Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"

Отчет по заданию №6

«Сборка многомодульных программ. Вычисление корней уравнений и определенных интегралов.»

Вариант 1 / 3 / 2

Выполнила:
студентка 211 группы
Рахимова К. М.

Преподаватель:
Дудина И. А.

Москва
2022

Содержание

1. Постановка задачи

Требуется реализовать численный метод, позволяющий вычислять площадь плоской фигуры, ограниченной тремя кривыми $f_1 = 2^x + 1$, $f_2 = x^5$, $f_3 = \frac{1-x}{3}$ с заданной абсолютной точностью $\varepsilon = 0.001$ с помощью квадратурной формулы трапеций. Абсциссы вершин фигуры необходимо искать методом касательных (Ньютона). Отрезок для применения метода нахождения корней должен быть вычислен аналитически.

2. Математическое обоснование

В данном разделе проведён анализ заданного набора кривых $f_1 = 2^x + 1$, $f_2 = x^5$, $f_3 = \frac{1-x}{3}$, обоснован выбор отрезков для поиска точек пересечения кривых, а также значений ε_1 и ε_2. Приведены графики заданных функций.

Для поиска точек пересечения с помощью метода касательных на корректно определённом отрезке [a, b] для каждой пары функций f(x) и g(x) необходимо рассмотреть функцию F(x) = f(x) − g(x), имеющую ровно 1 корень на [a, b] (достаточно соблюдение следующих условий: F(x) имеет разные знаки на концах отрезка, а её первая и вторая производные не меняют знаки на отрезке [a, b]). Более подробную информацию о методе касательных можно узнать из книги [1].

Выбор отрезков для поиска точек пересечения кривых:

- функции f_1 и f_2 пересекаются в точке x = 1.2793 (выч. аналитически), выбираем отрезок [1.0, 2.0]
  $F_{12}(x) = f_1(x) - f_2(x) = 2^x + 1 - x^5$
  $F_{12}(1.0) = 2.0 > 0$, $F_{12}(2.0) = -27.0 < 0$
  $F_1{}'_2(x) = 2^x ln(2) - 5x^4 < 0$ на отрезке [1.0, 2.0]
  $F_1{}''_2(x) = 2^x ln(2)^2 - 20x^3 < 0$ на отрезке [1.0, 2.0]
  Выбор отрезков корректен.

- функции f_1 и f_3 пересекаются в точке x = -2.5222 (выч. аналитически), выбираем отрезок [-3.0, -1.0]
  $F_{13}(x) = f_1(x) - f_3(x) = 2^x + 1 - \frac{1-x}{3}$
  $F_{13}(-3.0) = -0.2083 < 0$, $F_{13}(-1.0) = 0.83 > 0$
  $F_1{}'_3(x) = 2^x ln(2) + \frac{1}{3} > 0$ на отрезке [-3.0, -1.0]
  $F_1{}''_3(x) = 2^x ln(2)^2 > 0$ на отрезке [-3.0, -1.0]
  Выбор отрезков корректен.

- функции f_2 и f_3 пересекаются в точке x = 0.6505 (выч. аналитически), выбираем отрезок [0.65, 1.0]
  $F_{23}(x) = f_2(x) - f_3(x) = x^5 - \frac{1-x}{3}$
  $F_{23}(0.65) = -0.0006 < 0$, $F_{23}(1.0) = 1.0 > 0$
  $F_2{}'_3(x) = 5x^4 + \frac{1}{3} > 0$ на отрезке [0.65, 1.0]
  $F_2{}''_3(x) = 20x^3 > 0$ на отрезке [0.65, 1.0]
  Выбор отрезков корректен.

