

ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

23. Rozwiąż równanie różniczkowe cząstkowe $yz'_x - xz'_y = 0$, gdzie $z = z(x, y)$, przyjmując nowe zmienne $u = x, v = x^2 + y^2$.

Dane wejściowe:

Równanie różniczkowe:

$$yz_x - xz_y = 0$$

Nowe zmienne:

$$u = x, \quad v = x^2 + y^2$$

Ogólny wzór

Chcemy przekształcić równanie do nowych zmiennych u i v . Przy użyciu pochodnych cząstkowych zmiennych postaci:

$$\begin{aligned} z_x &= z_u \frac{\partial u}{\partial x} + z_v \frac{\partial v}{\partial x} \\ z_y &= z_u \frac{\partial u}{\partial y} + z_v \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

Przekształcenie wzoru

Obliczamy pochodne cząstkowe nowych zmiennych:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 1, & \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 2x, & \frac{\partial v}{\partial y} &= 2y \end{aligned}$$

Podstawiając do wzorów na pochodne cząstkowe funkcji z :

$$\begin{aligned} z_x &= z_u \cdot 1 + z_v \cdot 2x = z_u + 2xz_v \\ z_y &= z_u \cdot 0 + z_v \cdot 2y = 2yz_v \end{aligned}$$

Podstawiając do równania:

$$y(z_u + 2xz_v) - x(2yz_v) = 0$$

Uproszczenie równania:

$$\begin{aligned} yz_u + 2xyz_v - 2xyz_v &= 0 \\ yz_u &= 0 \end{aligned}$$

Przeliczenie krok po kroku

Równanie $yz_u = 0$ sugeruje dwa przypadki: 1. $y = 0$, co jest trywialne i dotyczy tylko osi x . 2. $z_u = 0$, co oznacza, że funkcja z nie zależy od u .

Z tego wynika, że z jest funkcja tylko zmiennej v :

$$z = f(v)$$

Wynik końcowy

Funkcja rozwiązania ma postać:

$$z = f(x^2 + y^2)$$

****Jednostka:**** Odpowiednie jednostki zależą od kontekstu funkcji f , który nie jest określony.