

6. Siła $\mathbf{F} = 2\mathbf{x} - \mathbf{z}$ zaczepiona do pewnego ciała w punkcie $P(4, 2, 1)$ powoduje jego obrót wokół punktu $R(1, -1, 1)$.
- Oblicz wektor ramienia działającej siły.
 - Oblicz jaki kąt tworzy wektor siły z ramieniem siły.
 - Oblicz wartość momentu siły działającej na ciało.

““latex article amsmath

Rozwiązanie zadania

Dane wejściowe

- Punkt zaczepienia siły: $P = (4, 2, 1)$
- Punkt wokół którego następuje obrót: $R = (1, -1, 1)$
- Wektor siły: $\vec{F} = [2, 0, -1]$

Podpunkt a) Oblicz wektor ramienia działającej siły

Wzór ogólny na wektor ramienia:

$$\vec{r} = \overrightarrow{RP} = \vec{P} - \vec{R}$$

Podstawienie danych:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= (4, 2, 1) - (1, -1, 1) \\ &= (4 - 1, 2 - (-1), 1 - 1) \\ &= (3, 3, 0)\end{aligned}$$

Podpunkt b) Oblicz jaki kąt tworzy wektor siły z ramieniem siły

Wzór na cosinus kąta między wektorami:

$$\cos \theta = \frac{\vec{r} \cdot \vec{F}}{\|\vec{r}\| \|\vec{F}\|}$$

Iloczyn skalarny:

$$\vec{r} \cdot \vec{F} = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 6$$

Długości wektorów:

$$\begin{aligned}\|\vec{r}\| &= \sqrt{3^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \\ \|\vec{F}\| &= \sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}\end{aligned}$$

Podstawienie danych do wzoru:

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{6}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{6}{3\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}} \\ \theta &= \cos^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{10}} \right)\end{aligned}$$

Podpunkt c) Oblicz wartość momentu siły działającej na ciało

Wzór na moment siły:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Iloczyn wektorowy:

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \hat{i}(3 \cdot (-1) - 0 \cdot 0) - \hat{j}(3 \cdot (-1) - 0 \cdot 2) + \hat{k}(3 \cdot 0 - 3 \cdot 2) \\ &= \hat{i}(-3) + \hat{j}(3) + \hat{k}(-6) \\ \vec{M} &= (-3, 3, -6)\end{aligned}$$

Wartość momentu siły:

$$\begin{aligned}\|\vec{M}\| &= \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (-6)^2} \\ &= \sqrt{9 + 9 + 36} \\ &= \sqrt{54} \\ &= 3\sqrt{6}\end{aligned}$$

Wynik końcowy: Moment siły wynosi $3\sqrt{6}$.