

ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

7. Cienki pręt o masie m i długości L może się swobodnie obracać wokół osi prostopadłej do pręta, znajdującej się w odległości $L/4$ od jego końca. Pręt wychylono o niewielki kąt θ_0 z położenia równowagi i puszczono swobodnie.
- Wyprowadź różniczkowe równanie ruchu tego wahadła fizycznego oraz jego rozwiązanie.
 - Oblicz okres drgań tego wahadła.

Aby rozwiązać to zadanie, musimy rozważyć fizyczne wahadło, które jest pretem obracającym się wokół osi w odległości $\frac{L}{4}$ od końca.

a) Równanie ruchu wahadła fizycznego

1. **Moment bezwładności**:

Moment bezwładności pręta względem osi przechodzącej przez jego koniec wynosi:

$$I_k = \frac{1}{3}mL^2$$

Zastosujemy twierdzenie Steinera, aby znaleźć moment bezwładności względem osi oddalonej o $\frac{L}{4}$:

$$I = I_k + m \left(\frac{L}{4} \right)^2 = \frac{1}{3}mL^2 + m \left(\frac{L}{4} \right)^2 = \frac{1}{3}mL^2 + \frac{1}{16}mL^2 = \frac{19}{48}mL^2$$

2. **Równanie ruchu**:

Zasade dynamiki ruchu obrotowego opisuje równanie:

$$\tau = I\alpha$$

gdzie τ to moment siły, I to moment bezwładności, a α to przyspieszenie katowe.

Momentem siły jest komponent ciężaru pręta działający na tę odległość:

$$\tau = mg \left(\frac{L}{4} \right) \sin \theta \approx mg \left(\frac{L}{4} \right) \theta$$

(dla małych kątów $\sin \theta \approx \theta$).

Zatem równanie ruchu to:

$$I\alpha = -mg \left(\frac{L}{4} \right) \theta$$

$$\frac{19}{48}mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \left(\frac{L}{4} \right) \theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{48g}{19L} \theta$$

b) Okres drgań wahadła

Okres drgań T wahadła fizycznego można znaleźć z:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

gdzie d to odległość punktu obrotu od środka masy (w tym przypadku $\frac{L}{4}$).

Gdy $I = \frac{19}{48}mL^2$ to:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{19}{48}mL^2}{mg \frac{L}{4}}} = 2\pi \sqrt{\frac{19L}{12g}}$$

To jest okres drgań tego wahadła.