

mgr inż. Kamil Banaś

Instytut Maszyn Przepływowych im. Roberta Szewalskiego
Polskiej Akademii Nauk

**MODELOWANIE WYMIANY CIEPŁA
W MASZYNACH PRZEPŁYWOWYCH
Z WYKORZYSTANIEM NARZĘDZI
SPRZEŻONEJ WYMIANY CIEPŁA
I ODDZIAŁYWANIA PRZEPŁYW-STRUKTURA**

Rozprawa doktorska przedłożona Radzie Naukowej
Instytutu Maszyn Przepływowych im. Roberta Szewalskiego
Polskiej Akademii Nauk

Promotor rozprawy:
Prof. dr hab. inż. Janusz Badur

Gdańsk, grudzień 2017

Składam serdeczne podziękowania
Panu Profesorowi Januszowi Badurowi za wiele cennych
wskazówek, rad oraz za wszelką pomoc okazaną mi pod-
czas pisania tej pracy.

Chciałem również podziękować
firmie Pratt & Whitney Rzeszów S.A. za udostępnienie
geometrii turbin silnika PZL-10W oraz danych do prze-
prowadzenia analiz numerycznych.

Spis treści

1 Wstęp	10
1.1 Motywacje	10
1.2 Wprowadzenie do problemu - przegląd literatury	11
1.2.1 Wpływ modelowania turbulencji na wytężenie materiału	11
1.2.2 Asymetria zakresu sprężystego - wytężenie materiału	12
1.3 Zakres i cel pracy	14
2 Zjawiska przepływowe zachodzące w wieńcu wirnikowym	16
2.1 Przejście laminarno-turbulentne	19
2.1.1 Naturalne przejście laminarno-turbulentne	19
2.1.2 Przejście laminarno-turbulentne typu bypass	19
2.1.3 Przejście laminarno-turbulentne indukowane laminarnym oderwaniem . .	20
2.1.4 Przejście laminarno-turbulentne indukowane śladem aerodynamicznym .	21
3 Thermal-FSI	24
4 Obliczeniowa mechanika płynów (CFD) - zagadnienia przepływowo cieplne	27
4.1 Równania zachowania	27
4.1.1 Równanie zachowania masy	28
4.1.2 Równanie zachowania pędu	29
4.1.3 Równanie zachowania energii	30
4.1.4 Równania Naviera-Stoksa	31
4.2 Modelowanie turbulencji	33
4.2.1 Modele turbulencji RANS	36
4.2.2 Turbulentna warstwa przyścienna	49
4.3 Metoda objętości skończonych	73
5 Obliczeniowa mechanika ciała stałego (CSD)	77
5.1 Termo-sprężysto-plastyczność	77
5.1.1 Termo-sprężystość	80
5.1.2 Plastyczność	81
5.2 Metoda elementów skończonych	92
5.2.1 MES - zagadnienie liniowo sprężyste	92
5.2.2 MES - Zagadnienia nieliniowe	94
5.3 Implementacja kryterium plastyczności do programów MES	99
5.3.1 Całkowanie numeryczne	100
5.3.2 Rozwiązywanie przyrostowego układu równań sprężysto-plastycznych iteracyjną metodą Newtona	101

5.3.3	Zlinearyzowany styczny moduł sprężysto-plastyczny	103
5.3.4	Procedura USERMAT	105
6	Wpływ modelu turbulencji, na rozkład temperatury oraz na wytężenie materiału	107
6.1	Wpływ modelu turbulencji na przejście laminarno-turbulentne, rozkład temperatury oraz wytężenie materiału łopatki kierującej turbiny C3X	108
6.1.1	Analiza wymiany ciepła	109
6.1.2	Analiza wytężenia materiału	119
6.2	Wpływ modelu turbulencji na rozkład temperatury oraz wytężenie łopatki aparatu kierującego turbiny napędowej silnika PZL-10W	121
6.2.1	Wyniki	123
7	Wpływ asymetrii zakresu sprężystego na wytężenie materiału	128
7.1	Eksperymentalna weryfikacja hipotezy Burzyńskiego	129
7.2	Wpływ asymetrii zakresu sprężystego na wytężenie materiału łopatki kierującej turbiny napędowej silnika PZL-10W - zakres sprężysty	132
7.2.1	Wyniki - porównanie naprężeń zredukowanych	132
7.3	Wpływ asymetrii zakresu sprężystego na wytężenie materiału łopatki kierującej turbiny sprężarki - zakres sprężysto-plastyczny	134
7.3.1	Sprzężona analiza wymiany ciepła	134
7.3.2	Analiza wytężenia materiału	135
7.4	Wyniki	136
8	Podsumowanie	139
Appendices		160
A	Sprężystość - wiadomości podstawowe	161
A.0.1	Niezmienniki tensora naprężeń	161
A.0.2	Energia odkształcenia liniowo sprężystego	162
B	CFD - podstawowe oznaczenia	164
C	Metoda Objętości skończonych	165
C.1	Metody interpolacji zmiennych na ściankach objętości kontrolnej	165
C.1.1	Schemat "pod wiatr"	165
C.1.2	Schemat centralnego ilorazu różnicowego	166
C.2	Metody interpolacji gradientu	167
C.2.1	Metody interpolacji gradientu w środku objętości kontrolnej	167
C.2.2	Metody interpolacji gradientu na brzegu objętości kontrolnej	167
C.3	Metody podrelaksacji	168
D	Metoda Elementów skończonych	169
D.1	MES - podstawowe oznaczenia	169
D.2	Element izoparametryczny	171

E Implementacja hipotezy wytężenia Burzyńskiego	173
E.1 Użyteczne przekształcenia	173
E.2 Niejawnna metoda Eulera	173
E.2.1 Równania Newtona - lokalne	176
E.3 Wprowadzanie danych materiałowych	179
E.4 Procedura USERMAT	182
F Analiza thermal-FSI	204
F.1 Dane materiału ASTM 310	204

Streszczenie

Wzrost temperatury przed turbiną pozytywnie wpływa na osiągi jak i sprawność silnika turbinowego, z drugiej strony negatywnie oddziałuje na wytrzymałość oraz żywotność jego komponentów. Z tego względu niezwykle istotne są odpowiednie metody obliczeniowe pozwalające dokładnie przewidzieć poziom temperatury oraz jej wpływ na zachowanie się komponentów turbinowych, a co za tym idzie, projektować bardziej efektywne konstrukcje. Użyta w pracy metoda obliczeniowa sprzężonej wymiany ciepła i oddziaływania przepływ-struktura (thermal-FSI), idealnie nadaje się, jako narzędzie obliczeniowe w tychże zagadnieniach. Wymaga ona jednak doboru odpowiednich modeli fizycznych, co jest niezwykle trudne, ze względu na to, iż przepływowi spalin przez wieńce wirnikowe towarzyszy szereg skompilowanych zjawisk aerodynamicznych, które wpływają na pole temperatury, a których odwzorowanie wymaga doboru odpowiedniego modelu turbulencji. Co więcej, materiały żarowytrzymałe takie jak Inconel 718, które są podstawowym materiałem konstrukcyjnym turbin lotniczych charakteryzują się asymetrią zakresu sprężystego, co powoduje, że klasyczne hipotezy wytężenia niezbyt dokładnie odwzorowują ich zachowanie.

Pierwszym celem pracy były badania dotyczące wpływu modelowania turbulencji na rozkład temperatury oraz na wytężenie materiału. Pokazano zdolność modelowania, przez popularne modele turbulencji RANS, przejścia laminarno-turbulentnego oraz wpływ odwzorowania tego zjawiska na wytężenie materiału. W badaniach bazowano na eksperymentalnej, konwekcyjnie chłodzonej łopatce C3X. Przeanalizowano kilka modeli bazujących na hipotezie lepkości turbulentnej: SST, $\gamma - Re_\theta$ SST-Transition, $v^2 - f$, $k - \epsilon$ Realizable, $k - kl - \omega$ Transition oraz domknięcie RSM z liniową korekcją ciśnienie-deformacja prędkości. Z pośród analizowanych modeli jedynie SST-Transition, $v^2 - f$ i RSM dostatecznie dokładnie odwzorowały proces przejścia laminarno-turbulentnego. Jednakże rozkłady temperatury wyznaczone przez te modele znaczaco się różniły, a ponieważ wielkość wirów energetycznych nie była mierzona podczas eksperimentu, więc na przykładzie tych modeli zbadano jej wpływ na rozkład temperatury. Dodatkowo na przykładzie modelu SST-Transition pokazano wpływ chropowatości powierzchni, na proces przejścia laminarno-turbulentnego oraz na rozkład temperatury. Otrzymane wyniki pokazały jak istotne są to parametry podczas modelowania wymiany ciepła w łopatkach turbinowych.

Następnie przy użyciu analizy thermal-FSI pokazano wpływ uwzględnienia modelowania przejścia laminarno-turbulentnego na wytężenie materiału, bazując na modelach SST i SST-Transition. Maksymalne naprężenia zredukowane wystąpiły w okolicy otworu chłodzącego. Dla modelu SST wyniosły 480 MPa i okazały się większe o 32 MPa od naprężen otrzymanych przy użyciu modelu SST-Transition, co dało około 7% różnicy. Z bezpośredniego porównania wartości naprężen wynika, że bardzo duże różnice, 96 MPa, wystąpiły na powierzchni ssącej, w miejscu przejścia laminarno-turbulentnego, gdzie otrzymane naprężenia, dla modelu SST, wyniosły około 270 MPa, a dla modelu SST-Transition 174 MPa, a więc różniły się około 35%.

W drugiej części badań dotyczących wpływu modelowania turbulencji na wytężenie materiału badano łopatkę kierującą turbiny napędowej silnika PZL-10W. Łopatka ta jest niechłodzona, jednakże uwzględniono chłodzenie tarczy wirnika oraz obudowy, co spowodowało powstanie wysokich gradientów temperatury generujących wysoki poziom naprężen termicznych. Zbadano dwa modele turbulencji bazujące na koncepcji Boussinesqa: SST i SST-Transition oraz dwa modele z domknięciem drugiego rzędu: $k - \omega$ WJ-BSL-EARSM i RSM z liniową korekcją ciśnienie-deformacja prędkości. Różnice w wartościach temperatury na piórze łopatki pomiędzy modelemi turbulencji SST i SST-Transition były niewielkie, a więc można wnioskować, że przejście laminarno-turbulentne nie ma dużego wpływu na rozkład temperatury w niechłodzonej łopatce. W miejscach reprezentujących chłodzenie obudowy oraz tarczy wirnika rozbieżności w wartościach temperatur, otrzymanych na podstawie rozpatrywanych modeli, okazały się widoczne. Szczególnie duże okazały się w miejscu chłodzenia obudowy. Największe rozbieżności w temperaturze wyniosły

26 K pomiędzy modelami RSM i EARSM. Pomiędzy modelami bazującymi na hipotezie lepkości turbulentnej, a modelem RSM rozbieżności wyniosły około 15 K. Widoczne różnice temperatury w górnej części łopatki spowodowały duże rozbieżności w naprężeniach zredukowanych, których największe wartości wystąpiły w górnej części łopatki. Największą rozbieżność, 92 MPa, stanowiącą 19% błędu względnego, zaobserwowano pomiędzy modelami EARSM i RSM. Duża różnica w naprężeniach, 72 MPa, wystąpiła między modelami RSM i SST-Transition, dając błąd względny o wartości około 15%. Maksymalne naprężenia pomiędzy modelami SST i SST-Transition różniły się o 6%. Przepływ chłodzący obudowę okazał się bardzo złożony, a masywne oderwanie, które tam wystąpiło jest dość trudne do odwzorowania przez modele RANS, więc bez danych eksperymentalnych ciężko jest powiedzieć, który model odwzorował pole temperatury w tym rejonie dokładniej.

Dodatkowo, poza badaniami dotyczącymi modelowania turbulencji, zbadano wpływ wielkości wydatku masowego strumienia chłodzącego tarcze wirnika oraz wpływ zbieżności sprężonej analizy wymiany ciepła na rozkład temperatury oraz wytężenie materiału. Jako kryterium zbieżności przyjęto strumień ciepła przepływający przez powierzchnie brzegowe rozważanej łopatki.

Drugim celem pracy było zbadanie wpływu asymetrii zakresu sprężystego na poziom wytężenia materiału. Porównano dwie hipotezy wytężenia, klasyczną HMH oraz paraboliczną hipotezę Burzyńskiego, która zależy od naprżeń hydrostatycznych oraz w naturalny sposób uwzględnia asymetrię zakresu sprężystego. W zakresie sprężystym porównywano naprężenia zredukowane oszacowane przez dwa modele, natomiast w zakresie sprężysto-plastycznym dokonano porównania odkształceń plastycznych. Warunek Burzyńskiego sprężony ze stowarzyszonym prawem płynięcia oraz modelem umocnienia zależnym od temperatury został zaimplementowany do komercyjnego oprogramowania MES przy pomocy klasycznego niejawnego schematu całkowania Eulera z rztutowaniem wstecznym. Zlinearyzowany styczny moduł sprężysto-plastyczny spójny ze schematem całkowania został przedstawiony w jawnej postaci. Tak przygotowany model został zaimplementowany do oprogramowania Ansys Mechanical przy pomocy fortranowskiej procedury USERMAT.

Hipoteza Burzyńskiego zależna od temperatury oraz od odkształceń plastycznych została zwalidowana poprzez numeryczne odwzorowanie testu, w którym w temperaturze 650 °C drążony cylinder, wykonany z Inconelu 718, rozciągano lub ściskano, a następnie skręcano. Otrzymane wyniki pokazały, że warunek wytężenia Burzyńskiego pozwala na dokładniejsze odwzorowanie odpowiedzi materiału, charakteryzującego się asymetrią zakresu sprężystego, od warunku HMH.

