

7. Wektor położenia ciała o masie $m = 2 \text{ kg}$ dany jest jako $\mathbf{R}(t) = 5\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$. Oblicz pracę wykonaną przez siłę poruszającą to ciało: a) w ciągu trzech pierwszych sekund jego ruchu, b) w ciągu trzeciej sekundy jego ruchu.

““latex article amsmath

Dane wejściowe

- Masa $m = 2 \text{ kg}$
- Wektor położenia $\mathbf{R}(t) = 5\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$

a) Praca wykonana w ciągu pierwszych trzech sekund

Ogólny wzór

Praca wykonana przez siłę to:

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{v}(t) dt$$

Gdzie:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt}$$

$$\mathbf{F}(t) = m \cdot \mathbf{a}(t)$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}$$

Przekształcenie i podstawienie

Wyznaczamy prędkość:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}(5\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}) = 2t\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$$

Wyznaczamy przyspieszenie:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}(2t\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}) = 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

Wyznaczamy siłę:

$$\mathbf{F}(t) = 2(2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

Wyliczamy pracę:

$$W = \int_0^3 (4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) \cdot (2t\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}) dt$$

$$W = \int_0^3 (8t + 32t) dt = \int_0^3 40t dt$$

Przeliczenie krok po kroku

$$W = [20t^2]_0^3 = 20 \cdot 3^2 - 20 \cdot 0^2$$

$$W = 20 \cdot 9 = 180 \text{ J}$$

Wynik

$$\boxed{180 \text{ J}}$$

b) Praca wykonana w ciągu trzeciej sekundy

Przeliczenie krok po kroku

Liczmy w przedziale $t_0 = 2$, $t_1 = 3$:

$$W = \int_2^3 40t \, dt = [20t^2]_2^3$$

$$W = 20 \cdot 3^2 - 20 \cdot 2^2$$

$$W = 180 - 80 = 100 \text{ J}$$

Wynik

$$\boxed{100 \text{ J}}$$