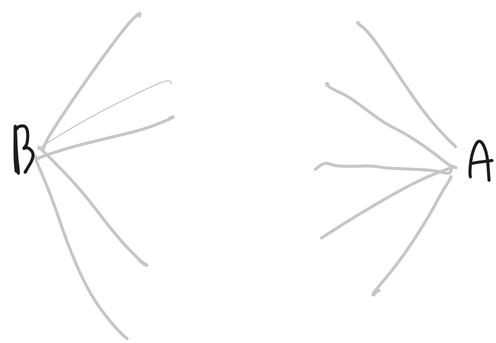
10. Czy jest prawdą, że jeśli $\delta(G) \geqslant \frac{n-1}{2}$ to graf G rzędu n jest spójny?

10. Czy jest prawdą, że jeśli $\delta(G) \geqslant \frac{n-1}{2}$ to graf G rzędu n jest spójny?

Dowód nie wprost załóżmy że istnieje niespójny graf taki że

$$\delta \geqslant \frac{n-1}{2}$$

Wybierzmy 2 punkty z niespójnych podgrafów



Punkt b

Punkt a

Liczymy ilości wierzchołków

$$1+\frac{N-1}{2}+\frac{N-1}{2}+1=N+1$$

Z tyloma łączy się punkt a

Z tyloma łączy się punkt b

$$N+1 \leqslant N$$

Liczba wierzchołków jest większa niż rząd co prowadzi do sprzeczności

10

Grafy cz. ii

Teoria

Droga Eulera

Droga zamknięta zawierająca każdą krawędź

Graf posiadam drogę Eulera gdy stopień każdego wierzchołka jest parzysty

Otwarta droga Eulera

Droga otwarta zawierająca każdą krawędź

Graf posiadam otwartą drogę Eulera gdy dokładnie 2 wierzchołki mają stopnie nieparzyste

Cykl Hamiltona

Cykl zawierający każdy wierzchołek

Ścieżka Hamiltona

Ścieżka zawierający każdy wierzchołek

Graf posiadający ścieżkę hamitliona nazywamy trasowalnyn

Twierdzenia cyklu hamiltiona

Graf jest Hamiltonowski gdy

$N \geq 3 \; : \; \delta(G) \geq \frac{N}{2}$ Tw. Diraca

$\forall w_1, w_2 \in V \; : \; d(w_1) + d(w_2) \geq N$ Tw Ore

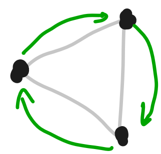
1. Czy istnieje graf eulerowski który ma:

   a) nieparzystą liczbę wierzchołków i nieparzystą liczbę krawędzi?
   b) nieparzystą liczbę wierzchołków i parzystą liczbę krawędzi?
   c) parzystą liczbę wierzchołków i nieparzystą liczbę krawędzi?
   d) parzystą liczbę wierzchołków i parzystą liczbę krawędzi?

1. Czy istnieje graf eulerowski który ma:

   a) nieparzystą liczbę wierzchołków i nieparzystą liczbę krawędzi?
   b) nieparzystą liczbę wierzchołków i parzystą liczbę krawędzi?
   c) parzystą liczbę wierzchołków i nieparzystą liczbę krawędzi?
   d) parzystą liczbę wierzchołków i parzystą liczbę krawędzi?

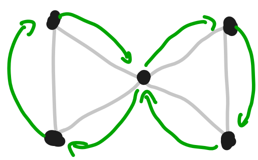
a) Istnieje



3 wierzchołków

3 krawędzi

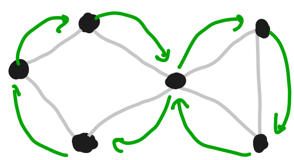
b) Istnieje



5 wierzchołków

6 krawędzi

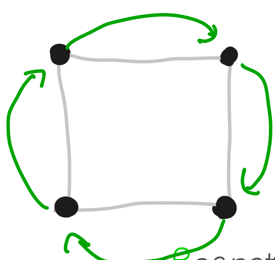
c) Istnieje



6 wierzchołków

7 krawędzi

d) Istnieje



4 wierzchołków

4 krawędzi

2. Czy istnieje graf hamiltonowski który ma:

a) nieparzystą liczbę wierzchołków i nieparzystą liczbę krawędzi?

b) nieparzystą liczbę wierzchołków i parzystą liczbę krawędzi?

