

ROZWIĄZANIE WYGENEROWANE PRZEZ CHAT GPT

7. Wektor położenia ciała o masie $m = 2 \text{ kg}$ dany jest jako $\mathbf{R}(t) = 5\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$. Oblicz pracę wykonaną przez siłę poruszającą to ciało: a) w ciągu trzech pierwszych sekund jego ruchu, b) w ciągu trzeciej sekundy jego ruchu.

Aby rozwiązać to zadanie, musimy najpierw znaleźć prędkość i przyspieszenie jako pochodne wektora położenia, a następnie obliczyć pracę wykonaną przez siłę.

1. **Wektor prędkości** $\vec{v}(t)$ to pochodna wektora położenia $\vec{R}(t)$:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{R}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(5\hat{i} + t^2\hat{j} + 2t^2\hat{k}) = 0\hat{i} + 2t\hat{j} + 4t\hat{k}$$

2. **Wektor przyspieszenia** $\vec{a}(t)$ to pochodna wektora prędkości:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(0\hat{i} + 2t\hat{j} + 4t\hat{k}) = 0\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$$

3. **Siła działająca na ciało** \vec{F} to iloczyn masy i przyspieszenia:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}(t) = 2 \cdot (0\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}) = 0\hat{i} + 4\hat{j} + 8\hat{k}$$

4. **Praca** wykonana przez siłę od $t = 0$ do $t = T$ to całka z $\vec{F} \cdot \vec{v}(t)$ po czasie:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^T \vec{F} \cdot \vec{v}(t) dt = \int_0^T (0\hat{i} + 4\hat{j} + 8\hat{k}) \cdot (0\hat{i} + 2t\hat{j} + 4t\hat{k}) dt \\ &= \int_0^T (8t + 32t) dt = \int_0^T 40t dt \\ &= [20t^2]_0^T = 20T^2 \end{aligned}$$

- a) Dla trzech pierwszych sekund ($T = 3$):

$$W = 20 \cdot 3^2 = 20 \cdot 9 = 180 \text{ J}$$

- b) Dla trzeciej sekundy ($T = 3$, czyli od $t = 2$ do $t = 3$):

$$\begin{aligned} W &= [20t^2]_2^3 = 20 \cdot 3^2 - 20 \cdot 2^2 \\ &= 20 \cdot 9 - 20 \cdot 4 = 180 - 80 = 100 \text{ J} \end{aligned}$$

Odpowiedzi: a) 180 J b) 100 J