

5. Wektor wodzący punktu jest określony wzorem: $\mathbf{r} = 3t \mathbf{i} + 2 \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}$, obliczyć:
- wektor prędkości w funkcji czasu oraz jego wartość liczbową w chwili $t = 2$ s,
 - wektor przyspieszenia w funkcji czasu oraz jego wartość liczbową w chwili $t = 2$ s,
 - kąt między wektorami przyspieszenia i prędkości w chwili $t = 2$ s.
 - Jaki jest tor ruchu punktu? Jakim ruchem poruszają się rzuty punktu na osie układu współrzędnych OX, OY, OZ?

““latex article amsmath

Dane wejściowe

Wektor wodzący punktu jest określony wzorem:

$$\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

a) Wektor prędkości

Prędkość obliczamy jako pochodną wektora wodzącego po czasie:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

Przeprowadzamy różniczkowanie:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}(3t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}) = 3\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$

Podstawiamy $t = 2$ s:

$$\mathbf{v}(2) = 3\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 2 \cdot 2\mathbf{k} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$$

Wartość liczbowa:

$$|\mathbf{v}(2)| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

b) Wektor przyspieszenia

Przyspieszenie obliczamy jako pochodną wektora prędkości po czasie:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}$$

Przeprowadzamy różniczkowanie:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}(3\mathbf{i} + 2t\mathbf{k}) = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Podstawiamy $t = 2$ s:

$$\mathbf{a}(2) = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Wartość liczbowa:

$$|\mathbf{a}(2)| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$$

c) Kat między wektorami przyspieszenia i prędkości

Kat między wektorami dany jest wzorem:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{v}(2) \cdot \mathbf{a}(2)}{|\mathbf{v}(2)| |\mathbf{a}(2)|}$$

Iloczyn skalarny:

$$\mathbf{v}(2) \cdot \mathbf{a}(2) = (3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}) \cdot (0\mathbf{i} + 2\mathbf{k}) = 0 + 8 = 8$$

Podstawienie do wzoru:

$$\cos \theta = \frac{8}{5 \times 2} = \frac{8}{10} = 0.8$$

d) Tor ruchu punktu

Ruch wzdłuż osi:

$$x(t) = 3t, \quad y(t) = 2, \quad z(t) = t^2$$

- Rzut na oś OX to ruch jednostajny ($x(t) = 3t$). - Rzut na oś OY to ruch postojowy ($y(t) = 2$).
- Rzut na oś OZ to ruch jednostajnie przyspieszony ($z(t) = t^2$).

Wynik końcowy:

$$\theta \approx \arccos(0.8) \approx 36.87^\circ$$