Величины ε_1 и ε_2, являющиеся соответственно погрешностью вычисления абсциссы точек пересечения кривых и погрешностью вычисления интегралов, использующихся при вычислении площади плоской фигуры, необходимо подобрать вручную так, чтобы гарантировалось вычисление площади фигуры с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Выбор ε_1 и ε_2:

Возьмём точки $x_i - \varepsilon_1$ и $x_i + \varepsilon_1$, где x_i - точки пересечения кривых f_1 и f_2, f_1 и f_3, f_2 и f_3. Получается, приближённое значение корней лежит в промежутке $[x_i - \varepsilon_1,\ x_i + \varepsilon_1]$. Тогда максимальное значение каждой функции при выбранных промежутках $y_i = max(f_i(x_i - \varepsilon_1), f_i(x_i + \varepsilon_1))$, для всех функций $Y = max(y_1, y_2, y_3)$. Пусть S - точное значение площади, а S_e - приближённое. Площадь фигуры вычисляется по значениям 3-ёх интегралов. Значит, $|S_e - S| >= 2 * M * \varepsilon_1 + 3 * \varepsilon_2$, где Y $=$ 3.5 приблизительно. Итого: $\varepsilon >= 2*Y*\varepsilon_1+3*\varepsilon_2$. Возьмём $\varepsilon_1 = 0.0001$ и $\varepsilon_2 = 0.0001$, значения удовлетворяют условию 0.001 $>$ 7*0.0001 $+$ 3*0.0001.

Заданные функции изображены ниже:

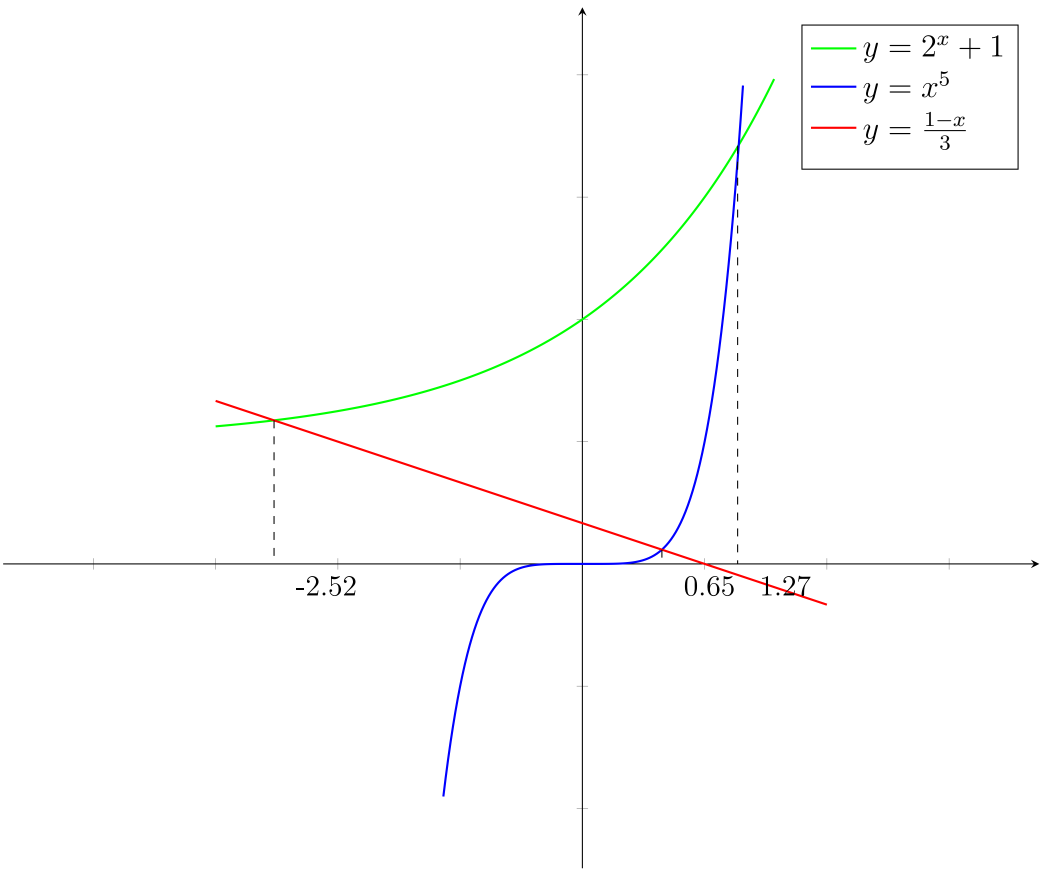

Рис. 1: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

3. Результаты экспериментов

Результаты проведенных вычислений приведены ниже.

