

ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

12. Sprawdź, czy funkcja $f(x, y) = e^{x+y}$ jest dwukrotnie różniczkowalna w \mathbb{R}^2 . Jeśli tak, to oblicz różniczkę zupełną 2-go rzędu d^2f .

****Dane wejściowe:****

$$f(x, y) = e^{x+y}$$

****Kroki rozwiązania:****

1. ****Sprawdzenie, czy funkcja jest dwukrotnie różniczkowalna:****

Funkcja $f(x, y) = e^{x+y}$ jest funkcją wykładniczą, a funkcje tego typu są różniczkowalne dowolną ilość razy w standardowych przestrzeniach euklidesowych, w tym w \mathbb{R}^2 .

2. ****Obliczenie pochodnych czastkowych drugiego rzędu:****

- Obliczamy pierwsze pochodne czastkowe:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(e^{x+y}) = e^{x+y}$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(e^{x+y}) = e^{x+y}$$

- Obliczamy drugie pochodne czastkowe:

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(f_x(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(e^{x+y}) = e^{x+y}$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(f_y(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y}(e^{x+y}) = e^{x+y}$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(f_x(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y}(e^{x+y}) = e^{x+y}$$

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(f_y(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(e^{x+y}) = e^{x+y}$$

3. ****Sprawdzenie równości pochodnych mieszanych:****

$$f_{xy} = f_{yx} \implies e^{x+y} = e^{x+y}$$

Pochodne mieszane są równe, co oznacza, że funkcja jest dwukrotnie różniczkowalna.

4. ****Obliczenie różniczki zupełnej drugiego rzędu d^2f :**

Formuła różniczki zupełnej drugiego rzędu to:

$$d^2f = f_{xx}(dx)^2 + 2f_{xy}dx dy + f_{yy}(dy)^2$$

Podstawiając obliczone pochodne:

$$d^2f = e^{x+y}(dx)^2 + 2e^{x+y}dx dy + e^{x+y}(dy)^2$$

To możemy zapisać jako:

$$d^2f = e^{x+y}((dx)^2 + 2dx dy + (dy)^2)$$

****Wynik końcowy:****

$$d^2f = e^{x+y}((dx)^2 + 2dx dy + (dy)^2)$$