POLITECHNIKA ŁÓDZKA

WYDZIAŁ FIZYKI TECHNICZNEJ, INFORMATYKI I MATEMATYKI STOSOWANEJ

Kierunek: Matematyka
Specjalność: Matematyczne Metody Analizy Danych Biznesowych

WYBRANE ZASTOSOWANIE STATYSTYCZNYCH METOD PORZĄDKOWANIA DANYCH WIELOWYMIAROWYCH

Kamila Choja
Nr albumu: 204052

Praca licencjacka
napisana w Instytucie Matematyki Politechniki Łódzkiej

Promotor: dr, mgr inż. Piotr Kowalski

ŁÓDŹ, xxx 2018

Spis treści

Rozdział 1

Wstęp

Wielowymiarowa analiza danych jest pojęciem dosyć nowym, jedną z jej części są metody porządkowania. W ujęciu matematycznym porządkowanie jest niczym innym jak relacją porządku, który możemy podzielić na porządek liniowy oraz częściowy zbiorze. Ze względu na to, w sekcji 2.5 zostały opracowane pojęcia teorii mnogości. Niezbędnym również było wprowadzenie podstawowych pojęć rachunku prawdopodobieństwa, w celu zrozumienia danych jako próby losowej, w tym celu został stworzona sekcja 2.3.

W rozdziale 4 zostaną omówione implementacje porządku liniowego jak i częściowego. Ze względu na to, że część praktyczna pracy, została w większości oparta na książce [8], w związku z tym użyłam przyjętych przez autora nazw statystycznych podziału relacji porządku, tj. metody porządkowania liniowego, natomiast metody będące odpowiednikiem relacji częściowego porządku zostały umieszczone pod nazwą metody porządkowania nieliniowego.

Rozdział 2

Preliminaria

2.1 Notacja

Poniżej znajduje się lista pojęć powszechnie używanych w pracy wraz z symbolami, które im się przypisuje.

- $\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych
- $\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych
- $\mathrm{O} = \{\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2, \ldots, \mathrm{O}_n\}$ - zbiór obiektów przestrzennych, tj. opisywanych przez wiele atrybutów, $n \in \mathbb{N}$
- $X = [x_{ij}]$ - macierz danych, gdzie x_{ij}-oznacza wartość j-tej zmiennej dla i-tego obiektu, gdzie $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$,, $n, m \in \mathbb{N}$
- n_{ij} -oznaczenie znormalizowanej wartości j-tej cechy i-tego obiektu
- x^S - oznaczenie zmiennej mającej charakter stymulanty
- x^D - oznaczenie zmiennej mającej charakter destymulanty
- x^N - oznaczenie zmiennej mającej charakter nominanty
- $D = [d_{ik}]$ - oznaczenie macierzy odległości, gdzie d_{ik} oznacza odległość między i-tym i k-tym obiektem
- s_i - oznaczenie zmiennej syntetycznej i-tego obiektu
- $P_0 = [n_{0j}]$ - oznaczenie obiektu wzorcowego, gdzie n_{0j}- znormalizowana j-ta współrzędna obiektu wzorcowego
- X - w rozdziale drugim przez X najczęściej oznaczać będziemy dowolny zbiór, jednak w dalszych rozdziałach najczęściej służyć on będzie do opisywania macierzy zawierającej podstawowe (surowe) dane do analizy
- Y - w rozdziale drugim używana jest najczęściej do oznaczenie zmiennej losowej
- Ω - oznaczenie dowolnej przestrzeni zdarzeń elementarnych ω, z rodziną podzbiorów $\mathcal{F}$
- $\mathcal{B}$ - rodzina zbiorów borelowskich
- $\mathfrak{B}$ - rodzina wszystkich zbiorów otwartych

- $\leqslant$ - oznaczenie relacji częściowego porządku, przy dołożeniu warunku spójności oznaczać będzie relację liniowego porządku
- G - oznaczenie ogólnego grafu prostego dla którego $V(G)$ jest zbiorem wierzchołków grafu, a $E(G)$ zbiorem jego krawędzi

2.2 Słownik użytych pojęć

W pracy zostały wykorzystane następujące pojęcia, których wytłumaczenie znajduje się poniżej.

- Statystyka matematyczna [5, w oparciu o rozdział 1] Statystyka matematyczna zajmuje się opisywaniem i analizą zjawisk przy użyciu metod rachunku prawdopodobieństwa.
- Cecha statystyczna [5, Rozdział 1] Cecha statystyczna jest to właściwość wspólna dla danego zbioru obserwacji. Jej wartości pozwalają rozróżnić elementy zbioru między sobą. cechy statystyczne można podzielić na te mierzalne, tj. ilościowe (np. długość, ciężar), oraz niemierzalne tj. jakościowe(np. kolor, płeć, zawód, województwo).

W celu prezentacji dużych ilości danych, w analizie danych korzysta się z pojęcia macierzy. Poniżej zostanie przedstawiona definicja macierzy obserwacji, czyli zbiorowi obiektów, opisywanych przez zmienne. W rozdziale dotyczącym Wybranych pojęć z teorii mnogości, topologii oraz algebry liniowej, zostanie podana jej algebraiczna definicja.

Definicja 2.2.1 (Macierz obserwacji [7, Rozdział 2])**.** *Niech $m > 1$ oraz $n > 1$ będą liczbami naturalnymi. Macierzą obserwacji nazywamy macierz rozmiaru $n \times m$ postaci*

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{bmatrix}$$

*gdzie: * x_{ij} - zaobserwowana wartość j-tej cechy dla i-tego obiektu .*

Definicja 2.2.2. *Macierz odległości zmiennych [8, Rozdział 1.6] Macierzą odległości cech zmiennych nazywamy macierz, której elementami są odległości między parami badanych obiektów:*

$$D = [d_{ik}].$$

gdzie:
dik-odległość między i-tym a k-tym obiektem, dla $i, k = 1, 2, \dots, n$

W statystyce posługujemy się pojęciami skal do opisu różnych typów danych, które mogą podlegać naszej analizie. I tak zdefiniujmy następujące rodzaje skal:

- Skala [8, w oparciu o rozdział 1.2] Skalą nazywamy pewien skończony zbiór, umożliwiający porównywanie obiektów na podstawie wartości lub własności wybranych zmiennych.
- Skala porządkowa [8, Rozdział 1.2] Skala ta umożliwia sprawdzenie identyczności, różnicy obiektów które są porównywane. Pozwala również na porównaniu wariantów cech, które opisują obiekty. Za jej pomocą nie można jednak na określić odległości między obiektami. Umożliwia zliczanie uporządkowanych obiektów (liczby relacji równości, nierówności, większości i mniejszości). Przykład zmiennych przedstawianych na skali porządkowej: wykształcenie, kolejność zawodników na podium, oceny w systemie szkolnym.

- Skala przedziałowa [8, Rozdział 1.2] Jest to skala, która w odróżnieniu do skali porządkowej, pozwala obliczyć odległość między obiektami, przy pomocy pomiaru cech, opisujących obiekt. Skala ta może korzystać z operacji dodawania oraz odejmowania. Dla skali tej istnieje charakterystyczna wartość - punkt zerowy. Jest on wyznaczany w sposób umowny, punkt ten pozwala zachować różnice między wartościami cechy, w momencie zamiany jednostek miary. Przykład zmiennych przedstawianych na skali przedziałowej: temperatura, rok urodzenia.
- Skala ilorazowa [8, Rozdział 1.2] Skala ta, podobna jest do skali przedziałowej, z tym że występuje w niej zero bezwzględne - punkt, który mówi o tym, że dana zmienna nie występuje, oraz ogranicza lewostronnie zakres skali ilorazowej. Dzięki temu punktowi oprócz działań dodawania i odejmowania, można korzystać z dzielenia oraz mnożenia, co pozwala na przedstawieniu dowolnej wartości cechy danego obiektu, jako wielokrotna wartość cechy innego obiektu. Przykład zmiennych przedstawianych na skali ilorazowej: napięcie elektryczne, bezrobocie, inflacja.

Definicja 2.2.3. *Stymulanta [8, Rozdział 1.5] Stymulantami nazywane są zmienne(cechy), dla których pożądane są wysokie wysokie wartości w badanych obiektach, ze względu na rozpatrywane zjawisko.*

Definicja 2.2.4. *Destymulanta [8, Rozdział 1.5] Destymulantami nazywane są zmienne, dla których niepożądane są wysokie wysokie wartości w badanych obiektach, ze względu na rozpatrywane zjawisko.*

Definicja 2.2.5. *Nominanta [8, Rozdział 1.5] Nominantami nazywane są zmienne, które mają z góry określoną najkorzystniejszą wartość. Odchylenia od tej wartości są niepożądane, ze względu na rozpatrywane zjawisko.*

2.2.1 Wybrane operacje statystyczne dla zmiennych

Normalizacja zmiennych

Bardzo ważnym krokiem przed rozpoczęciem pracy na zbiorze danych jest ujednolicenie ich charakteru, tj. przekształcenie zmiennych (mierzonych na skali przedziałowej lub ilorazowej) opisujących obiekty w zbiorze, w celu pozbycia się dysproporcji między nimi czy też dominacji jednych zmiennych nad drugimi. W tym celu stosuje się transformację normalizacyjną. Można wyróżnić trzy podstawowe typy przekształceń normalizacyjnych:

- standaryzacja,
- unitaryzacja,
- przekształcenie ilorazowe
- rangowanie zmiennych

W dalszej części pracy j-ta zmienna znormalizowana, i-tego obiektu jest oznaczona jako n_{ij}.

1. W wyniku standaryzacji zmienne uzyskują odchylenie standardowe równe 1 i wartości oczekiwanej równą 0. W tym celu dla każdej zmiennej, będącej cechą obiektu oblicza się odchylenie standardowe na podstawie wartości tej zmiennej dla wszystkich obiektów, a także wartość oczekiwaną na tej samej zasadzie. W kolejnym kroku dla każdego obiektu

liczymy jego znormalizowana wartość tj. od wartości zmiennej odejmujemy wartość oczekiwaną dla danej cechy, a otrzymaną różnicę dzielimy przez odchylenie standardowe dla tej cechy,co można to zapisać w postaci

$$n_{ij} = \frac{x_{ij} - \mathrm{E}(x_j)}{\sigma(x_j)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

gdzie z_{ij}-wartość znormalizowanej zmiennej j-tej zmiennej, w i-tym obiekcie.

