Kamil Banaś

Lista 2 z AiSD

Zadanie 8

1. Treść

Ułóż algorytm, który dla danych liczb naturalnych a i b, sprawdza, czy zachłanna strategia dla problemu wydawania reszty jest poprawna, gdy zbiór nominałów jest równy $X = \{1,\ a,\ b\}$

2. Teoria

Dla każdej liczby naturalnej x przyjmijmy następujące oznaczenia:
$Z(x)$ = liczba monet wydanych przy algorytmie zachłannym,
$O(x)$ = liczba monet wydanych przy algorytmie optymalnym.

Widzimy, że $\forall x\ O(x) \leqslant Z(x)$.
Ponadto $\forall x \geqslant b\ Z(x) = Z(x - b) + 1$.
Powiemy, że para liczb $(a,\ b)$ jest *dobra*, jeżeli $\forall x\ O(x) = Z(x)$ przy $X = \{1,\ a,\ b\}$.
Zatem naszym zadaniem jest sprawdzenie, czy dana para liczb $(a,\ b)$ jest *dobra*.

Zauważmy, że b możemy zapisać jako $aq + r$, gdzie q to iloraz dzielenia b przez a, a r to reszta z dzielenia, $0 \leqslant r < a$. Żeby dalej coś wywnioskować z tego faktu zapoznajmy się z następującymi lematami:

2.1. Lemat 1

Dla $b \leqslant x$ mamy: $O(x) \leqslant O(x - b) + 1$.
Dowód: Powyższa nierówność zachodzi, gdyż dla każdej optymalnej reprezentacji x - b zawsze możemy dodać monetę o nominale b otrzymując reprezentację x. Reprezentacja ta jest optymalna wtedy i tylko wtedy, jeżeli zawiera b i wtedy zachodzi równość; w przeciwnym wypadku nie będzie to optymalna reprezentacja, czyli $O(x)$ będzie od niej ostro mniejsza.
Analogiczny dowód zachodzi dla a oraz 1.

2.2. Lemat 2

Jeżeli para $(a,\ b)$ nie jest *dobra*, to najmniejszy kontrprzykład x pokazujący to znajduje się w przedziale $b + 1 < x < b + a$.
Dowód: Dla $x < b$ operujemy tylko na monetach 1 oraz a, więc zawsze zachłanna reprezentacja będzie optymalna. Dla b i $b + 1$ mamy zawsze $O(b) = 1,\ O(b + 1) = 2$.

Dla górnej granicy natomiast pokażemy nierówność stosując indukcję:

Niech $b+a \leqslant x$ oraz $\forall n < x \; O(n) = Z(n)$ Jeżeli b zawiera się optymalnej reprezentaji x, to mamy:

$$Z(x) \overset{defZ}{=} Z(x-b)+1 \overset{ind}{=} O(x-b)+1 \overset{lem1}{=} O(x)$$

W przeciwnym przypadku (czyli w optymalnej reprezentacji x mamy tylko a i 1):

$$Z(x) \overset{defZ}{=} Z(x-b)+1 \overset{ind}{=} O(x-b)+1 \overset{lem1}{\leqslant} O(x-b-a)+2 \overset{defO}{\leqslant} Z(x-b-a)+2 =$$

$$\overset{defZ}{=} Z(x-a)+1 \overset{ind}{=} O(x-a)+1 \overset{lem1}{=} O(x) \overset{defO}{\leqslant} Z(x)$$

W obu przypadkach mamy

$$Z(x) = O(x)$$

Z indukcji wynika, że najmniejszy kontrprzykład nie może być większy od $b+a-1$. Ponieważ dla $X = \{1, k, 2k-2\}, k > 2$ najmniejszy kontrprzykład to $2k = b+2$, zaś dla $X = \{1, k, k+1\}, k > 2$ najmniejszy kontprzykład to $2k = b+a-1$ to widzimy, że nierówności są ostre. Dla innych liczb z przedziału $< b+2, b+a-1 >$ możemy skontruować najmniejsze kontrprzykłady analogicznie, czyli biorąc $X = \{1, k, 2k-e\}$ dla $1 < e < a$, gdyż wtedy najmniejszy kontrprzykład to $2k = b+e$.

2.3. Rozwiązanie

Wobec powyższych lematów spójrzmy na relację między a oraz q i r:

(I) jeżeli $0 < q+r < a$ to rozpatrzmy liczbę $x = b+a-1 = aq+r+a-1 = a(q+1)+r-1$. Widzimy, że:

$x = b*1+1*(a-1) \equiv Z(x) = 1+a-1 = a$, natomiast

$x = a*(q+1)+1*(r-1) \equiv O(x) = q+1+r-1 = q+r$.

Skoro $O(x) = q+r < a = Z(x)$, to para $(a,\ b)$ nie jest *dobra*.

(II) jeżeli $a \leqslant q+r$, to nie możemy w tak prosty sposób dowieść jakiejkolwiek zależności. Zatem załóżmy nie wprost, że x to najmniejszy kontrprzykład dla pary (a, b). Z lematu 2 wiemy, że $b+1 < x < b+a$. Niech zatem $x = b+e = ca, 1 < e < a$, gdyż dla $x = b+e = ca+f$ moglibyśmy odjąć 1 stronami przez co z lematu 1 otrzymalibyśmy nowy najmniejszy kontrprzykład. Widzimy zatem, że $Z(x) = 1+e, O(x) = c$, czyli

$$(1) c < 1+e$$

Wobec tego mamy:

$$(2) b = ca-e = (c-1)a+(a-e)$$

Patrząc na (2) widzimy, że $q = c-1$ oraz $r = a-e$, co wynika z jednoznaczności q i r. Ponadto mamy z (1), że $q = c-1 < e$ oraz $0 < a-e = r$, z czego wynika $q+r = (c-1)+(a-e) < e+a-e = a$, co jest sprzeczne z założeniem, że $a \leqslant q+r$. Zatem dla $a \leqslant q+r$ para (a, b) jest *dobra*.

3. Algorytm

Ostatecznie algorytm do rozwiązania zadania jest następujący:

1) wyliczamy $q = b \div a, r = b \mod a$

2) sprawdzamy, czy $q + r < a$; jeżeli tak, to para (a, b) nie jest *dobra*, w przeciwnym wypadku jest. Złożnośc algorytmu: O(1).

$\square$