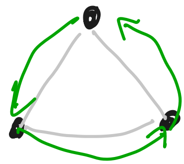
c) parzystą liczbę wierzchołków i nieparzystą liczbę krawędzi?

d) parzystą liczbę wierzchołków i parzystą liczbę krawędzi?

2. Czy istnieje graf hamiltonowski który ma:

a) nieparzystą liczbę wierzchołków i nieparzystą liczbę krawędzi?
b) nieparzystą liczbę wierzchołków i parzystą liczbę krawędzi?
c) parzystą liczbę wierzchołków i nieparzystą liczbę krawędzi?
d) parzystą liczbę wierzchołków i parzystą liczbę krawędzi?

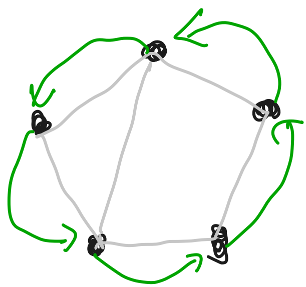
a) Istnieje



3 wierzchołki

3 krawędzie

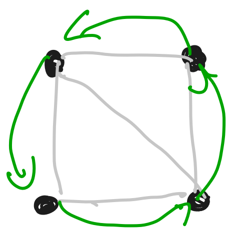
b) Istnieje



5 wierzchołki

6 krawedzi

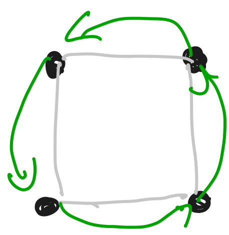
c) Istnieje



4 wierzchołki

5 krawedzi

d) Istnieje



4 wierzchołki

4 krawedzi

3. Znajdź wszystkie nieizomorficzne drzewa, które mają drogę Eulera.

3. Znajdź wszystkie nieizomorficzne drzewa, które mają drogę Eulera.

Tylko jedno bez gałęzi bo inaczej będziemy mieć liście stopnia nieparzystego a to wyklucza istnienie drogi Eulera

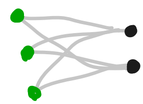
11

Grafy cz. III

Teoria

Graf dwudzielny

Podział grafu na 2 zbiory wierzchołków takie że każdą krawędź łączy oba te zbiory

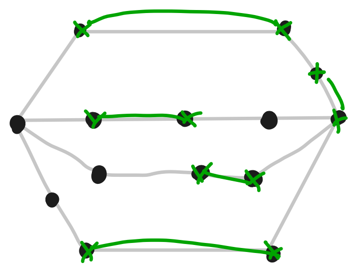


$K_{2,3}$

Graf jest dwudzielny gdy każdy cykl ma parzysta długości

Skojarzenie

Podzbior krawędzi nie posiadające wspólnych wierzchołków



Liczności skojarzeniam

Liczba „kresek" skojarzenia

$$|M|$$

Skojarzenie pełne

Każdy wierzchołek jest zajęty przez jakąś krawędź skojarzenia

$$|M| = \frac{N}{2}$$

Lemat gwarantujący skojarzenie pełnye

Parzysta liczba wierzchołków $\wedge \ \delta(G) \geq \frac{N}{2}$

Teoria

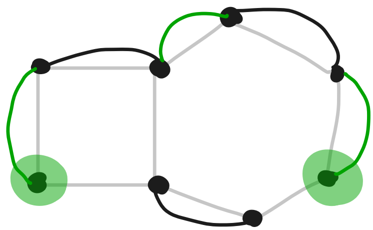
Liczba skojarzeniowa

Najliczniejsze skojarzenie

$$\mu(G) = \max |M|$$

Ścieżka powiększająca

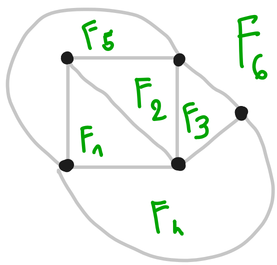
Gdy pomiędzy krawędziami skojarzeń narysujemy ścieżkę oraz na końcu i początku ścieżki nie mamy skojarzenia to mamy ścieżkę powiększającą



