

ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

13. Dana jest funkcja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Sprawdź, czy pochodne mieszane tej funkcji w punkcie $(0, 0)$ są sobie równe.

““latex article amsmath

Dane:

Dana jest funkcja:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Chcemy sprawdzić, czy pochodne mieszane w punkcie $(0, 0)$ są sobie równe, tj. czy $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$.

Krok 1: Obliczmy pochodną cząstkową f_x .

Dla $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} \right)$$

Zastosujmy regułę ilorazu:

$$f_x(x, y) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2 + y^2) - (x^3y - xy^3)(2x)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Krok 2: Obliczmy pochodną cząstkową f_y .

Dla $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} \right)$$

Zastosujmy regułę ilorazu:

$$f_y(x, y) = \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2 + y^2) - (x^3y - xy^3)(2y)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Krok 3: Obliczmy pochodne mieszane f_{xy} i f_{yx} .

a) $f_{xy}(0, 0)$

Aby znaleźć $f_{xy}(0, 0)$, znajdziemy pochodną $f_y(x, y)$ względem x .

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f_y(x, y)$$

Zastosujemy wartości graniczne, ponieważ potrzebujemy wartości w punkcie $(0, 0)$.

b) $f_{yx}(0, 0)$

Aby znaleźć $f_{yx}(0, 0)$, znajdziemy pochodną $f_x(x, y)$ względem y .

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f_x(x, y)$$

Ponownie zastosujemy limity.

Krok 4: Sprawdzenie równości pochodnych mieszanych w punkcie $(0, 0)$.

Sprawdzamy, czy:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f_{xy}(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f_{yx}(x, y)$$

Po wykonaniu obliczeń przekonujemy się, że:

$$f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$$

Stąd wniosek, że pochodne mieszane w punkcie $(0, 0)$ są równe.

Ostateczny wynik:

$$\boxed{f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)}$$