2. W pracy skorzystałam również z unitaryzacji, stosowanej w celu uzyskania zmiennych o ujednoliconym zakresie zmienności, u mnie przedział ten to $[0, 1]$. W tym celu od wartości zmiennej w obiekcie, odejmowana jest minimalna wartość występująca dla tej cechy, a następnie różnica ta dzielona jest przez różnicę między maksymalną a minimalną wartością zmiennej, która została poddana normalizacji. Znormalizowana zmienna jest postaci

$$n_{ij} = \frac{x_{ij} - \min\limits_i\{x_{ij}\}}{\max\limits_i\{x_{ij}\} - \min\limits_i\{x_{ij}\}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

3. Kolejna metoda normalizacyjna, wykorzystana w pracy to przekształcenie ilorazowe. Stosuje się je aby odnieść wartości zmiennej do ustalonej wartości - może to być wartość oczekiwana danej zmiennej na tle analizowanych obiektów, wartość minimalna lub maksymalna tej cechy. W pracy za tę wartość przyjęłam wartość oczekiwaną zmiennej. Każda wartość zmiennej dla danego obiektu jest dzielona przez wartość oczekiwaną tej zmiennej, a postać znormalizowanej zmiennej to

$$n_{ij} = \frac{x_{ij}}{\mathrm{E}(x_j)}, \quad \mathrm{E}(x_j) \neq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

4. Przy zastosowaniu metody rang, wykorzystuje się normalizację rangową. Przekształcenie to, najczęściej stosowane jest, gdy zmienne opisujące obiekty są wyrażone na skali porządkowej. W pierwszym kroku wartości zmiennych opisujących obiekty zostają uporządkowane ze względu na ich wartości po procesie normalizacji. W kolejnym kroku wartościom zmiennej przyporządkowywane są rangi - czyli wartości liczbowe, będące najczęściej numerami miejsc zajmowanych przez obiekty w uporządkowanym zbiorze. Postać zmiennej znormalizowanej rangowo

$$n_{ij} = r, \quad dla x_{hj} = x_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

gdzie r-ranga nadana i-temu obiektowi znajdującemu się na r-tym miejscu w uporządkowanym zbiorze, ze względu na wartość j-tej zmiennej.

Stymulacja zmiennych

W celu ujednolicenia charakteru danych należy poddać je pewnym przekształceniom, polegającym na zamianie destymulant i nominant na stymulanty. Tego typu transformacje nazywamy stymulacją. Można wyróżnić dwie najczęściej stosowane metody, tj. przekształcenie ilorazowe oraz przekształcenie różnicowe. W zależności od skali na której mierzone są zmienne, należy stosować odpowiednie przekształcenie stymulacyjne.

W przypadku przekształcenia ilorazowego można go stosować tylko dla zmiennych mierzonych na skali ilorazowej. Stymulacja destymulant wygląda następująco

$$x_{ij}^S = [x_{ij}^D]^{-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

dla nominant

$$x_{ij}^S = \frac{\max\{x_j^N, x_{ij}^N\}}{\max\{x_j^N, x_{ij}^N\}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Dla zmiennych mierzonych na skali ilorazowej czy też przedziałowej stosuje się przekształcenie różnicowe. Stymulacja dla destymulant prezentuje się następująco

$$x_{ij}^S = \max_i\{x_{ij}^D\} - x_{ij}^D, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

a dla nominant

$$x_{ij}^S = -|x_{ij}^N - x_j^N|, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

2.3 Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa oraz statystyki

Na potrzeby pracy, zostały wykorzystane pojęcia rachunku prawdopodobieństwa oraz statystyki, konieczne do zrozumienia danych jako próby losowej. W tym celu niezbędne było wprowadzenie definicji prawdopodobieństwa, zmiennej losowej, a także pojęć powiązanych z tymi definicjami tj. ciała zbiorów, σ-ciała zbiorów, przestrzeni zdarzeń elementarnych, zdarzenia losowego.

Definicja 2.3.1. *Ciało zbiorów [9, Rozdział 8.1] Rodzinę $\mathcal{F}$ podzbiorów, niepustego zbioru Y nazywamy ciałem zbiorów, jeżeli spełnia ona następujące warunku:*

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$,
2. *jeżeli* $A \in \mathcal{F}$, *to* $Y \setminus A \in \mathcal{F}$,
3. *jeżeli* $A \in \mathcal{F}$, *to* $A \cup B \in \mathcal{F}$.

Definicja 2.3.2. *σ-algebra/ciało zbiorów[9, Rozdział 8.1] Ciało zbiorów $\mathcal{F}$ nazywamy σ-ciałem zbiorów, jeżeli spełnia ona warunek dla dowolnych zbiorów $A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$, mamy $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.*

Definicja 2.3.3. *Zbiory borelowskie [3, w opraciu o rozdział 2] Zbiorami borelowskimi względem danej przestrzeni Y, nazywamy zbiory należące do σ-ciała Y generowanego przez rodzinę $\mathfrak{B}(Y)$ - wszystkich zbiorów otwartych w Y. Rodzinę wszystkich zbiorów borelowskich względem Y, oznaczamy $\mathcal{B}(Y)$.*

Definicja 2.3.4. *Przestrzeń zdarzeń elementarnych [5, w oparciu o rozdział 1.1] Zbiór wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego nazywamy przestrzenią zdarzeń elementarnych i oznaczamy przez Ω. Elementy zbioru Ω nazywamy zdarzeniami elementarnymi i oznaczamy ω.*

Definicja 2.3.5. *Miara zbioru [3, Rozdział 2.10] Funkcję μ określoną na ciele $\mathcal{F}$ podzbiorów zbioru Ω nazywamy miarą, jeśli spełnia następujące warunki:*

1. $\mu(A) \in [0, \infty]$ *dla każdego zbioru* $A \in \mathcal{F}$,
2. $\mu(\emptyset) = 0$,
3. *jeśli* $A_1, A_2, ...$ *jest ciągiem rozłącznych zbiorów* $\mathcal{F}$*-mierzalnych takich, że* $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$, *to*

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

Definicja 2.3.6. *Przestrzeń mierzalna [3, Rozdział 2.10] Przestrzenią mierzalną nazywamy parę $(Y, \mathcal{F})$, gdzie $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem podzbiorów zbioru Y*

Definicja 2.3.7. *Funkcja mierzalna [9, w oparciu o rozdział 8.2] Niech Y będzie niepustym zbiorem, $\mathcal{F}$ σ-ciałem na Y i $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Funkcję $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ nazywamy mierzalną, jeżeli zbiór $\{y \in Y : f(y) > a\}$*

jest mierzalny przy dowolnym $a \in \mathbb{R}$.

Definicja 2.3.8. *Zdarzenie losowe [5, w oparciu o rozdział 1.1] Zdarzeniem losowym (zdarzeniem) nazywamy każdy podzbiór A zbioru Ω, taki że $A \in \mathcal{F}$, gdzie $\mathcal{F}$ jest rodziną podzbiorów Ω spełniającą następujące warunki:*

1. *$\Omega \in \mathcal{F}$;*
2. *Jeśli $A \in \mathcal{F}$, to $A' \in \mathcal{F}$, gdzie $A' = \Omega \setminus A$ jest zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A;*
3. *Jeśli $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, ...$,to $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$*

Rodzinę $\mathcal{F}$ spełniającą warunki 1 - 3 nazywamy σ-ciałem podzbiorów zbioru Ω

Definicja 2.3.9. *Prawdopodobieństwo [5, w oparciu o rozdział 1.1] Prawdopodobieństwem nazywamy dowolną funkcję P o wartościach rzeczywistych, określoną na σ-ciele zdarzeń $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$, spełniającą warunki:*

1. *$P(A) \geqslant 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$*
2. *$P(\Omega) = 1$*
3. *Jeśli $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, ...$ oraz $A_i \cap A_j$ dla $i \neq j$, to*

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Definicja 2.3.10. *Przestrzeń probabilistyczna [5, w oparciu o rozdział 1.2] Przestrzenią probabilistyczną nazywamy uporządkowaną trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie Ω jest zbiorem zdarzeń elementarnych, $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem podzbiorów Ω, zaś P jest prawdopodobieństwem określonym na $\mathcal{F}$.*

Definicja 2.3.11. *Zmienna losowa [5, Rozdział 2.1] Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie dowolną przestrzenią probabilistyczną. Dowolną funkcję $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy zmienną losową jednowymiarową, jeśli dla dowolnej liczby rzeczywistej y zbiór zdarzeń elementarnych ω, dla których spełniona jest nierówność $Y(\omega) < y$ jest zdarzeniem, czyli*

$\{\omega : Y(\omega) < y\} \in \mathcal{F}$ dla każdego $y \in \mathbb{R}$

Definicja 2.3.12. *Wektor losowy [4, Rozdział 5.1] Wektorem losowym nazywamy odwzorowanie $Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$, spełniające następujący warunek: dla każdego układu liczb $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^n$ zbiór $Y^{-1}((-\infty, t_1] \times \ldots \times (-\infty, t_n])$ należy do $\mathcal{F}$.*

Definicja 2.3.13. *Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y [4, Rozdział 5.1] Rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y o wartościach w $\mathbb{R}$ nazywamy funkcję μ_Y określoną na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ zależnością*

$\mu_Y(B) = P_Y(B) = P(Y^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Definicja 2.3.14. *Rozkład dyskretny [4, Rozdział 5.1] Mówimy, że zmienna losowa Y ma rozkład dyskretny, jeśli istnieje przeliczany zbiór $S \in \mathbb{R}$, taki że $\mu_Y(S) = 1$.*

Definicja 2.3.15. *Gęstość i rozkład ciągły [4, Rozdział 5.1] Jeśli μ jest rozkładem prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}$ i istnieje całkowalna funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że*

$$\mu(A) = \int_A f(y)dy, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

to funkcję f nazywamy gęstością rozkładu μ. Rozkład który ma gęstość, nazywamy rozkładem ciągłym.

Definicja 2.3.16. *Wartość oczekiwana [5, Rozdział 2.6] Niech X będzie zmienną losową typu dyskretnego lub ciągłego. Wartością oczekiwaną zmiennej losowej X nazywamy*

$$\mathrm{E}(X) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i & \text{, jeśli zmienna ma rozkład dyskretny} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx & \text{, jeśli zmienna ma rozkład ciągły} \end{cases}$$

Definicja 2.3.17. *Wariancja [4, Rozdział5.6] Niech Y będzie zmienną losową. Jeśli $\mathrm{E}(Y - \mathrm{E}Y)^2 < \infty$, to liczbę tę nazywamy wariancją zmiennej losowej Y o o wartościach rzeczywistych i oznaczamy:*
$\operatorname{Var} Y = \mathcal{D}^2 Y = \mathrm{E}(Y - \mathrm{E}Y)^2$.

Definicja 2.3.18. *Odchylenie standardowe [4, Rozdział 5.6] Niech Y będzie zmienną losową. Odchyleniem standardowym zmiennej losowej Y nazywamy pierwiastek z wariancji.*
$\sigma_Y = \mathcal{D}(Y) = \sqrt{\mathcal{D}^2 Y}$

Definicja 2.3.19. *Rozkład normalny (Gaussa) [4, Rozdział 5.10] Jeśli zmienna losowa Y ma gęstość postaci*

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(y-\mu_Y)^2}{2\sigma^2}}$$

dla $y \in \mathbb{R}$ i pewnych $\mu_Y \in \mathbb{R}$ i $\sigma^2 > 0$. To mówimy, że zmienna losowa ma rozkład normalny z parametrami μ i σ^2, co zapisujemy $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

W przypadku, gdy $\mu = 0$ i $\sigma^2 = 1$, to rozkład ten nazywamy standardowym rozkładem normalnym i oznaczamy $\mathcal{N}(0, 1)$, a gęstość jest postaci
$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(y)^2}{2}}$.

2.4 Podstawowe pojęcia teorii grafów

W pracy zostaną opisane zarówno metody porządkowania liniowego jak i nieliniowego tzn. w ujęciu matematycznym - porządku częściowego, w tym celu należy wprowadzić definicje związane z teorią grafów, niezbędne przy opisywaniu metod porządkowania nieliniowego.