Skojarzenie jest najliczniejsze gdy nie da się znaleźć ścieżki powiększającej

Graf planarny

Można narysować że krawędzie się w nim nie przecinają



Ściana nazywamy obszary wyznaczone przez krawędzie

Lematy o grafie planarnym

$$N - M + F = 2$$

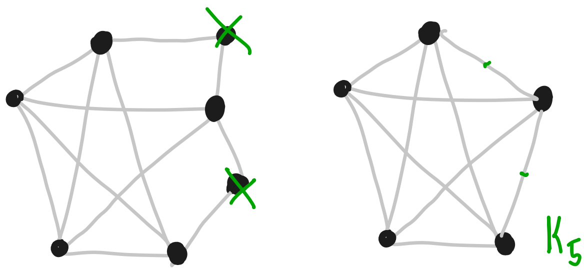
$$M \leqslant 3N - 6$$

N = wierzchołki M = krawędzie F = liczba ścian

Teoria

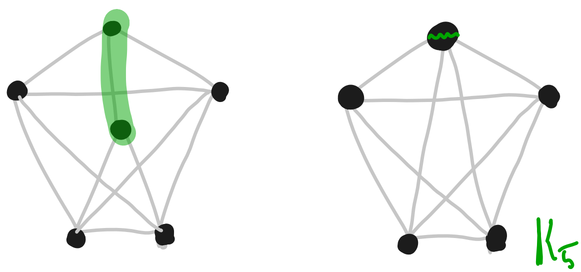
Twierdzenie Kuratowskiego

Graf jest planarny gdy nie posiada podgrafu będącego rozdzieleniem grafu K5 lub K3.3



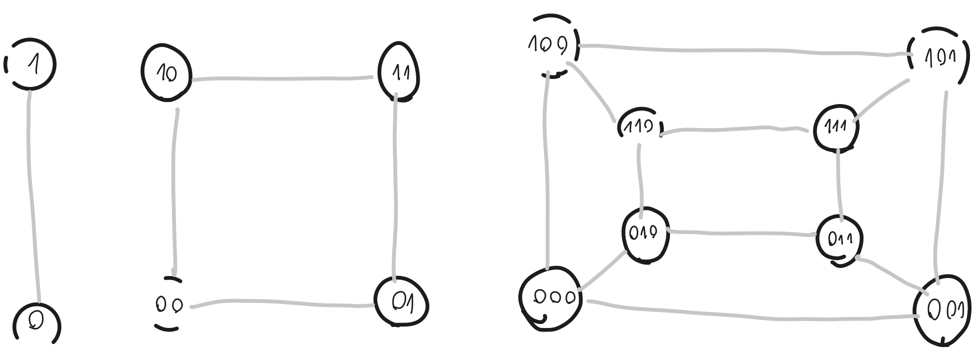
Twierdzenie Warnera

Graf jest planarny gdy nie posiada podgrafu będącego minorem grafu K5 lub K3.3



Kostka

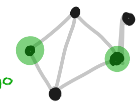
Graf którego wierzchołki odpowiadają ciąga binarnych a krawędzie łącza te ciągi które różnią się jedną liczbą



Teoria

Zbiór niezależny

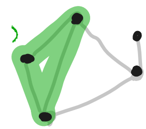
Podzbiór wierzchołków bez wspólnych krawędzi



$\alpha(G)$ = Liczba najliczniejszego zbioru niezależnego

Klika

Podzbiór wierzchołków takich że każde dwie wierzchołki są sąsiednie (podgraf pełny k)



$\omega(G)$ = Liczba najliczniejszej kliki

Kolorowanie

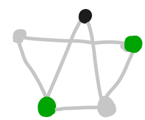
(Wierzchołkowe) Kolorowanie wierzchołków tak aby sąsiednie wierzchołki nie miały tego samego koloru

(Krawędziowe) Kolorowanie krawędzi tak aby krawędzie tego samego koloru nie miały wspólnego wierzchołka

