Zadanie numeryczne nr 4

Kamila Dmowska

December 2021

1 Wstęp

Celem zadania jest rozwiązanie układu równań $(N+1) \times (N+1)$.

$$\begin{cases} y_0 & = 1 \\ (D_2 y)_n + y_n & = 0\,, \quad n = 1 \ldots (N-1) \\ -3y_0 + 4y_1 + y_2 & = 0\,, \end{cases}$$

gdzie $N = 1000$, $h = 0.01$, a

$$(D_2 y)_n = \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2}.$$

2 Implementacja

Pierwszym krokiem który należy podjąć rozwiązując podany układ równań, jest właściwie przekształcenie równań. Dla $n = 1$ $(D_2y)_n$ przyjmuje postać

$$(D_2y)_1 = \frac{y_0 - 2y_0 + y_2}{h^2}.$$

Podstawiając $(D_2y)_1$ do drugiego równania otrzymujemy

$$\frac{y_0 - 2y_0 + y_2}{h^2} + y_1 = 0.$$

Kiedy przyrównamy te rówannie do rówania trzeciego, otrzymamy $y_0 - 2y_1 + y_2 + h^2 y_1 = -3y_0 + 4y_1 + y_2$.
Łatwo zauważyć, że wyraz y_2 skróci się, i przez to możemy w prosty sposób wyliczyć y_1, który równy jest

$$y_1 = \frac{-4y_0}{-6 + h^2}$$

Mając wyliczoną taką zależność, z łatwością można stwierdzić, że podany układ równań można rozwiązać iteracyjnie.

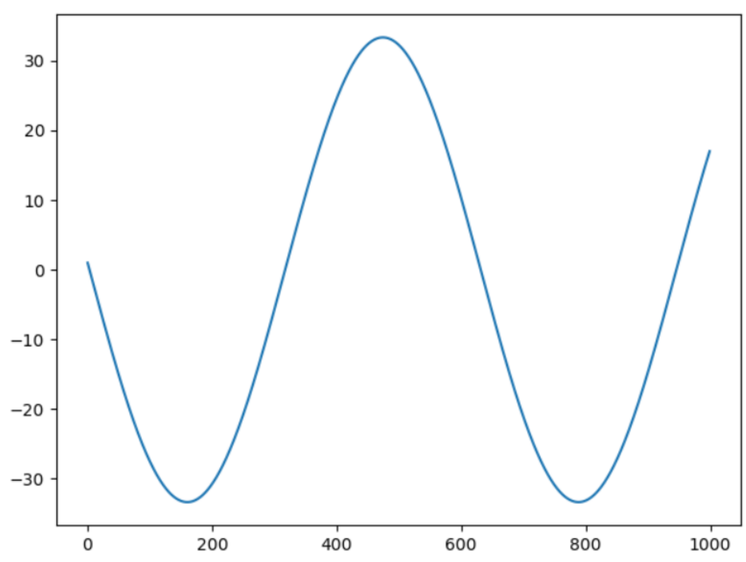
Poniżej, widnieje rozwiązanie tego problemu w języku Python przy użyciu biblioteki numpy oraz matplotlib.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
N = 1000
h = 0.01
y = np.zeros(N, dtype=np.float64)
y[0] = 1
y[1] = (1/(-6 + h*h))*(-4*y[0])

for i in range(1, N-1):
    y[i+1] = -y[i]*h**2 -y[i-1] + 2*y[i]

plt.plot(y)
plt.show()
```

Na początku, inincjalizuję tablicę za pomocą np.zeros, czyli n-elentowa tablicę w ktorej wszystkie elementy sa zerami. Następnie, przypisuje pierwszy elemement tablicy równy 1, który był podany w treści zadani, a potem drugi, wcześniej wyliczony. Następnie, wyliczyam w pętli od 0 do N kolejne wartości y_n.



Rysunek 1: Wykres (nh, y_n).

3 Wnioski

Zaimplementowany algorytm poprawnie rozwiązał układ równań. Suma złożoności wynosi $O(n+n)$, wynika to z tego, że na początku inicjalizujemy wektor y wartościami 0 za pomocą funkcji np.zeros() z biblioteki numpy oraz poźniej wykonujemy obliczenia iteracyjne w pętli. Jednak zgodnie z definicją, upraszczamy ten wynik do $O(n)$.