

ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

4. Znaleźć współrzędne środka ciężkości jednorodnej części kuli: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Dane:

Cześć kuli opisana jest równaniem:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$$

Środek ciężkości części kuli można obliczyć jako:

$$\bar{x} = \frac{1}{V} \iiint_D x dV, \quad \bar{y} = \frac{1}{V} \iiint_D y dV, \quad \bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_D z dV$$

gdzie V jest objętością bryły D .

Objętość ćwiartki kuli (1/8 kuli) to:

$$V = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 = \frac{1}{6} \pi a^3$$

Przejdźcie do współrzędnych sferycznych:

$$x = \rho \sin \theta \cos \phi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \phi, \quad z = \rho \cos \theta$$
$$dV = \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\phi$$

Zakresy zmian:

$$0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

Obliczenie \bar{x} :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{V} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a (\rho \sin \theta \cos \phi) \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{V} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \int_0^a \rho^3 d\rho \\ &= \frac{1}{V} [\sin \phi]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^a \\ &= \frac{1}{V} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \frac{a^4}{4} \\ &= \frac{\pi a^4}{32V} \end{aligned}$$

W analogiczny sposób obliczamy \bar{y} i \bar{z} :

$$\bar{y} = \frac{\pi a^4}{32V}, \quad \bar{z} = \frac{\pi a^4}{32V}$$

Podstawiając $V = \frac{1}{6} \pi a^3$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\pi a^4}{32 \cdot \left(\frac{1}{6} \pi a^3\right)} = \frac{3a}{8} \\ \bar{y} &= \frac{3a}{8}, \quad \bar{z} = \frac{3a}{8} \end{aligned}$$

Wynik końcowy:

$$\left(\frac{3a}{8}, \frac{3a}{8}, \frac{3a}{8} \right)$$