ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

15. Oblicz masę powierzchni $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ $(z \leqslant 1)$ jeśli $\rho(x, y, z) = z$.

Dane wejściowe:

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad \text{dla} \quad z \leq 1$$

Gestość powierzchni:

$$\rho(x, y, z) = z$$

Ogólny wzór na mase powierzchni S:

$$M = \iint_S \rho(x, y, z)\, dS$$

W tym przypadku:

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

Przekształcenie wzoru:

1. Obliczamy pochodne czastkowe z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = y$$

2. Podstawiamy do wyrażenia na dS:

$$dS = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy$$

Podstawienie danych:

$$M = \iint_S z \cdot \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy$$

Zastapienie z:

$$M = \iint_S \left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) \cdot \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy$$

Obliczanie:

1. Obszar całkowania S: $x^2 + y^2 \leq 2$.

Przejście na współrzedne biegunowe:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = \frac{1}{2}r^2$$

$$dx\, dy = r\, dr\, d\theta$$

Zakresy: $0 \leq r \leq \sqrt{2}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Całkowite wyrażenie:

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}r^2\right) \cdot \sqrt{1 + r^2} \cdot r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r^3 \sqrt{1+r^2}\, dr\, d\theta$$

Całkowanie wzgledem r:

Zastepujemy $u = 1 + r^2$, $du = 2r\, dr$, $r\, dr = \frac{1}{2}\, du$.

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_1^{3} \frac{1}{2}(u-1)\sqrt{u}\, du\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(\int_1^3 (u^{3/2} - u^{1/2})\, du \right) d\theta$$

Obliczamy całki:

$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{5} u^{5/2} - \frac{2}{3} u^{3/2} \right]_1^3 d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{5}(3^{5/2} - 1^{5/2}) - \frac{2}{3}(3^{3/2} - 1^{3/2}) \right) d\theta$$

Złożone wyrażenie:

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{5}(9\sqrt{3} - 1) - \frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 1) \right) \cdot 2\pi$$

Obliczamy wartość końcowa:

$$= \frac{\pi}{5}(9\sqrt{3} - 1) - \frac{\pi}{3}(3\sqrt{3} - 1)$$

$$= \pi \left(\frac{9\sqrt{3}}{5} - \frac{1}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3} \right)$$

$$= \pi \left(\frac{3\sqrt{3}}{5} - \frac{1}{15} \right)$$

Wynik końcowy:

$$M = \pi \left(\frac{3\sqrt{3}}{5} - \frac{1}{15} \right)$$