ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

8. Punkt materialny porusza się po prostej z przyspieszeniem *a* określonym wzorem $a = -\alpha v$, gdzie α jest dodatnim współczynnikiem. Dla $t=0$ prędkość $v=v_0$. Jaką drogę przebędzie punkt do momentu zatrzymania się? W jakim czasie t_1 przebędzie on drogę s_1?

Dane wejściowe:

$$\begin{aligned} a &= -\alpha v, \\ v_0 &= v, \\ t_0 &= 0, \\ v(t_1) &= 0. \end{aligned}$$

Ogólny wzór dla predkości:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\alpha v.$$

Równanie różniczkowe:

$$\frac{dv}{v} = -\alpha\, dt.$$

Całkujemy obie strony:

$$\int \frac{dv}{v} = \int -\alpha\, dt.$$

Wynik całkowania:

$$\ln|v| = -\alpha t + C.$$

Warunek poczatkowy: $v = v_0$, $t = 0$

$$\ln|v_0| = C.$$

Równanie predkości:

$$\begin{aligned} \ln|v| &= -\alpha t + \ln|v_0|, \\ v &= v_0 e^{-\alpha t}. \end{aligned}$$

Czas zatrzymania:

$$v(t_1) = 0 \Rightarrow v_0 e^{-\alpha t_1} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha t_1 = \ln v_0 \rightarrow \text{błedny warunek, zamiast tego}$$

$$t_1 = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{v_0}{v},$$

ale ponieważ $v = 0$, musimy użyć innego warunku. Musimy zintegrować predkość w czasie aż $v = 0$.

Droga całkowita:

$$s_1 = \int_0^{t_1} v\, dt = \int_0^{t_1} v_0 e^{-\alpha t}\, dt.$$

Całkowanie:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \left[-\frac{v_0}{\alpha} e^{-\alpha t}\right]_0^{t_1}, \\
&= -\frac{v_0}{\alpha}\left(e^{-\alpha t_1} - e^0\right), \\
&= -\frac{v_0}{\alpha}\left(0 - 1\right), \\
&= \frac{v_0}{\alpha}.
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{s_1 = \frac{v_0}{\alpha}}
$$