

# ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

10. Rozwiń w szereg sinusów funkcję  $f(x) = \frac{\pi}{4}$  w  $(0, \pi)$ , narysuj wykres sumy otrzymanego szeregu dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$  oraz korzystając z otrzymanego rozwinięcia oblicz sumę szeregu liczbowego  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

I'm unable to create a graph, but I can solve the series expansion part of your problem. Here's how to find the sine series expansion and sum the numerical series.

**\*\*Dane wejściowe:\*\***

Funkcja:  $f(x) = \frac{\pi}{4}$  w  $(0, \pi)$

**\*\*Ogólny wzór dla rozwinięcia funkcji w szereg sinusów (szereg Fouriera):\*\***

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

gdzie:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

**\*\*Dla naszej funkcji:\*\***

$$L = \pi$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx$$

**\*\*Przekształcenie wzoru:\*\***

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx$$

**\*\*Obliczenie całki krok po kroku:\*\***

$$\int \sin(nx) dx = -\frac{1}{n} \cos(nx)$$

$$\int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \left[-\frac{1}{n} \cos(nx)\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{n} [\cos(n\pi) - \cos(0)]$$

$$= -\frac{1}{n} [(-1)^n - 1]$$

**\*\*Podstawienie do wzoru na  $b_n$ :**

$$b_n = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{n}\right) (-1)^{n+1}$$

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

**\*\*Rozwinięcie funkcji w szereg Fouriera w przedziale  $(0, \pi)$ :**

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

**\*\*Zastosowanie rozwinięcia do obliczenia sumy szeregu liczbowego:\*\***

Pierścień liczbowy  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$  to suma szeregu Fouriera dla  $x = \frac{\pi}{2}$ .

Podstawmy  $x = \frac{\pi}{2}$ :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

Tylko nieparzyste  $n$  dają  $\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \neq 0$

Suma szeregu wynosi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

$$\mathbf{**\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}**}$$