

Lista 7 z AiSD

Zadanie 3

Kamil Banaś 308262

16 czerwca 2020

1 Treść

Oblicz jaka jest oczekiwana liczba pustych list po umieszczeniu n kluczy w tablicy haszującej o n elementach.

2 Rozwiązanie

Ze względu na to, że mamy tyle samo kluczy jak i elementów w tablicy, to możemy zadanie sprowadzić do n kulek, które wkładamy z takim samym prawdopodobieństwem do n urn. Wtedy mamy wyliczyć oczekiwaną liczbę pustych urn.

Niech X_i to liczba, która informuje o i -tej urnie w następujący sposób:

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli urna jest pusta} \\ 1 & \text{wpp} \end{cases}$$

W takiej sytuacji mamy nasze szukane zdarzenie losowe $X = \sum_1^n X_i$. Widzimy także, że zmienne X_1, X_2, \dots są niezależne, stąd mamy:

$$E(X) = E\left(\sum_1^n X_i\right) = n \cdot E(X_1).$$

Prawdopodobieństwo, że k kulek nie trafi do danej urny jest równe :

$$P(X_1 = 0) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^k = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k.$$

Stąd ostatecznie $E(X) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$, co dąży do $n \cdot e^{-1}$.

□