W celu wprowadzeniu złożonych definicji, należy wcześniej podać podstawowe pojęcia dotyczące grafów. Uprzednio zostanie jeszcze wprowadzona definicja pary uporządkowanej oraz nieuporządkowanej, gdyż pojęcia te zostały wykorzystane w definicji grafu.

Definicja 2.4.1. *Para uporządkowana [6, w oparciu o rozdział 3] Niech dane będą dwa elementy a i b. Parą uporządkowaną nazywamy parę postaci $< a, b >$, gdzie element a jest poprzednikiem, zaś element b jest następnikiem.*
$< a, b >= \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Definicja 2.4.2. *Para nieuporządkowana [6, w oparciu o rozdział 3] Niech dane będą dwa elementy a i b. Parą nieuporządkowaną nazywamy zbiór postaci $\{a, b\}$, zawierający elementy a i b i nie zawierający żadnego innego elementu. W przypadku, gdy $a = b$, to para nieuporządkowana $\{a, b\}$, składa się dokładnie z jednego elementu.*

W analogiczny sposób jak parę dwóch punktów można wprowadzić parę dwóch zbiorów. Istotne jest aby podkreślić różnicę pomiędzy parą dwóch wierzchołków, które utworzą krawędź, a parą zbiorów definiującą graf.

Definicja 2.4.3. *Graf [10, w oparciu o rozdział 2] Grafem nazywamy parę* $G = (V, E) = (V(G), E(G))$, *gdzie* V *jest niepustym, skończonym zbiorem wierzchołków grafu* G, *zaś* E *jest skończonym podzbiorem zbioru nieuporządkowanych par elementów zbioru* V.

Definicja 2.4.4. *Pętle [10, Rozdział 2] Pętlami w grafie nazywamy krawędzie reprezentowane przez* $\{a\}$ *gdzie* a *jest pewnym wierzchołkiem, tj. łączące wierzchołek z samym sobą.*

Definicja 2.4.5. *Wierzchołki sąsiednie, krawędzie sąsiednie [10, Rozdział 2] Mówimy, że dwa wierzchołki* v *i* w *grafu* G *są sąsiednie, jeśli istnieje krawędź* vw *która je łączy.*

$$v \text{ ——— } w$$

Analogicznie definiuje się krawędzie sąsiednie.

Definicja 2.4.6. *Krawędzie sąsiednie [10, Rozdział 2] Dwie krawędzie* e *i* f *grafu* G *są sąsiednie, jeśli mają wspólny wierzchołek, tj*

$$\forall e, f \in E(G) \quad \exists d \in V(G) \quad d \in e \wedge d \in f$$

$$\overset{e}{\text{———}}\, d \,\overset{f}{\text{———}}$$

Definicja 2.4.7. *Trasa/marszruta [10, Rozdział 3] Trasą (lub marszrutą) w danym grafie* G *nazywamy skończony ciąg krawędzi postaci* $v_0v_1, v_1v_2, \ldots,$
$v_{m-1}v_m$, *zapisywany również w postaci* $v_0 \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_m$, *w którym każde dwie kolejne krawędzie są albo sąsiednie, albo identyczne. Taka trasa wyznacza ciąg wierzchołków* $v_0, v_1, \ldots, v_m$. *Wierzchołek* v_0 *nazywamy wierzchołkiem początkowym, a wierzchołek* v_m *wierzchołkiem końcowym trasy, mówimy też wtedy, o trasie od wierzchołka* v_0 *do wierzchołka* v_m. *Liczbę krawędzi na trasie nazywamy długością trasy.*

Definicja 2.4.8. *Ścieżka [10, Rozdział 3] Trasą, w której wszystkie krawędzie są różne, nazywamy ścieżką.*

Definicja 2.4.9. *Droga [10, Rozdział 3] Ścieżkę, w której wierzchołki* $v_0, v_1, \ldots, v_m$ *są różne (z wyjątkiem, być może, równości* $v_0 = v_m$*), nazywamy drogą.*

Definicja 2.4.10. *Droga zamknięta/ścieżka zamknięta [10, Rozdział 3] Droga lub ścieżka jest zamknięta, jeśli* $v_0 = v_m$.

Definicja 2.4.11. *Cykl [10, Rozdział 3] Cyklem nazywamy drogę zamkniętą lub ścieżkę zamkniętą, w której jedynym powtarzającym się wierzchołkiem jest jej początek, będący jednocześnie końcem.*

Definicja 2.4.12. *Graf spójny [10, Rozdział 3] Graf jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy każda para wierzchołków jest połączona drogą.*

Definicja 2.4.13. *Drzewo [10, Rozdział 4] Drzewem nazywamy graf spójny, nie zawierający cykli.*

Definicja 2.4.14. *Graf skierowany(digraf albo graf zorientowany) [10, Rozdział 7] Graf skierowany lub digraf D, składa się z niepustego zbioru skończonego $V(D)$ elementów nazywanych wierzchołkami i skończonej rodziny $E(D)$ par uporządkowanych elementów zbioru $V(D)$, nazywanych łukami. Zbiór $V(D)$ nazywamy zbiorem wierzchołków, a rodzinę $E(D)$ rodziną łuków digrafu D (krawędzi grafu skierowanego). Łuk (v, w) zwykle zapisujemy jako vw. Graf skierowany oznaczamy zwykle w postaci pary uporządkowanej $G =< V, E >$*

Uwaga 1. *Każdy graf jednoznacznie wyznacza pewną relację dwuargumentową (binarną) w zbiorze V. Można również powiedzieć odwrotnie, że każda relacja dwuargumentowa (binarna) r w zbiorze V, wyznacza jednoznacznie graf zorientowany, którego węzłami są elementy zbioru V, z kolei krawędziami są uporządkowane pary (v, v'), należące do r.*

Uwaga 2. *Niech dany będzie digraf D składający się z niepustego zbioru skończonego wierzchołków $V(D)$ i skończonej rodziny krawędzi$E(D)$. W momencie gdy $\forall a, b \in V(D) \quad < a, b >\in E(D)$ oraz $< b, a >\in E(D)$, to taki graf skierowany, staje się grafem niezorientowanym.*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, leftrightarrow] \\ b \end{tikzcd}$$

2.5 Wybrane pojęcia z teorii mnogości, topologii i algebry liniowej

2.5.1 Relacja porządkująca

W niniejszej pracy skupiam się na zagadnieniu porządkowania danych wielowymiarowych. Konieczne jest zatem przywołanie odpowiednich sformułowań dotyczących matematycznej definicji porządku. Najbardziej podstawowym pojęciem jest relacja porządku, która zostanie zdefiniowana poniżej. W sekcji tej zostaną również podane pojęcia równoliczności zbiorów, mocy zbioru ze względu na korzystanie z tych pojęć, przy definiowaniu właściwości porządkowania liniowego zbioru obiektów. Dodatkowo przytoczona została definicja zbioru skończonego, ze względu na zastosowanie metod porządkowania na zbiorze skończonym.

Definicja 2.5.1. *Relacja [6, Rozdział 3] Niech dane będą zbiory X i Y. Relacją (dwuargumentową) między elementami zbiorów X i Y nazywamy dowolny podzbiór $\rho \subset X \times Y$. Jeśli $X = Y$ to mówimy, że ρ jest relacją na zbiorze X.*

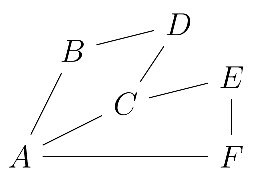
Definicja 2.5.2. *Relacja porządkująca (częściowego porządku) [2, Rozdział 2] Niech dana relacja ρ, którą oznaczać będziemy przez $\leqslant$, będzie określona dla elementów ustalonego zbioru X. Mówimy, że relacja $\leqslant$ jest relacją częściowego porządku, jeśli spełnione są warunki:*

1. *$x \leqslant x$ dla każdego x (zwrotność),*
2. *jeśli $x \leqslant y$ i $y \leqslant x$, to $x = y$ (słaba antysymetryczność),*
3. *jeśli $x \leqslant y$ i $y \leqslant z$, to $x \leqslant z$ (przechodniość).*

Przykład 1. *Częściowego porządku na zbiorze Wykorzystanie częściowego porządku na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, obrazuje diagram Hassego, będący grafem skierowanym, którego wierzchołki zostały poddane relacji porządkowania i reprezentują elementy skończonego zbioru $X \subset \mathbb{R}$. Aby go skonstruować, należy postępować według poniższych kroków:*

- *Punkty obrazujące elementy zbioru X, umieszcza się na płaszczyźnie.*
- *Punkt $x \in X$ łączony jest odcinkiem z punktem $y \in X$, jeśli x jest następnikiem y, czyli gdy $y < x$ oraz nie istnieje taki punkt $z \in X$, że $y < z < x$.*

Zobrazowanie relacji częściowego porządku, dla punktów $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}^2$



Definicja 2.5.3. *Relacja liniowo porządkująca (liniowy porządek) [2, Rozdział 2] Niech dany będzie niepusty zbiór X. Relację $\leqslant$ porządkującą zbiór X, nazywamy relacją liniowo porządkującą lub porządkiem liniowym, gdy dla dowolnych x, $y \in X$ spełnia ona następujący warunek spójności tzn.*

$x \leqslant y$ *lub* $y \leqslant x$

Parę $(X, \leqslant)$ nazywamy zbiorem liniowo uporządkowanym lub łańcuchem.

Definicja 2.5.4. *Dobry porządek [2, Rozdział 2] Niech dany będzie zbiór X. Relację $\leqslant$ porządkującą zbiór X, nazywamy dobrym porządkiem na zbiorze X, gdy w każdym niepustym podzbiorze zbioru X istnieje element najmniejszy względem relacji $\leqslant$. Jeśli relacja $\leqslant$ na zbiorze X jest dobrym porządkiem, to mówimy, że para $(X, \leqslant)$ jest zbiorem dobrze uporządkowanym.*

Definicja 2.5.5. *Elementy wyróżnione [2, Rozdział 2] Niech X będzie zbiorem częściowo uporządkowanym przez relacje $\leqslant$ oraz niech $a \in X$. Mówimy, że:*

1. *a jest elementem najmniejszym w X, gdy $\forall x \in X \quad a \leqslant x$*
2. *a jest elementem minimalnym w X, gdy $\neg((\exists x \in X) \quad x < a)$*
3. *a jest elementem największym w X, gdy $\forall x \in X \quad x \leqslant a$*
4. *a jest elementem maksymalnym w X, gdy $\neg((\exists x \in X) \quad a < x)$*

Definicja 2.5.6. *Ograniczenie górne [2, Rozdział 2] Niech $A \subseteq X$, gdzie $(X, \leqslant)$ jest zbiorem uporządkowanym. Element $x \in X$ nazywamy ograniczeniem górnym zbioru A względem relacji $\leqslant$, gdy $a \leqslant x$ dla każdego $a \in A$.*

Definicja 2.5.7. *Ograniczenie dolne [2, Rozdział 2] Niech $A \subseteq X$, gdzie $(X, \leqslant)$ jest zbiorem uporządkowanym. Element $y \in X$ nazywamy ograniczeniem dolnym zbioru A względem relacji $\leqslant$, gdy $y \leqslant a$ dla każdego $a \in A$.*

Definicja 2.5.8. *Zbiór ograniczony z góry, zbiór ograniczony z dołu, zbiór ograniczony [2, Rozdział 2] Niech $A \subseteq X$, gdzie $(X, \leqslant)$ jest zbiorem uporządkowanym. Zbiór nazywamy ograniczonym z góry (ograniczonym z dołu), jeśli ma on ograniczenie górne (dolne).*
Zbiór ograniczony z dołu i z góry nazywamy ograniczonym.

