ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

14. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji: a) $f(x,y) = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$, b) $f(x,y) = x^3 - 2x^2y^2 + y^4$, c) $f(x,y,z) = \frac{2x^2}{y} + \frac{y^2}{z} - 4x + 2z^2$.

$$\text{Dane wejściowe:} \quad f(x,y) = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$$

Krok 1: Ogólny wzór Aby znaleźć ekstremum lokalne funkcji dwóch zmiennych, musimy znaleźć miejsca, w których pochodne czastkowe pierwszego rzedu funkcji sa równe zero.

Krok 2: Pochodne czastkowe pierwszego rzedu

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 2y^3 - 3x + 6y) = 3x^2 - 3$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 - 2y^3 - 3x + 6y) = -6y^2 + 6$$

Krok 3: Równanie do przekształcenia

$$f_x(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 3 = 0$$

$$f_y(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad -6y^2 + 6 = 0$$

Krok 4: Rozwiazanie równań

$$3x^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

$$-6y^2 + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1$$

Krok 5: Znalezienie punktów stacjonarnych Punkty stacjonarne to kombinacje (x,y):

$$(1,1), \quad (1,-1), \quad (-1,1), \quad (-1,-1)$$

Krok 6: Pochodne czastkowe drugiego rzedu

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^3 - 2y^3 - 3x + 6y) = 6x$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^3 - 2y^3 - 3x + 6y) = -12y$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(x^3 - 2y^3 - 3x + 6y) = 0$$

Krok 7: Wyznacznik Hessego Wyznacznik Hessego H dla funkcji dwóch zmiennych wynosi:

$$H(x,y) = f_{xx}(x,y) f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2$$

Krok 8: Obliczenia dla każdego punktu stacjonarnego

1. Punkt $(1,1)$:

$$f_{xx}(1,1) = 6, \quad f_{yy}(1,1) = -12, \quad f_{xy}(1,1) = 0$$
$$H(1,1) = 6 \cdot (-12) - 0^2 = -72$$

2. Punkt $(1,-1)$:

$$f_{xx}(1,-1) = 6, \quad f_{yy}(1,-1) = 12, \quad f_{xy}(1,-1) = 0$$
$$H(1,-1) = 6 \cdot 12 - 0^2 = 72$$

3. Punkt $(-1,1)$:

$$f_{xx}(-1,1) = -6, \quad f_{yy}(-1,1) = -12, \quad f_{xy}(-1,1) = 0$$
$$H(-1,1) = -6 \cdot (-12) - 0^2 = 72$$

4. Punkt $(-1, -1)$:

$$f_{xx}(-1,-1) = -6, \quad f_{yy}(-1,-1) = 12, \quad f_{xy}(-1,-1) = 0$$

$$H(-1,-1) = -6 \cdot 12 - 0^2 = -72$$

Krok 9: Analiza wartości Hessego - Dla $(1, 1)$ i $(-1, -1)$: $H < 0$, brak ekstremum lokalnego. - Dla $(1, -1)$ i $(-1, 1)$: $H > 0$ - $f_{xx}(1, -1) > 0$ — minimum lokalne w punkcie $(1, -1)$ - $f_{xx}(-1, 1) < 0$ — maksimum lokalne w punkcie $(-1, 1)$

Wynik Końcowy

Punkty ekstremalne:

Minimum lokalne w punkcie $(1, -1)$.

Maksimum lokalne w punkcie $(-1, 1)$.