Кривые	x	y
f_1 и f_2	1.27935	3.42729
f_2 и f_3	0.65051	0.11648
f_1 и f_3	-2.52222	1.17407

Таблица 1: Координаты точек пересечения

Результаты проиллюстрированы графиком.

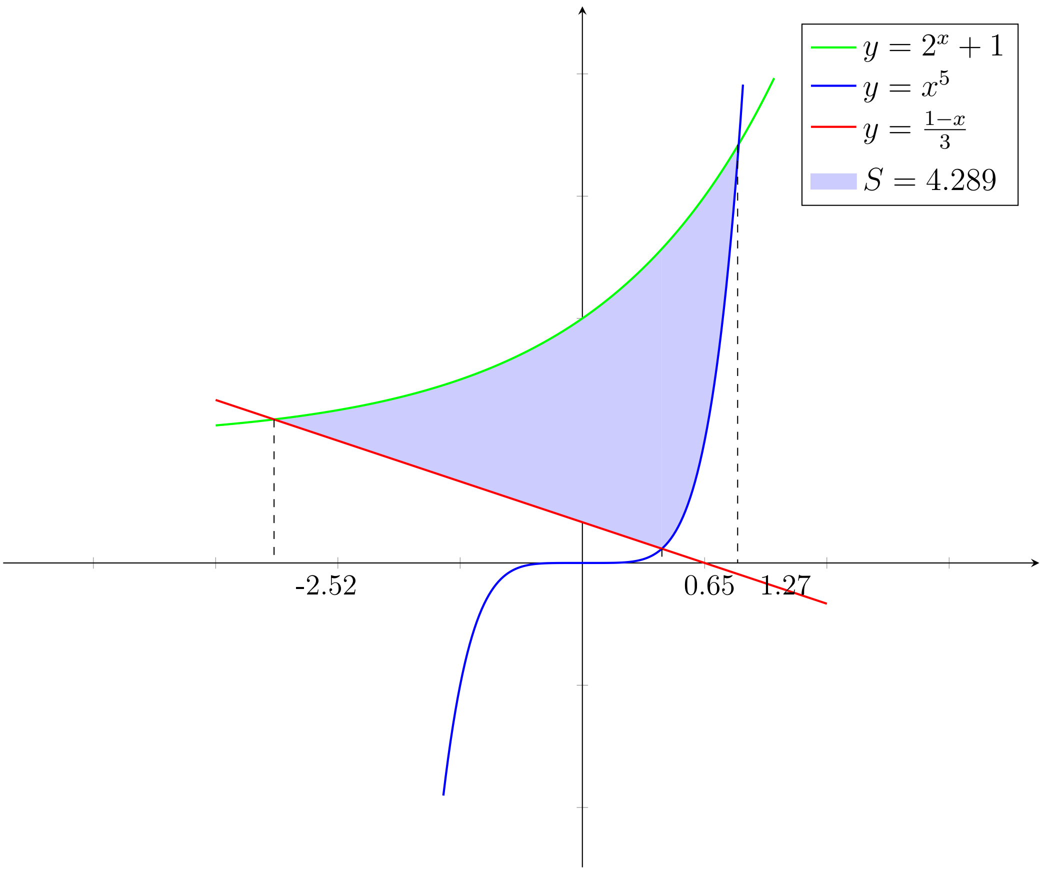

Рис. 2: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

4. Структура программы и спецификация функций

В данном разделе приведён полный список модулей и функций, описана их функциональность.