Następnie zbadano wpływ asymetrii zakresu sprężystego na poziom wytężenia materiału turbinowych łopatek kierujących wykonanych z super-stopu na bazie niklu. Pierwsze badania dotyczyły łopatki kierującej turbiny napędowej silnika PZL-10W, która pracuje w zakresie sprężystym. Największa różnica w naprężeniach zredukowanych wystąpiła dla najbardziej obciążonego miejsca, w którym model Burzyńskiego oszacował naprężenia na poziomie 534 MPa, a naprężenia HMH wyniosły 600 MPa, co dało 66 MPa różnicy, czyli 11% błędu względnego między nimi. Następnie badaniom poddano łopatkę kierującą 1-st. turbiny sprężarki silnika PZL-10W, pracującą w zakresie sprężysto-plastycznym. Dla miejsc pracujących sprężysto największa różnica w naprężeniach, 58 MPa, wystąpiła w punkcie przejścia pióra w stopkę od strony krawędzi spływu, gdzie naprężenia Burzyńskiego wyniosły 554 MPa, a HMH 612 MPa, dając 10% błędu względnego. Obszar przejścia pióra w stopkę od strony krawędzi natarcia okazał się być najbardziej obciążonym miejscem, w którym wystąpiła plastyczność. Zredukowane odkształcenia plastyczne oszacowane przy pomocy warunku plastyczności Burzyńskiego okazały się niższe oraz pokrywały mniejszy obszar niż oszacowane przy użyciu modelu HMH. Maksymalne zredukowane odkształcenia plastyczne wyznaczone przez model Burzyńskiego wyniosły 0.009, natomiast przez model HMH 0.0108, co dało 20% błędu względnego.

Abstract

Inlet turbine temperature has an essential role in the performance and efficiency of gas turbines. On the other hand, high temperature has a negative impact on the durability of turbine components. Therefore, it is important to predict temperature fields within gas turbines, as well as their influence on turbine parts, what enables design more efficient constructions. Thermal-fluid-structure-interaction (thermal-FSI) can be used for such analyses. However, thermal-FSI requires proper selection of physical models, which is a difficult task. The aerodynamics of the flow in a turbine stage is rather complex, therefore accurate prediction of temperature fields requires proper selection of turbulence model. Moreover, heat-resistant steels, such as Inconel 718, which is used extensively for aeropropulsion structures, exhibit the strength differential (SD) effect, which classical yield conditions do not take into account.

The first aim of this work was to investigate the influence of turbulence modelling on temperature distribution and material effort. First, the ability of RANS turbulence models to predict the laminar-turbulent transition was demonstrated, and then the influence of capturing this phenomenon on material effort was presented. This investigation was based on an experimental, convectively cooled turbine vane (C3X). Several eddy-viscosity models were compared, including SST, $\gamma - Re_\theta$ SST-Transition, $v^2 - f$, $k - \epsilon$ Realizable, $k - kl - \omega$ Transition, and second-order closure ϵ -based RSM with a linear pressure-strain model. Among these, only SST-Transition, $v^2 - f$ and RSM were able to capture laminar-turbulent transition phenomena. However, the temperature distributions produced by these models differed between each other. Therefore, the influence of turbulence length scale (TLS), which was not measured during the test, on the temperature distribution for these models was shown. Additionally, the effect of surface roughness on the transition process and temperature distribution were examined. The obtained results showed that these parameters are important for the heat transfer process in turbine blades. Next, based on thermal-FSI analysis, the effect of capturing the laminar-turbulent process on material effort was shown. The investigation was based on SST and SST-Transition turbulence models. The highest equivalent stresses appeared near the cooling hole. For the SST model, this value was 480 MPa, whereas for the SST-Transition model this was 448 MPa, which corresponding to a 7% relative error. By direct comparison of the stresses, we found that the highest discrepancy 96 MPa between models appeared on the suction side of the vane, where the laminar-turbulent transition occurred. These stresses were 270 and 174 MPa for the SST and SST-Transition models, respectively, corresponding to an error between models of around 35%.

Next, we considered a power turbine guide vane of a turbine helicopter engine PZL-10W. This is an uncooled vane, but cooling of the rotor disc and casing were included, which caused a high-temperature gradient, ultimately leading to thermal stresses. Two eddy viscosity models SST and SST-Transition and two second-order closure models RSM (linear pressure-strain) and $k - \omega$ WJ-BSL-EARSM were compared. We found that the temperature discrepancies between SST and SST-Transition on airfoil were small. Therefore, we can conclude that, in the case of an uncooled blade, the laminar-turbulent transition has only a minor influence on the temperature distribution. Visible discrepancies in the temperature distribution produced by the considered models were at places that represent the influence of cooling of the rotor disc and casing, especially for the latter. The largest discrepancy 26 K was between the EARSM and RSM models. The differences between the eddy-viscosity models and RSM were smaller, around 15 K. Large temperature differences in the top part of the vane caused large stress discrepancies at that area, which was the most loaded part of the vane. The maximum difference 92 MPa occurred between EARSM and RSM models and it was around 19% error. Huge discrepancy 72 MPa was also between SST-Transition and RSM model, which corresponds to an error between models of around 15%. The stresses between the SST and SST-Transition models differed by 6%. The cooling flow of the

casing was very complex. The massive separation was difficult to capture using RANS models, therefore, without experimental data, it is difficult to identify which model most accurately predicted heat transfer in that place.

Additionally, the influence of the mass flow rate of fluid cooling a rotor disc on temperature distribution and stresses was investigated. Moreover, we showed the importance of monitoring convergence of heat flux during conjugate heat transfer analysis.

The second aim of this work was to investigate the influence of the SD effect on material effort. Two material effort hypotheses were considered: the classical Huber-Mises-Hencky (HMH) criterion and the Burzynski condition, which is pressure sensitive and naturally takes into account the SD effect. The equivalent stresses produced by these conditions in the elastic state were compared, while in the plastic state the effective plastic strains were examined. The classical Euler backward algorithm was applied for numerical integration of the paraboloid Burzynski yield condition coupled with the associated flow rule and temperature-dependent hardening model. The consistency tangent moduli were evaluated in the explicit form. The proposed model was implemented in the finite element code ANSYS Mechanical through the Fortran user subroutine USERMAT.

The Burzynski yield condition, which is dependent on temperature and plastic strains was validated by performing numerical analysis of experimental tests, in which, at 650 °C, a thin-walled tube made of Inconel 718 was loaded by torsion after tension or compression. The obtained results showed that, for materials that exhibit the SD-effect, the application of the Burzynski yield condition enables more accurate prediction of the material responses than the HMH approach.

Next, the influence of the SD effect on the material effort of actual turbine vanes made of nickel-based super-alloy was investigated. First, the power turbine guide vane of a turbine engine PZL-10W, was considered. The largest difference occurred for the maximum level of stresses, which appeared in the top part of the vane. The Burzynski model estimated stress at 534 MPa level, while HMH stress was 600 MPa, so they differed by 11%.

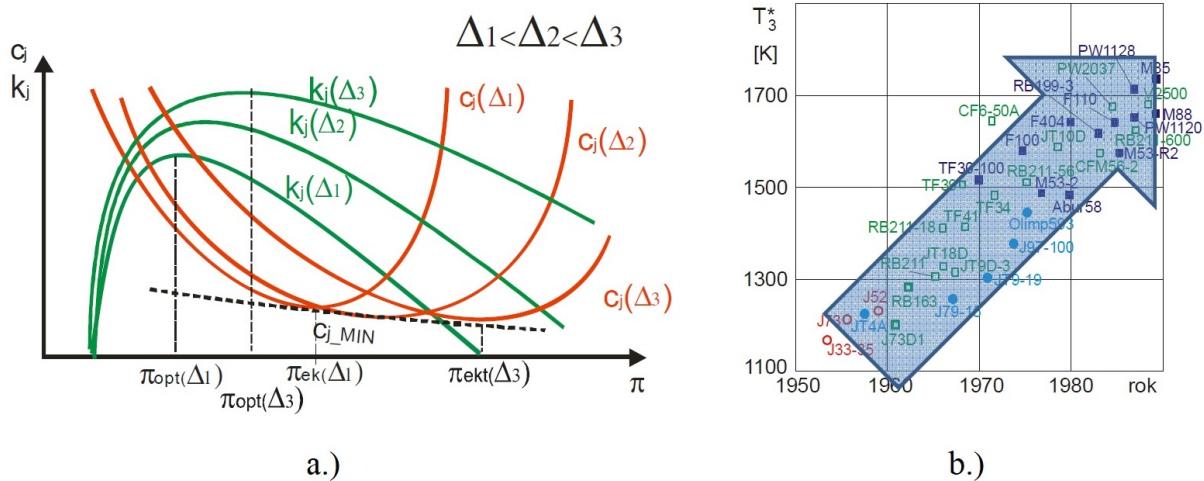
Finally, the first stage compressor turbine guide vane of a turbine engine PZL-10W was examined. The largest difference in equivalent stress in the elastic state was detected at the airfoil and hub connection, from the trailing edge side. The Burzynski stress was higher by 58 MPa than HMH stress, which corresponds to 10% relative error between models. The most loaded place was an area of the airfoil and hub connection, from the leading edge side, where a plastic state occurred. The maximum equivalent plastic strain predicted by the Burzynski yield function was 0.009, whereas this value was 0.0108 in using the HMH model, corresponding to a relative error between models of around 20%.

Rozdział 1

Wstęp

1.1 Motywacje

Analiza termodynamiczna obiegu silnika turbinowego (obieg Braytona) wskazuje, że wraz ze wzrostem stopnia podgrzania silnika wzrasta ciąg maksymalny silnika, który jest osiągany przy większych wartościach spręzu optymalnego (Rys. 1.1 a.)) [1]. Dodatkowo, obniża się wartość minimalnego jednostkowego zużycia paliwa, które jest osiągane przy większych wartościach spręzu ekonomicznego (Rys. 1.1 a.)) [1].



ich nieustanny rozwój [2–9]. W przypadku rozpatrywania wymiany ciepła w odniesieniu do elementów strukturalnych, finalnym celem nie jest poznanie rozkładu temperatury w ciele stałym. Celem jest poznanie wpływu temperatury na poziom wytężenia materiału, a dalej na żywotność konstrukcji. Z tego względu metoda obliczeniowa: sprężonej wymiany ciepła i oddziaływanie przepływ-struktura (thermal fluid-structure-interaction (thermal-FSI)), nad rozwojem której od dłuższego czasu pracuje Zakład Konwersji Energii IMP PAN, idealnie nadaje się jako narzędzie obliczeniowe w tychże zagadnieniach. Metoda thermal-FSI łączy de facto dwie metody, mianowicie obliczeniową mechanikę płynów (Computational Fluid Dynamics (CFD)) wraz z obliczeniową mechaniką ciała stałego (Computational Solid Dynamics (CSD)). Metoda CFD wykorzystywana jest do modelowania sprężonej wymiany ciepła w celu wyznaczenia rozkładu temperatury w ciele stałym, a metoda CSD do wyznaczenia poziomu wytężenia materiału.

Przepływ w kanałach łopatkowych jest silnie turbulentny oraz bardzo skomplikowany, a więc poprawne odwzorowanie rozkładu temperatury w ciele stałym wymaga użycia odpowiedniego modelu turbulencji, od którego poza dokładnym odwzorowaniem przepływu głównego wymaga się dokładnego modelowania warstwy przyściennej zarówno hydrodynamicznej jak i termicznej, w której przepływ charakteryzuje się silną niejednorodnością, anizotropowością [10,11], może pojawiać się silna nierównowaga turbulencji oraz często występuje przejście laminarno-turbulentne. Z tego względu wybór odpowiedniego modelu turbulencji jest kluczowy w uzyskaniu dokładnych wyników, a poza wpływem modeli turbulencji na rozkład temperatury, istotne jest poznanie ich wpływu na poziom wytężenia materiału.

Kolejną kwestią podczas analizy wpływu temperatury na zachowanie struktury jest odpowiednie oszacowanie poziomu wytężenia materiału. W zakresie sprężystym, oceny wytężenia materiału dokonuje się poprzez naprężenia zredukowane w ramach założonej hipotezy wytężenia. Ponadto, w przemyśle lotniczym oraz energetycznym często dopuszcza się lokalne uplastycznienie materiału, co wymaga oszacowania żywotności konstrukcji, a na co ogromny wpływ mają odkształcenia plastyczne, których poziom zależy od warunku plastyczności (hipotezy wytężenia). Powszechnie przyjęty, do modelowania zachowania metali, klasyczny model Hubera-Misesa-Hencky'ego (HMH) nie uwzględnia asymetrii zakresu sprężystego, która często charakteryzuje materiały żarowytrzymałe używane w przemyśle lotniczym i energetycznym. W dodatku, asymetria zakresu sprężystego wzrasta wraz z temperaturą [12]. Z tego względu ciekawe wydaje się poznanie wpływu asymetrii zakresu sprężystego na poziom wytężenia materiału rzeczywistych konstrukcji.

1.2 Wprowadzenie do problemu - przegląd literatury

1.2.1 Wpływ modelowania turbulencji na wytężenie materiału

Wszystkie badania dotyczące modelowania turbulencji w zagadnieniach cieplno-przepływoowych skupiają się na pokazaniu wpływu modelowania turbulencji na rozkład temperatury bądź współczynników przejmowania ciepła. Oczywiście jest to słuszne, ponieważ celem CFD, w przypadku zagadnień wymiany ciepła, jest poprawne odwzorowanie pola temperatury. Jednakże, rzadko się zdarza, żeby pole temperatury było odwzorowane bezbłędnie. Pole temperatury wykorzystywane jest do wyznaczenia naprężzeń cieplnych, a więc, istotnym wydaje się fakt wpływu modelowania turbulencji na wytężenie materiału. Jednakże próżno szukać takich informacji w literaturze. Z tego, względu bazując na metodzie thermal-FSI pokażemy jak modele turbulencji wpływają na wytężenie materiału. Powszechnie wiadomo, że przy pomocy metody dużych wirów (Large eddy simulation (LES)) jesteśmy w stanie dokładniej odwzorować przepływ oraz wymianę

ciepła od modeli typu RANS [13–16], jednakże ze względu na wciąż zbyt duży koszt obliczeniowy tychże modeli, na chwilę obecną to modele typu RANS wykorzystywane są w codziennych obliczeniach inżynierskich, na których skupimy się w niniejszej pracy.

Modelowanie wymiany ciepła przy pomocy modeli RANS wymaga domknięcia turbulentnego strumienia pędu oraz ciepła. Turbulentny strumień ciepła modeluje się przy pomocy prostych algebraicznych modeli z wykorzystaniem analogii Reynoldsa [17]. W większości przypadków daje to zadowalające wyniki, jednakże w przypadku wystąpienia przykładowo oderwania lub przyklejenia przepływu, podobieństwo między polem prędkości a temperatury zanika [18, 19]. Wówczas, powinny zostać użyte bardziej dokładne modele, w rozwoju których duży wkład ma Zakład Konwersji Energii IMP PAN [17, 20–22].

