

# ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

6. Zbadaj różniczkowalność w całej dziedzinie funkcji:

$$a) f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**\*\*Dane wejściowe:\*\***

$$1. f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad 2. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

—  
Cześć A:  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

**\*\*Ogólny wzór:\*\***

Sprawdzamy funkcje pod względem różniczkowalności, badając ciągłość w punkcie  $(0, 0)$  oraz istnienie pochodnych czastkowych.

**\*\*1. Ciągłość:\*\***

Funkcja jest ciągła, jeśli:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$$

Obliczamy granice:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$$

**\*\*Przekształcenie wzoru (nie potrzebne):\*\***

Funkcja w punkcie  $(0, 0)$  wynosi:

$$f(0, 0) = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$$

**\*\*Podstawienie danych i przeliczenie (nie wymagane, bo granica i wartość funkcji się zgadzają):\*\***

**\*\*2. Pochodne czastkowe:\*\***

Pochodna czastkowa względem  $x$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Pochodna czastkowa względem  $y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Te pochodne istnieją wszędzie poza punktem  $(0, 0)$ , ale w tym punkcie stosujemy granice.

**\*\*Wnioski:\*\***

Funkcja nie jest różniczkowalna w punkcie  $(0, 0)$  mimo istnienia granicy, z powodu braku istnienia pochodnych w tym punkcie.

—  
Cześć B:  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

**\*\*Ogólny wzór:\*\***

Sprawdzamy różniczkowalność poprzez ciągłość i istnienie pochodnych czastkowych w punkcie  $(0, 0)$ .

**\*\*1. Ciągłość:\*\***

Funkcja jest ciągła, jeśli:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$$

Obliczamy granice (korzystając z podstawienia biegunowego:  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ):

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos^4 \theta - r^3 \sin^3 \theta}{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} r^2 (\cos^4 \theta - r \sin^3 \theta)$$

$$= 0$$

**\*\*Przekształcenie wzoru (redukowanie do granicy):\*\***  $\lim_{r \rightarrow 0} r^2 (\cos^4 \theta - r \sin^3 \theta) = 0$ , co dowodzi ciągłości.

**\*\*2. Pochodne czastkowe:\*\***

Pochodna czastkowa wzgledem  $x$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

Pochodna czastkowa wzgledem  $y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k}$$

**\*\*Wnioski:\*\***

Funkcja jest różniczkowalna w punkcie  $(0, 0)$ .

**\*\*Ostateczny wynik różniczkowalności:\*\***

Dla a) Funkcja nie jest różniczkowalna w  $(0, 0)$ .

Dla b) Funkcja jest różniczkowalna w  $(0, 0)$ .