Модуль `hw6.asm`

Состоит из 3-ёх функций, возвращающих значения 3-ёх кривых, определяемых вариантом задания: $f_1 = 2^x + 1$, $f_2 = x^5$, $f_3 = \frac{1-x}{3}$ и 3-ёх функций, возвращающих значения производных 3-ёх кривых, описанных выше: $f_1' = ln(2)2^x$, $f_2' = 5x^4$, $f_3' = -\frac{1}{3}$.

- `double f1(double x)` возвращает значение $f_1 = 2^x + 1$
- `double f2(double x)` возвращает значение $f_2 = x^5$
- `double f3(double x)` возвращает значение $f_3 = \frac{1-x}{3}$
- `double f1_diff(double x)` возвращает значение $f_1' = ln(2)2^x$
- `double f2_diff(double x)` возвращает значение $f_2' = 5x^4$
- `double f3_diff(double x)` возвращает значение $f_3' = -\frac{1}{3}$

Модуль `integral.c`

Состоит из 3-ёх функций: `root`, `integral` и главной `main`. Первые две являются скорее вспомогательными для проведения вычислений и нахождения нужных значений в последней.

- `double root(afunc *f, afunc *g, double a, double b, double eps1, afunc *f_diff, afunc *g_diff)` вычисляет с точностью ε_1 корень x уравнения $f(x) = g(x)$ на отрезке [a,b], используя метод касательных (Ньютона), а также вычисляет количество необходимых для нахождения корня итераций

- `double integral(afunc *f, double a, double b, double eps2))` вычисляет с точностью ε_2 величину определенного интеграла от функции $f(x)$ на отрезке [a,b], используя метод трапеций

- `int main(int argc, char* argv[])` вызывает необходимые функции, а также выполняет требуемые действия в зависимости от значения принимаемых ключей командной строки

Ниже изображено графическое разбиение программы на компоненты и связи между этими компонентами:

$$hw6.asm \longrightarrow integral.c$$

5. Сборка программы (Make-файл)

Далее приведён текст Make-файла.

```
AS=nasm
ASMFLAGS+=-g -f elf32
CFLAGS ?= -O2 -g
CFLAGS += -std=gnu99
CFLAGS += -Wall -Werror -Wformat-security -Wignored-qualifiers
        -Winit-self -Wswitch-default -Wpointer-arith -Wtype-limits
        -Wempty-body -Wstrict-prototypes -Wold-style-declaration
        -Wold-style-definition -Wmissing-parameter-type
        -Wmissing-field-initializers -Wnested-externs -Wstack-usage=4096
        -Wmissing-prototypes -Wfloat-equal -Wabsolute-value
CFLAGS += -fsanitize=undefined -fsanitize-undefined-trap-on-error
CC += -m32 -no-pie -fno-pie

.PHONY: all

all: integral

integral: integral.o hw6.o
        $(CC) $(CFLAGS) $^ -o $@

integral.o: integral.c
        $(CC) $(CFLAGS) $^ -c -o $@

hw6.o: hw6.asm
        $(AS) $(ASMFLAGS) $^ -o $@

clean:
        rm -rf *.o integral

test: integral
        ./integral -test-root 1:2:1.0:2.0:0.0001:1.279353
        ./integral -test-root 1:3:-3.0:-1.0:0.0001:-2.522223
        ./integral -test-root 2:3:0.65049:1.0:0.0001:0.650519
        ./integral -test-integral 1:-2.522223:1.279353:0.0001:7.05229
        ./integral -test-integral 2:0.650519:1.279353:0.0001:0.718157
        ./integral -test-integral 3:-2.522223:0.650519:0.0001:2.04732
```

Зависимости между модулями программы описаны диаграммой.

$$
\begin{tikzcd}
hw6.asm \arrow[r] & hw6.o \arrow[dr] & \\
integral.c \arrow[r] & integral.o \arrow[r] & integral
\end{tikzcd}
$$

6. Отладка программы, тестирование функций

Тестирование и отладка численных методов производились на функциях $f_4 = x^3 + 5x^2 - 6$, $f_5 = \frac{7}{x-5} + 1$ и $f_6 = ln(x)$ с использованием их производных $f_4' = 3x^2 + 10x$, $f_5' = -\frac{7}{(x-5)^2}$ и $f_6' = \frac{1}{x}$.

