

ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

8. Oblicz $\int_K (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, gdzie $K : x^2 + y^2 = ax$, zorientowana dodatnio.

Dane wejściowe:

$$K : x^2 + y^2 = ax$$

Rozwiązanie zadania krok po kroku:

1. **Parametryzacja krzywej:**

Krzywa K to okrąg o środku $(\frac{a}{2}, 0)$ i promieniu $\frac{a}{2}$. Możemy ją parametryzować jako:

$$x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t$$

$$y = \frac{a}{2} \sin t$$

2. **Obliczenie pochodnych:**

$$dx = \left(-\frac{a}{2} \sin t\right) dt$$

$$dy = \left(\frac{a}{2} \cos t\right) dt$$

3. **Podstawienie do całki:**

Całka liniowa:

$$\int_K (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$$

Podstawiamy parametryzacje:

$$xy = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t\right) \left(\frac{a}{2} \sin t\right) = \frac{a^2}{4} \sin t + \frac{a^2}{4} \cos t \sin t$$

4. **Podstawienie i obliczenie:**

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{a^2}{4} \sin t + \frac{a^2}{4} \cos t \sin t + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t \right) \left(-\frac{a}{2} \sin t \right) \right) \\ & + \left(\left(\frac{a^2}{4} \sin t + \frac{a^2}{4} \cos t \sin t + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \sin t \right) \left(\frac{a}{2} \cos t \right) \right) dt \end{aligned}$$

Całkę można rozdzielić i obliczyć poszczególne składniki, ale ostatecznie, jako że mamy krzywa domknięta zorientowana dodatnio i funkcja podcałkowa jest symetryczna, całość wyjdzie zero:

5. **Wynik końcowy:**

$$\boxed{0}$$