Definicja 2.5.9. *Kres górny [2, Rozdział 2] Niech $A \subseteq X$, gdzie $(X, \leqslant)$ jest zbiorem uporządkowanym. Jeśli zbiór A jest ograniczony z góry i wśród ograniczeń górnych zbioru A istnienie element najmniejszy x_0, to element ten nazywamy kresem górnym zbioru A i oznaczamy symbolem $supA$. Tak więc $x_0 = supA$, gdy spełnione są następujące warunki:*

1. *$a \leqslant x_0$ dla każdego $a \in A$,*

2. *jeśli* $a \leqslant x$ *dla każdego* $a \in A$*, to* $x_0 \leqslant x$*.*

Definicja 2.5.10. *Kres dolnym [2, Rozdział 2] Niech* $A \subseteq X$*, gdzie* $(X, \leqslant)$ *jest zbiorem uporządkowanym. Jeśli zbiór A jest ograniczony z dołu i wśród ograniczeń dolnych zbioru A istnienie element największy* x_0*, to element ten nazywamy kresem dolnym zbioru A i oznaczamy symbolem* $inf A$*. Tak więc* $x_0 = inf A$*, gdy spełnione są następujące warunki:*

1. $y_0 \leqslant a$ *dla każdego* $a \in A$*,*

2. *jeśli* $y \leqslant a$ *dla każdego* $a \in A$*, to* $y \leqslant y_0$*.*

Definicja 2.5.11. *Zbiory równoliczne [2, Rozdział 5] Mówimy, że zbiory A i B są równoliczne (tej samej mocy), gdy istnieje bijekcja, tj. funkcja f różnowartościowa, przekształcająca zbiór A na zbiór B, tzn.* $f : A \to B$*. Piszemy wtedy:* $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$*.*

Definicja 2.5.12. *Zbiór skończony [2, Rozdział 5] Mówimy, że zbiór A jest skończony, gdy jest pusty lub równoliczny ze zbiorem* $\{1, \ldots, n\}$*, dla pewnego* $n \in \mathbb{N}$*. Gdy zbiór jest równoliczny ze zbiorem* $\{1, \ldots, n\}$*, to mówimy że jest on n-elementowy, tj. mocy równej n.*

Definicja 2.5.13. *Zbiór przeliczalny [2, Rozdział 5] Mówimy, że zbiór X jest przeliczalny, gdy jest skończony lub jest równoliczny z* $\mathbb{N}$*.*

2.5.2 Przestrzenie metryczne, miary odległości

Niezbędnym jest również wprowadzenie podstawowych pojęć z topologii, ze względu na stosowanie funkcji odległości w celu uporządkowania obiektów.

Definicja 2.5.14. *Metryka [6, Rozdzial 9] Niech X będzie niepustym zbiorem, wtedy funkcję* $\mathrm{d} : X \times X \to [0, \infty)$*, nazywamy metryką jeśli spełnione są warunki:*

1. $\forall x, y \in X \quad \Big(\mathrm{d}(x, y) = 0 \iff x = y\Big)$,

2. $\forall x, y \in X \quad \mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$,

3. $\forall x, y, z \in X \quad \mathrm{d}(x, y) \leqslant \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, y)$.

Definicja 2.5.15. *Przestrzeń metryczna [6, Rozdział 9] Niech X będzie niepustym zbiorem,* d *metryką, wówczas parę* (X, d) *nazywamy przestrzenią metryczną.*

Przykład 2. *Metryka euklidesowa w* $\mathbb{R}^2$ *Niech* $\mathrm{d}_e : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *będzie metryką euklidesową, wówczas*

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \mathrm{d}_e((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Przykład 3. *Metryka miejska(Manhattan) w* $\mathbb{R}^2$ *Niech* $\mathrm{d}_m : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *będzie metryką miejską, wówczas*

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \mathrm{d}_m((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

Przykład 4. *Przestrzeń euklidesowa n-wymiarowa* $\mathbb{R}^n$ *Niech* $\mathrm{d}_e : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *będzie metryką euklidesową, wówczas*

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \quad \mathrm{d}_e(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}.$$

2.5.3 Rachunek macierzowy

Definicja 2.5.16. *Grupa [1, Rozdział 0] Grupą nazywamy zbiór P z działaniem $\cdot : P \times P \to P$ dla którego są spełnione następujące warunki:*

1. *Dla dowolnych $a, b, c \in P \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (łączność)*
2. *Istnieje element $e \in P$ (nazywany elementem neutralnym grupy), taki że dla każdego $a \in P$ mamy, $e \cdot a = a \cdot e = a$*
3. *Dla każdego $a \in P$ istnieje element $b \in P$ (nazywany elementem odwrotnym do a), taki że $a \cdot b = b \cdot a = e$.*

Dodatkowo, mówimy że grupa P jest przemienna, gdy dla dowolnych $a, b \in P \quad a \cdot b = b \cdot a$.

Definicja 2.5.17. *Pierścień [1, Rozdział 0] Pierścieniem nazywamy zbiór R z dwoma działaniami: z dodawaniem $+ : R \times R \to R$ i z mnożeniem $\cdot : R \times R \to R$, dla których są spełnione następujące warunki:*

1. *Zbiór R z działaniem $+$ jest grupą przemienną. Element neutralny działania $+$oznaczamy przez 0.*
2. *Dla dowolnych $a, b, c \in R \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (łączność mnożenia).*
3. *Dla dowolnych $a, b, c \in R$*
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$
(rozdzielność mnożenia względem dodawania).

Definicja 2.5.18. *Ciało [1, Rozdział 0] Ciałem nazywamy zbiór K z działaniami: $+ : K \times K \to K$ oraz $\cdot : K \times K \to K$, takimi że:*

1. *Zbiór K z działaniami $+$ i $\cdot$ jest pierścieniem przemiennym z jedynką.*
2. *Zbiór $K^* = K \backslash \{0\}$ z działaniem $\cdot$ jest grupa.*

Definicja 2.5.19. *Macierz [1, Rozdział 1] Niech K będzie ciałem i $m, n \in \mathbb{N}$. Macierzą o m-wierszach, n-kolumnach i o wyrazach z K nazywamy każdą funkcję postaci $A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to K$*

Przykład 5. *Macierz A o m-wierszach i n-kolumnach najczęściej zapisuje się postaci $A = [a_{ij}]_{i \leqslant m, j \leqslant n}$, tj.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Rozdział 3

Metody porządkowania

Rozdział ten został opracowany w oparciu o [8, Rozdział 2], omówiono w nim ogólnie metody porządkowania zarówno liniowego jak i nieliniowego, po to by w kolejnym rozdziale szczegółowo przyjrzeć się wybranym metodą wraz z przedstawieniem ich algorytmów oraz dokładnych opisów matematycznych, z uwzględnieniem ich wad oraz zalet.

Metody porządkowania liniowego umożliwiają przeprowadzenie takiego porządkowania, w wyniku którego kolejność obiektów zwracana jest od tego o najlepszych zmiennych do tego o najsłabszych zmiennych, które opisują obiekt, innymi słowy ustalana jest hierarchia obiektów, na podstawie określonego kryterium(np. wartości zmiennych). Z kolei metody porządkowania nieliniowego nie pozwalają na ustaleniu hierarchii, natomiast w wyniku uporządkowania możliwe jest wskazanie dla każdego z obiektów poddanych porządkowaniu, obiektów podobnych ze względu na opisujące je zmienne.

3.1 Metody porządkowania liniowego

W wielowymiarowej przestrzeni zmiennych, porządkowanie liniowe obiektów sprowadza się do rzutowania punktów na prostą, przy czym punkty reprezentują obiekty poddane porządkowaniu. Taka operacja pozwala ustalenie hierarchii obiektów - o czym z resztą wspomniałam już na początku tego rozdziału. Poniżej zostaną przedstawione własności uporządkowania liniowego obiektów, wraz z podaniem ich matematycznej interpretacji.

- każdy obiekt ma przynajmniej jednego sąsiada i nie więcej niż dwóch sąsiadów,
- jeżeli sąsiadem i-tego obiektu jest k-ty obiekt, to jednocześnie sąsiadem k-tego obiektu jest i-ty obiekt,
- dokładnie dwa obiekty mają tylko jednego sąsiada.

Powyżej wymienione własności są wynikiem posiadania jedynie skończonej ilości obiektów, które podane są uporządkowaniu. W następnej części chciałabym

- sformalizować rozumienie powyższych własności,
- udowodnić ich poprawność,
- rozważyć dostateczność tych własności w zbiorach o skończonej ilości obiektów.

Na początku zacznę od sprecyzowania takich pojęć jak sąsiad względem relacji.

Definicja 3.1.1. *Sąsiad względem relacji $\leqslant$ Niech X będzie niepustym zbiorem, a x, y będą dwoma różnymi elementami należącymi do tego zbioru. Mówi się, że $y \in X$ jest sąsiadem $x \in X$,co zapisujemy ySx, jeśli*
$$(y \leqslant x \vee x \leqslant y) \quad \wedge \quad (\neg \exists_{z \in X} \quad x \neq z \neq y \Rightarrow y \leqslant z \leqslant x \vee x \leqslant z \leqslant y).$$

Twierdzenie 3.1.2. *Własności porządku liniowego w zbiorach skończonych Niech $\leqslant$ będzie relacją porządku liniowego zdefiniowaną w $X \times X$, gdzie X jest zbiorem ze skończoną liczbą obiektów, złożonym co najmniej z dwóch elementów. Wtedy*

1. $\forall_{x \in X} \quad \overline{\overline{\{y \in X, ySx\}}} \in \{1, 2\}$,
2. $\forall_{x,y \in X} \quad ySx \Rightarrow xSy$,
3. $\overline{\overline{\{x \in X, \quad \overline{\overline{\{y \in X, \quad ySx\}}} = 1\}}} = 2$

gdzie S oznacza sąsiada względem relacji $\leqslant$.

Dowód. Poniżej zostaną udowodnione powyższe własności.

1. Niech $x \in X$. Przypuśćmy na początek, że $\overline{\overline{\{y \in X, ySx\}}} = 0$, tzn. że obiekt x nie posiada sąsiadów w tej relacji. Nasz zbiór X jest jednak co najmniej dwuelementowy zatem istnieje element $y \in X$ i $x \neq y$. Wobec spójności linowego porządku z Definicji 2.5.3 zachodzi wtedy
$$x \leqslant y \vee y \leqslant x.$$
Jednak wiemy, że y nie może być sąsiadem x gdyż ten nie posiada sąsiadów. Zatem z definicji sąsiada musi istnieć $z \in X$ różny od obu $x \neq z \neq y$ spełniający warunek
$$z \leqslant x \vee x \leqslant z.$$
Powyższe rozumowanie dla y można by dalej zastosować do z, uzyskując kolejne z_1 a później $z_2, z_3, \ldots$ dowolną ilość różnych elementów z których każdy występuje w relacji liniowego porządku z x, ale żaden z nich nie jest sąsiadem. Jednak nasz zbiór X jest zbiorem skończonym, więc nigdy nie uda nam się utworzyć dowolnej ilości różnych elementów ze zbioru X (elementy się wyczerpią). Zatem nasze przypuszczenie, że $\overline{\overline{\{y \in X, ySx\}}} = 0$ jest fałszywe.

