

# ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

3. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami:

a)  $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ ,  $x^2 + y^2 = z^2$  ( $z^2 \geq x^2 + y^2$ ),    b)  $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$ .

**\*\*Dane wejściowe:\*\***

a)

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2az, \quad x^2 + y^2 = z^2 \quad (z^2 \geq x^2 + y^2)$$

b)

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$$

**\*\*a) Rozwiązanie:\*\***

1. **\*\*Ogólny wzór:\*\***

Równanie powierzchni to sfera:

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$$

Podstawienie drugiej powierzchni:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2az \implies (z - a)^2 = a^2 - x^2 - y^2$$

2. **\*\*Podstawienie danych:\*\***

Znajdujemy objętość za pomocą całki podwójnej dla okręgu:

$$x^2 + y^2 \leq a^2$$

3. **\*\*Obliczenie krok po kroku:\*\***

Zmiana na współrzędne biegunowe:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

Zakres dla  $r$ :  $0 \leq r \leq a$  oraz dla  $\theta$ :  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^a (2az - r^2) r \, dr \, d\theta$$

Podstawienie:

$$z = \sqrt{a^2 - r^2}$$

Objętość:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^a 2a\sqrt{a^2 - r^2} r \, dr \, d\theta$$

Wyrażenie:

$$V = 2a \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{3}(a^2 - r^2)^{3/2} \right]_0^a d\theta$$

Wynik:

$$V = 2a \cdot \frac{4\pi a^3}{3} = \frac{8\pi a^4}{3}$$

4. **\*\*Wynik końcowy:\*\***

$$\boxed{V = \frac{8\pi a^4}{3}}$$

**\*\*b) Rozwiązanie:\*\***

1. **\*\*Ogólny wzór:\*\***

Skorzystajmy z elipsoid:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$$

2. \*\*Podstawienie danych:\*\*

Znajdujemy objętość za pomocą całki potrójnej.

3. \*\*Obliczenie krok po kroku:\*\*

Zakresy:

$$-a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b, \quad -c \leq z \leq c$$

Objętość elipsoidy:

$$V = \frac{4}{3}\pi abc$$

4. \*\*Wynik końcowy:\*\*

$$V = \frac{4}{3}\pi abc$$