W niniejszej pracy skupiamy się na modelowaniu strumienia pędu, a dokładniej na modelowaniu przejścia laminarno-turbulentnego, które bardzo często występuje na nowoczesnych, silnie obciążonych łopatkach turbinowych [23–26], a które ma ogromny wpływ na proces wymiany ciepła. W pierwszej kolejności nasze badania dotyczyć będą wymiany ciepła, bazując na konwekcyjnie chłodzonej łopatce C3X [27], dla której, w literaturze, dostępne są wyniki z eksperymentalnych testów wymiany ciepła [27]. Przedstawione w tymże raporcie wyniki badań (na łopatkach kierujących C3X oraz MARK II) są bardzo często wykorzystywane do prac związanych z modelami turbulencji oraz wymianą ciepła w odniesieniu do maszyn wirnikowych [28–33]. Mankamentem tych testów jest fakt, że w ich trakcie nie zmierzono kilku istotnych parametrów mających wpływ na proces przejścia laminarno-turbulentnego. Mianowicie, wielkości wirów energetycznych, które przede wszystkim wpływają na zanik intensywności turbulencji [25], która ma ogromne znaczenie w procesie przejścia laminarno-turbulentnego. Mimo, iż w pracy [32, 33] przedstawiono wpływ wielkości wirów energetycznych na przejście laminarno-turbulentne na przykładzie łopatki C3X, jednakże nie zrobiono tego dla kilku modeli równocześnie. Kolejnym parametrem, który nie był mierzony podczas tegoż eksperymentu, była chropowatość powierzchni, która wpływa na miejsce inicjalizacji turbulencji, długość obszaru przejściowego oraz intensyfikację turbulencji w warstwie turbulentnej.

Nastąpienie na przykładzie łopatki C3X pokazany zostanie wpływ uwzględnienia modelowania przejścia laminarno-turbulentnego na wytężenie materiału łopatki, a dalej pokażemy w ogólności wpływ popularnych modeli turbulencji RANS na wytężenie materiału rzeczywistej łopatki kierującej.

1.2.2 Asymetria zakresu sprężystego - wytężenie materiału

Powszechnie przyjętą hipotezą wytężenia do definiowania naprężeń zredukowanych oraz opisu plastycznej odpowiedzi materiałów metalicznych jest klasyczna hipoteza J_2 Hubera-Misesa-Hencky'ego (HMH):

$$F(J_2) = \sqrt{3J_2} - \sigma_Y^T . \quad (1.2.1)$$

Jednakże, eksperymentalne [34–37] i numeryczne badania dowiodły, że warunek plastyczności HMH nie jest wystarczająco dokładny do opisu odpowiedzi materiałów metalicznych cechujących się asymetrią zakresu sprężystego (strength differential (SD) effect) [38–41] (różną granicą plastyczności na ściskanie σ_Y^C i rozciąganie σ_Y^T).

Asymetria zakresu sprężystego jest opisana przez parametr asymetrii zakresu sprężystego:

$$k = \frac{\sigma_Y^C}{\sigma_Y^T} . \quad (1.2.2)$$

Została ona zaobserwowana w wielu stalach, takich jak: 4310, 4330, maraging, HY80 [34, 35], ale również w tytanie, aluminium 2024-T351 [38], magnezie i superstopach na bazie niklu,

np. w stopie Inconel 718 [12]. Asymetria zakresu sprężystego w materiałach izotropowych jest związana z wpływem naprężeń hydrostatycznych na granice plastyczności, z wpływem kąta Lodego na granice plastyczności lub obydwoma tymi zjawiskami [42].

Wpływ ciśnienia hydrostatycznego na plastyczność aluminium została odkryta w latach pięćdziesiątych XX wieku przez Hu [43, 44]. Natomiast w latach sześćdziesiątych, pokazany został przez niego wpływ ciśnienia na granicę plastyczności mosiądzu Nittany No. 2 [45].

W latach siedemdziesiątych i wczesnych osiemdziesiątych Richmond, Spitzig i Sober [34–37] badali wrażliwość plastyczności na ciśnienie hydrostatyczne (do 1,100 MPa) na przykładzie czterech stali: (4310, 4330, maraging i HY80) i aluminium 1100. Badane stale wykazały asymetrie zakresu sprężystego, a ciśnienie hydrostatyczne wpływało na ich granice plastyczności, nie wpływając przy tym na charakterystykę krzywej umocnienia. Aluminium natomiast, nie wykazało asymetrii, a ciśnienie hydrostatyczne wpłynęło na charakter krzywej umocnienia aluminium, co pokazało, że efekt asymetrii zakresu sprężystego jest w ogólności niezależny od wrażliwości na naprężenia hydrostatyczne.

Warunek plastyczności, do opisu zachowania badanych materiałów, zaproponowany przez Richmonda był identyczny do zaproponowanego w 1928 przez Burzyńskiego [46–48] i w latach pięćdziesiątych przez Druckera i Pragera [49]:

$$F(I_1, J_2) = aI_1 + \sqrt{3J_2} - d \quad , \quad (1.2.3)$$

gdzie d jest zmodyfikowaną granicą plastyczności bez udziału naprężeń hydrostatycznych, a a jest współczynnikiem kohezji materiału.

Naprężenia hydrostatyczne w ostrych karbach oraz w pęknięciach mogą osiągać bardzo duże wartości, nawet do 1,000 MPa [42]. Wilson [38] przeprowadził eksperymentalny test, w którym rozciągał do zniszczenia okrągłą próbkę z karbem wykonaną z aluminium 2024-T351 charakteryzującą się asymetrią zakresu sprężystego. Następnie test ten odwzorował numerycznie przy pomocy warunku plastyczności HMH oraz Druckera-Pragera. Wyniki uzyskane na podstawie warunku HMH przewartościowały eksperymentalną krzywą obciążenie-przemieszczenie, natomiast wyniki przy użyciu kryterium Drucker-Prager pokrywały się z eksperimentem.

Badania eksperymentalne i numeryczne Baia and Wierzbickiego [40] pokazały wpływ kąta Lodego (lub trzeciego niezmiennika dewiatora naprężenia) na powierzchnie plastyczności materiału charakteryzującego się asymetrią zakresu sprężystego (aluminium 2024-T351). Testowali oni okrągłą próbkę z karbem oraz płaską próbkę z rowkiem (z okrągłym karbem) o tym samym stopniu trój-osiowości, ale o innej wartości kąta Lodego [40]. Pozwoliło to bezpośrednio pokazać wpływ kąta Lodego na plastyczność testowanego materiału. Bai i Wierzbicki numerycznie pokazali, że warunek plastyczności $I_1 J_2$ jest niewystarczający i powinien on zależeć dodatkowo od trzeciego niezmiennika dewiatora naprężenia $I_1 J_2 J_3$.

Iyer i Lissenden również badali wpływ trzeciego niezmiennika dewiatora naprężenia na plastyczność metali charakteryzujących się asymetrią zakresu sprężystego [39]. Przeprowadzili oni badania, w podwyższonej temperaturze 650 °C, drążonego cylindra obciążonego nieproporcjonalnym obciążeniem (skręcanie poprzedzane rozciąganiem lub ściskaniem) wykonanego z Inconelu 718 (poddanego wcześniejszej obróbce cieplnej starzenia). Zaproponowali oni kilka wariantów warunków plastyczności i z ich wykorzystaniem przeprowadzili analizy numeryczne odwzorowujące przeprowadzone testy. Na podstawie analiz numerycznych stwierdzili, że model $I_1 J_2 J_3$ bardzo dobrze odwzorowuje krzywe eksperymentalne, prawie tak dobrze jak model $J_2 J_3$, który okazał się najdokładniejszy.

Lewandowski przeprowadził testy mające zbadać wpływ zewnętrznego ciśnienia hydrostatycznego (do 450 MPa) na plastyczność Inconelu 718 w temperaturze otoczenia [50]. Z prze-

prowadzonego testu wywnioskował, że wpływ ten jest niewielki. Dla ciśnienia 450 MPa, granica plastyczności na ściskanie spadła o 28 MPa w porównaniu do wartości wyznaczonej w warunkach atmosferycznych. Ciśnienie 450 MPa pokrywa ciśnienie hydrostatyczne powstałe wewnętrz materiał podczas testu Iyera i Lissendena [39], jednakże w rzeczywistych konstrukcjach może znacznie przekroczyć tę wartość (Tabela 7.2).

Dla materiałów o sieci krystalicznej heksagonalnej gęsto upakowanej (hcp), bliźniakowanie oraz rozwój struktury przyczyniają się do asymetrii zakresu sprężystego [51, 52]. Metale te są niewrażliwe na ciśnienie hydrostatyczne, a więc warunek plastyczności opisujący ich zachowanie zależy od trzeciego niezmiennika dewiatora naprężenia $J_2 J_3$ [51, 52].

W niniejszej pracy, rozważamy paraboliczny przypadek warunku plastyczności Burzyńskiego:

$$F(\sigma_m, \sigma_e, \sigma_Y^T, k) = \frac{1}{2k} \left[3(k-1)\sigma_m + \sqrt{9(k-1)^2\sigma_m^2 + 4k\sigma_e^2} \right] - \sigma_Y^T , \quad (1.2.4)$$

który zależy od naprężen hydrostatycznych oraz w naturalny sposób uwzględnia asymetrię zakresu sprężystego. Vadillo i in. [41] przeprowadzili numeryczne symulacje testowanej przez Iyera i Lissendena [39] próbki wykonanej z Inconelu 718 z użyciem warunku Burzyńskiego. Otrzymane wyniki dla współczynnika asymetrii $k = 1.1$ (dla Inconelu 718 w temperaturze otoczenia) okazały się być bardziej dokładne od wyników otrzymanych przy użyciu warunku HMH. Jednakże, współczynnik asymetrii dla Inconelu 718 zależy od temperatury T i odkształceń plastycznych ϵ_{eq}^{pl} , co nie zostało uwzględnione przez nich. Z tego względu w niniejszej pracy został zbadany wpływ tychże parametrów na kryterium Burzyńskiego na przykładzie testu Iyera i Lissendena [39].

1.3 Zakres i cel pracy

Celem ogólnym niniejszej pracy jest rozwój metody obliczeniowej thermal-FSI w odniesieniu do modelowania części gorących silników turbinowych oraz turbin energetycznych.

Pierwszym głównym celem pracy jest zbadanie wpływu modelowania turbulencji (strumienia pędu) na rozkład temperatury oraz na wytężenie materiału części gorących silników turbinowych oraz turbin energetycznych. Rozpatrzone dwie turbinowe łopatki kierujące.

W pierwszej kolejności analizie poddano eksperymentalną, konwekcyjnie chłodzoną turbino-wą łopatkę kierującą C3X [27]. Zbadano zdolność modelowania przejścia laminarno-turbulentnego przez najpopularniejsze modele turbulencji RANS, wyniki porównując z danymi eksperymentalnymi [27]. Dodatkowo zbadano wpływ wielkości wirów energetycznych oraz wysokość chropowatości powierzchni, które nie zostały zmierzone podczas eksperimentu. Wyniki opublikowane w artykule [53] przedstawiono w rozdziale 6.1. W dalszej części, pokazano wpływ uwzględnienia modelowania przejścia laminarno-turbulentnego na poziom wytężenia materiału bazując na analizie thermal-FSI.

Następnie zbadano wpływ modelowania turbulencji na rozkład temperatury oraz poziom wytężenia materiału łopatki kierującej turbiny napędowej silnika PZL-10W (Rys. 1.2). Łopatka ta jest niechłodzona, jednakże uwzględniono chłodzenie tarczy wirnika oraz obudowy. Rozpatrzone kilka popularnych modeli turbulencji RANS. Dodatkowo zbadano wpływ wielkości wydatku masowego strumienia chłodzącego tarcze wirnika oraz wpływ zbieżności sprężonej analizy wymiany ciepła na rozkład temperatury oraz wytężenie materiału. Wyniki opublikowane w artykule [54] przedstawiono w rozdziale 6.2.

Drugim celem pracy jest zbadanie wpływu asymetrii zakresu sprężystego na poziom wytężenia materiału. Podczas badań bazowano na warunku plastyczności Burzyńskiego, który zależy od

naprężeń hydrostatycznych oraz w naturalny sposób uwzględnia asymetrię zakresu sprężystego. Model Burzyńskiego porównany został z klasycznym modelem HMH.

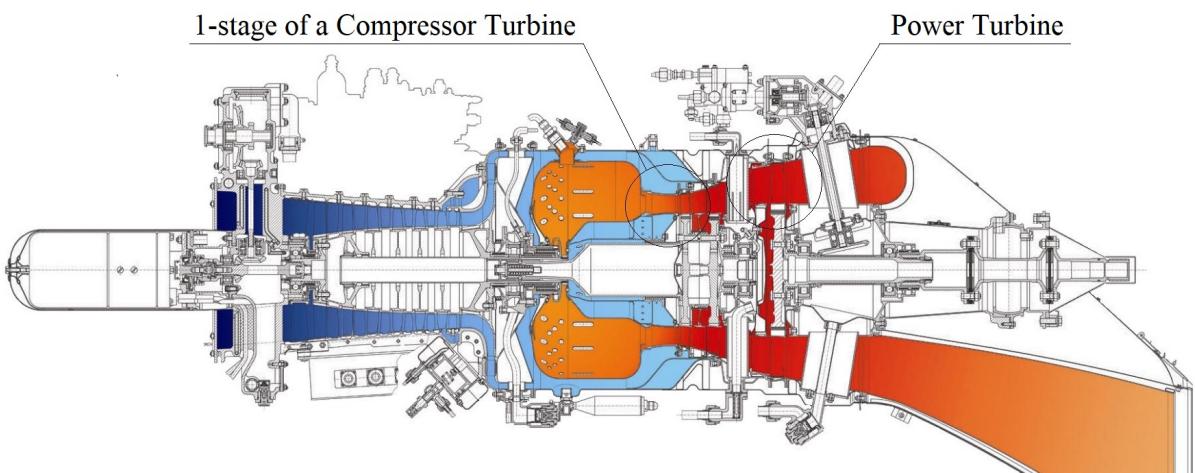
Warunek Burzyńskiego sprężony ze stowarzyszonym prawem płynięcia oraz modelem umocnienia zależnym od temperatury został zaimplementowany do komercyjnego oprogramowania MES przy pomocy klasycznego niejawnego schematu całkowania Eulera z rzutowaniem wstecznym (predyktor-korektor) [41,55,56]. W celu zapewnienia kwadratowej zbieżności, zlinearyzowany styczny moduł sprężysto-plastycznym spójny ze schematem całkowania został przedstawiony w jawnej postaci zaproponowanej przez Zhang [57]. Tak przygotowany model został zaimplementowany do oprogramowania Ansys Mechanical przy pomocy procedury USERMAT napisanej w języku Fortran. Opis implementacji przedstawiono w rozdziale 5.3.

