ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

15. Wyznacz, korzystając z metody Lagrange'a, ekstrema warunkowe funkcji: a) $f(x, y) = x + y$ przy warunku $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$, b) $f(x, y, z) = x + y + 2z$ przy warunku $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

"'latex article amsmath

Zadanie 15

Wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji:

$$f(x, y) = x + y$$

przy warunku:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1.$$

Rozwiazanie:
Zastosujemy metode mnożników Lagrange'a. Funkcja Lagrange'a jest:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - 1 \right).$$

Krok 1: Równania Lagrange'a

Równania pochodzace z równania Lagrange'a to:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 1 + \frac{2\lambda}{x^3} = 0,$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 1 + \frac{2\lambda}{y^3} = 0,$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - 1 = 0.$$

Krok 2: Rozwiazywanie równań

Rozwiazujac pierwsze dwa równania, otrzymujemy:

$$1 = -\frac{2\lambda}{x^3}, \quad 1 = -\frac{2\lambda}{y^3}.$$

To daje:

$$x^3 = -2\lambda, \quad y^3 = -2\lambda.$$

Stad wynika, że:

$$x^3 = y^3 \implies x = y \quad \text{(ponieważ rozpatrujemy dodatnie wartości).}$$

Podstawiajac $x = y$ do warunku ograniczajacego:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 1 \implies \frac{2}{x^2} = 1 \implies x^2 = 2 \implies x = y = \sqrt{2}.$$

Krok 3: Wyznaczanie ekstremum

Podstawiajac wartości $x = y = \sqrt{2}$ do funkcji celu:

$$f(x, y) = x + y = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

Ekstremum warunkowe funkcji wynosi:

$$\boxed{2\sqrt{2}}$$