ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

4. Dane są wektory **A** = (3, y, z); **B** = (1, 3, -2) oraz **C** = (2, -4, 1).
a) Obliczyć y i z tak, by wektor **A** był prostopadły do wektorów **B** oraz **C**.
b) Obliczyć jaki kąt tworzą wektory **B** i **C** ?

"'latex article amsmath

Dane:

Wektory sa zadane jako:

$$\mathbf{A} = (3, y, z), \quad \mathbf{B} = (1, 3, -2), \quad \mathbf{C} = (2, -4, 1)$$

Zadanie 4(a)

Aby wektor A był prostopadły do B oraz C, iloczyn skalarny musi wynosić zero:

Dla $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 3 \cdot 1 + y \cdot 3 + z \cdot (-2) = 0$$
$$3 + 3y - 2z = 0$$

Dla $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = 0$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = 3 \cdot 2 + y \cdot (-4) + z \cdot 1 = 0$$
$$6 - 4y + z = 0$$

Układ równań:

$$\begin{cases} 3 + 3y - 2z = 0 \\ 6 - 4y + z = 0 \end{cases}$$

Rozwiazanie układu równań:

Rozwiazujemy pierwsze równanie wzgledem z:

$$3y - 2z = -3 \quad \Rightarrow \quad 2z = 3y + 3 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{3y + 3}{2}$$

Podstawiamy do drugiego równania:

$$6 - 4y + \frac{3y + 3}{2} = 0$$
$$12 - 8y + 3y + 3 = 0$$
$$15 - 5y = 0$$
$$5y = 15 \quad \Rightarrow \quad y = 3$$

Podstawiamy wartość y do wyrażenia na z:

$$z = \frac{3 \cdot 3 + 3}{2} = \frac{9 + 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Zatem: $\boxed{y = 3}$, $\boxed{z = 6}$

Zadanie 4(b)

Kat miedzy wektorami B i C:

Iloczyn skalarny:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} &= 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-4) + (-2) \cdot 1 \\ &= 2 - 12 - 2 = -12\end{aligned}$$

Długości wektorów:

$$|\mathbf{B}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}$$
$$|\mathbf{C}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 16 + 1} = \sqrt{21}$$

Kat miedzy wektorami:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}}{|\mathbf{B}| \cdot |\mathbf{C}|}$$
$$\cos\theta = \frac{-12}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}}$$

Obliczamy:

$$\cos\theta = \frac{-12}{\sqrt{294}}$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-12}{\sqrt{294}}\right)$$

Końcowy wynik (w stopniach):

$$\theta \approx \boxed{122.62^\circ}$$