ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

1. Pokaż, że szereg jest zbieżny i oblicz jego sumę:
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+4^n}{5^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

"'latex article amsmath

Rozwiazanie zadania z szeregów

April 8, 2025

1. Pokaż, że szereg jest zbieżny i oblicz jego sume

a) Szereg: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+4^n}{5^n}$

Dane wejściowe:

$$a_n = \frac{3^n + 4^n}{5^n}$$

Ogólny wzór jest postaci:

$$a_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

Użyjemy kryterium zbieżności dla szeregu geometrycznego. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$ jest geometryczny z ilorazem $r = \frac{4}{5} < 1$, wiec jest zbieżny.

Podobnie, dla $\left(\frac{3}{5}\right)^n$, mamy $r = \frac{3}{5} < 1$, wiec jest zbieżny.

Zatem cały szereg jest zbieżny. Obliczamy jego sume jako sume dwóch zbieżnych szeregów geometrycznych:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

Suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ to:

$$S = \frac{r}{1-r}$$

Podstawiajac warunki:

$$S_1 = \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{2}$$

$$S_2 = \frac{\frac{4}{5}}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = 4$$

Suma całkowita:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{3}{2} + 4 = \frac{3}{2} + \frac{8}{2} = \frac{11}{2}$$

$$\boxed{\frac{11}{2}}$$

b) Szereg: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

Dane wejściowe:

$$a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

Zastosujemy metode rozkładu na ułamki proste.

Wyrażenie możemy zapisać jako:

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{A}{3n-2} + \frac{B}{3n+1}$$

Rozwiazujac układ równań:

$$1 = A(3n+1) + B(3n-2)$$
$$1 = (3A+3B)n + (A-2B)$$

Wymagania:

$$3A + 3B = 0$$
$$A - 2B = 1$$

Rozwiazujac układ:

$$3A + 3B = 0 \Rightarrow A = -B$$

Podstawiamy $A = -B$ do równania $A - 2B = 1$:

$$-B - 2B = 1 \Rightarrow -3B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$$

$$A = -B = \frac{1}{3}$$

Zatem:

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1/3}{3n-2} - \frac{1/3}{3n+1}$$

Szereg bedzie miał postać:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1/3}{3n-2} - \frac{1/3}{3n+1} \right)$$

Obliczajac sume szeregu jako teleskopowego:

$$S = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right)$$

Suma postepuje według wzoru szeregu teleskopowego. Nastepuje redukcja kolejnych wyrazów, prowadzaca do tego, że wszystkie wyrazy poza pierwszym zmierzaja do zera.

Ostateczne oszacowanie:

$$\boxed{\frac{1}{3}}$$