

ROZWIAZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

9. Jednorodna belka o długości l i masie M może swobodnie obracać się wokół poziomej osi przechodzącej przez jeden z jej końców. W drugi koniec belki uderza kula o masie m mająca poziomą prędkość v_0 (Rys. 2). Kula grzęźnie w belce. Oblicz prędkość kątową belki tuż po uderzeniu kuli. Oblicz o jaki maksymalny kąt obróci się belka.

Podane dane wejściowe: - Długość belki: l - Masa belki: M - Masa kuli: m - Prędkość kuli przed zderzeniem: v_0

Nasze zadanie: 1. Obliczyć prędkość katowa belki tuż po uderzeniu kuli. 2. Obliczyć maksymalny kąt obrotu belki.

Obliczenia

1. Prędkość katowa belki tuż po uderzeniu kuli

****Zasada zachowania momentu pędu****

Moment bezwładności belki względem osi obrotu:

$$I = \frac{1}{3} M l^2$$

Początkowy moment pędu układu (tylko kula):

$$L_{\text{początkowy}} = m v_0 l$$

Końcowy moment pędu układu (belka + kula):

$$L_{\text{końcowy}} = I \omega + m l^2 \omega$$

Z zasady zachowania momentu pędu:

$$L_{\text{początkowy}} = L_{\text{końcowy}}$$

$$m v_0 l = \left(\frac{1}{3} M l^2 + m l^2 \right) \omega$$

$$m v_0 l = \left(\frac{1}{3} M + m \right) l^2 \omega$$

$$\omega = \frac{m v_0 l}{\left(\frac{1}{3} M + m \right) l^2}$$

$$\omega = \frac{m v_0}{\left(\frac{1}{3} M + m \right) l}$$

2. Maksymalny kąt obrotu belki

****Zasada zachowania energii****

Początkowa energia kinetyczna:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} M + m \right) l^2 \omega^2$$

Energia potencjalna na maksymalnym kacie:

$$E_{\text{pot}} = \left(\frac{1}{2} M + m \right) g l (1 - \cos \theta)$$

Z zachowania energii:

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}M + m \right) l^2 \omega^2 = \left(\frac{1}{2}M + m \right) gl(1 - \cos \theta)$$

Podstawiamy obliczoną wartość ω :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}M + m \right) l^2 \left(\frac{mv_0}{\left(\frac{1}{3}M + m \right) l} \right)^2 = \left(\frac{1}{2}M + m \right) gl(1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{2} \frac{m^2 v_0^2}{\left(\frac{1}{3}M + m \right)} = \left(\frac{1}{2}M + m \right) gl(1 - \cos \theta)$$

$$m^2 v_0^2 = 2 \left(\frac{1}{2}M + m \right) gl(1 - \cos \theta)$$

$$1 - \cos \theta = \frac{m^2 v_0^2}{2 \left(\frac{1}{2}M + m \right) gl}$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{m^2 v_0^2}{2 \left(\frac{1}{2}M + m \right) gl}$$

Kąt maksymalny:

$$\theta = \arccos \left(1 - \frac{m^2 v_0^2}{2 \left(\frac{1}{2}M + m \right) gl} \right)$$

****Ostateczne wyniki:****

$$\boxed{\omega = \frac{mv_0}{\left(\frac{1}{3}M + m \right) l}}$$

$$\boxed{\theta = \arccos \left(1 - \frac{m^2 v_0^2}{2 \left(\frac{1}{2}M + m \right) gl} \right)}$$