

# ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

2. Oblicz granicę a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ , b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$

““latex article amsmath

## Rozwiązanie zadania

Dane są dwie granice do obliczenia:

a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$

1. \*\*Ogólny wzór:\*\*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

2. \*\*Przekształcenie wzoru:\*\*

Rozważamy granice w różnych kierunkach, np. wzdłuż prostych  $y = mx$  oraz  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

3. \*\*Podstawienie danych:\*\*

Dla  $y = mx$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + (mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(1+m^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+m^2}$$

Dla  $x = 0$ :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{0^2}{0^2 + y^2} = 0$$

Dla  $y = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + 0^2} = 1$$

4. \*\*Przeliczenie krok po kroku:\*\*

Wyniki granic dla różnych kierunków są różne ( $1$ ,  $\frac{1}{1+m^2}$ ,  $0$ ), co oznacza, że granica nie istnieje.

5. \*\*Wynik końcowy:\*\*

Granica nie istnieje.

b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$

1. \*\*Ogólny wzór:\*\*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$$

2. \*\*Przekształcenie wzoru:\*\*

Przepisujemy i rozważamy oszacowanie wartości dla poszczególnych składników.

3. \*\*Podstawienie danych:\*\*

$$|\sin \frac{1}{x}| \leq 1, \quad |\sin \frac{1}{y}| \leq 1$$

Zatem:

$$|(x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}| \leq |x+y|$$

4. \*\*Przeliczenie krok po kroku:\*\*

Ponieważ  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x+y| = 0$ , zgodnie z twierdzeniem o funkcji ograniczonej:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} = 0$$

5. \*\*Wynik końcowy:\*\*

$$\boxed{0}$$