

ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

5. Wektor wodzący punktu jest określony wzorem: $\mathbf{r} = 3t \mathbf{i} + 2 \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}$, obliczyć:
- wektor prędkości w funkcji czasu oraz jego wartość liczbową w chwili $t = 2 \text{ s}$,
 - wektor przyspieszenia w funkcji czasu oraz jego wartość liczbową w chwili $t = 2 \text{ s}$,
 - kąt między wektorami przyspieszenia i prędkości w chwili $t = 2 \text{ s}$.
 - Jaki jest tor ruchu punktu? Jakim ruchem poruszają się rzuty punktu na osie układu współrzędnych OX, OY, OZ?

Wektor wodzący punktu jest określony wzorem: $\mathbf{r} = 3t \mathbf{i} + 2 \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}$.

a) **Wektor prędkości:**

Prędkość jest pochodną wektora wodzącego względem czasu t .

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(3t \mathbf{i} + 2 \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}) = 3 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}$$

Dla $t = 2 \text{ s}$:

$$\mathbf{v}(2) = 3 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 4 \mathbf{k}$$

Moduł wektora prędkości:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ jednostek}$$

b) **Wektor przyspieszenia:**

Przyspieszenie jest pochodną wektora prędkości względem czasu t .

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(3 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}) = 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}$$

Dla $t = 2 \text{ s}$:

$$\mathbf{a}(2) = 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}$$

Moduł wektora przyspieszenia:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2 \text{ jednostki}$$

c) **Kąt między wektorami przyspieszenia i prędkości:**

Skorzystajmy ze wzoru na iloczyn skalarny:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{v}| |\mathbf{a}| \cos \theta$$

$$(3 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 4 \mathbf{k}) \cdot (0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}) = 0 + 0 + 8 = 8$$

$$8 = 5 \times 2 \times \cos \theta$$

$$8 = 10 \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{8}{10} = 0.8$$

Kąt θ :

$$\theta = \cos^{-1}(0.8)$$

d) ****Tor ruchu punktu:****

Rzut punktu na osie układu współrzędnych: - OX: $x = 3t$ - ruch jednostajny prostoliniowy. - OY: $y = 2$ - punkt jest statyczny (bez ruchu). - OZ: $z = t^2$ - ruch przyspieszony.

Zatem punkt porusza się po paraboli w płaszczyźnie XZ .