ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

3. Zbadaj ciągłość w całej dziedzinie funkcji $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Dane wejściowe:

Funkcja jest zdefiniowana jako

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Cel: Zbadanie ciagłości w punkcie $(0,0)$.

Ogólny wzór na ciagłość:

Funkcja $f(x,y)$ jest ciagła w punkcie $(0,0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$$

Przekształcenie wzoru:

Zastosujemy podstawienie biegunowe: $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$.

$$f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{(r\cos(\theta))^4 - (r\sin(\theta))^3}{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2}$$

$$= \frac{r^4\cos^4(\theta) - r^3\sin^3(\theta)}{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}$$

$$= \frac{r^4\cos^4(\theta) - r^3\sin^3(\theta)}{r^2}$$

$$= r^2\cos^4(\theta) - r\sin^3(\theta)$$

Podstawienie danych i przeliczenie limitu:

$$\lim_{r\to 0}\left(r^2\cos^4(\theta) - r\sin^3(\theta)\right)$$

$$= \lim_{r\to 0} r^2\cos^4(\theta) - \lim_{r\to 0} r\sin^3(\theta)$$

$$= 0 - 0 = 0$$

Wynik końcowy:

$$\boxed{f(x,y) \text{ jest ciagła w punkcie } (0,0).}$$