ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

11. Wyznacz macierz Jacobiego i jakobian odwzorowania $(r, \psi, \varphi) \to (x(r, \psi, \varphi), y(r, \psi, \varphi), z(r, \psi, \varphi))$, gdzie $x = r \sin \psi \cos \varphi$, $y = r \sin \psi \sin \varphi$, $z = r \cos \psi$.

"'latex article amsmath

Dane wejściowe:

$$x = r \sin \psi \cos \varphi, \quad y = r \sin \psi \sin \varphi, \quad z = r \cos \psi$$

Macierz Jacobiego J definiujemy jako macierz pochodnych czastkowych funkcji przejścia wzgledem zmiennych r, ψ, φ.
Rozważamy przekształcenie $(r, \psi, \varphi) \to (x, y, z)$.
Ogólny wzór na macierz Jacobiego:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \psi} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \psi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \psi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$$

Podstawienie danych i obliczenie pochodnych czastkowych:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sin \psi \cos \varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = r \cos \psi \cos \varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin \psi \sin \varphi$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin \psi \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \psi} = r \cos \psi \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \sin \psi \cos \varphi$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos \psi, \quad \frac{\partial z}{\partial \psi} = -r \sin \psi, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$

Macierz Jacobiego:

$$J = \begin{bmatrix} \sin \psi \cos \varphi & r \cos \psi \cos \varphi & -r \sin \psi \sin \varphi \\ \sin \psi \sin \varphi & r \cos \psi \sin \varphi & r \sin \psi \cos \varphi \\ \cos \psi & -r \sin \psi & 0 \end{bmatrix}$$

Obliczenie jakobianu (wyznacznika macierzy Jacobiego):

$$\text{Jakobian} = \begin{vmatrix} \sin \psi \cos \varphi & r \cos \psi \cos \varphi & -r \sin \psi \sin \varphi \\ \sin \psi \sin \varphi & r \cos \psi \sin \varphi & r \sin \psi \cos \varphi \\ \cos \psi & -r \sin \psi & 0 \end{vmatrix}$$

Obliczenie wyznacznika:

$$= (\sin \psi \cos \varphi) \begin{vmatrix} r \cos \psi \sin \varphi & r \sin \psi \cos \varphi \\ -r \sin \psi & 0 \end{vmatrix} - (r \cos \psi \cos \varphi) \begin{vmatrix} \sin \psi \sin \varphi & r \sin \psi \cos \varphi \\ \cos \psi & 0 \end{vmatrix}$$

$$+(-r \sin \psi \sin \varphi) \begin{vmatrix} \sin \psi \sin \varphi & r \cos \psi \sin \varphi \\ \cos \psi & -r \sin \psi \end{vmatrix}$$

Po obliczeniach, wynik jakobianu:

$$= r^2 \sin \psi (\sin^2 \psi \cos \varphi + \cos^2 \psi \cos \varphi) = r^2 \sin \psi \cos \varphi$$

Wynik końcowy: Jakobian $= r^2 \sin \psi$