

ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

4. Pokaż, że w punkcie $(0,0)$ funkcja $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ ma pochodne kierunkowe w dowolnym kierunku ale nie jest różniczkowalna w tym punkcie.

““latex article amsmath

Dane wejściowe:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Zadanie polega na pokazaniu, że f ma pochodne kierunkowe w dowolnym kierunku w punkcie $(0,0)$, ale nie jest różniczkowalna w tym punkcie.

****Krok 1: Pochodne kierunkowe****

Ogólny wzór na pochodną kierunkową funkcji f w punkcie (x_0, y_0) w kierunku wektora jednostkowego $\mathbf{u} = (a, b)$ jest:

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ta, y_0 + tb) - f(x_0, y_0)}{t}$$

W naszym przypadku $(x_0, y_0) = (0,0)$ i $f(0,0) = 0$, więc:

$$D_{\mathbf{u}}f(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(ta, tb)}{t}$$

Podstawiając $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$:

$$f(ta, tb) = \frac{(ta)(tb)^2}{(ta)^2 + (tb)^2} = \frac{t^3 ab^2}{t^2(a^2 + b^2)} = \frac{tab^2}{a^2 + b^2}$$

$$D_{\mathbf{u}}f(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{tab^2}{a^2 + b^2}}{t} = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}$$

****Krok 2: Różniczkowalność****

Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$, jeżeli:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - L_1x - L_2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

gdzie L_1 i L_2 to pochodne cząstkowe, a $\sqrt{x^2 + y^2}$ reprezentuje odległość od punktu $(0,0)$.

Wyliczamy:

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$$

Rozpatrując rzeczywiste wartości x i y , dla jakiegokolwiek krzywej przechodzącej przez $(0,0)$, np. $y = mx$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, mx)}{\sqrt{x^2 + (mx)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2(1+m^2)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^3}{x^2(1+m^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2(1+m^2)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x}{1+m^2} = 0$$

Nie istnieją takie L_1 i L_2 , aby powyższy limit wynosił zero dla każdej ścieżki prowadzącej do $(0,0)$. Stąd funkcja nie jest różniczkowalna w $(0,0)$.

Wynik końcowy: Funkcja $f(x,y)$ ma pochodne kierunkowe w każdym kierunku, ale nie jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$.