ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

13. Oblicz $\overset{K}{\underset{S}{\iint}}(x^2+y^2)dS$, gdzie $S : x^2+y^2+z^2 = R^2$.

"'latex article amsmath

Dane wejściowe

Powierzchnia S to kula opisana równaniem:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Celem jest obliczenie całki powierzchniowej:

$$\iint_S (x^2 + y^2)\, dS$$

Rozwiazanie

Krok 1: Parametryzacja powierzchni

Użyjemy współrzednych sferycznych do parametryzacji powierzchni:

$$x = R\sin\theta\cos\phi$$

$$y = R\sin\theta\sin\phi$$

$$z = R\cos\theta$$

Krok 2: Wyrażenie funkcji podcałkowej

Współrzedne w funkcji podcałkowej:

$$x^2 + y^2 = (R\sin\theta\cos\phi)^2 + (R\sin\theta\sin\phi)^2 = R^2\sin^2\theta$$

Krok 3: Element powierzchniowy dS

Element powierzchni w parametryzacji sferycznej to:

$$dS = R^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

Krok 4: Całka powierzchniowa

Całke zapisujemy jako:

$$\iint_S (x^2 + y^2)\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2\sin^2\theta \cdot R^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

Krok 5: Przekształcenie i obliczenie całki

$$= R^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta \, d\phi$$

Rozbijamy na dwie oddzielne całki:

$$= R^4 \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) \left(\int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta \right)$$

Obliczamy każda z nich:

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta = \int_0^{\pi} (\sin\theta)^3 \, d\theta$$

Aby obliczyć te całke, stosujemy podstawienie $\sin\theta = t$, $d\theta = \frac{dt}{\cos\theta}$, z granicami zmienności od 0 do π sie odpowiednio zmienia:

$$\int \sin^3\theta \, d\theta = \int (1-t^2)t \, dt = \frac{1}{3}\left(t^3 - t^5\right)$$

Po podstawieniu i wyznaczeniu:

$$= \frac{4}{3}$$

Krok 6: Wartość końcowa

Podstawiajac obliczone wartości do głównej całki:

$$= R^4 \times 2\pi \times \frac{4}{3} = \frac{8\pi}{3} R^4$$

Wynik końcowy

$$\boxed{\frac{8\pi}{3} R^4}$$