ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

2. a) Znaleźć środek ciężkości jednorodnej figury ograniczonej krzywymi: $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$.
b) Znaleźć moment bezwładności jednorodnego kwadratu o boku a względem wierzchołka.

"'latex article amsmath

Zadanie 2

a) Znaleźć środek cieżkości jednolitej figury ograniczonej krzywymi $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$.

Dane wejściowe:

Krzywe ograniczajace: $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$.

Środek cieżkości figury:

Ogólny wzór na środek cieżkości obszaru płaskiego określonego co do masy:

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x(f(x) - g(x))\, dx$$
$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_a^b \frac{(f(x)^2 - g(x)^2)}{2}\, dx$$

gdzie A to pole obszaru:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

Dla naszego problemu: $f(x) = \ln x$, $g(x) = 0$, $a = 1$, $b = e$.

Przekształcenie wzorów i obliczenie pola:

$$A = \int_1^e \ln x\, dx$$

Przypomnijmy podstawowe całkowanie:

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C$$

Zatem:

$$A = [x \ln x - x]_1^e = (e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1) = (e - e) - (0 - 1) = 1$$

Wyznaczenie współrzednej $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{1}{1} \int_1^e x \ln x\, dx$$

Podobnie przez cześci:

$$\int x \ln x\, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

Zatem:

$$\bar{x} = \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^e = \left(\frac{e^2}{2} \ln e - \frac{e^2}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\bar{x} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

Wyznaczenie współrzednej $\bar{y}$:

$$\bar{y} = \frac{1}{1} \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{2} \, dx$$

Ponieważ całkowanie jest skomplikowane, wykorzystujemy wzór stosowny:

$$\int (\ln x)^2 \, dx = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$$

Zatem:

$$\bar{y} = \left[\frac{x(\ln x)^2}{2} - x \ln x + x \right]_1^e = \frac{1}{2} (e - 2e + e)$$

Wynik:

$$\bar{x} \approx \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2}$$

b) Znaleźć moment bezwładności jednolitego kwadratu o boku a wzgledem wierzchołka.

Dane wejściowe:

Kwadrat o boku a.

Moment bezwładności:

Ogólny wzór na moment bezwładności I wzgledem osi przechodzacej przez wierzchołek:

$$I = \int_0^a \int_0^a (x^2 + y^2) \, dy \, dx$$

Podstawienie danych i przekształcenie wzorów:

$$I = \int_0^a \left[xy^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^a dx = \int_0^a a^2 x + \frac{x^3}{3} \, dx$$

$$I = \left[\frac{a^2 x^2}{2} + \frac{x^4}{12} \right]_0^a = \frac{a^4}{2} + \frac{a^4}{12}$$

$$I = \frac{6a^4}{12} + \frac{a^4}{12} = \frac{7a^4}{12}$$

Wynik:

$$\boxed{I = \frac{7a^4}{12}}$$