Liczba chromatyczna

$\chi(G)$

Minimalna liczba kolorów do pokolorowania wierzchołków



Lematy o liczbie chromatycznej

$$\chi(G) \geq \omega(G)$$

$$\chi(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\alpha(G)} \right\rceil$$

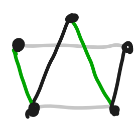
$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

$$\chi(G) \leq 4$$ Gdy planarny

Indeks chromatycznym

$\chi'(G)$

Minimalna liczba kolorów do pokolorowania krawędzi



Lematy o indeksie chromatycznym

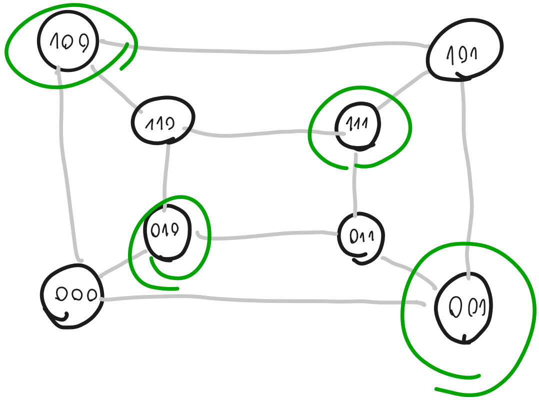
$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$$

$$\chi'(G) = \Delta(G)$$ Graf dwudzielnym

1. Czy jest prawdą, że kostka H_d jest grafem dwudzielnym?

1. Czy jest prawdą, że kostka H_d jest grafem dwudzielnym?

Bez straty ogólności na przykładzie kostki q3



Dzielimy graf na 2 grupy

Parzysta ilości jedynek

110
011
101
000

Nieparzysta ilości jedynek

100
010
111
001

Każda krawędź prowadzi do wierzchołka różniąca się jedną liczbą
więc z parzystej ilości jedynek na nie parzysta i na odwrót

Co nam implikuje że graf jest dwudzielny z grupami o parzystej i
nieparzystej ilości jedynek

2. Znajdź rozmiar, stopień minimalny i maksymalny, średnicę, promień, liczbę chromatyczną oraz indeks chromatyczny kostki H_d.

2. Znajdź rozmiar, stopień minimalny i maksymalny, średnicę, promień, liczbę chromatyczną oraz indeks chromatyczny kostki H_d.

Δ $\quad d$ Wszystkie stopnie tego samego stopnia d

Rozmiar $\quad \sum_{v \in V} \frac{\deg(v)}{2}$

diam $\quad d$

rad $\quad d$

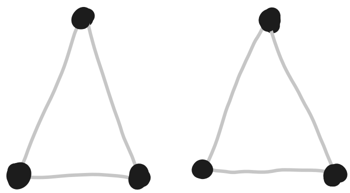
2 Bo dwudzielny

d Dwudzielny więc stopień maksymalny

3. Czy jest prawdą, że graf o n wierzchołkach i n krawędziach ma jeden i tylko jeden cykl?

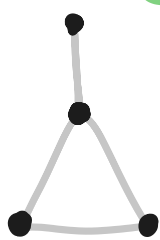
3. Czy jest prawdą, że graf o n wierzchołkach i n krawędziach ma jeden i tylko jeden cykl?

Nie spójny: nieprawda



Spójny, drzewo: nieprawda

Spójny nie drzewo: prawda

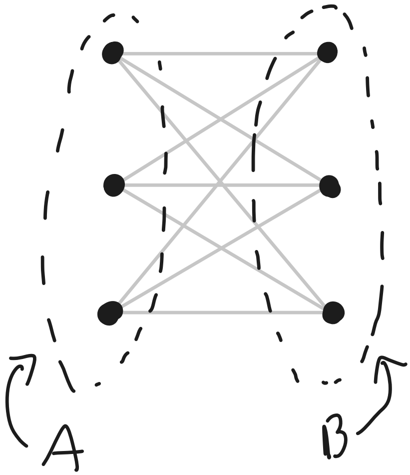


Usuwając z tego jedną krawędź będziemy mieć albo graf niespójny albo drzewo więc mamy 1 cykl

4. Czy jest prawdą, że graf dwudzielny regularny jest zrównoważony (tzn. że oba zbiory występujące w definicji dwudzielności są równoliczne)?

