

ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

10. Wyznacz równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $f(x, y) = \arctg(\frac{y}{x})$ w punkcie $(1, 1)$.

““latex article amsmath

Rozwiązanie

Dane wejściowe:

$$f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad P = (1, 1)$$

Ogólny wzór na równanie płaszczyzny stycznej:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Wyznaczenie pochodnej cząstkowej względem x :

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

Wyznaczenie pochodnej cząstkowej względem y :

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Podstawienie wartości punktu $P = (1, 1)$:

$$f(1, 1) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$f_x(1, 1) = \frac{-1}{1^2 + 1^2} = \frac{-1}{2}$$

$$f_y(1, 1) = \frac{1}{1^2 + 1^2} = \frac{1}{2}$$

Podstawienie do wzoru równania płaszczyzny stycznej:

$$z = \frac{\pi}{4} + \frac{-1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}(y - 1)$$

Przekształcenie wzoru:

$$z = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}(y - 1)$$

$$z = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$$

Wynik końcowy:

$$\boxed{z = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y}$$