ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

11. Oblicz $\int\limits_{K}^{(1,\pi)}(ax^2+by^2+cz^2)dl$, gdzie K jest odcinkiem o końcach $A(0,0,0)$ i $B(a,b,c)$.

Dane wejściowe:
$A(0,0,0), \quad B(a,b,c)$
$f(x,y,z) = ax^2+by^2+cz^2$ (funkcja podcałkowa)Ogólny wzór: $\int_K f(x,y,z)\,dl = \int_0^1 \left(a(tx)^2+b(ty)^2+c(tz)^2\right)\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| d$
$K =$ odcinek łaczacy A i B.

Parametryzacja odcinka K:
(t) = (at, bt, ct), t $\in [0,1]$

Pochodna wektora:
d$\frac{}{dt=(a,b,c)}$
Długość pochodnej wektora:
$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Podstawienie do całki:
$\int_0^1 \left(a(at)^2+b(bt)^2+c(ct)^2\right)\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,dt$

$= \int_0^1 \left(a^3t^2+b^3t^2+c^3t^2\right)\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,dt$

$= \sqrt{a^2+b^2+c^2}\int_0^1 \left(a^3t^2+b^3t^2+c^3t^2\right)\,dt$

$= \sqrt{a^2+b^2+c^2}\left(a^3\int_0^1 t^2\,dt + b^3\int_0^1 t^2\,dt + c^3\int_0^1 t^2\,dt\right)$

$= \sqrt{a^2+b^2+c^2}\left(a^3\cdot\frac{1}{3}+b^3\cdot\frac{1}{3}+c^3\cdot\frac{1}{3}\right)$

$= 1\frac{}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}(a^3+b^3+c^3)}$

Wynik końcowy:
$$\boxed{\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}(a^3+b^3+c^3)}$$