

ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

7. Cienki pręt o masie m i długości L może się swobodnie obracać wokół osi prostopadłej do pręta, znajdującej się w odległości $L/4$ od jego końca. Pręt wychylono o niewielki kąt θ_0 z położenia równowagi i puszczono swobodnie.
- Wyprowadź różniczkowe równanie ruchu tego wahadła fizycznego oraz jego rozwiązanie.
 - Oblicz okres drgań tego wahadła.

““latex article amsmath

Dane wejściowe

- Masa pręta: m
- Długość pręta: L
- Odległość osi obrotu od końca pręta: $\frac{L}{4}$
- Pręt wychylono o niewielki kąt θ_0

Rozwiązanie

a) Równanie różniczkowe ruchu wahadła fizycznego

Moment bezwładności pręta względem osi obrotu:

$$I = I_{\text{cm}} + md^2 = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{1}{12}mL^2 + \frac{1}{16}mL^2 = \frac{7}{48}mL^2$$

Równanie momentów dla małych kątów:

$$\tau = -mgh\theta$$

gdzie $h = \frac{L}{4}$, bo jest to odległość punktu w którym działa siła ciężkości, pod kątem prostym do osi.

$$\tau = -mg\frac{L}{2}\theta$$

Moment bezwładności razy przyspieszenie katowe:

$$I\alpha = -mg\frac{L}{2}\theta$$

Zatem:

$$\frac{7}{48}mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\frac{L}{2}\theta$$

Równanie różniczkowe:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{48g}{7L}\theta = 0$$

b) Oblicz okres drgań tego wahadła

Okres drgań T wyznacza się z wyrażenia dla równania ruchu harmonicznego:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mg \frac{L}{2}}}$$

Podstawiając $I = \frac{7}{48}mL^2$:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{7}{48}mL^2}{mg \frac{L}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{7}{48}L}{\frac{1}{2}g}} = 2\pi \sqrt{\frac{7L}{24g}}$$

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{7L}{24g}}}$$