4. Czy jest prawdą, że graf dwudzielny regularny jest zrównoważony (tzn. że oba zbiory występujące w definicji dwudzielności są równoliczne)?

Spójny: prawda



$$A \cdot deg = B \cdot deg$$

$$deg = 0 \lor |A| = |B|$$

Niespójny

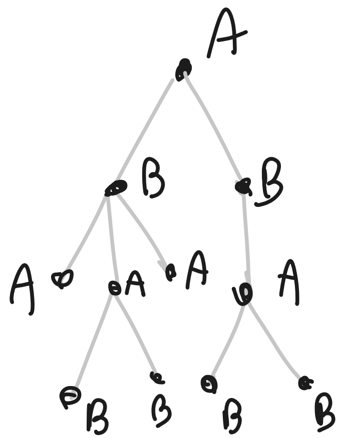
Równoliczne

5. Czy jest prawdą, że każde drzewo jest grafem dwudzielnym?

5. Czy jest prawdą, że każde drzewo jest grafem dwudzielnym?

Prawda

Schodzenie w dół stopniami jest równoważne zmianie grupy a na b i na odwrót



6. Czy jest prawdą, że jeśli drzewo nie ma wierzchołków stopnia 2 to ma więcej liści niż innych wierzchołków?

6. Czy jest prawdą, że jeśli drzewo nie ma wierzchołków stopnia 2 to ma więcej liści niż innych wierzchołków?

$L \rightarrow$ Liczba liści

$N - L \rightarrow$ Liczba wierzchołków stopnia conajmniej 3

$N - 1 \rightarrow$ Liczba krawędzi

2x

$2N - 2 \rightarrow$ Suma stopni w drzewie

Nierówności porównującą stopnie drzewa

Wierzchołki „gałęziowe" są stopnia conajmniej 3.
Nierówności bo mogą być oryginalnie większe

Liście są stopnia pierwszego
więc dodaje L

$$2N-2 \geq 3(n-L)+L$$

$$2L \geq n+2$$

$$L \geq \frac{N}{2}+1$$

Dla jednego wierzchołka też jest spełnione bo 1 wierzchołek to jeden liści

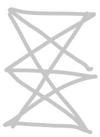
7. Znajdź wszystkie nieizomorficzne grafy o 6 wierzchołkach, które nie są planarne (tzn. nie można ich narysować na płaszczyźnie bez przecięć krawędzi).

7. Znajdź wszystkie nieizomorficzne grafy o 6 wierzchołkach, które nie są planarne (tzn. nie można ich narysować na płaszczyźnie bez przecięć krawędzi).

K_5

Ma 10 krawędzią w każdą można wstawić wierzchołek by stał się 6 wierzchołkowy

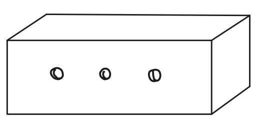
$K_{3,3}$



$$10 + 1 = 11$$

Motyw 7

Ostatni motyw jest w tym pudełku



12

Konfiguracje

Teoria

1. Znajdź rozkład grafu K_{13} na kliki K_4 i podaj parametry powstałej w ten sposób konfiguracji.

2. Skonstruuj, o ile to możliwe, System Trójek Steinera (czyli 2-konfigurację $(v, 3, 1)$) dla:

   a) $v = 9$;

   b) $v = 15$ (problem Kirkmana).