   Przypuśćmy dalej, że $\overline{\overline{\{y \in X, ySx\}}} \geqslant 3$. Niech a, b, c będą trzema różnymi elementami z X będącymi sąsiadami dla x. Wtedy bez straty ogólności możemy przyjąć, że $a \leqslant x, b \leqslant x$ lub $x \leqslant a, x \leqslant b$. Istotnie mając 3 elementy w relacji wtedy co najmniej dwa muszą znajdować się po zgodnej stronie, a z dokładnością do oznaczeń możemy przyjąć, że będą nimi a oraz b. Ustalmy zatem, że $a \leqslant x, b \leqslant x$. Wobec definicji 2.5.3 wiemy, że $a \leqslant b$ lub $b \leqslant a$. Jeśli $a \leqslant b$ to $a \leqslant b \leqslant x$. Co przeczy temu, że a jest sąsiadem x. Jeśli $b \leqslant a$ to $b \leqslant a \leqslant x$ co przeczy temu, że b jest sąsiadem. Zupełnie analogicznie postępujemy dla przypadku $x \leqslant a, x \leqslant b$. Zatem uzyskujemy sprzeczność, będącą efektem przypuszczenia, że mogą istnieć takie 3 elementy a, b, c. Zatem ostatecznie $\overline{\overline{\{y \in X, ySx\}}} \in \{1, 2\}$.

2. Niech $x, y \in X$ oraz niech ySx. Korzystając z definicji sąsiada 3.1.1 mamy, że skoro ySx to
$$(y \leqslant x \vee x \leqslant y) \quad \wedge \quad (\neg \exists_{z \in X} \quad x \neq z \neq y \Rightarrow y \leqslant z \leqslant x \vee x \leqslant z \leqslant y),$$
Natomiast xSy oznacza, że
$$(x \leqslant y \vee y \leqslant x) \quad \wedge \quad (\neg \exists_{z \in X} \quad y \neq z \neq x \Rightarrow x \leqslant z \leqslant y \vee y \leqslant z \leqslant x).$$
Wobec powyższego widać, że te dwa zdania znaczą to samo, stąd widać że $ySx \Rightarrow xSy$.

3. Intuicyjnie te dwa elementy posiadające po jednym sąsiedzie są elementami maksymalnym i minimalnym w tym zbiorze. Udowodnimy kolejno:

   - Element minimalny w zbiorze ma pojedynczego sąsiada. Załóżmy, że zbiór musi posiadać dokładnie 1 element minimalny, tzn. $x_m \in X$ takie, że

     $$\forall x \in X \quad x_m \leqslant x.$$

     Istotnie przypuśćmy, że nie istnieje element minimalny. Niech x_1 będzie dowolnym elementem z X. Skoro nie istnieje element minimalny, to istnieje $x_2 \in X$ takie, że $x_2 \leqslant x_1$ i $x_2 \neq x_1$. Dla x_2 z braku elementu minimalnemu, musi istnieć z kolei $x_3 \leqslant x_2$ takie, że $x_2 \neq x_3$. Itd. Co nie jest możliwe, gdyż zbiór X jest przecież skończonym zbiorem. Rozważmy dalej przypuszczenie gdyby były dwa lub więcej takich elementów. Wtedy to, z antysymetryczności, oczywiście musiałyby być sobie równe. Jeśli x_m, y_m są jednocześnie minimalne to

     $$\forall x \in X \quad x_m \leqslant x,$$

     oraz

     $$\forall x \in X \quad y_m \leqslant x.$$

     Skąd natychmiast mamy, że $x_m \leqslant y_m$ oraz $y_m \leqslant x_m$. Wobec antysymetryczności z definicji 2.5.2 mamy, że $x_m = y_m$ wbrew naszemu przypuszczeniu, że są od siebie różne. Pozostaje pokazać, że element minimalny ma pojedynczego sąsiada. Przypuśćmy, że $y, z \in X$ są dwoma różnymi sąsiadami dla x_m. Wtedy $x_m \leqslant y \vee y \leqslant x_m$ oraz $x_m \leqslant z \vee z \leqslant x_m$. Skoro x_m jest minimalny to musi to oznaczać, że

     $$x_m \leqslant y \wedge x_m \leqslant z.$$

     Wobec spójności z definicji 2.5.3 zachodzi $y \leqslant z$ lub $z \leqslant y$. Sprzeczność, gdyż wtedy któryś z nich nie mógłby być sąsiadem dla x_m.

   - Element maksymalny x_M w zbiorze ma pojedynczego sąsiada. Analogicznie do powyższego punktu, zbiór musi posiadać dokładnie 1 element maksymalny, tzn. $x_M \in X$ takie, że

     $$\forall x \in X \quad x \leqslant x_M.$$

     Istotnie przypuśćmy, że nie istnieje element maksymalny. Niech x_1 będzie dowolnym elementem z X. Skoro nie istnieje element maksymalny, to istnieje $x_2 \in X$ takie, że $x_1 \leqslant x_2$ i $x_1 \neq x_2$. Dla x_2 z braku elementu maksymalnego, musi istnieć taki element $x_3 \in X$ i $x_3 \neq x_2$, że $x_2 \leqslant x_3$. Itd. Co nie jest możliwe, gdyż z założenia, zbiór X jest skończonym zbiorem. Rozważmy dalej przypuszczenie gdyby były dwa lub więcej takich elementów. Wtedy to, z antysymetryczności, musiałyby być sobie równe. Jeśli x_M, y_M są jednocześnie maksymalne, to

     $$\forall x \in X \quad x \leqslant x_M,$$

     oraz

     $$\forall x \in X \quad x \leqslant y_M.$$

     Stąd natychmiast mamy, że $x_M \leqslant y_M$ oraz $y_M \leqslant x_M$. Wobec antysymetryczności z definicji 2.5.2, mamy że $x_M = y_M$, co wbrew naszemu przypuszczeniu daje, że elementy te nie są od siebie różne. Pozostaje pokazać, że element maksymalny ma pojedynczego sąsiada. Przypuśćmy, że $y, z \in X$ są dwoma różnymi sąsiadami dla

x_M. Wtedy $x_M \leqslant y \vee y \leqslant x_M$ oraz $x_M \leqslant z \vee z \leqslant x_M$. Skoro x_M jest elementem maksymalny to musi to zatem oznaczać

$$y \leqslant x_M \wedge z \leqslant x_M.$$

Wobec spójności z definicji 2.5.3 zachodzi $y \leqslant z$ lub $z \leqslant y$. Sprzeczność, gdyż wtedy któryś z nich nie mógłby być sąsiadem dla x_M.

- Żaden inny element nie może mieć pojedynczego sąsiada. Przypuśćmy, że $x \in X$ nie będąc ani elementem minimalnym ani maksymalnym ma pojedynczego sąsiada. Wobec definicji elementu minimalnego i maksymalnego oraz spójności zachodzi

  $$x_m \leqslant x \leqslant x_M.$$

  Zatem albo x_m jest sąsiadem x albo istnieje $y_1 \in X$ taki, że $y_1 \leqslant x$. Tworzy to kilka możliwych przypadków. W pierwszym x_m będzie tym jedynym sąsiadem, w drugim x_M nim będzie, w ostatnim natomiast, ani x_m, ani x_M nie będą sąsiadami.

  Zajmiemy się najpierw pierwszym z nich, tj. x_m jest sąsiadem x. Zauważmy teraz, że z faktu, iż x_M jest elementem maksymalnym zbioru X, wynika że $x \leqslant x_M$. Nie jest jednak sąsiadem elementu x. Zatem istnieje takie $x_1 \in X$, że $x \leqslant x_1 \leqslant x_M$. Jednak x_1 również nie może być sąsiadem X co powoduje, że istnieje taki element $x_2 \in X$, że $x \leqslant x_2 \leqslant x_1 \leqslant x_M$. Itd. Jednakże, skoro zbiór X jest zbiorem skończonym, to musi istnieć taki element $x_j \in X$, że $x \leqslant x_j$, który będzie sąsiadem z x, zatem xSx_j. Zatem ostatecznie xSx_m i xSx_j, a to przeczy założeniu, że x ma pojedynczego sąsiada.

  Przejdźmy teraz do drugiego przypadku, tj. gdy x_M jest sąsiadem dla x. Wtedy x_m nie jest sąsiadem dla x jednak wiedząc, że $x_m \leqslant X$ musi istnieć $y_1 \in X$, taki że $y_1 \leqslant x$. Jednak wiedząc iż y_1 nie jest sąsiadem dla X wnioskujemy, że istnieje taki $y_2 \in X$, że $x_m \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant x$. Itd. Jednakże, skoro zbiór X jest zbiorem skończonym, to musi istnieć taki element $y_i \in X$, że $y_i \leqslant x$, który będzie sąsiadem z x. Zatem ostatecznie y_iSx i xSx_M, co przeczy założeniu że x ma pojedynczego sąsiada.

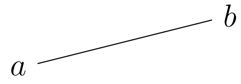
  Zajmijmy się teraz trzecim przypadkiem, tj. gdy ani x_m oraz x_M nie są sąsiadami elementu x. Z faktu, iż zbiór X posiada element minimalny x_m, który nie jest sąsiadem elementu x, wynika że istnieje taki element $x_1 \in X$, że $x_m \leqslant x_1 \leqslant x$. Co więcej istnieje taki $x_2 \in X$, że $x_m \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x$. Itd. I znów skoro zbiór X jest skończony, to istnieje taki element $x_j \in X$, że $x_j \leqslant x$ i x_jSx. Z drugiej strony, skoro zbiór X posiada element maksymalny x_M, który nie jest sąsiadem elementu x, wynika że istnieje taki element $y_1 \in X$, że $x \leqslant y_1 \leqslant x_M$. Analogicznie do wcześniejszych kroków, istnieje takie element $y_2 \in X$, że $x \leqslant y_2 \leqslant y_1 \leqslant x_M$. Itd. Zbiór X jest zbiorem skończonym, zatem musi istnieć taki element $y_i \in X$, że $x \leqslant y_i$ i xSy_1. Łącząc te dwa warunki, wynika że x musi mieć dwóch sąsiadów. Co kończy dowód własności.

□

Powyżej wykazane własności są często podawane, niemal na równi z definicją takiego uporządkowania, w pozycjach książkowych omawiających praktyczny aspekt porządkowania danych. Poniżej podane zostaną przykłady takich relacji, które też posiadają powyższy zestaw własności, ale nie opisują relacji będących porządkami liniowymi.

