ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

3. Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego:
a) $f_n(x) = \frac{nx}{n^2+x^2}$ na $\mathbb{R}$,
b) $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ na $[0, 1]$.

"‘latex article amsmath

Zadanie 3

Zbadaj zbieżność punktowa i jednostajna ciagu funkcyjnego.

a) $f_n(x) = \frac{nx}{n^2+x^2}$ na R.

Zbieżność punktowa:

Szacujemy granice punktowa dla każdego $x \in R$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n^2 + x^2}$$

Podzielmy licznik i mianownik przez n:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n + \frac{x^2}{n}}$$

Dla $x \neq 0$ granica wynosi:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$$

Dla $x = 0$, granica wynosi:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{0}{n^2} = 0$$

Czyli granica punktowa wynosi:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad \forall x \in R$$

Zbieżność jednostajna:

Sprawdzamy, czy zbieżność jest jednostajna w oparciu o kryterium Cauchy'ego jednostajnej zbieżności:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in R} |f_n(x) - 0| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in R} \left| \frac{nx}{n^2 + x^2} \right|$$

Maksimum funkcji $\left| \frac{nx}{n^2+x^2} \right|$ znajduje sie przy $x = n$:

$$\left| \frac{n^2}{n^2 + n^2} \right| = \frac{1}{2}$$

Ponieważ $\sup_{x\in R} |f_n(x)|\, 0$, ciag nie jest jednostajnie zbieżny.

b) $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ **na** $[0,1]$**.**

Zbieżność punktowa:

Szacujemy granice punktowa dla każdego $x \in [0,1]$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx}$$

Dla $x = 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+0} = 1$$

Dla $x \in (0,1]$:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} = 0$$

Czyli granica punktowa wynosi:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x = 0 \\ 0 & \text{dla } x \in (0,1] \end{cases}$$

Zbieżność jednostajna:

Sprawdzamy, czy zbieżność jest jednostajna w otoczeniu 0:

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{1}{1+nx} - f(x) \right|$$

Dla $x = 0$, $f(x) = 1$, dla $x \in (0,1]$, $f(x) = 0$:

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{1}{1+nx} - 0 \right| = \frac{1}{1+n\cdot 0} = 1$$

Ciag nie jest jednostajnie zbieżny, ponieważ $\sup 0$.