

# ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

5. Pokaż, że funkcja  $f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$  ma obie pochodne cząstkowe w punkcie  $(0, 0)$  a nie jest nawet ciągła w tym punkcie.

Dane wejściowe: funkcja  $f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$

1. Pochodne cząstkowe w punkcie  $(0, 0)$

Pochodna cząstkowa względem  $x$ :

Definicja pochodnej cząstkowej:

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h}$$

Podstawiam do wzoru:

$$f(h, 0) = 1, \quad f(0, 0) = 1$$

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

Pochodna cząstkowa względem  $y$ :

Definicja pochodnej cząstkowej:

$$f_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k}$$

Podstawiam do wzoru:

$$f(0, k) = 1, \quad f(0, 0) = 1$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k} = 0$$

2. Ciągłość funkcji w punkcie  $(0, 0)$

Aby funkcja była ciągła w punkcie  $(0, 0)$ , musi być spełniony warunek:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = f(0, 0)$$

Podstawiając  $f(0, 0) = 1$ .

Rozważmy ścieżki:

- Dla  $x = 0$  lub  $y = 0$ ,  $f(x, y) = 1$ .

- Dla  $x \neq 0$  i  $y \neq 0$ ,  $f(x, y) = 0$ .

Rozważmy ścieżkę  $y = mx$ , gdzie  $m \neq 0$ :

$$f(x, mx) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = 0 \neq 1$$

**\*\*Wynik Końcowy:\*\***

Obie pochodne cząstkowe istnieją i wynoszą 0.

Funkcja nie jest ciągła w punkcie  $(0, 0)$ .