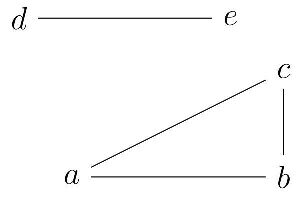
Przykład 6. *Rozważmy zbiór dwuelementowy $X = \{a, b\}$ gdzie $a \leqslant b$ jest jedynym punktem tej relacji. Tak zdefiniowana relacja spełnia wszystkie własności, ale nie spełnia założenia o zwrotności - zatem relacja ta nie jest liniowym porządkiem.*

Diagram Hassego prezentujący tę relację, jest postaci:



Przykład 7. *Rozważmy zbiór $X = \{a, b, c, d, e\}$ oraz relację definiującą następujące sąsiedztwa (wypisaną bez par symetrycznych) aSb, bSc, aSc, dSe. Ponadto dołóżmy warunek zwrotności, tj. $a \leqslant a$, $b \leqslant b$, $c \leqslant c$, $d \leqslant d$, $e \leqslant e$.*

Diagram Hassego prezentujący relację porządku tego zbioru, jest postaci:



Z diagramu widać, że taka relacja spełnia wszystkie omawiane wcześniej własności - jednak nie jest spójna. I tak np. nie możemy porównać elementów a i d, bowiem nie możemy określić czy $d \leqslant a$ lub $a \leqslant d$.

W podsumowaniu tej sekcji należy podkreślić, że by uporządkować liniowo obiekty, charakteryzujące je zmienne muszą być mierzone przynajmniej na skali porządkowej. Istotne jest również aby miały jednakowy charakter, na potrzeby pracy zakładam, że zmiennej opisujące obiekty powinny być stymulantami, gdy nimi nie są należy dokonać stymulacji. Operacja ta umożliwia w dalszym kroku przejścia do transformacji normalizacyjnej, która konieczna jest gdy zmienne opisujące obiekty mierzone są na skali przedziałowej lub ilorazowej, a chcemy uzyskać ich porównywalność.

Metody porządkowania liniowego można podzielić na metody diagramowe, procedury oparte na zmiennej syntetycznej oraz procedury iteracyjne bazujące funkcji kryterium dobroci uporządkowania tzn. funkcji, którą się przyjmuje, lub też tworzy się ją aby w kolejnych iteracjach szukać takiego uporządkowania, które optymalizuje zbiór wartości tej funkcji. W kolejnej sekcji zostaną pokrótce przedstawione różne metody, z wyszczególnieniem najważniejszych założeń każdej z nich.

3.1.1 Metody diagramowe

W metodach diagramowych stosuje się graficzną reprezentację macierzy odległości zwanej diagramem. Macierz konstruowana jest w oparciu o odległości między obiektami, wyznaczone za pomocą dowolnej metryki. Porządkowanie obiektów polega na porządkowaniu diagramu, tj. przestawieniu wierszy i odpowiadających im kolumn, w celu by wzdłuż przekątnej skupiały się najmniejsze odległości zaś im dalej od głównej przekątnej tym większe odległości między zmiennymi opisującymi porządkowane obiekty.

Jako narzędzie pomocnicze w porządkowaniu danych, może stanowić kryterium postaci:

$$F^1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k>1}^{n} d_{ik} w_{ik}$$

gdzie:

d_{ik} - odległość euklidesowa między i-tym i k-tym obiektem .

w_{ik} - wagi elementów macierzy odległości, zdefiniowane w oparciu o jeden z następujących wzorów:

$$w_{ik} = \frac{|i-k|}{n-1},$$

$$w_{ik} = \frac{1}{n(n-1)}[2n|i-k-1| + i + k - (i-i)^2],$$

$$w_{ik} = \frac{1}{n(n-1)}[2n|i-k| + 2 - i - k - (i-i)^2].$$

Dodatkowo wagi elementów macierzy odległości tworzą macierz wag postaci:
$W = [w_{ik}], \quad i, k = 1, 2, \ldots, n.$

3.1.2 Metody oparte na zmiennych syntetycznych

W tym podrozdziale zostaną opisane metody porządkowania oparte na zmiennych syntetycznych, tj. funkcji wyznaczonej na podstawie wartości zmiennych opisujących obiekty, której wartości będą służyć do porządkowania zbioru. Metody oparte na zmiennych syntetycznych dzielimy na wzorcowe i bezwzorcowe. Poniżej zostaną one opisane szczegółowo, jednak wcześniej zostaną przedstawione wzory wyznaczające zmienną syntetyczną.

Sposoby wyznaczania zmiennej syntetycznej

W pracy dla zachowania ogólności, przyjmuję że wszystkie zmienne opisujące obiekty mają jednakowe wagi, w związku z tym wzory służące do wyznaczenia zmiennej syntetycznej są postaci:

1. dla średniej arytmetycznej:

$$s_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} n_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

2. dla średniej geometrycznej:

$$s_i = \prod_{j=1}^{m} (n_{ij})^{\frac{1}{m}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

3. dla średniej harmonicznej

$$s_i = \Big[\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{n_{ij}}\Big]^{-1} \cdot m, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

gdzie: s_i - wartość zmiennej syntetycznej w i-tym obiekcie,

Metody bewzorcowe

W metodach tych zakładamy, że nie istnieje obiekt wzorcowy, czyli taki o najkorzystniejszych wartościach zmiennych ze względu na ustalone kryterium porządkowania. Porządkowanie dokonywane jest na podstawie wartości zmiennej syntetycznej, wyznaczonej dla każdego obiektu. Poniżej zostaną omówione wybrane metody porządkowania bezwzorcowego.

Metoda rang

Metoda ta opiera się na normalizacji rangowej, w związku z tym zmienne poddane porządkowaniu, powinny być mierzone są na skali porządkowej. Dla każdego obiektu wyznacza się sumę przyporządkowanych mu rang ze względu na wszystkie zmienne. Na końcu obliczana jest wartość zmiennej syntetycznej, jako średniej wartości rang. W oparciu o tę wartość następuje porządkowanie obiektów, tj. im wartość zmiennej syntetycznej jest mniejsza tym wyżej w hierarchii znajduje się uporządkowany obiekt. Wzór na obliczenie wartości zmiennej syntetycznej:

$$s_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} n_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

gdzie:
n_{ij}-zmienna znormalizowana rangowo, tj. $n_{ij} = r$ dla $x_{rj} = x_{ij}, \quad h, i = 1, 2, \ldots, n$. gdzie:
r-ranga nadana i-temu obiektowi znajdującemu się na r-tym miejscu w uporządkowanym szeregu obiektów ze względu na j-tą zmienną.

Metoda sum

Metoda ta używana jest w momencie, gdy zmienne mierzone są na skali ilorazowej lub przedziałowej. W związku z tym tuż po stymulacji zmiennych, należy dokonać ich przekształcenia normalizacyjnego, dokonanego za pomocą unitaryzacji. W kolejnym kroku, dla każdego obiektu wyznaczana jest zmienna syntetyczna, jako średnia arytmetyczna wartości zmiennych przy przyjęciu jednakowych wag dla każdej zmiennej, jako średnia arytmetyczna wartości zmiennych. Następnie muszą zostać wyeliminowane ujemne wartości zmiennej syntetycznej, do czego służy poniższe przekształcenie:

$$s_i' = s_i - \min\{s_i\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Końcowa postać zmiennej syntetycznej otrzymywana jest, przy wykorzystaniu normalizacji o postaci:

$$s_i'' = \frac{s_i'}{\max\{s_i'\}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Powyższe przekształcenia ujednolicają zakres miary syntetycznej do przedziału $[0, 1]$. Im wyższa wartość zmiennej syntetycznej, tym wyżej w hierarchii znajduje się obiekt.

Metoda wzorcowe

W metodach tych zakłada się istnienie obiektu wzorcowego $P_0 = [n_{0j}], \quad j = 1, 2, \ldots, m$, w którym znormalizowane zmienne wejściowe $n_{0j}, j = 1, 2, \ldots, m$, będące współrzędnymi obiektu wzorcowego, przyjmują optymalne wartości, które to są ustalane na podstawie ogólnie przyjętych norm, subiektywnej opinii dotyczącej obserwowanego obiektu, lub też opinii ekspertów. Poszczególne metody różnią się sposobem wyznaczania obiektu wzorcowego, poniżej zostaną one przedstawione.

Metoda Hellwiga

W metodzie tej, obiekt wzorcowy wyznaczony jest na podstawie wystandaryzowanych zmiennych wejściowych. Współrzędnym obiektu wzorcowego przyporządkowuje się maksimum, gdy zmienne wejściowe są stymulantami lub minimum gdy zmienne są destymulantami. Obiekty są uporządkowywane na podstawie odległości od obiektu wzorcowego, przy wykorzystaniu odległości euklidesowej. Miara syntetyczna jest postaci:

$$s_i = 1 - \frac{d_{i0}}{d_0}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

gdzie:
d_{i0}-odległość i-tego obiektu, od obiektu wzorcowego
współrzędne obiektu wzorcowego są obliczane na podstawie wzoru:

$$n_{0j} = \begin{cases} \max\limits_i\{n_{ij}\} & \text{dla } n_j^S, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ \min\limits_i\{n_{ij}\} & \text{dla } n_j^D, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

$$d_{i0} = \left[\sum_{j=1}^{m}(n_{ij} - z_{0j})^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$d_0 = \overline{d_0} + 2S(d_0),$$

$$\overline{d_0} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_{i0},$$

$$S(d_0) = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(d_{i0} - \overline{d_0})^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Wartości miary s_i zazwyczaj są z przedziału $[0, 1]$. Należy tu zaznaczyć, że wartości miary są tym wyższe, im mniej jest oddalony obiekt od obiektu wzorcowego.

Metoda dystansowa

Podobnie jak we wcześniejsze metodach, na początku zmienne należy poddać stymulacji, oraz przekształceniu normalizacyjnemu, wybranemu na podstawie skal do których należą zmienne opisujące obiekty. W kolejnym kroku wyznaczane są współrzędne obiektu wzorcowego, a następnie macierz odległości każdego obiektu od obiektu wzorcowego, w oparciu o nią wyznacza jest zmienna syntetyczna. Odległość od obiektu wzorca jest wyznaczana przy zastosowaniu dowolnej metryki, np. metryki euklidesowej. Dla metody tej, miara syntetyczna jest wyznaczana za pomocą przekształcenia unitaryzacyjnego postaci:

$$s_i = \left(\frac{d_{i0} - \min\limits_i\{d_{i0}\}}{\max\limits_i\{d_{i0}\} - \min\limits_i\{d_{i0}\}}\right)^p, \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad p \in \mathbb{N}$$

Miara syntetyczna uzyskana tą metodą jest unormowana i przyjmuje wartości z przedziału: $[0, 1]$. Czym niższa wartość miary, tym bliżej obiektu wzorcowego leży dany obiekt.

3.1.3 Metody iteracyjne

W metodach tych przyjmowania jest funkcja kryterium dobroci porządkowania, dla której w kolejnych iteracjach poszukiwane jest takie uporządkowanie liniowe obiektów, które optymalizuje wartość funkcji kryterium, aż do osiągnięcia przez nią wartości optymalnej tj. maksymalnej lub minimalnej.