Тестирование функции `root`:

- функции f_4 и f_5 пересекаются в точке x = -1.2527 (выч. аналитически)
  $F_{45}(x) = f_4(x) - f_5(x) = x^3 + 5x^2 - 6 - \frac{7}{x-5} - 1$
  $F_{45}(-1.5) = 1.9519 > 0$, $F_{45}(-1) = -1.8333 < 0$
  $F_{45}'(x) = 3x^2 + 10x + \frac{7}{(x-5)^2} < 0$ на отрезке [-1.5, -1]
  $F_{45}''(x) = 6x + 10 - \frac{14}{(x-5)^3} > 0$ на отрезке [-1.5, -1]
  x_4 = `root(f4, f5, -1.5, -1, eps1, f4_diff, f5_diff)` = -1.252701
  Функция работает корректно.

- функции f_5 и f_6 пересекаются в точке x = 0.5615 (выч. аналитически)
  $F_{56}(x) = f_5(x) - f_6(x) = \frac{7}{x-5} + 1 - ln(x)$
  $F_{56}(0.3) = 0.7146 > 0$, $F_{56}(1) = -0.75 < 0$
  $F_{56}'(x) = -\frac{7}{(x-5)^2} - \frac{1}{x} < 0$ на отрезке [0.3, 1]
  $F_{56}''(x) = 6x + 10 - \frac{14}{(x-5)^3} > 0$ на отрезке [0.3, 1]
  x_5 = `root(f5, f6, 0.3, 1, eps1, f5_diff, f6_diff)` = 0.561516
  Функция работает корректно.

- функции f_4 и f_6 пересекаются в точке x = 1.0 (выч. аналитически)
  $F_{46}(x) = f_4(x) - f_6(x) = x^3 + 5x^2 - 6 - ln(x)$
  $F_{46}(0.5) = -3.9318 < 0$, $F_{46}(1.5) = 8.2195 > 0$
  $F_{46}'(x) = \frac{3x^3+10x^2-1}{x} > 0$ на отрезке [0.5, 1.5]
  $F_{46}''(x) = 6x + 10 + \frac{1}{x^2} > 0$ на отрезке [0.5, 1.5]
  x_6 = `root(f4, f6, 0.5, 1.5, eps1, f4_diff, f6_diff)` = 1.000000
  Функция работает корректно.

Тестирование функции `integral`:

- $\int_{x_4}^{x_6}(f_4(x))dx = \int_{-1.2527}^{1}(x^3 + 5x^2 - 6)dx$ = -8.93883 (выч. аналитически)
  s_4 = `integral(f4, x4, x6, eps2)` = -8.938819
  Функция работает корректно.

- $\int_{x_4}^{x_5}(f_5(x))dx = \int_{-1.2527}^{0.5615}(\frac{7}{x-5} + 1)dx$ = -0.58467 (выч. аналитически)
  s_5 = `integral(f5, x4, x5, eps2)` = -0.584679
  Функция работает корректно.

- $\int_{x_5}^{x_6}(f_6(x))dx = \int_{0.5615}^{1}(ln(x))dx$ = -0.11443 (выч. аналитически)
  s_6 = `integral(f6, x5, x6, eps2)` = -0.114411
  Функция работает корректно.

7. Анализ допущенных ошибок

Список литературы

[1] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Т. 1 — Москва: Наука, 1985.