W pierwszej kolejności model Burzyńskiego, zależny od temperatury oraz odkształceń plastycznych, został zwalidowany na przykładzie testu Iyera i Lissendena [39], w którym testowano próbki z Inconelu 718, charakteryzującego się asymetrią zakresu sprężystego, w podwyższonej temperaturze 650 °C. Wyniki opublikowane w artykule [58] przedstawiono w rozdziale 7.1.

Następnie zbadano wpływ asymetrii zakresu sprężystego na poziom wytężenia materiału turbinowych łopatek kierujących wykonanych z super-stopu na bazie niklu, porównując model Burzyńskiego z klasycznym modelem HMH.

Pierwsze badania dotyczyły łopatki kierującej turbiny napędowej silnika śmigłowcowego PZL-10W (Rys. 1.2), która pracuje w zakresie sprężystym. Porównano poziom naprężzeń zredukowanych oszacowany przez dwa modele. Wyniki opublikowane w artykule [59] przedstawiono w rozdziale 7.2.

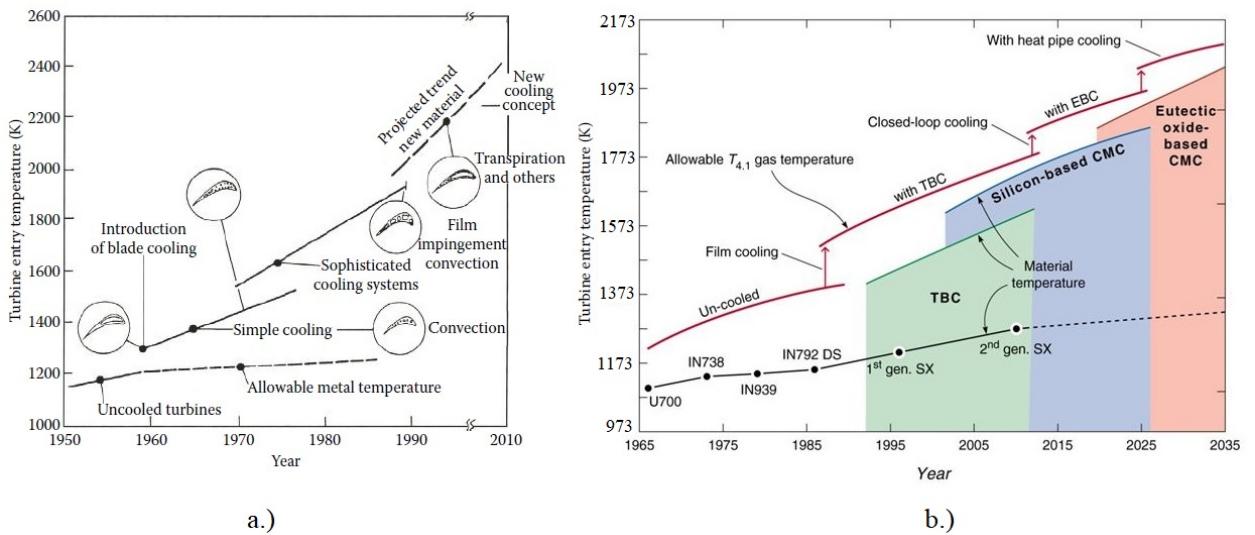
Następnie badaniom poddano łopatkę kierującą 1-stopnia turbiny sprężarki silnika śmigłowcowego PZL-10W (Rys. 1.2), pracującą w zakresie sprężysto-plastycznym. Porównano poziom odkształceń plastycznych oszacowanych przez dwa rozpatrywane modele. Wyniki opublikowane w artykule [58] przedstawiono w rozdziale 7.3.



Rysunek 1.2: Schemat turbinowego silnika śmigłowcowego PZL-10W.

Rozdział 2

Zjawiska przepływowowe zachodzące w wieńcu wirnikowym

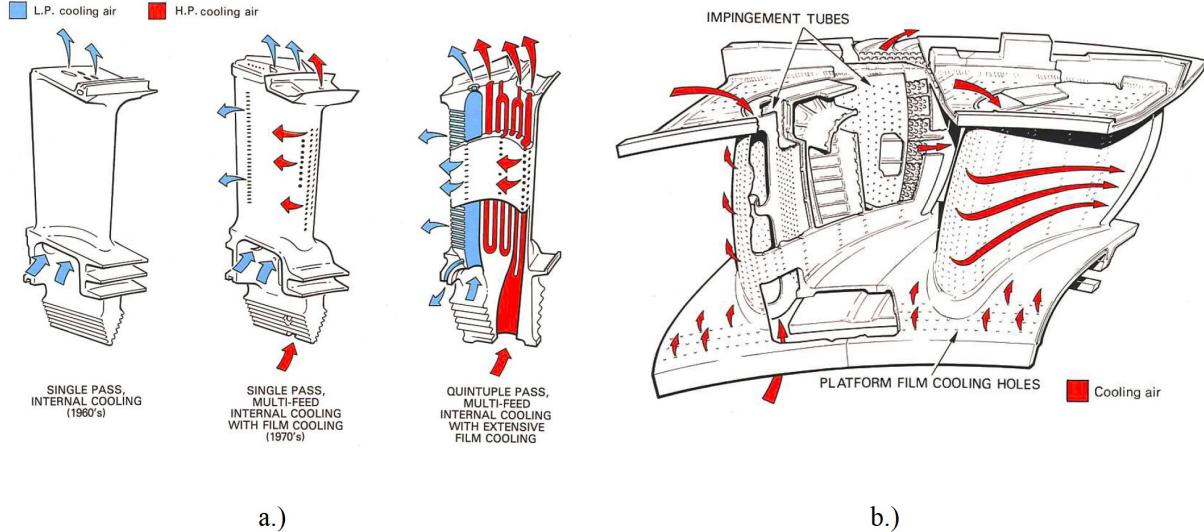


Rysunek 2.1: Rozwój na przestrzeni lat: a.) systemów chłodzenia [60], b.) materiałów oraz powłok cieplnych [61].

Wzrost temperatury przed turbiną silnika pozytywnie wpływa na jego osiągi jak i sprawność, z drugiej strony negatywnie wpływa na wytrzymałość oraz żywotność jego komponentów. Dzięki ciągłeemu rozwojowi materiałów, stosowania systemów chłodzenia oraz barier cieplnych temperatura przed turbiną stale wzrasta (Rys. 2.1).

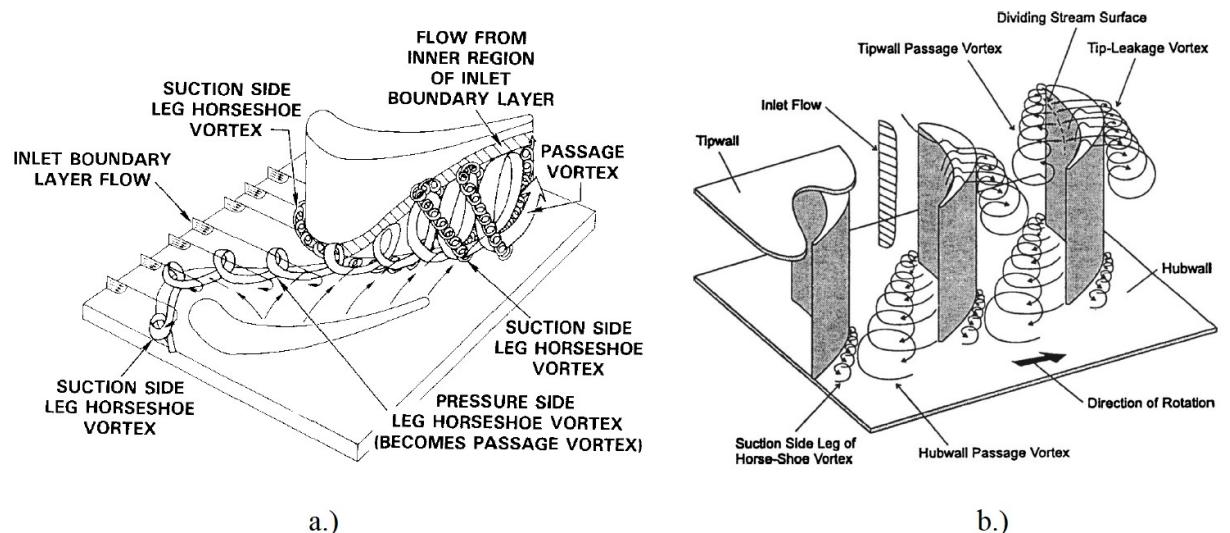
Stosowane systemy chłodzenia wewnętrzne oraz zewnętrzne ulegają nieustannemu rozwojowi. Pierwszymi systemami chłodzenia były proste otwory przelotowe, które umożliwiały wewnętrzne, konwekcyjne chłodzenie łopatek kierujących oraz wirnikowych. Następnie, w celu poprawy efektywności chłodzenia systemy wewnętrzne stały się coraz bardziej skomplikowane, poprzez zastosowanie krętych wewnętrznych kanałów z żebrami na ścianach oraz kołkami turbulizującymi przepływ oraz zwiększaącymi powierzchnię chłodzącą (Rys. 2.1, 2.2). Dodatkowo, zaczęto wykorzystywać chłodzenie uderzeniowe, przeważnie do chłodzenia krawędzi natarcia. Równocześnie wprowadzono systemy zewnętrzne chłodzenia, począwszy od systemów chłodzenia filmowego, przez efuzyjne, błonowe oraz transpiracyjne (Rys. 2.1, 2.2). Finalnie, nowoczesne systemy chłodzenia są bardzo skomplikowane konstrukcyjnie, łącząc systemy wewnętrzne

oraz zewnętrzne, co powoduje, że struktura przepływu wewnątrz systemu chłodzenia jest bardzo skomplikowana (Rys. 2.1). Kanał chłodzący ma kształt serpentyny, co wywołuje siły odśrodkowe działające na strumień przepływającego powietrza. Dodatkowo liczne żebra wywołują oderwania oraz strefy recyrkulacji.



Rysunek 2.2: System chłodzenia łopatki [62]: a.) wirnika, b.) kierującą.

Przepływ przez kanał główny jest również bardzo skomplikowany (Rów. 2.3). Ma charakter trój-wymiarowy w wyniku zmiennego kąta skręcenia łopatek, efektów zakończenia ścianki, luzów wierzchołkowych oraz chłodzenia zewnętrznego [63]. W przepływie między-łopatkowym występuje szereg zjawisk aerodynamicznych, takich jak przepływy wtórne, efekty warstwy przyściennej, czy fale uderzeniowe. Co więcej, ślad aerodynamiczny wprowadza silną niestacjonarność pola przepływu.



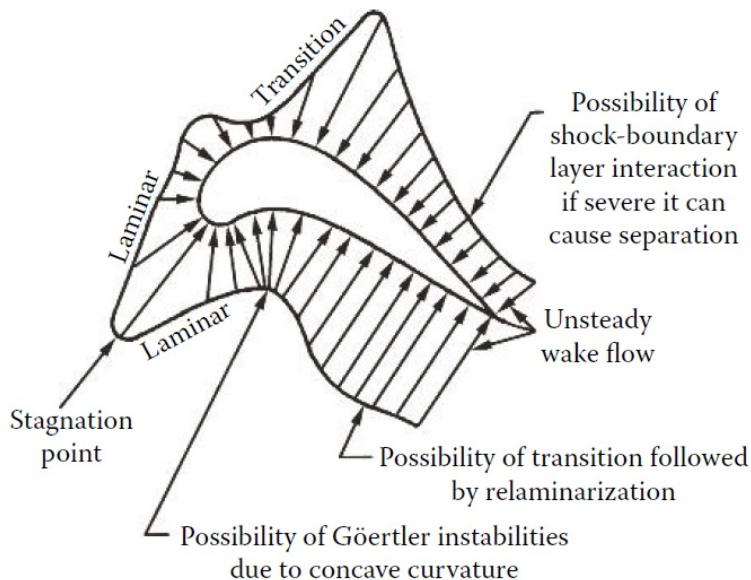
Rysunek 2.3: Struktura przepływu przez kanał między-łopatkowy wieńca: a.) stacjonarnego [64], b.) wirnikowego [65].

W kanale między-łopatkowym wieńca kierowniczego powstają liczne przepływy wtórne, zapoczątkowane głównie na styku łopatki i stopki od strony krawędzi natarcia, gdzie tworzą się

wiry podkowiaste, które łączą się w wir kanałowy, indukując przy tym dodatkowe struktury wirowe (Rys. 2.3 a.)). W warstwie przyściennej, występują silne dodatnie gradienty ciśnienia, często występuje zjawisko oderwania czy przejście laminarno-turbulentnego. Dodatkowo może wystąpić fala uderzeniowa, która oddziaływała z warstwą przyścienną.

W wieńcu wirnikowym przepływy wtórne mają silniejszy charakter niż w przepływie przez wieniec kierowniczy [63]. Dodatkowo przepływy komplikują przecieki wierzchołkowe, indukując dodatkowe przepływy wtórne (Rys. 2.3 b.)). Co więcej, ruch obrotowy wirnika wywołuje silną odśrodkową działającą na przepływ [63].

A więc, struktura przepływu przez kanał główny oraz system chłodzenia wraz z interakcją pomiędzy nimi poprzez chłodzenie zewnętrzne jest bardzo skomplikowana. Co pokazuje jak wymagającym zagadnieniem jest modelowanie wymiany ciepła, które wymaga dokładnego odwzorowania pola prędkości, a więc strumienia pędu. W niniejszej pracy, skupiamy się na zagadnieniach dotyczących warstwy przyściennej, a dokładniej na przejściu laminarno-turbulentnym, które często występuje na łopatkach turbinowych [23–26], a które ma ogromny wpływ na proces wymiany ciepła (Rys. 2.4). Z tego względu, mechanizmy przejścia laminarno-turbulentnego zostały dokładniej omówione w dalszej części rozdziału.

