

1. a) Prom kursuje pomiędzy przystaniami leżącymi naprzeciwko siebie po obu stronach rzeki o szerokości 40 m, która płynie z prędkością 3 m/s. Ile trwa przeprawa przez rzekę jeżeli na stojącej wodzie prędkość promu wynosi 5 m/s ?  
b) Łódź napędzana silnikiem porusza się na stojącej wodzie z prędkością 4 m/s. Jaka jest prędkość łodzi gdy przepływa ona przez rzekę, której prąd ma prędkość 3 m/s, sterując cały czas prostopadle do kierunku prądu? Jaka może być maksymalna prędkość łodzi płynącej po tej rzece ?
2. W kartezjańskim układzie współrzędnych dane są dwa wektory  $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$  oraz  $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ , gdzie  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  są wersorami osi tego układu. Znaleźć:
  - a) długość każdego wektora,
  - b) iloczyn skalarny  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ,
  - c) kąt zawarty między nimi,
  - d) sumę i różnicę wektorów:  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ,
3. Dane są wektory  $\mathbf{A} = [1, 2, 3]$ ,  $\mathbf{B} = [-2, -1, 3]$ . Obliczyć ich sumę  $\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ , różnicę  $\mathbf{R} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ , iloczyny skalarne  $c = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  i  $d = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$  oraz wektorowe  $\mathbf{W} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$  i  $\mathbf{V} = \mathbf{B} \times \mathbf{A}$ .
4. Dane są wektory  $\mathbf{A} = (3, y, z)$ ;  $\mathbf{B} = (1, 3, -2)$  oraz  $\mathbf{C} = (2, -4, 1)$ .
  - a) Obliczyć  $y$  i  $z$  tak, by wektor  $\mathbf{A}$  był prostopadły do wektorów  $\mathbf{B}$  oraz  $\mathbf{C}$ .
  - b) Obliczyć jaki kąt tworzą wektory  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{C}$  ?
5. Wektor wodzący punktu jest określony wzorem:  $\mathbf{r} = 3t \mathbf{i} + 2 \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}$ , obliczyć:
  - a) wektor prędkości w funkcji czasu oraz jego wartość liczbową w chwili  $t = 2$  s,
  - b) wektor przyspieszenia w funkcji czasu oraz jego wartość liczbową w chwili  $t = 2$  s,
  - c) kąt między wektorami przyspieszenia i prędkości w chwili  $t = 2$  s.
  - d) Jaki jest tor ruchu punktu? Jakim ruchem poruszają się rzuty punktu na osie układu współrzędnych  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ ?
6. Siła  $\mathbf{F} = 2\mathbf{x} - \mathbf{z}$  zaczepiona do pewnego ciała w punkcie  $P(4, 2, 1)$  powoduje jego obrót wokół punktu  $R(1, -1, 1)$ .
  - a) Oblicz wektor ramienia działającej siły.
  - b) Oblicz jaki kąt tworzy wektor siły z ramieniem siły.
  - c) Oblicz wartość momentu siły działającej na ciało.
7. Wektor położenia ciała o masie  $m = 2$  kg dany jest jako  $\mathbf{R}(t) = 5\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$ . Oblicz pracę wykonaną przez siłę poruszającą to ciało: a) w ciągu trzech pierwszych sekund jego ruchu, b) w ciągu trzeciej sekundy jego ruchu.
8. Obliczyć wektor prędkości i przyspieszenia dla wektora wodzącego  $\mathbf{r} = r \cos(\omega t + \varphi_0) \mathbf{i} + r \sin(\omega t + \varphi_0) \mathbf{j}$ , gdzie  $r$ ,  $\omega$ ,  $\varphi_0$  są stałe. Wykazać za pomocą odpowiednich obliczeń jaki to jest ruch.
9. Na ciało działa siła o następujących składowych:  $F_x = 3(x^2 - y)$ ,  $F_y = 2$ . Siła przesuwając punkt materialny wzdłuż boków trójkąta, którego wierzchołki znajdują się w punktach:  $A(0, 0)$ ,  $B(0, 2)$ ,  $C(3, 0)$ . Oblicz pracę wykonaną przez siłę  $F$  przy przesuwaniu punktu z  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ .