

ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

2. W kartezjańskim układzie współrzędnych dane są dwa wektory $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ oraz $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, gdzie $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ są wersorami osi tego układu. Znaleźć:
- długość każdego wektora,
 - iloczyn skalarny $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$,
 - kąt zawarty między nimi,
 - sumę i różnicę wektorów: $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$,

Żeby rozwiązać to zadanie, zrobmy to krok po kroku:

Dane: - Wektor $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ - Wektor $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

a) Długość każdego wektora: Długość wektora $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$ obliczamy jako:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

- Długość wektora \mathbf{a} :

$$|a| = \sqrt{3^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 9 + 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

- Długość wektora \mathbf{b} :

$$|b| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$$

b) Iloczyn skalarny $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$: Iloczyn skalarny dwóch wektorów $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + (-3) \cdot 3 = 6 + 3 - 9 = 0$$

c) Kąt zawarty między nimi: Kąt θ między dwoma wektorami można obliczyć z równania:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$$

Tutaj:

$$\cos \theta = \frac{0}{3\sqrt{3} \cdot \sqrt{14}} = 0$$

Skoro $\cos \theta = 0$, kąt θ wynosi 90° (wektory są prostopadłe).

d) Sumę i różnicę wektorów:

- Suma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3 + 2)\mathbf{i} + (3 + 1)\mathbf{j} + ((-3) + 3)\mathbf{k} = 5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = 5\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

- Różnica $\mathbf{a} - \mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (3 - 2)\mathbf{i} + (3 - 1)\mathbf{j} + ((-3) - 3)\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

To powinno obejmować całe zadanie!