Metoda Szczotki

Metoda ta polega na znalezieniu takiego uporządkowania liniowego obiektów, dla którego funkcja kryterium dobroci uporządkowania osiąga maksimum:

$$F^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k \sum_{i=1}^{n-k} d_{ik} \rightarrow \max$$

gdzie:

d_{ik} - odległość euklidesowa miedzy i-tym i k-tym obiektem.

Sposób postępowania:

W pierwszym kroku przeprowadzane jest dowolne liniowe uporządkowanie obiektów. W kolejnym kroku, dla tego uporządkowania obliczana jest wartość funkcji kryterium dobroci uporządkowania, według powyższego wzoru. W kolejnych etapach wyznaczana jest wartość tej funkcji, dla każdej transpozycji pary obiektów. Powyższe kroki wykonywane są do momentu, gdy dowolna transpozycja pary obiektów, nie spowoduje zwiększenia wartości funkcji kryterium dobroci uporządkowania.

3.2 Metody porządkowania nieliniowego

Metody porządkowania nieliniowego w odróżnieniu od metod porządkowania liniowego, polegają nie na uporządkowaniu obiekt w sposób hierarchiczny, a na określeniu dla każdego z obiektu, stopnia podobieństwa z innymi obiektami, na podstawie opisujących je zmiennych.

Aby zastosować metody porządkowania nieliniowego, zmienne opisujące obiekty, powinny być mierzone na skali przedziałowej lub ilorazowej. Gdy zmienne te mierzone są na skali przedziałowej lub ilorazowej, należy dokonać ich normalizacji.

Metody porządkowania nieliniowego dzielimy na metody dendrytowe, które prowadzą do powstania dendrytu prezentującego położenie obiektów ze względu na ich podobieństwo między sobą, a także na metody aglomeracyjne, które to sprowadzają się do powstania drzewka połączeń, które prezentuje sposób łączenia obiektów do siebie podobnych.

3.2.1 Metody dendrytowe

Metody dendrytowe opierają się na pojęciach teorii grafów. Metody te sprowadza się do budowy dendrytu, w taki sposób, że każdemu obiektowi poddanemu porządkowaniu, zostaje przyporządkowany wierzchołek dendrytu. Poniżej zostały opisane przykłady metod dendrytowych, tj. taksonomia wrocławska oraz metoda Prima.

Taksonomia wrocławska

W metodzie tej obiekty dzielone są grupy obiektów najbardziej do siebie podobnych, tj. takich, dla których odległość między sobą jest jak najmniejsza. W związku z tym w pierwszej kolejności należy wyznaczyć macierz odległości obiektów D np. przy użyciu metryki euklidesa, a następnie w każdym wierszu(kolumnie) macierzy, wyznaczamy jest element najmniejszy:

$$d_{ik} = \min_{k} d_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n, i \neq k.$$

Za pomocą grafu prezentowane są pary obiektów, najbardziej do siebie podobnych. W grafie tym, długość krawędzi łączących wierzchołki(czyli obiekty, poddane porządkowaniu) odpowiadają odległości między obiektami. Jeżeli wśród połączonych par obiektów, pojawią się krawędzie dwukrotne, należy je wyeliminować, ze względu na to że kolejność połączeń w dendrycie nie jest istotna. Obiekty w dendrycie nie mogą się powtarzać, jeżeli natomiast niektóre obiekty w łączeniu wystąpią wielokrotnie, to obiekty te zostaną połączone w zespoły zwane skupieniami. Metoda ta kończy swoje działanie, w momencie uzyskania grafu spójnego.

Metoda Prima

W odróżnieniu od taksonomii wrocławskiej, metoda Prima nie wymaga posługiwania się cały czas wyjściową macierzą odległości. W trakcie tworzenia dendrytu, zbiór porządkowanych obiektów jest przyporządkowywany do jednego z dwóch podzbiorów, np. niech C i E oznaczają te podzbiory. Niech zbiór C będzie pierwszym z nich a zbiór E drugim. Pierwszy z nich zawiera obiekty należące na danym etapie do dendrytu, zaś drugi zawiera obiekty nie należące na tym etapie do dendrytu.

W początkowym etapie, zbiór C jest zbiorem pustym, z kolei do zbioru E należą wszystkie obiekty, należące do zbioru poddanego porządkowaniu. Następnie w zbiorze C zostaje umieszczony dowolny element ze zbioru E, dowolność nie ma wpływu na ostateczną postać dendrytu. W tym momencie zostaje utworzony wektor c w którym przechowywane są odległości tego elementu od pozostałych elementów zbioru E. W kolejnym etapie do zbioru C włączany jest ten obiekt, którego odległość od elementu zbioru C jest jak najmniejsza. Po dołączeniu tego elementu wektor c przechowuje odległości tych dwóch obiektów zbioru C od pozostałych elementów zbioru E, a procedura dołączania kolejnych obiektów polega na tym samym. Cały proces trwa do momentu, aż zbiór E nie będzie zawierał żadnego elementu.

W powstałym dendrycie wierzchołkami są obiekty przechodzące zbioru C, z kolei krawędzie łączące te wierzchołki są współrzędne wektora c, które powstały przez wybór najmniejszej odległości miedzy dołączanymi obiektami, w kolejnych etapach dołączania obiektów do dendrytu.

3.2.2 Metody aglomeracyjne

Istotą metod aglomeracyjnych jest utworzenie drzewka połączeń - dendrogramu. W ten sposób zobrazowana jest kolejność łączenia obiektów, na podstawie zmniejszającego się podobieństwa między obiektami włączonymi do dendrogramu, a tymi wcześniej do niego należącymi. Położenie obiektów oraz grup obiektów, które powstały w kolejnych etapach tworzenia drzewka, jest przeprowadzone na podstawie kolejności połączeń tych obiektów i grup. Każda gałąź w drzewku oznacza grupy obiektów podobnych do siebie. Wyjściowym założeniem metod aglomeracyjnych jest to, że każdy obiekt stanowi odrębną, jednoelementową grupę $(\mathrm{G_z}, z = 1, 2, \ldots, n)$.

W kolejnych krokach następuje łączenie ze sobą grup obiektów najbardziej podobnych do siebie ze względu na ich zmienne. Podobieństwo weryfikowane jest na podstawie odległości między grupami.

Na początku odległości między jednoelementowymi grupami $\mathrm{G_1}, \ldots, \mathrm{G_n}$ wyznacza wyjściowa macierz odległości D. W macierzy D poszukiwane są najmniejsze odległości pomiędzy grupami obiektów:

$$d_{zz'} = \min_{ik} d_{ik}, \quad i = 1, 2, \ldots, n_z, \quad k = 1, 2, \ldots, n_{z'}, \quad z, z' = 1, 2, \ldots, n, z \neq z'.$$

gdzie:

$d_{zz'}$ - odległość z-tej od z'-tej grupy.

W kolejnym kroku, obiekty o najmniejszej odległości między sobą łączone są w jedną grupę, dzięki czemu liczba grup zmniejsza się o jeden. Zostaje rozpoczęty proces tworzenia drzewka połączeń. Ponownie badane są odległości między nowo stworzoną grupą a pozostałymi grupami. Proces trwa do momentu stworzenia pełnego drzewka połączeń, tj. jednej grupy.

Ogólna postać wzoru służącego do wyznaczenia odległości nowo powstałej grupy $\mathrm{G_{z''}}$, (powstałej dzięki połączeniu grup $\mathrm{G_z}$ i $\mathrm{G_{z'}}$), od grup które zostały G_z''' to:

$$d_{z'''z''} = \alpha_z d_{z'''z} + \alpha_{z'} d_{z'''z'} + \beta d_{zz'} + \gamma |d_{z'''z} - d_{z'''z'}|$$

gdzie: $\alpha_z, \alpha_{z'}, \beta, \gamma$ - współczynniki przekształceń, różne dla poszczególnych metod aglomeracyjnych

Możemy wyróżnić sześć różnych metod aglomeracyjnych, różniących się sposobem wyznaczenia odległości między grupami obiektów. Poniżej zostaną podane współczynniki przekształceń dla każdej z nich, a w dalszej części pracy wybrane z nich zostaną szczegółowej omówione.

- metoda najbliższego sąsiedztwa (metoda pojedynczego wiązania)

  parametry przekształceń $\alpha_z = 0,5 \quad \alpha_{z'} = 0,5 \quad \beta = 0 \quad \gamma = 0,5.$

- metoda najdalszego sąsiedztwa (metoda pełnego wiązania)

  parametry przekształceń $\alpha_z = 0,5 \quad \alpha_{z'} = 0,5 \quad \beta = 0 \quad \gamma = -0,5.$

- metoda średniej międzygrupowej (metoda średnich połączeń)

  parametry przekształceń $\alpha_z = \frac{n_z}{n_z+n_{z'}} \quad \alpha_{z'} = \frac{n_{z'}}{n_z+n_{z'}} \quad \beta = 0 \quad \gamma = 0).$

- metoda mediany

  parametry przekształceń $\alpha_z = 0,5 \quad \alpha_{z'} = 0,5 \quad \beta = -025 \quad \gamma = 0.$

- metoda środka ciężkości

  parametry przekształceń $\alpha_z = \frac{n_z}{n_z+n_{z'}}; \alpha_{z'} = \frac{n_{z'}}{n_z+n_{z'}} \quad \beta = \frac{-n_z n_{z'}}{(n_z+n_{z'})^2} \quad \gamma = 0.$

- metoda Warda

  parametry przekształceń $\alpha_z = \frac{n_z+n_{z'''}}{n_z+n_{z'}+n_{z'''}} \quad \alpha_{z'} = \frac{n_{z'}+n_{z'''}}{n_z+n_{z'}+n_{z'''}} \quad \beta = \frac{-n_{z'''}}{n_z+n_{z'}+n_{z'''}} \quad \gamma = 0.$

Metoda najbliższego sąsiedztwa

W metodzie tej odległość między dwoma grupami obiektów jest równa odległości pomiędzy najbliższymi obiektami(sąsiadami), które należą do dwóch różnych grup. Odległość ta opisana jest wzorem:

$$d_{zz'} = \min_{ik} d_{ik}(\mathbf{O_i} \in \mathbf{G_z}, \mathbf{O_k} \in \mathbf{G_{z'}}),$$

$$i = 1,2,\ldots,n_z, \quad k = 1,2,\ldots,n_{z'}, \quad z,z' = 1,2,\ldots,n, \quad z \neq z',$$

gdzie:

$$\mathbf{O_i} = [n_{ij}], \quad j = 1,2,\ldots,m.$$

Metoda najdalszego sąsiedztwa

W metodzie tej odległość między dwoma grupami obiektów jest równa odległości pomiędzy najdalszymi obiektami(sąsiadami), które należą do dwóch różnych grup. Odległość ta opisana jest wzorem:

$$d_{zz'} = \max_{ik} d_{ik}(\mathbf{O_i} \in \mathbf{G_z}, \mathbf{O_k} \in \mathbf{G_{z'}}),$$

$$i = 1,2,\ldots,n_z, \quad k = 1,2,\ldots,n_{z'}, \quad z,z' = 1,2,\ldots,n, \quad z \neq z',$$