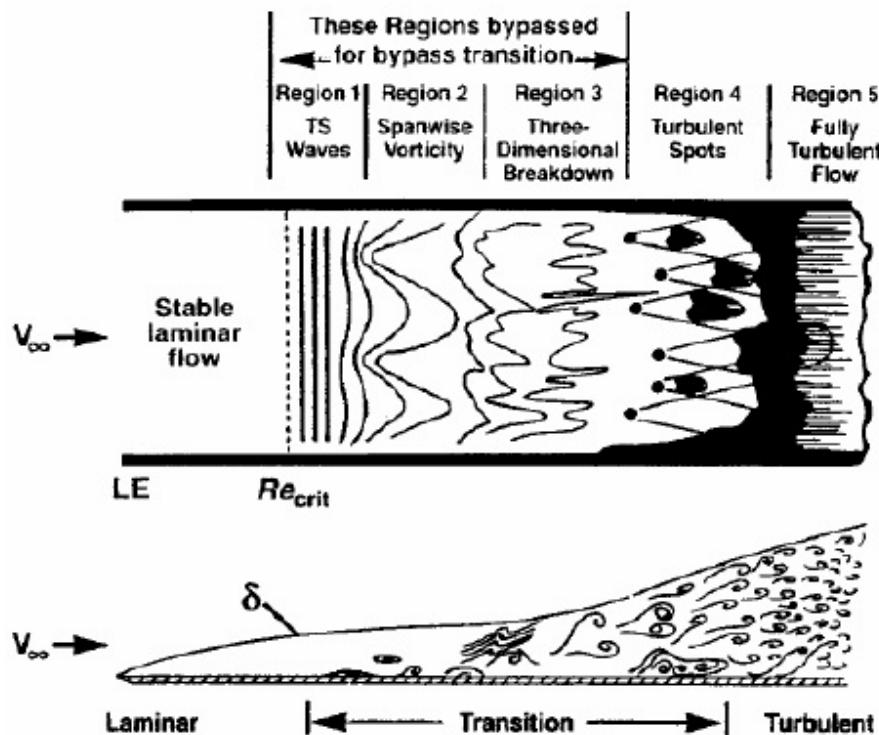


Rysunek 2.4: Strumień ciepła na piórze łopatki turbinowej [60].

2.1 Przejście laminarno-turbulentne

2.1.1 Naturalne przejście laminarno-turbulentne

Naturalne przejście laminarno-turbulentne w warstwie przyściennej występuje dla przepływu o niewielkim stopniu zaburzeń (intensywność poniżej 1%). Dla przepływu przez płaską płytke (Rys. 2.5) w początkowo stabilnej laminarnej warstwie przyściennej pojawiają się dwuwymiarowe niestabilności tzw. fale Tollmiena-Schlichtinga, które zaczynają narastać [25, 66, 67]. Następnie fale te przekształcają się w trój-wymiarowe niestabilności, które dalej tworzą struktury wirowe typu "hairpin". Prowadzi to do pojawienia się pojedynczych miejsc turbulencji, które, rozrastając się, łączą się powodując pełną turbulencję warstwy przyściennej [25, 66, 67].



Rysunek 2.5: Schemat naturalnego przejścia laminarno-turbulentnego: [67].

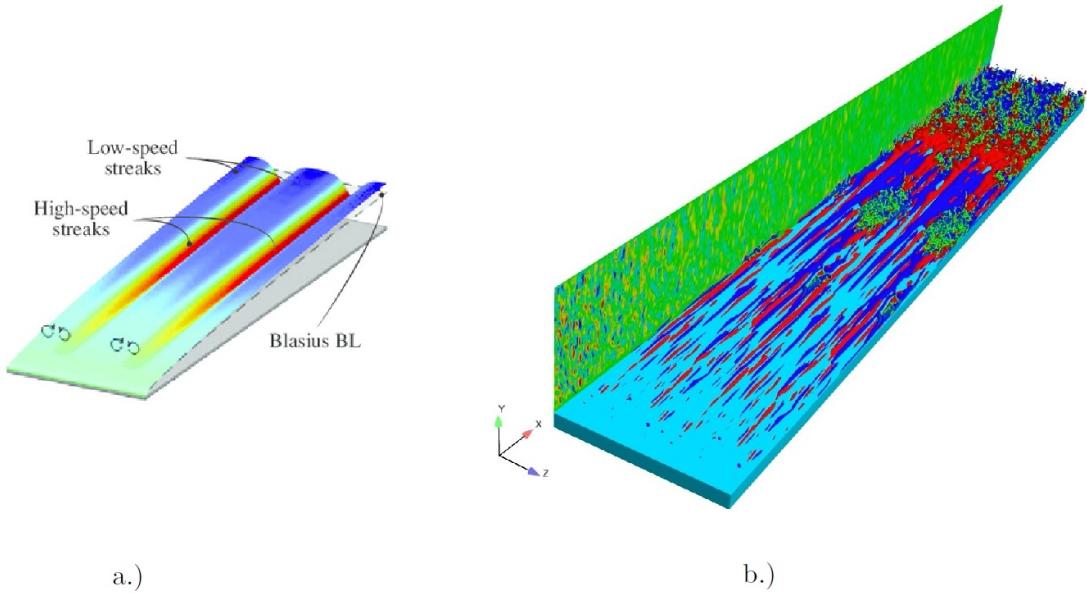
Powyższy opis przejścia laminarno-turbulentnego w sposób naturalny dotyczy przepływu wzdłuż płaskiej płytki. W przypadku, gdy rozpatrujemy przepływ przez skośne skrzydło, tworzą się dodatkowe źródła niestabilności w kierunku poprzecznym. Powoduje to przyśpieszenie procesu przejścia do stanu turbulencji [67].

2.1.2 Przejście laminarno-turbulentne typu bypass

W przypadku, gdy przepływ główny charakteryzuje się dużym stopniem turbulencji, w laminarnej warstwie przyściennej tworzą się wzdużne zaburzenia nazywane smugami lub zaburzeniami Klebanoffa [68–70]. Smugi powstają w wyniku indukowania poprzez nisko-częstotliwościowe zaburzenia przenikające do warstwy przyściennej, podczas gdy laminarne naprężenia ścinające tłumią wysoko-częstotliwościowe [25, 68]. Nisko-częstotliwościowe zaburzenia (duże struktury wirowe) powodują powstanie wzdużnych wirów w warstwie przyściennej [69], które transportują cząsteczki o wysokiej prędkości w dół warstwy przyściennej, natomiast o niskiej prędkości w górę (Rys. 2.6 a.)). Powoduje to powstanie, naprzemiennie w kierunku poprzecznym, nisko-

i wysoko energetycznych wzdłużnych struktur, nazywanych smugami (Rys. 2.6) [68–70]. Smugi, indukowane poprzez nisko-częstotliwościowe zaburzenia, podatne są na wysoko-częstotliwościowe zakłócenia, które tłumione są poprzez lepkość molekularną w warstwie przyściennej [25]. Z tego względu rozwijają się, zwiększając swoją amplitudę oraz długość [25], aż rozpadają się tworząc miejscowe punkty turbulencji. W przypadku warstwy przyściennej bez gradientów ciśnienia, rozpad inicjowany jest poprzez zaburzenie zewnętrzne, tworzące się w górnej części smugi o niskiej prędkości [68]. Natomiast w przypadku występowania dodatniego gradientu ciśnienia poprzez zaburzenia wewnętrzne [68].

Przedstawiony powyżej mechanizm przejścia laminarno-turbulentnego nosi nazwę "bypass", ponieważ omijane są pierwsze etapy charakteryzujące naturalne przejście laminarno-turbulentne, a inicjalizacja turbulencji występuje znacznie wcześniej niż w przypadku naturalnego przejścia. Jako granicę rozgraniczającą mechanizm przejścia laminarno-turbulentnego w sposób naturalny a typu bypass przyjmuje się wartość intensywności turbulencji 1 procent, ponieważ powyżej tej wartości fale Tollmiena-Schlichtinga nie są obserwowane [67]. Indukowanie smug w przepływie laminarnym poza zaburzeniami pochodząymi z przepływu swobodnego może być wywołane poprzez chropowatość powierzchni [69].

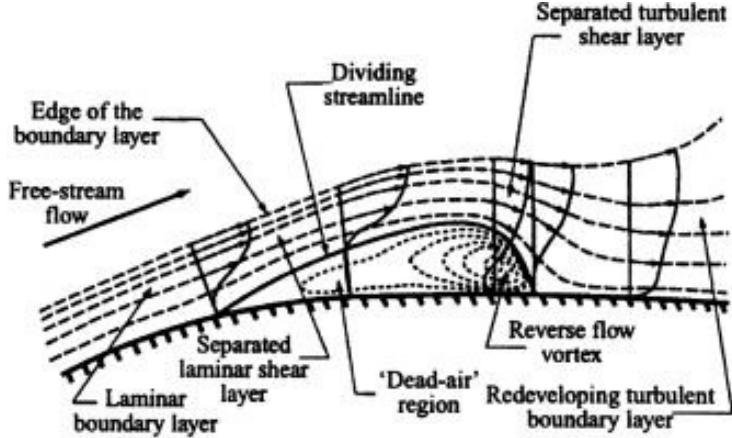


Rysunek 2.6: Obraz przedstawiający: a.) mechanizm tworzenia się strug [71], b.) wyniki analizy DNS przejścia laminarno-turbulentnego typu bypass [72].

2.1.3 Przejście laminarno-turbulentne indukowane laminarnym oderwaniem

Laminarna warstwa przyścienna pod wpływem dużego gradientu ciśnienia odrywa się, tworząc pęcherz laminarny. W zależności od wielkości gradientu ciśnienia, liczby Reynoldsa oraz intensywności turbulencji przepływu głównego pęcherz może być krótki, długi lub otwarty [26]. Przykładowo, przy stałej wielkości gradientu ciśnienia oraz intensywności turbulencji wraz ze spadkiem liczby Reynoldsa pęcherz laminarny staje się coraz dłuższy aż przy bardzo małych liczbach Reynoldsa, masywne oderwanie nie przykleja się, pęcherz pozostaje otwarty [26]. Zamknięty pęcherz laminarny, można zgrubnie podzielić na dwa obszary: obszar w którym występuje recyrkulacja przepływu oraz obszar swobodnej ścinanej warstwy (Rys. 2.7) [73]. W większości przypadków w swobodnej ścinanej warstwie następuje przejście laminarno-turbulentne, a przyklejona warstwa przyścienna jest w pełni turbulentna. Jednakże zdarzają się przypadki,

zwłaszcza przy małej intensywności turbulencji, w których przepływ nie przechodzi w turbulentny, a przyklejona warstwa przyścienna pozostaje laminarna [74]. Dla małego oraz umiarkowanego poziomu turbulencji przepływu głównego mechanizmem prowadzącym do turbulencji w scinanej swobodnej warstwie są fale Tollmiena-Schlichtinga wraz z niestabilnościami Kelvina-Helmholtza [25] lub same niestabilności Kelvina-Helmholtza [25,26]. Natomiast w przypadku większego poziomu turbulencji, turbulencję mogą inicjalizować niestabilności Kelvina-Helmholtza [25] oraz Klebanoffa [25] lub wyłącznie niestabilności Klebanoffa [25,75].

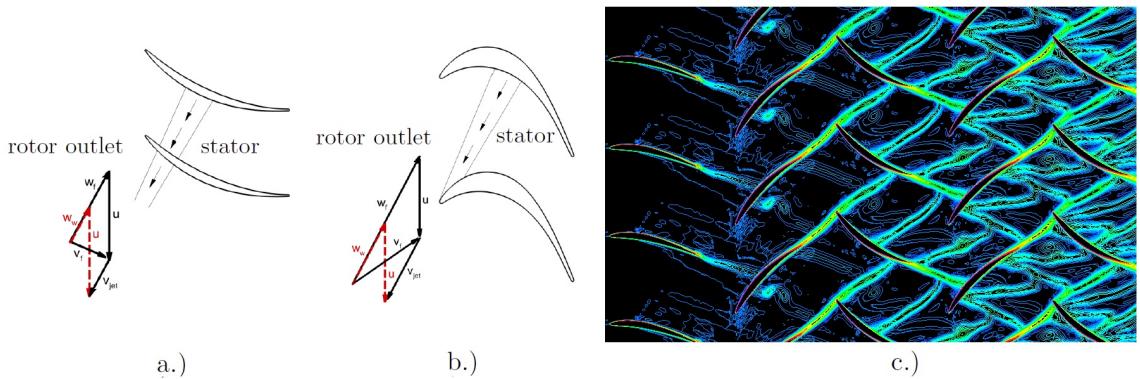


Rysunek 2.7: Schematyczne przedstawienie przejścia laminarno-turbulentnego indukowanego laminarnym oderwaniem [73].

Laminarne oderwanie może występować również bez udziału dodatniego gradientu ciśnienia, w wyniku nagłej zmiany geometrii. Taka sytuacja dość często ma miejsce na krawędzi natarcia profili natarcia, w przypadku małych promieni krawędzi natarcia [76,77].

2.1.4 Przejście laminarno-turbulentne indukowane śladem aerodynamicznym

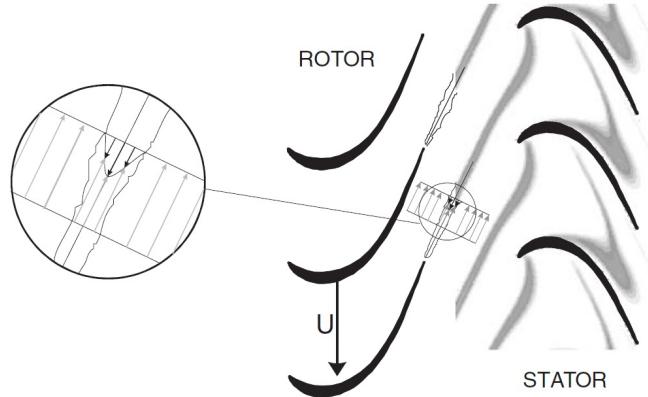
Przejście laminarno-turbulentne indukowane periodycznie napływanym śladem aerodynamicznym, generowanym przez poprzedzający wieniec jest mechanizmem charakterystycznym dla maszyn wirnikowych. Zjawisko to zachodzi w sprężarkowych oraz turbinowych wieńcach zarówno stacjonarnych jak i wirujących (Rys. 2.8).



Rysunek 2.8: Schematyczne przedstawienie interakcji śladu aerodynamicznego a.) z wirnikiem sprężarki [78], b.) z wirnikiem turbiny [78], c.) w wielostopniowej sprężarce [79].

