ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

8. Oblicz pochodną kierunkową w kierunku wektora $h = (1, 2, 2)$ funkcji $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ w punkcie $x_0 = (-2, 1, 2)$.

Dane wejściowe:

- Punkt: $\mathbf{x_0} = (-2, 1, 2)$ - Wektor kierunkowy: $\mathbf{h} = (1, 2, 2)$ - Funkcja: $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

Ogólny wzór:

Pochodna kierunkowa funkcji f w kierunku wektora $\mathbf{h}$ w punkcie $\mathbf{x_0}$ jest dana wzorem:

$$D_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x_0}) = \nabla f(\mathbf{x_0}) \cdot \mathbf{u}$$

gdzie $\mathbf{u}$ jest wersorem wektora $\mathbf{h}$, a ∇f to gradient funkcji f.

$$\text{Gradient funkcji:}$$
$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$\text{Pochodne czastkowe:}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\text{Gradient w punkcie } \mathbf{x_0} = (-2, 1, 2):$$
$$\nabla f(\mathbf{x_0}) = \left(\frac{2(-2)}{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}, \frac{2(1)}{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}, \frac{2(2)}{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} \right)$$
$$= \left(\frac{-4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9} \right)$$

$$\text{Normalizacja wektora kierunkowego } \mathbf{h}:$$
$$\|\mathbf{h}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$
$$\mathbf{u} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$\text{Obliczenie pochodnej kierunkowej:}$$
$$D_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x_0}) = \nabla f(\mathbf{x_0}) \cdot \mathbf{u} = \left(\frac{-4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9} \right) \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$
$$= \frac{-4}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}$$
$$= \frac{-4}{27} + \frac{4}{27} + \frac{8}{27}$$
$$= \frac{8}{27}$$

$$\text{Wynik końcowy:}$$
$$\boxed{\frac{8}{27}}$$