Metoda średniej międzygrupowej

W metodzie tej odległość między dwoma grupami obiektów równa jest średniej arytmetycznej odległości między wszystkimi parami obiektów należących do dwóch różnych grup. Odległość ta opisana jest wzorem:

$$d_{zz'} = \frac{1}{n_z n_{z'}} \sum_{k=1}^{n_{z'}} \sum_{i=1}^{n_z} d_{ik}(\mathbf{O_i} \in \mathbf{G_z}, \mathbf{O_k} \in \mathbf{G_{z'}})$$

$$z,z' = 1,2,\ldots,n, \quad z \neq z'.$$

Metoda mediany

W metodzie tej odległość między grupami obiektów jest równa medianie odległości pomiędzy wszystkimi parami obiektów należących do dwóch grup. Odległość ta opisana jest wzorem:

$$d_{zz'} = \mathbf{med}_{i,k}\{d_{ik}(\mathbf{O_i} \in \mathbf{G_z}, \mathbf{O_k} \in \mathbf{G_{z'}})\},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n_z, \quad k = 1, 2, \ldots, n_{z'}, \quad z, z^{'} = 1, 2, \ldots, n, \quad z \neq z^{'}.$$

Metoda środków ciężkości

W metodzie tej odległość między dwoma grupami jest równa odległości między środkami ciężkości tych grup. Odległość ta opisana jest wzorem:

$$d_{zz'} = d_{i^c k^c}(\mathbf{O_i^c} = \overline{\mathbf{O}}_\mathbf{z} \in \mathbf{G_z}, \mathbf{O_{k^c}} = \overline{\mathbf{O}}_\mathbf{z} \in \mathbf{G_{z'}}), \tag{3.1}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n_z, \quad k = 1, 2, \ldots, n_{z'}, \quad z, z^{'} = 1, 2, \ldots, n, \quad z \neq z^{'}.$$

gdzie:

$d_{i^c k^c}$ - odległość środka ciężkości z-tej grupy od środka ciężkości $z\prime$-tej grupy,
$\overline{\mathbf{O}}_{\mathbf{i^c}}, \overline{\mathbf{O}}_{\mathbf{k^c}}$ - środki ciężkości odpowiednio z-tej i $z^{'}$-tej grupy obiektów. przy czym:

$$\mathbf{O}_{i^c} = \overline{\mathbf{O}}_z = \frac{1}{n_z}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n_z}} \mathbf{O}_i,$$

$$\mathbf{O}_{k^c} = \overline{\mathbf{O}}_{z'} = \frac{1}{n_{z'}}\sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n_{z'}}} \mathbf{O}_k.$$

Rozdział 4

Zastosowanie wybranych metod porządkowania danych wielowymiarowych

4.1 Opis zbioru

Zbiór danych jest opracowaniem własnym, na podstawie ofert sprzedaży samochodów osobowych, zamieszczonych na portalu *www.otomoto.pl* w okresie listopad - grudzień 2017 roku. Zebrane dane dotyczą szczegółowych informacji odnośnie samochodu, tj. jego marki, modelu, wersji, typu, koloru lakieru, pojemności silnika, roku produkcji, przebiegu, liczby drzwi, rodzaju skrzyni biegu, rodzaju paliwa, rodzaju napędu, wyposażenia w: ABS, komputer pokładowy, ESP, klimatyzację. Oprócz danych ściśle związanych z budową i wyposażeniem samochodu, pojawiły się również atrybuty, tj. cechy umieszczone w kolumnach, związane z informacją o tym czy auto jest uszkodzone oraz bezwypadkowe,czy jest sprowadzane, jaki jest kraj aktualnej rejestracji, czy było serwisowane, czy sprzedający jest pierwszym właścicielem. Dodatkowo oprócz powyższych, został dodany atrybut najbardziej interesujący kupującego - czyli cena oraz województwo tj. miejsce skąd wystawiana została oferta.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	MARKA	MODEL	WERSJA	TYP	WOJEWC	CENA.NET	CENA.BRI	MOC[km]	POJEMNC	ROK.PRO	PRZEBIEC	KOLOR	L.DZRZWI	RODZAJ.F	SKRZYNIA	NAPED	KRAJ.AKT
2	Hyundai	i20	II	kompakt	malopolskie		46500	90	1396	2016	18300	bialy	3	diesel	manualna	na przedni	Polska
3	Hyundai	i20	I	kompakt	mazowieckie		22900	86	1248	2013	319000	niebieski	5	benzyna+L	manualna	na przedni	Polska
4	Subaru	Legacy	V	kombi	mazowieckie		36900	150	1998	2010	149000	srebrny-m	5	benzyna	manualna	4x4(stały)	Polska
5	Ford	Mondeo	Mk4	sedan	dolnoslaskie		30000	146	1999	2008	166290	czarny	5	benzyna+L	manualna	na przedni	Polska
6	Opel	Astra	G	kompakt	slaskie		3990	136	1998	1998	230000	czarny	5	benzyna	manualna	na przedni	Polska
7	Mazda	Premacy		minivan	dolnoslaskie		7750	100	1998	2004	210563	srebry	5	diesel	manualna	na przedni	Niemcy
8	Seat	Leon	II	kompakt	dolnoslaskie		19900	200	1984	2006	198000	czarny	5	benzyna	manualna	na przedni	Szwajcaria
9	Volkswage	Passat	B6	sedan	lodzkie		13999	105	1900	2005	202749	czarny	5	diesel	manualna	na przedni	Polska
10	Opel	Zafira	A	minivan	lodzkie		7900	125	1800	2001	196000	srebrny	5	benzyna	manualna	4x4(stały)	Niemcy
11	Mercedes-	Klasa A	W168	kompakt	lodzkie		6500	102	1598	2002	200000	niebieski	5	diesel	manualna	na przedni	Polska
12	Skoda	Octavia	II	kombi	malopolskie		19500	140	1986	2008	220000	czarny	5	diesel	manualna	na przedni	Polska
13	Seat	Toledo	II	kompakt	wielkopolskie		11300	105	1598	2003	174600	szary	4	benzyna	manualna	na przedni	Niemcy
14	Peugeot	508		kombi	slaskie		42500	115	1560	2014	156800	bialy	5	diesel	manualna	na przedni	Polska
15	Skoda	Octavia	III	kombi	wielkopolskie		50900	105	1598	2015	91800	bialy	5	diesel	manualna	na przedni	Polska
16	Peugeot	Partner	I	kombi	lodzkie		7990	90	2000	2004	275763	zloty	5	diesel	manualna	na przedni	Polska
17	Porsche	Cayman		coupe	wielkopolsl	95900	117957	300	3400	2006	83000	srebrny	3	benzyna	automatyc.	na tylne ko	Polska
18	Toyota	Auris	II	kompakt	mazowieckie		46000	132	1598	2014	46000	bialy-metal	5	benzyna	manualna	na przedni	Polska
19	Toyota	Auris	II	kompakt	dolnoslaskie		30300	99	1329	2014	151783	bialy	5	benzyna	manualna	na przedni	Polska
20	Mazda	3	II	kompakt	zachodniopomorskie		25200	105	1598	2009	135800	czarny	5	benzyna	manualna	na przedni	Austria
21	Mazda	3	II	kombi	malopolskie		30600	150	1999	2009	116000	brazowy	5	benzyna	manualna	na przedni	Niemcy
22	Mazda	6	I	kombi	dolnoslaskie		15700	146	2000	2007	190000	czarny	5	diesel	manualna	na przedni	Polska
23	Mazda	6	I	kompakt	lodzkie		17900	147	2000	2006	238482	szary	5	benzyna+L	manualna	na przedni	Polska
24	Mazda	6	I	kombi	kujawsko-pomorskie		11000	121	1998	2005	204000	srebrny	5	diesel	manualna	na przedni	Polska
25	Citroen	C4	II	kompakt	wielkopolskie		36200	92	1560	2014	86561	bialy	5	diesel	manualna	na przedni	Polska
26	Citroen	C4	II	kompakt	malopolskie		36997	90	1397	2014	33000	bialy	5	benzyna	manualna	na przedni	Polska
27	Citroen	C4	II	kompakt	lodzkie		16900	90	1397	2014	35000	szary	5	benzyna	manualna	na przedni	Francja

Rysunek 4.1: Podgląd stworzonego zbioru

Użyte zmienne

W stworzonym zbiorze danych znajduje się 29 atrybutów, opisujących 61 różnych rekordów, tj. obiektów reprezentowanych przez wiersze, którym przypisano pewne wartości atrybutów. Wśród zebranych danych można wyróżnić zarówno zmienne jakościowe, jak i ilościowe.

Zmiennymi jakościowymi są atrybuty:

- marka,
- model,
- typ,
- wojewodztwo,
- kolor,
- rodzaj.paliwa,
- skrzynia.biegow,
- naped,
- kraj.aktualnej.rejestracji,
- kraj.pochodzenia,
- stan,
- ABS,
- uszkodzony,
- pierwszy.wlasciciel,
- kto.sprzedaje,
- serwisowany,
- komputer.pokladowy,
- ESP,
- klimatyzacja,
- bezwypadkowy,
- status.pojazdu.sprowadzanego

Wśród zmiennych jakościowych można wyróżnić zmienne porządkowe, nominalne oraz binarne. W stworzonym zbiorze danych zmiennymi binarnymi są atrybuty:

- pierwszy.wlasciciel,
- ABS,
- serwisowany,
- komputer.pokladowy,
- ESP,
- bezwypadkowy,
- uszkodzony.

Pozostałe atrybuty są zmiennymi nominalnymi.

Zmiennymi ilościowymi są atrybuty:

- cena.netto[pln],
- cena.brutto[pln],
- moc,
- pojemnosc.skokowa[cm^3],
- rok.produkcji,
- przebieg[km],
- l.drzwi.

Wśród zmiennych ilościowych można wyróżnić zmienne skokowe oraz dyskretne. W stworzonym zbiorze danych, zmiennymi skokowymi są:

- moc,
- pojemnosc.skokowa[cm^3],
- rok.produkcji,
- przebieg,
- l.drzwi.

Z kolei atrybuty: cena.netto[pln], cena.brutto[pln] są zmiennymi ciągłymi.

Bibliografia

[1] Grzegorz Banaszak and Wojciech Gajda. *Elementy algebry liniowej (część 1)*. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2002.

[2] Aleksander Błaszczyk and Sławomir Turek. *Teoria mnogości*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 2007.

[3] Patric Billingsley. *Prawdopodobieństwo i miara*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1987.

[4] Jacek Jakubowski and Rafał Sztencel. *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*. SCRIPT, Warszawa, 2004.

[5] W. Krysicki, J. Bartos, W. Dyczka, K. Królikowska, and M. Wasilewski. *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach: część I. rachunek pradopodobieństwa*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1999.

[6] Kazimierz Kuratowski. *Wstęp do teorii mnogości i topologii*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 2004.

[7] Andrzej Młodak. *Analiza taksonomiczna w statystyce regionalnej*. Centrum Doradztwa i Informacji Difin, Warszawa, 2006.

[8] Tomasz Panek and Jan Karol Zwierzchowski. *Statystyczne metody wielowymiarowej analizy porównawczej: teoria i zastosowania*. Oficyna Wydawnicza, Szkoła Główna Handlowa, Warszawa, 2013.

[9] Ryszard Rudnicki. *Wykłady z analizy matematycznej*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 2006.

[10] Robin J. Wilson. *Wprowadzenie do teorii grafów*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 2008.