ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

5. Oblicz $\int\limits_{\bar{AB}} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy$, gdzie $\bar{AB}$ jest łukiem paraboli $y^2 = x$ od $A(1,1)$ do $B(4,2)$.

"'latex article amsmath

Dane wejściowe:

- Łuk paraboli $y^2 = x$ od punktu $A(1,1)$ do punktu $B(4,2)$.
- Wektor pola $F(x,y) = (x^2 - 2xy, 2xy + y^2)$.

Ogólny wzór:

Musimy obliczyć całke krzywoliniowa:

$$\int_{AB} (x^2 - 2xy)\,dx + (2xy + y^2)\,dy$$

Parametryzacja krzywej:

Ponieważ $y^2 = x$, możemy przyjać $y = t$, wtedy $x = t^2$. Parametryzacja:

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t \end{cases}$$

dla $t \in [1,2]$.

Różniczki:

$$dx = 2t\,dt, \quad dy = dt$$

Całka krzywoliniowa:

Podstawiamy do całki:

$$\int_1^2 \left[(t^4 - 2t^3) \cdot 2t + (2t^3 + t^2)\right]\,dt$$

Uproszczenie wyrażenia pod całka:

$$= \int_1^2 (2t^5 - 4t^4 + 2t^3 + t^2)\,dt$$

Obliczenie całki:

Krok po kroku:

$$\int (2t^5)\,dt = \frac{2}{6}t^6 = \frac{1}{3}t^6$$
$$\int (-4t^4)\,dt = -\frac{4}{5}t^5$$
$$\int (2t^3)\,dt = \frac{2}{4}t^4 = \frac{1}{2}t^4$$
$$\int (t^2)\,dt = \frac{1}{3}t^3$$

Sumujemy wszystkie:

$$= \left[\frac{1}{3}t^6 - \frac{4}{5}t^5 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{3}t^3\right]_1^2$$

Podstawiamy granice:

$$\begin{aligned} F(2) &= \frac{1}{3}(2^6) - \frac{4}{5}(2^5) + \frac{1}{2}(2^4) + \frac{1}{3}(2^3) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 64 - \frac{4}{5} \cdot 32 + \frac{1}{2} \cdot 16 + \frac{1}{3} \cdot 8 \\ &= \frac{64}{3} - \frac{128}{5} + 8 + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(1) &= \frac{1}{3}(1^6) - \frac{4}{5}(1^5) + \frac{1}{2}(1^4) + \frac{1}{3}(1^3) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ostateczny wynik:

$$F(2) - F(1) = \left(\frac{64}{3} - \frac{128}{5} + 8 + \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{2}\right)$$

Wynik końcowy:

$$\boxed{\frac{278}{15}}$$