ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

6. Oblicz $\int\limits_{K}^{AB}(2a-y)dx+xdy$, gdzie K jest pierwszym łukiem cykloidy w kierunku zgodnym ze wzrostem parametru t.

"'latex article amsmath

Dane wejściowe:

Funkcja cykloidy z parametrem t jest dana równaniami parametrycznymi:

$$x(t) = a(t - \sin t)$$

$$y(t) = a(1 - \cos t)$$

Interwał parametrów: $t \in [0, 2\pi]$

Ogólny wzór:

Musimy obliczyć całke:

$$\int_K^{AB} (2a - y)\,dx + x\,dy$$

Podstawiajac równania parametryczne:

$$dx = \frac{d}{dt}\left[a(t - \sin t)\right]\,dt = a(1 - \cos t)\,dt$$

$$dy = \frac{d}{dt}\left[a(1 - \cos t)\right]\,dt = a\sin t\,dt$$

Zamieniamy całke na parametr t:

$$\int_0^{2\pi} \left((2a - a(1 - \cos t))a(1 - \cos t) + a(t - \sin t)a\sin t\right)\,dt$$

Przekształcenie wzoru:

Uproszczenie wyrażenia:

$$= \int_0^{2\pi} \left((a + a\cos t)a(1 - \cos t) + a(t - \sin t)a\sin t\right)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(a^2(1 + \cos t - \cos^2 t) + a^2(t\sin t - \sin^2 t)\right)\,dt$$

Podział na dwie całki:

$$= a^2\int_0^{2\pi} (1 + \cos t - \cos^2 t)\,dt + a^2\int_0^{2\pi} (t\sin t - \sin^2 t)\,dt$$

Przeliczenie krok po kroku:

Całka pierwsza:

$$\int_0^{2\pi} (1 + \cos t - \cos^2 t)\,dt$$

Różnicujemy po składnikach:

$$= \int_0^{2\pi} 1\,dt + \int_0^{2\pi} \cos t\,dt - \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt$$

$\int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi$, $\int_0^{2\pi} \cos t\,dt = 0$, Używajac formuły redukcyjnej:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \pi$$

Wynik dla pierwszej całki:

$$= 2\pi - \pi = \pi$$

Całka druga:

$$\int_0^{2\pi} (t \sin t - \sin^2 t) \, dt$$

Używamy całkowania przez cześci i formuły redukcyjnej:

$$= \int_0^{2\pi} t \sin t \, dt - \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt$$

Pierwsza cześciowa całka:

$$\int_0^{2\pi} t \sin t \, dt = [-t \cos t]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t \, dt = 0$$

Wynik druga całka:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = \pi$$

Podsumowanie drugiej całki:

$$= 0 - \pi = -\pi$$

Wynik końcowy:

Wynik całej całki:

$$a^2(\pi - \pi) = 0$$

Ostateczny wynik:

$$\boxed{0}$$