ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

18. Pokaż, że równanie $x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$ określa funkcję uwikłaną $y = y(x)$ w otoczeniu punktu $(1, 0)$. Oblicz $y'(1)$. Wyznacz wzór funkcji $y(x)$.

"'latex article amsmath

Rozwiazanie

Dane wejściowe:

$$x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

Krok 1: Wzór ogólny

Zastosujemy pochodna czastkowa do wyprowadzenia wzoru na pochodna funkcji uwikłanej $y'(x)$.

$$\frac{d}{dx}(x^2 - xy + y^2 - 1) = 0 \tag{2}$$

Krok 2: Zastosowanie reguły Leibniza

Pochodna lewostronna z uwzglednieniem pochodnej czastkowej:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial x}(y^2) - \frac{\partial}{\partial x}(1) &= 0 \\ 2x - \left(y + x\frac{dy}{dx}\right) + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \end{aligned}$$

Krok 3: Przekształcenie do postaci rozwiazania dla $\frac{dy}{dx}$

Zbieramy wyrazy wzgledem $\frac{dy}{dx}$:

$$\begin{aligned} 2x - y - x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\ 2x - y &= (x - 2y)\frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

Rozwiazujac równanie dla $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x - 2y} \tag{3}$$

Krok 4: Obliczenie $y'(1)$

Podstawiamy $x = 1$ i $y = 0$ do równania:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2(1) - 0}{1 - 2(0)} \\ y' &= \frac{2}{1} \\ y' &= 2 \end{aligned}$$

Ostateczny wynik:

$$\boxed{y'(1) = 2} \tag{4}$$