VI. Query ; ***by the*** **Rev. Thos. P. Kirkman,** ***Croft, near Warrington.***
Fifteen young ladies in a school walk out three abreast for seven days in succession: it is required to arrange them daily, so that no two shall walk twice abreast.

zadanie 2b w oryginalnej postaci
The Lady's and Gentleman's Diary, 1850, p. 48

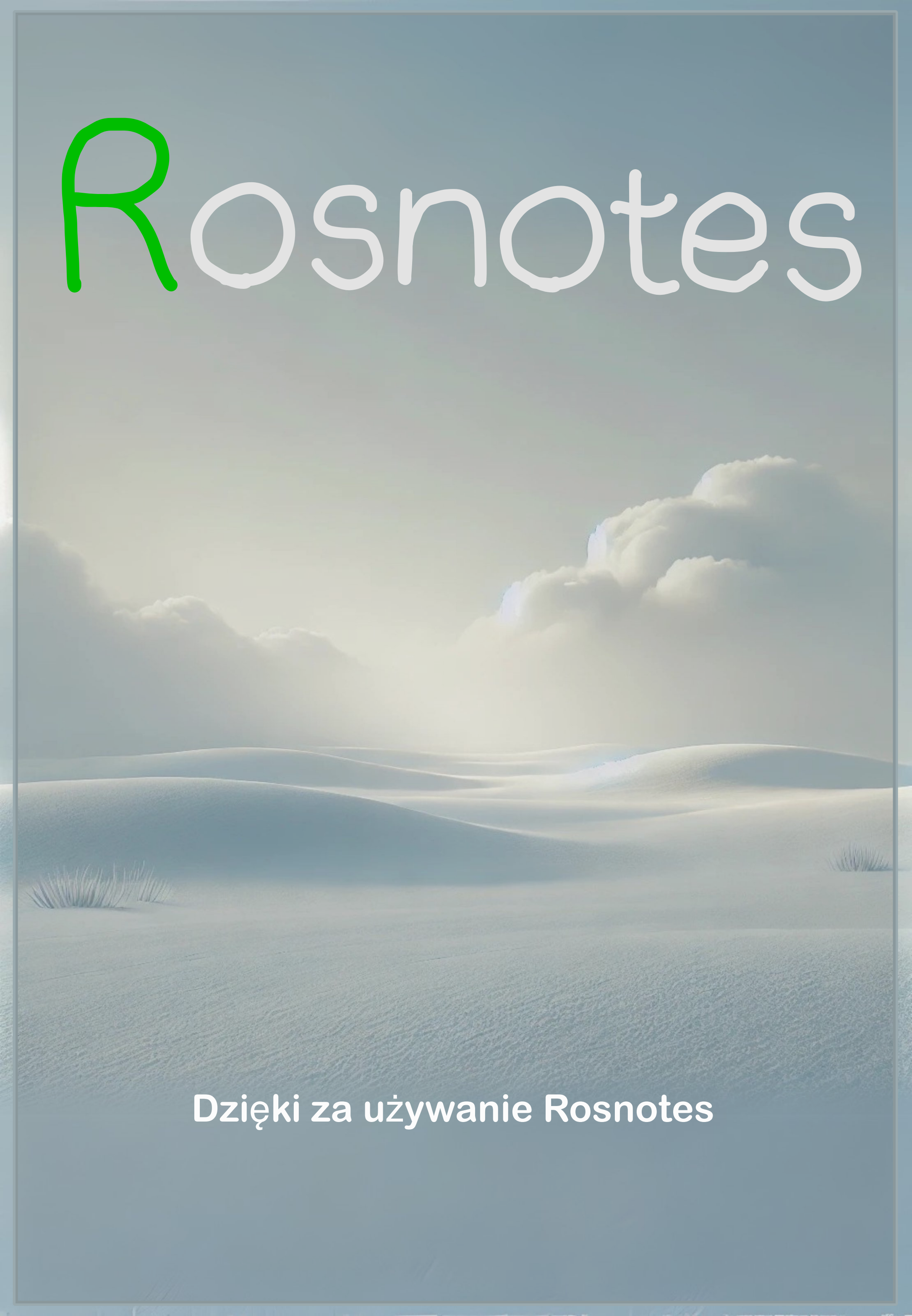
3. Czy może istnieć

a) 1-konfiguracja $(5, 2, 1)$;

b) 2-konfiguracja $(10, 3, 1)$;

c) 4-konfiguracja $(11, 5, 1)$?

4. Czy jest prawdą, że w dowolnej 2-konfiguracji $r_2(v-1) = r_1(k-1)$?


Rosnotes
Dzięki za używanie Rosnotes