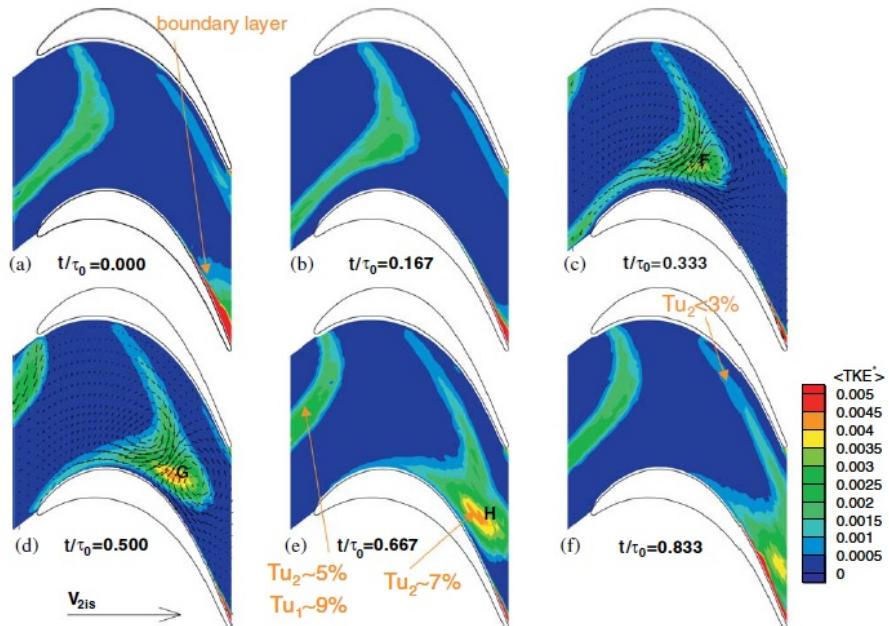
Ślad aerodynamiczny może być utożsamiany ze strumieniem skierowanym w stronę prze-

ciwną do przepływu (Rys. 2.9) [67, 78]. A więc poza zwiększym poziomem turbulencji, ślad charakteryzuje się deficytem pędu [67]. Napływający ślad oddziaływa z warstwą przyścienną powodując przyśpieszone przejście laminarno-turbulentne warstwy przyściennej [67].



Rysunek 2.9: Schematyczne przedstawienie struktury śladu aerodynamicznego [78].

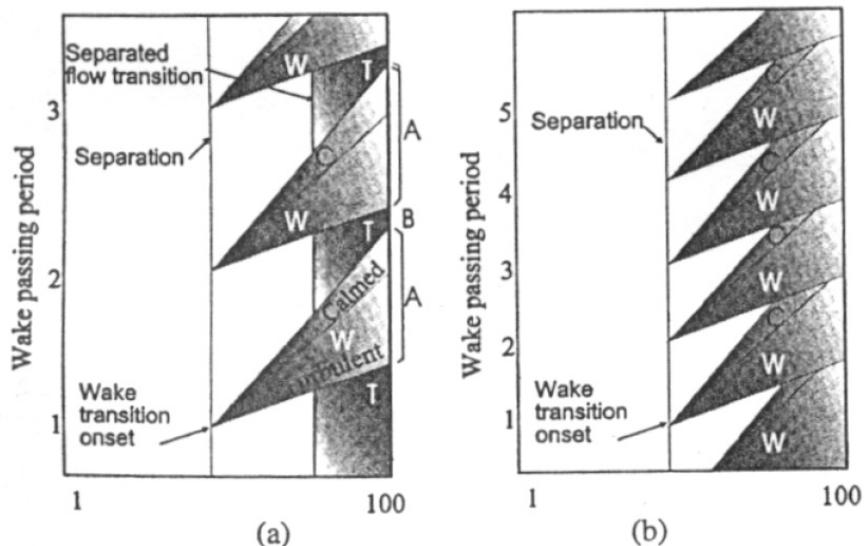
Ślad aerodynamiczny oddziaływa z wieńcem wirnikowym bądź stacjonarnym w sposób okresowo zmienny (Rys. 2.10), napływając na łopatki rozprzestrzenia się w sposób nierównomierny w wyniku cyrkulacji wokół profilu (Rys. 2.10).



Rysunek 2.10: Interakcja śladu aerodynamicznego z wieńcem turbiny niskiego ciśnienia [78].

Napływ śladu indukuje turbulencje w warstwie przyściennej. W przypadku, gdy wpływ kinematyczny śladu na warstwę przyścienną jest umiarkowany, bądź niewielki, ślad napływający na przyklejoną warstwę przyścienną powoduje powstanie zaburzeń Klebanoffa. A więc, mechanizm przejścia laminarno-turbulentnego jest analogiczny do przejścia typu bypass. Po przejściu śladu, następuje powolna relaksacja warstwy przyściennej (turbulencja zanika szybko, profil prędkości powoli [25]), a więc powrotu do stanu laminarnego. Obszar, w którym następuje relaksacja

turbulencji jest nazywany obszarem uspokojenia ("calmed region") [67]. Charakteryzuje się on pełnym profilem prędkości oraz stabilnością w porównaniu do typowego obszaru laminarnego. Obszar uspokojenia jest odporny na oderwanie oraz wzbudzanie turbulencji [25]. Po ustąpieniu obszaru uspokojenia warstwa przyścienna przechodzi w stan turbulentny w prawie identyczny sposób jak w przypadku przepływu stacjonarnego [25, 67]. W celu zobrazowania periodycznych zmian zachodzących na profilu wykorzystywany jest wykres przestrzenno-czasowy. Przykład takiego wykresu dla wirnika turbiny zaprezentowano na rysunku 2.11. Na wykresie tym pozioma oś oznacza odległość na profilu, natomiast pionowa czas. Literą "W" oznaczono obszar turbulentny w wyniku napływu ślądu, "C" obszar uspokojenia oraz literą "T" obszar turbulentny powstały w wyniku mechanizmu stacjonarnego przejścia laminarno-turbulentnego - może to być w wyniku oderwania laminarnego lub przejście typu bypass. Z rysunku 2.11 a.) widać, że stan warstwy przyściennej na krawędzi spływu jest naprzemiennie zmieniający. Przez pewien moment warstwa przyścienna jest turbulentna w wyniku poprzedzającej interakcji warstwy przyściennej ze śladem aerodynamicznym, dalej po pewnym czasie staje się laminarna w wyniku relaksacji, aby znów stać się turbulentną, jednak w wyniku stacjonarnego mechanizmu przejścia laminarno-turbulentnego. W przypadku, gdy częstotliwość napływu ślądu aerodynamicznego jest odpowiednio wysoka, wówczas warstwa przyścienna nie ma czasu na pełną relaksację a więc na rozwinięcie "stacjonarnego" przejścia laminarno-turbulentnego (Rys. 2.11 b.))



Rysunek 2.11: Schematyczne przedstawienie periodycznych zmian spowodowanych napływem ślądu aerodynamicznego a.) o małej częstotliwości, b.) o dużej częstotliwości [67].

W przypadku znacznego wpływu kinematycznego ślądu na warstwę przyścienną pojawiają się dodatkowe mechanizmy opisane przykładowo w [25].

Rozdział 3

Thermal-FSI

Metoda obliczeniowa Fluid-Structure Interaction (Fluid-Solid Interaction (FSI)) jest metodą pozwalającą uwzględnić oddziaływanie płynu ze strukturą. Można wyróżnić następujące rodzaje oddziaływań [80, 81]:

- mass-FSI:

Sprzężenie poprzez równanie masy, czyli jedno- i dwukierunkowa wymiana masy między płynem a ciałem stałym. Dotyczy przede wszystkim zagadnień związanych z korozją. Przykładem wykorzystania dwu-kierunkowego mass-FSI może być zniszczenie konstrukcji komory spalania turbiny gazowej za pomocą mechanizmu wodorowej korozji naprężeniowej połączonej z mechanizmem wysokotemperaturowej dyfuzji, gdzie niektóre produkty spalania przejmowane są przez obudowę komory spalania [81, 82].

- momentum-FSI:

Sprzężenie poprzez równanie pędu, czyli jedno- i dwukierunkowa wymiana pędu między płynem a ciałem stałym. Ma bardzo szerokie zastosowanie w lotnictwie, energetyce, biomechanice itp.. Dwu-kierunkowe momentum-FSI, znajdzie zastosowanie w zagadnieniach w których deformacje struktury wywołane przez przepływ widocznie wpływają na pole przepływu, np. odkształcanie się skrzydeł samolotu pod wpływem sił aerodynamicznych, flatter, przepływ przez zawory, naczynia krewionośne itp.

- thermal-FSI:

Sprzężenie poprzez równanie energii, czyli jedno- i dwukierunkowa wymiana energii cieplnej między płynem a ciałem stałym. Dwu-kierunkowe thermal-FSI jest bardzo często spotykane w zagadnieniach maszyn przepływowych, w wymiennikach ciepła itp..

Trzeba dodać, że poszczególne oddziaływania obejmują nie tylko sprzężenie poprzez dane równanie, ale również wpływ danego oddziaływania na zachowanie się rozpatrywanych domen. O ile w przypadku momentum-FSI jest to oczywiste, to przykładowo thermal-FSI poza wpływem temperatury na zmianę parametrów płynu, uwzględnia również odwzorowanie naprężzeń cieplnych powstałych w ciele stałym w wyniku działania temperatury. Warto również dodać, że thermal-FSI nie jest ogólniejszym zagadnieniem od momentum-FSI, ponieważ nie uwzględnia interakcji pomiędzy domenami na poziomie równania pędu. A więc w przypadku, gdy odkształcania cieplne w ciele stałym będą tak duże, że wpłyną na zachowanie płynu, wówczas w celu analizy danego zagadnienia poza thermal-FSI, konieczne będzie użycie momentum-FSI.

Uwzględnienie interakcji pomiędzy płynem i ciałem stałym wymaga rozwiązania równań CFD opisujących domenę płynu oraz równań CSD opisujących zachowanie ciała stałego wraz

z odpowiednimi warunkami brzegowymi na styku domen. Największym problemem jest rozwiązywanie zagadnienia momentum-FSI (FSI), ze względu na deformacje domeny płynu, która standardowo rozwiązywana jest dla nieruchomej siatki (opis Eulera). Istnieje wiele metod rozwiązywania zagadnień FSI, które, można podzielić na [83, 84]:

- Sformułowanie monolityczne:

W sformułowaniu monolitycznym równania CFD oraz CSD tworzą jeden układ równań, a więc rozwiązywane są równocześnie. Zaletą takiej metody jest możliwość uzyskania stabilnego rozwiązania dla bardzo silnych interakcji pomiędzy ciałem stałym a płynem. Jednakże, równoczesne rozwiązywanie dwóch domen jest mało efektywne, ze względu na różne skale zjawisk w nim zachodzące. Dodatkowo, metoda monolityczna wymaga dużo większych zasobów obliczeniowych, ze względu na dużą ilość równocześnie rozpatrywanych stopni swobody.

Równania ruchu w opisie Lagrange'a polegają na śledzeniu danej cząsteczki lub elementu, z tego względu w zagadnieniach CFD są mało praktyczne, a opis ten zwykle się stosować do zagadnień CSD, w których chcemy wiedzieć jak zmienia się położenie danego punktu ciała. Natomiast opis Eulera, związany z objętościami kontrolnymi nieruchomoujemscowionymi w przestrzeni, w naturalny sposób jest używany w zagadnieniach CFD. Zastosowanie metody monolitycznej FSI wymaga wspólnego opisu równań CFD oraz CSD. Z tego względu powstał opis Arbitrary Lagrangian–Eulerian (ALE) [85, 86], który uwzględnia ruch siatki z prędkością \vec{W} niezależną od ruchu ciała. Dzięki temu w równaniach CFD można uwzględnić ruch siatki wywołyany przez deformowane granice obszaru, natomiast w zagadnieniach CSD opis ALE pozwala uwzględnić większe deformacje, które w przypadku standardowego opisu Lagrange'a (węzły siatki na stałe związane z punktami ciała) powodowały zniekształcenia elementów uniemożliwiające obliczenia [87]. Przy pomocy opisu ALE równania CFD oraz CSD można zapisać w ogólnej różniczkowej postaci [81]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi + \nabla \left[\phi \oplus (\vec{U} - \vec{W}) + \mathbf{F}^E - \mathbf{F}^D \right] = \mathbf{S} \quad . \quad (3.0.1)$$

Dla zagadnienia CFD (dla modelu turbulencji $k-\epsilon$) poszczególne człony przyjmują postać:

$$\phi_{CFD} = \begin{cases} \rho \\ \rho \vec{U} \\ \rho E \\ \rho k \\ \rho \epsilon \end{cases}, \quad \mathbf{F}_{CFD}^E = \begin{cases} 0 \\ p \bar{I} \\ p \vec{U} \\ 0 \\ 0 \end{cases}, \quad \mathbf{F}_{CFD}^D = \begin{cases} 0 \\ \overline{\tau^{Tot}} \\ \overline{q^{Tot}} + \overline{\tau^{Tot}} \cdot \vec{U} \\ J_k \\ J_\epsilon \end{cases}, \quad \mathbf{S}_{CFD} = \begin{cases} 0 \\ \rho \vec{f}_e \\ \rho S_E \\ \rho S_k \\ \rho S_\epsilon \end{cases}. \quad (3.0.2)$$

Równania CSD przedstawione w analogii do równań 3.0.2 można zapisać jako [81]:

$$\phi_{CSD} = \begin{cases} 1 \\ \rho \vec{U} \\ \rho E \\ \rho \overline{\epsilon^{pl}} \\ \rho r \\ \rho \overline{\alpha} \end{cases}, \quad \mathbf{F}_{CSD}^E = \begin{cases} 0 \\ \bar{\sigma} \\ \bar{\sigma} \cdot \vec{U} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}, \quad \mathbf{F}_{CSD}^D = \begin{cases} 0 \\ \vec{q} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}, \quad \mathbf{S}_{CSD} = \begin{cases} 0 \\ \rho \vec{f}_e \\ \rho S_E \\ \rho \overline{\epsilon^{pl}} \\ \rho S_r \\ \rho \overline{S_\alpha} \end{cases}. \quad (3.0.3)$$

Dodatkowo od układu równań CFD oraz CSD wymaga się spełnienia równości strumieni ciepła (wraz z temperaturą) oraz pędu na granicy łączącej poszczególne domeny.

Sformułowanie ALE jest zdecydowanie najpopularniejszą metodą do opisu monolitycznych metod FSI [85,86], którą można spotkać w komercyjnym oprogramowaniu COMSOL oraz Adina. Jednakże w przypadku bardzo dużych odkształceń ciała stałego wymaga ona użycia dodatkowego ”remeshingu” [84].

