ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

21. Oblicz pochodną $z'(t)$ funkcji złożonej $z = e^{x-2y}$, gdzie $x = \sin t$, $y = t^3$.

Dane wejściowe:

$$z = e^{x-2y}, \quad x = \sin t, \quad y = t^3$$

Ogólny wzór dla pochodnej funkcji złożonej:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Wyznaczanie pochodnych czastkowych i zwykłych:

1. **Pochodna czastkowa $\frac{\partial z}{\partial x}$:**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d}{dx}\left(e^{x-2y}\right) = e^{x-2y}$$

2. **Pochodna czastkowa $\frac{\partial z}{\partial y}$:**

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d}{dy}\left(e^{x-2y}\right) = -2e^{x-2y}$$

3. **Pochodna $\frac{dx}{dt}$:**

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\sin t) = \cos t$$

4. **Pochodna $\frac{dy}{dt}$:**

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3) = 3t^2$$

Podstawienie do wzoru:

$$\frac{dz}{dt} = \left(e^{x-2y}\right) \cdot (\cos t) + \left(-2e^{x-2y}\right) \cdot (3t^2)$$

Przekształcenie i uproszczenie:

$$\frac{dz}{dt} = e^{x-2y} \cdot \cos t - 6t^2 e^{x-2y}$$

$$\frac{dz}{dt} = e^{x-2y}(\cos t - 6t^2)$$

Podstawienie $x = \sin t$ i $y = t^3$:

$$\frac{dz}{dt} = e^{\sin t - 2t^3}\left(\cos t - 6t^2\right)$$

Ostateczny wynik:

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = e^{\sin t - 2t^3}(\cos t - 6t^2)}$$