

4. Oblicz moment bezwładności cienkiego jednorodnego pręta o masie m i długości l względem osi centralnej (przechodzącej przez jego środek). Korzystając z twierdzenia Steinera oblicz moment bezwładności względem osi przechodzącej przez koniec pręta.

““latex article amsmath

Rozwiązanie zadania

Dane wejściowe:

m - masa pręta

l - długość pręta

Krok 1: Oblicz moment bezwładności względem osi centralnej

Dla cienkiego, jednorodnego pręta o długości l i masie m , moment bezwładności względem osi przechodzącej przez jego środek jest dany wzorem:

$$I_{\text{środek}} = \frac{1}{12}ml^2$$

Krok 2: Zastosowanie twierdzenia Steinera

Twierdzenie Steinera mówi, że moment bezwładności I względem osi równoległej oddalonej o odległość d od środka ciężkości można obliczyć jako:

$$I = I_{\text{środek}} + md^2$$

Dla pręta, gdy oś przechodzi przez koniec pręta, odległość d jest równa $\frac{l}{2}$:

$$I_{\text{koniec}} = I_{\text{środek}} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

Krok 3: Podstawienie wartości do wzoru

Podstawiając $I_{\text{środek}}$ i $d = \frac{l}{2}$ do wzoru:

$$I_{\text{koniec}} = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

Krok 4: Obliczenie

$$I_{\text{koniec}} = \frac{1}{12}ml^2 + m\frac{l^2}{4}$$

$$I_{\text{koniec}} = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2$$

Aby dodać wspólne mianowniki, przekształcamy $\frac{1}{4}ml^2$ do $\frac{3}{12}ml^2$:

$$I_{\text{koniec}} = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{3}{12}ml^2$$

$$I_{\text{koniec}} = \frac{4}{12}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

Wynik końcowy:

$$I_{\text{koniec}} = \frac{1}{3}ml^2$$