- Sformułowanie rozdzielone:

W podejściu rozdzielonym równania CFD i CSD rozwiązywane są niezależnie, przy pomocy różnych solverów, a sprzężenie warunków na powierzchni rozdzielającej domeny, dla danego kroku czasowego, odbywa się iteracyjnie. Podstawową zaletą tej metody jest możliwość wykorzystania istniejących, dopracowanych solverów do obliczenia poszczególnych domen. Dodatkowo, dzięki sekwencyjnemu rozwiązywaniu domen zmniejsza się ilość zasobów pamięci niezbędnej do rozwiązania. Wadami tej metody są problemy ze stabilnością rozwiązania dla zagadnień z silną interakcją pomiędzy płynem a ciałem stałym.

Do najpopularniejszych metod opisu poszczególnych domen, podobnie jak w przypadku metody monolitycznej, należy sformułowanie ALE. W przypadku relatywnie małych odkształceń, domena ciała stałego często opisywana jest przy pomocy sformułowania Lagrange'a.

Metody rozwiązywania zagadnień FSI, poza podziałem na monolityczne oraz rozdzielone, można podzielić w zależności od sposobu traktowania siatki interfejsu łączącego domeny na metody konforemne oraz niekonforemne [83]. Metody ALE należą do grupy metod konforemnych, w których położenie powierzchni rozdzielającej domeny traktowane jest jako część rozwiązania, a odkształcenie ciała stałego wymaga ruchu siatki domeny płynu lub jej remeshingu. Z kolei w metodach nie-konforemnych, siatka domeny płynu jest nieruchoma, natomiast położenie interfejsu oraz warunki na nim, reprezentujące ciało stałe, narzucone są jako więzy na równania domeny płynu [88–90]. Do ich podstawowych zalet należy fakt, iż nie wymagają one odwzorowywania ruchu siatki w wyniku deformacji ciała stałego, co skraca czas obliczeń. Wadą jest fakt, iż w przypadku konieczności, przykładowo, dokładnego odwzorowania rejonu warstwy przyściennej, dużo większy obszar musi zostać zdyskretyzowany bardzo gęstą siatką. Do najpopularniejszych metod tego typu należą metody ”zanurzonego ciała” (Immersed Methods), w których siły wywołane na płyn przez ciało stałe są reprezentowane jako czlonki źródłowe w równianach CFD [89,90].

W rozpatrywanych przez nas zagadnieniach konstrukcje są relatywnie sztywne, a więc deformacje nie wpływają znacząco na pole przepływu oraz temperatury, dzięki czemu możemy ograniczyć się do zagadnień jednokierunkowego momentum-FSI. Natomiast istotną kwestią jest uwzględnienie dwukierunkowego thermal-FSI. A więc, rozpatrywać będziemy jednokierunkowe momentum-FSI oraz dwukierunkowe thermal-FSI, jednak ze względu na to, iż momentum-FSI determinuje metodę rozwiązania, całość zagadnienia nazywamy jednokierunkowym thermal-FSI. Rozwiązanie jednokierunkowego momentum-FSI, a więc de facto uwzględnianie ciśnienia działającego na konstrukcję, możliwe jest poprzez niezależne rozwiązanie domeny płynu, a następnie użycie rozkładu ciśnienia jako warunku brzegowego w solverze strukturalnym. Natomiast rozwiązywanie dwu-kierunkowego thermal-FSI odbywa się przy pomocy solvera CFD (dodatkowej dyskretyzacji wymaga domena ciała stałego), w których rozwiązywane jest zagadnienie sprężonej wymiany ciepła, a następnie przy użyciu solvera strukturalnego, w którym analizowany jest wpływ temperatury na zachowanie struktury, tzn. wyznaczane są naprężenia cieplne.

Rozdział 4

Obliczeniowa mechanika płynów (CFD) - zagadnienia przepływowo cieplne

Obliczeniowa mechanika płynów - Computational Fluid Dynamics (CFD) - jest to dziedzina zajmująca się numerycznym rozwiązywaniem zagadnień związanych z ruchem płynu. Do najpopularniejszych metod wchodzących w skład CFD można zaliczyć:

- Metoda bazująca na równaniach Naviera-Stoksa (N-S)
- Metoda Lattice Boltzmann
- Dynamika molekularna
- Metoda Monte-Carlo

W naszych zagadnieniach skupimy się na najpopularniejszej metodzie obliczeniowej mechaniki płynów, bazującej na kontinuum materii oraz równaniach Naviera-Stoksa (nazywać ją będziemy CFD). Dodatkowo, ograniczymy się do zagadnień związanych z przepływem jednoskładnikowych, jednofazowych płynów newtonowskich.

4.1 Równania zachowania

Równania opisujące dynamikę płynów dla kontinuum materii bazują na zasadach zachowania:

- masy
- pędu
- energii

W ogólnym, konserwatywnym (Eulerowskim) sformułowaniu zasady zachowania danej wielkości ϕ , rozpatrujemy dowolnie wybraną, umiejscowioną nieruchomo w przestrzeni objętość kontrolną Ω , ograniczoną powierzchnią $\partial\Omega$. Zasada zachowania mówi, że całkowita zmiana danej wielkości ϕ , wewnętrz objętości kontrolnej jest równa ilości danej wielkości przenikającej przez brzeg $\mathbf{F}(\phi)$, nazywanej strumieniem, oraz produkcją/destrukcją S danej wielkości:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi d\Omega = - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \vec{n} dS + \int_{\Omega} S d\Omega \quad , \quad (4.1.1)$$

gdzie dS jest powierzchniowym elementem z wektorem normalnym \vec{n} . W powyższym sformułowaniu ϕ jest wielkością dowolną, tzn. skalarem, bądź wektorem, wówczas strumień \mathbf{F} jest odpowiednio wektorem lub tensorem.

Strumień danej wielkości można podzielić na część konwekcyjną $\mathbf{F}^C(\phi)$, dyfuzyjną $\mathbf{F}^D(\phi)$ oraz sprężystą $\mathbf{F}^V(\phi)$ [17, 91]:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi d\Omega = - \oint_{\partial\Omega} [\mathbf{F}^C(\phi) - \mathbf{F}^D(\phi) - \mathbf{F}^V(\phi)] \cdot \vec{n} dS + \int_{\Omega} S d\Omega \quad . \quad (4.1.2)$$

Strumień konwekcyjny $\mathbf{F}^C(\phi) = \phi \vec{U}$, związany z transportem danej wielkości poprzez ruch makroskopowy płynu z prędkością \vec{U} . Strumień dyfuzyjny $\mathbf{F}^D(\phi)$ reprezentuje makroskopowy efekt transportu danej wielkości poprzez chaotyczny ruch cząstek. Finalnie, możemy zapisać ogólną, konserwatywną, całkową postać równania transportu:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi d\Omega = - \oint_{\partial\Omega} (\phi \vec{U}) \cdot \vec{n} dS + \oint_{\partial\Omega} [\mathbf{F}^D(\phi) + \mathbf{F}^V(\phi)] \cdot \vec{n} dS + \int_{\Omega} S d\Omega \quad . \quad (4.1.3)$$

Alternatywna, różniczkową, konserwatywną formę zasady zachowania można sformułować na podstawie postaci całkowej (Rów. 4.1.3) wykorzystując twierdzenie Gauss'a-Ostrogradski'ego, oraz Leibniz'a (dla objętości kontrolnejnieruchomej w przestrzeni):

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\phi \vec{U}) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot [\mathbf{F}^D(\phi) + \mathbf{F}^V(\phi)] d\Omega + \int_{\Omega} S d\Omega \quad . \quad (4.1.4)$$

Korzystając z addytywności operatora całkowego oraz z faktu, że całka z wyrażenia jest równa zero dla dowolnie wybranego obszaru kontrolnego, otrzymujemy różniczkową postać zasady zachowania:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = - \nabla \cdot (\phi \vec{U}) + \nabla \cdot [\mathbf{F}^D(\phi) + \mathbf{F}^V(\phi)] + S \quad . \quad (4.1.5)$$

W zagadnieniach CFD zdecydowanie bardziej rozpowszechniony jest zapis całkowy równań transportu (Rów. 4.1.3). Z tego względu, iż postać różniczkowa (Rów. 4.1.5) wymaga aby strumień \mathbf{F} był opisany funkcją różniczkowalną, a więc ciągłą. Jest to problematyczne w zagadnieniach silnych nieciągłości przypływu, np. falach uderzeniowych.

4.1.1 Równanie zachowania masy

Dla płynu jednofazowego zasada zachowania masy w konserwatywnej formie w zapisie całkowym 4.1.3 przyjmuje postać:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \oint_S (\rho \vec{U}) \cdot \vec{n} dS = 0 \quad . \quad (4.1.6)$$

Postać różniczkową, zgodnie z (4.1.5) możemy zapisać jako:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad . \quad (4.1.7)$$

Zasada zachowania masy w sformułowaniu konserwatywnym, mówi, że zmiana masy w czasie, we wnętrzu rozpatrywanej objętości kontrolnej, musi być równa masie przekraczającej brzeg danej objętości kontrolnej.

4.1.2 Równanie zachowania pędu

Fizyczną podstawą zasady zachowania pędu jest II zasada dynamiki Newtona. Mówiąc ona, że zmiana pędu objętości płynu powodowana jest przez impuls sił działających na nią. A więc, dla umiejscowionej nieruchomo w przestrzeni objętości kontrolnej, całkowita zmiana pędu, którą możemy zapisać jako sumę zmiany pędu we wnętrzu objętości kontrolnej oraz pędu przekraczającego jej brzeg, jest równa siłom działającym na rozpatrywaną objętość kontrolną płynu: powierzchniowym oraz masowym (zewnętrznym). Co możemy zapisać jako:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \vec{U} d\Omega + \oint_{d\Omega} [(\rho \vec{U}) \oplus \vec{U}] \cdot \vec{n} dS = \oint_{\partial\Omega} \bar{\vec{f}}_s \cdot \vec{n} dS + \int_{\Omega} \rho \vec{f}_e d\Omega . \quad (4.1.8)$$

Do sił masowych \vec{f}_e działających na daną objętość kontrolną możemy zaliczyć: siłę grawitacji, siłę Coriolisa, siłę odśrodkową itp.. Siły powierzchniowe, działające bezpośrednio na brzeg objętości kontrolnej pochodzą od ciśnienia panującego wokół rozpatrywanego elementu płynu oraz od naprężeń normalnych oraz stycznych powstających w wyniku sił lepkości:

$$\bar{\vec{f}}_s = -p \bar{\vec{I}} + \bar{\vec{\tau}} , \quad (4.1.9)$$

gdzie $\bar{\vec{I}}$ jest tensorem jednostkowym drugiego rzędu, natomiast $\bar{\vec{\tau}}$ nazywamy tensorem naprężeń lepkich.

Podstawiając przedstawienie tensora sił powierzchniowych (Rów. 4.1.9) do równania 4.1.8 otrzymujemy finalną, całkową postać zasady zachowania pędu w konserwatywnej formie:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \vec{U} d\Omega + \oint_{d\Omega} [(\rho \vec{U}) \oplus \vec{U}] \cdot \vec{n} dS = - \oint_{\partial\Omega} p \vec{n} dS + \oint_{\partial\Omega} \bar{\vec{\tau}} \cdot \vec{n} dS + \int_{\Omega} \rho \vec{f}_e d\Omega . \quad (4.1.10)$$

Postać różniczkowa zasady zachowania pędu w formie konserwatywnej, zgodnie z zależnością 4.1.5 przyjmuje następującą postać:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) + \nabla \cdot [(\rho \vec{U}) \oplus \vec{U}] = -\nabla p + \nabla \cdot \bar{\vec{\tau}} + \rho \vec{f}_e . \quad (4.1.11)$$

4.1.2.1 Tensor naprężeń lepkich

Tensor naprężeń lepkich $\bar{\vec{\tau}}$ zależy od dynamicznych własności płynu. Dla płynów takich jak woda, powietrze, spaliny, Isaac Newton odkrył, że naprężenia ścinające tensora $\bar{\vec{\tau}}$ są proporcjonalne do gradientu prędkości. Z tego względu, płyny cechujące się tą zależnością nazywamy niutonowskimi. Większość płynów występujących w przyrodzie są płynami niutonowskimi, wyjątek stanowi między innymi krew lub płynny plastik. Stokes w XIX wieku zaproponował związek konstytutywny przedstawiający człony tensora naprężeń lepkich w postaci:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \delta_{ij} , \quad (4.1.12)$$

gdzie μ jest współczynnikiem lepkości dynamicznej, natomiast λ jest nazywana drugim współczynnikiem lepkości. Stokes [92] zaproponował hipotezę:

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0 . \quad (4.1.13)$$

Powyższe założenie pozwala zapisać tensor naprężeń lepkich (Rów. 4.1.12) w postaci:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) . \quad (4.1.14)$$

Tensor naprężeń lepkich, często podaje się wykorzystując do zapisu tensor prędkości deformacji:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) . \quad (4.1.15)$$

Wówczas możemy zapisać:

$$\tau_{ij} = 2\mu S_{ij} + \lambda S_{kk} \delta_{ij} = 2\mu \left(S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij} \right) = 2\mu S_{ij}^* , \quad (4.1.16)$$

gdzie tensor S_{ij}^* jest nazywany bezśadowym tensorem prędkości deformacji.

