ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

4. Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną szeregu: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^2}}$ na $\mathbb{R}$,
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$ na $[1, +\infty)$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ na $[0, 1]$.

"'latex article amsmath

Rozwiazanie zadania 4

b) Zbadanie zbieżności punktowej i jednostajnej szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2} \quad \text{na} \quad [1, +\infty)$$

Krok 1: Ogólny wzór

Rozważamy szereg:

$$a_n(x) = \frac{nx}{1+n^5x^2}$$

Krok 2: Badanie zbieżności punktowej dla ustalonego x

$$\lim_{n\to\infty} a_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$$

Spróbujmy przybliżyć licznik i mianownik. Dla dużych n:

$$a_n(x) \approx \frac{nx}{n^5x^2} = \frac{1}{n^4x}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4x} = 0$$

Wniosek: Dla każdego ustalonego $x \in [1, +\infty)$ szereg jest punktowo zbieżny.

Krok 3: Test jednostajnej zbieżności

Stosujac test Weierstrassa: szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny, jeśli istnieje funkcja $M(x)$ taka, że $|a_n(x)| \leq M(x)$ dla każdego n i x, oraz $\sum_{n=1}^{\infty} M(x)$ jest zbieżny.

Rozważmy oszacowanie:

$$|a_n(x)| = \left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right| \leq \frac{nx}{n^5x^2} = \frac{1}{n^4x}$$

Rozważmy szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4x}$$

Jest on jednostajnie zbieżny na $[1, +\infty)$, ponieważ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4x} \leq \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

Gdzie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ jest zbieżny jako szereg p-ty z $p > 1$.

Wniosek: Szereg jest jednostajnie zbieżny na $[1, +\infty)$.

Wynik końcowy

Szereg jest zarówno punktowo, jak i jednostajnie zbieżny na $[1, +\infty)$.