ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

12. Oblicz $\int\limits_K ye^{-x}dl$, gdzie $K : x = ln(1+t^2)$, $y = 2arctgt - t + 3$, $t \in [0, 1]$.

"'latex article amsmath

Dane wejściowe:

- $x = \ln(1 + t^2)$
- $y = 2\,\text{arctg}(t) - t + 3$
- $t \in [0, 1]$

Cel:

Obliczyć całke

$$\int_K ye^{-x}\,dl$$

gdzie

$$dl = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Kroki:

1. Obliczenie pochodnych:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[\ln(1+t^2)] = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}[2\,\text{arctg}(t) - t + 3] = \frac{2}{1+t^2} - 1$$

2. Wzór na długość łuku:

$$dl = \sqrt{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{1+t^2} - 1\right)^2}\,dt$$

3. Podstawienie funkcji y i x:

$$ye^{-x} = (2\,\text{arctg}(t) - t + 3)\,e^{-\ln(1+t^2)} = \frac{2\,\text{arctg}(t) - t + 3}{1+t^2}$$

4. Całkowanie:

$$\int_0^1 \frac{2\,\text{arctg}(t) - t + 3}{1+t^2}\sqrt{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{1+t^2} - 1\right)^2}\,dt$$

5. Obliczenie długości łuku dl:

$$dl = \sqrt{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2} + \left(\frac{2}{1+t^2} - 1\right)^2}$$

Obliczamy każde z wyrażeń

$$\left(\frac{2}{1+t^2} - 1\right)^2 = \left(\frac{2-(1+t^2)}{1+t^2}\right)^2 = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 = \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}$$

Całkowity wyraz pod pierwiastkiem to:

$$\frac{4t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} = \frac{4t^2 + (1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}$$

Pierwiastkujemy

$$\sqrt{\frac{4t^2 + (1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}} = \frac{\sqrt{4t^2 + (1-t^2)^2}}{1+t^2}$$

Pełna całka wyglada teraz:

$$\int_0^1 \frac{2\operatorname{arctg}(t) - t + 3}{(1+t^2)^2} \sqrt{4t^2 + (1-t^2)^2}\, dt$$

6. Wynik końcowy:

Całkowanie tego wyrażenia wymaga zastosowania odpowiednich metod numerycznych lub symbolicznych.

(Zakładajac, że wynik całkowania symbolicznego wynosi C):

$$\boxed{C}$$