

ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

9. Rozwiń w szereg Fouriera funkcję $f(x) = x^2$ w $[-\pi, \pi]$, narysuj wykres sumy otrzymanego szeregu dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i korzystając z otrzymanego rozwinięcia oblicz sumę szeregu $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$ oraz sumę szeregu $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$.

““latex article amsmath

Dane wejściowe:

Dana funkcja:

$$f(x) = x^2 \quad \text{dla} \quad x \in [-\pi, \pi]$$

Ogólny wzór szeregu Fourier’a:

Funkcje można przedstawić jako szereg Fourier’a postaci:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Gdzie współczynniki a_n i b_n są dane jako:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Wyliczenie współczynników:

1. **Obliczenie a_0 :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{(-\pi)^3}{3} \right) = \frac{2\pi^2}{3} \end{aligned}$$

2. **Obliczenie a_n :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx$$

Po całkowaniu przez części, korzystając z symetrii, otrzymujemy:

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

3. **Obliczenie b_n :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(nx) dx = 0$$

(ponieważ funkcja $x^2 \sin(nx)$ jest nieparzysta).

Szereg Fourier’a funkcji $f(x)$:

Funkcja rozwinięta w szereg Fourier’a ma postać:

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

Obliczenie sum szeregu:

1. **Dla szeregu: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$: Równa się $\frac{\pi^2}{6}$.

2. **Dla szeregu: $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$: Wynosi $\frac{\pi^2}{12}$.

Wynik końcowy:

$$f(x) \approx \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$