4.1.3 Równanie zachowania energii

Zasada zachowania energii bazuje na I zasadzie termodynamiki. Mówiąc o niej, mówimy, że dla umiejscowionej nieruchomo w przestrzeni objętości kontrolnej, chwilowa zmiana całkowitej energii płynu przepływającego przez rozpatrywaną objętość kontrolną równa jest ciepłu wymienionemu przez nią oraz pracy wykonanej przez siły działające na płyn przepływający przez rozpatrywaną objętość kontrolną w danej chwili. Ponieważ płyn jest w ruchu, więc jako całkowitą energię rozumiemy energię wewnętrzną oraz energię kinetyczną:

$$E = e + \frac{\vec{U}^2}{2} = e + \frac{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}{2} . \quad (4.1.17)$$

Ciepło wymieniane może być poprzez dyfuzyjny strumień ciepła, radiacyjną absorpcję-emisję oraz w wyniku reakcji chemicznych. Dyfuzyjny strumień ciepła reprezentuje molekularne przewodzenie w płynie, które opisuje prawo Fouriera $\vec{q}_D = -\bar{k} \cdot \nabla T$, gdzie \bar{k} w ogólnym przypadku jest tensorem przewodności cieplnej. W większości przypadków, płyty charakteryzują się izotropową wartością współczynnika przewodzenia ciepła. Biorąc ten fakt pod uwagę oraz oznaczając jako q_h źródła ciepła reprezentujące radiacyjną wymianę ciepła oraz źródła ciepła pochodzące od reakcji chemicznych możemy zapisać członki reprezentujące ciepło wymienione przez daną objętość płynu:

$$\oint_{\partial\Omega} (k \nabla T) \cdot \vec{n} dS + \int_{\Omega} \rho q_h d\Omega . \quad (4.1.18)$$

Siły działające na element płynu przedstawiono podczas wyprowadzenia zasady zachowania pędu, mianowicie, są to siły powierzchniowe (sily ciśnieniowe oraz lepkościowe (Rów. 4.1.9)) oraz siły masowe działające na element płynu. A więc, pracę wykonywaną przez te siły można zapisać jako:

$$-\oint_{\partial\Omega} (p \vec{U}) \cdot \vec{n} dS + \oint_{\partial\Omega} (\bar{\tau} \cdot \vec{U}) \cdot \vec{n} dS + \int_{\Omega} \rho \vec{f}_e \cdot \vec{U} d\Omega . \quad (4.1.19)$$

Jako całkowitą zmianę energii wewnętrznej płynu przepływającego przez nieruchomą objętość kontrolną rozumiemy zmianę energii wewnętrz objętości kontrolnej oraz zmianę energii poprzez transport z płynem przez jej brzeg. Biorąc pod uwagę ten fakt, dodatkowo uwzględniając przedstawienie ciepła wymienianego przez element płynu (Rów. 4.1.18) oraz pracę sił działających na niego (Rów. 4.1.19), równanie zachowania energii przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho E d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\rho E \vec{U}) \cdot \vec{n} dS = \\ & = \oint_{\partial\Omega} (k \nabla T) \cdot \vec{n} dS + \int_{\Omega} \rho q_h d\Omega - \oint_{\partial\Omega} (p \vec{U}) \cdot \vec{n} dS + \oint_{\partial\Omega} (\bar{\tau} \cdot \vec{U}) \cdot \vec{n} dS + \int_{\Omega} \rho \vec{f}_e \cdot \vec{U} d\Omega . \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

Równanie energii 4.1.20 w postaci różniczkowej, zgodnie z równaniem 4.1.5, przyjmuje postać:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \nabla \cdot (\rho E \vec{U}) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho q_h - \nabla \cdot (p \vec{U}) + \nabla \cdot (\bar{\tau} \cdot \vec{U}) + \rho \vec{f}_e \cdot \vec{U} \quad . \quad (4.1.21)$$

Energia całkowita E , przy wykorzystaniu definicji entalpii, może być zapisana:

$$E = e + \frac{\vec{U}^2}{2} = h - \frac{p}{\rho} + \frac{\vec{U}^2}{2} \quad . \quad (4.1.22)$$

Korzystając z powyższego przedstawienia energii, równanie zachowania energii 4.1.21 dla ciała stałego (prędkość $\vec{U} = 0$, $p = const$) przyjmie postać:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho h) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho q_h \quad . \quad (4.1.23)$$

znanego jako równanie Fouriera-Kirchoffa opisujące rozchodzenie się ciepła w ciele stałym.

4.1.4 Równania Naviera-Stoksa

Równanie zachowania masy 4.1.6, pędu 4.1.10 oraz energii 4.1.20 tworzą układ równań nazywany równaniami Naviera-Stoksa (N-S). Równania N-S można zapisać w ogólnej macierzowej postaci:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} W d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [F - G] \cdot \vec{n} dS = \int_{\Omega} H d\Omega \quad . \quad (4.1.24)$$

gdzie macierz F zawiera człony konwekcyjne oraz sprężyste (ciśnieniowe), G człony dyfuzyjne, natomiast H reprezentuje wpływ sił masowych oraz źródła energii, a więc:

$$W = \begin{cases} \rho \\ \rho \vec{U} \\ \rho E \end{cases}, \quad F = \begin{cases} \rho \vec{U} \\ (\rho \vec{U}) \oplus \vec{U} + p \bar{I} \\ \rho E \vec{U} + p \vec{U} \end{cases}, \quad G = \begin{cases} 0 \\ \bar{\tau} \\ k \nabla T + \bar{\tau} \cdot \vec{U} \end{cases}, \quad H = \begin{cases} 0 \\ \rho \vec{f}_e \\ \rho q_h + \rho \vec{f}_e \cdot \vec{U} \end{cases}. \quad (4.1.25)$$

Energia w powyższych zależnościach przedstawia się zależnością 4.1.22:

$$E = e + \frac{\vec{U}^2}{2} = h - \frac{p}{\rho} + \frac{\vec{U}^2}{2} \quad . \quad (4.1.26)$$

Układ równań 4.1.24 stanowi układ 5 równań z 7 niewiadomymi, w którym oprócz wielkości konserwatywnych ρ , \vec{U} , E nieznane są ciśnienie p oraz temperatura T . A wiec, w celu domknięcia równań N-S, niezbędne jest podanie relacji termodynamicznych wiążących zmienne stanu. Przykładowo dla gazu doskonałego można zapisać równanie stanu wiążące ciśnienie z gęstością i temperaturą oraz związek reprezentujący entalpię [93]:

$$\frac{p}{\rho} = R_i T \quad , \quad h = c_p T \quad (e = c_u T) \quad , \quad (4.1.27)$$

gdzie R_i jest indywidualną stałą gazową, a c_p jest ciepłem właściwym przy stałym ciśnieniu.

4.1.4.1 Równania Naviera-Stoksa w układzie kartezjańskim

W układzie kartezjańskim równania N-S w postaci całkowej (Rów. 4.1.6, 4.1.10, 4.1.20), w zapisie indeksowym przyjmują postać:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \oint_S \rho U_i n_i dS = 0 \quad . \quad (4.1.28)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho U_i d\Omega + \oint_{d\Omega} [\rho U_i U_j] n_j dS = - \oint_{\partial\Omega} p n_i dS + \oint_{\partial\Omega} \tau_{ij} n_j dS + \int_{\Omega} \rho f_{e_i} d\Omega \quad \text{dla } i = 1, 2, 3 \quad . \quad (4.1.29)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho E d\Omega + \oint_{d\Omega} \rho E U_i n_i dS = \\ & = \oint_{\partial\Omega} k \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i dS + \int_{\Omega} \rho q_h d\Omega - \oint_{\partial\Omega} p U_i n_i dS + \oint_{\partial\Omega} (\tau_{ij} U_j) n_i dS + \int_{\Omega} \rho f_{e_i} U_i d\Omega \quad . \quad (4.1.30) \end{aligned}$$

Natomiast, różniczkowa postać równań N-S (Rów. 4.1.7, 4.1.11, 4.1.21) w zapisie indeksowym przedstawia się następująco:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho U_i) = 0 \quad . \quad (4.1.31)$$

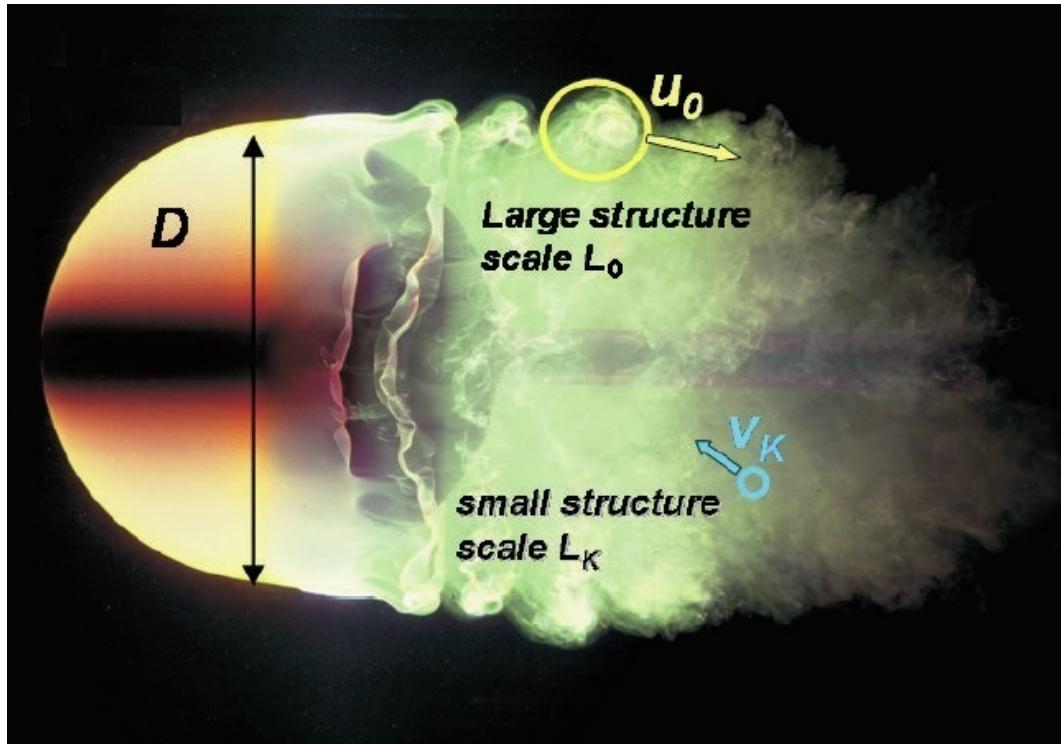
$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho U_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_i U_j) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_{e_i} \quad \text{dla } i = 1, 2, 3 \quad . \quad (4.1.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho E U_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \rho q_h - \frac{\partial}{\partial x_i} (p U_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij} U_j) + \rho f_{e_i} U_i \quad . \quad (4.1.33)$$

4.2 Modelowanie turbulencji

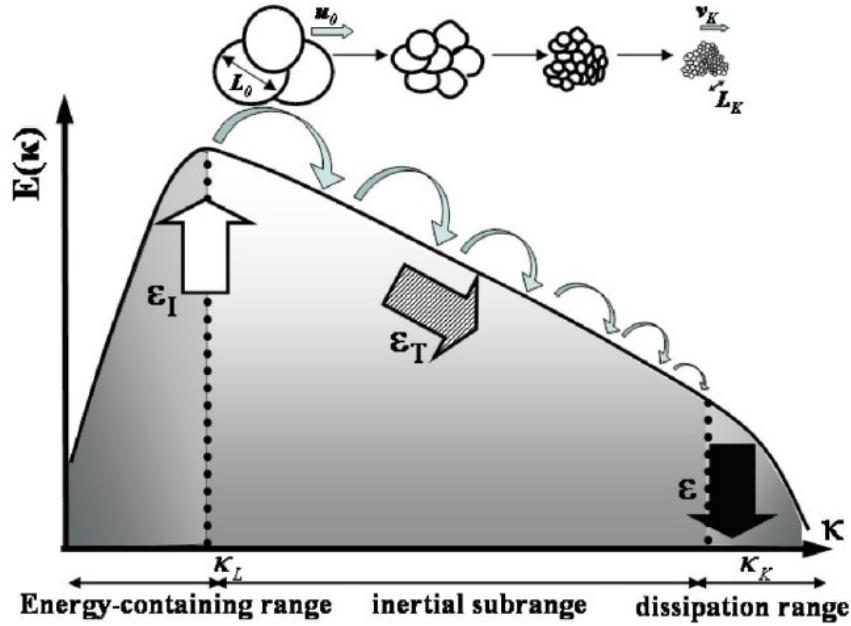
Większość przepływów rozpatrywanych w zagadnieniach inżynierskich jest turbulentna. Turbulencja intensyfikuje procesy transportu masy, pędu oraz energii. Z tego względu jej poprawne odwzorowanie jest niezwykle istotne przy rozpatrywaniu zagadnień wymiany ciepła.

Jednoznaczna definicja turbulencji jest ciężka do sprecyzowania [94], mimo, iż jest ona łatwo obserwowały w przepływie (Rys. 4.1). Jednakże można sprecyzować jej cechy charakterystyczne, mianowicie: losowość, 3-wymiarowy charakter fluktuacji prędkości, dyfuzyjność oraz szeroki zakres skali [94].



Rysunek 4.1: Opływ kuli dla liczby Reynoldsa $Re = 2 \cdot 10^4$ [94].

Ponieważ w przepływie turbulentnym można wyróżnić struktury wirowe, które zachowują swoją strukturę przez dłuższy czas, cechując się pewnym uporządkowaniem, (tzw. w strukturze koherentne), więc mimo, iż turbulencje charakteryzuje losowość to nie jest ona ani w pełni losowa ani deterministyczna. Co więcej, można zauważać, że przepływ turbulentny charakteryzuje się wieloskalowością struktur wirowych. Największe wiry, w których poprzez zewnętrzne siły lub/oraz niestabilności przepływu tworzona jest turbulentna energia kinetyczna, są niestabilne przez co rozbijają się na mniejsze wiry przekazując im energię. Proces ten jest ciągły, aż energia najmniejszych wirów jest na tyle mała, że zostaje rozproszona przez lepkość molekularną w postaci ciepła. Proces ten nosi nazwę kaskady energetycznej wirów i został przedstawiony na rysunku 4.2. Dodatkowo, można wyróżnić charakterystyczne skale: długości i czasu, opisujące poszczególne struktury wirowe w danym przepływie odpowiedzialne za przepływ turbulentnej energii. Skala długości opisuje rozmiar danej struktury wirowej, natomiast skala czasowa opisuje czas, w którym wir obróci się.



Rysunek 4.2: Kaskada wirów: energia turbulencji w zależności od liczby falowej (skala podwójnie logarytmiczna). Przy założeniu lokalnej równowagi turbulencji: $\epsilon_I \approx \epsilon_T \approx \epsilon$ [94].

Pierwszy obszar obejmuje największe wiry, w których poprzez siły zewnętrzne oraz niestabilności przepływu tworzona jest energia kinetyczna turbulencji. Skale wirów w tym obszarze są sprzężone z głównym przepływem. Na wykresie można zauważyć pik energii odpowiadający strukturom wirowym zawierającym największą ilość energii, charakteryzujących się liczbą falową $K_L = \frac{1}{L_0}$, odpowiadającą skali dлиги L_0 , będącą całkową skalą turbulencji. Ponieważ, większość energii turbulencji jest w największych wirach, więc skala prędkości wirów energetycznych jest z nią porównywalna $U_0 = k^{1/2}$. Skala dлиги największych wirów jest rzędu rozpatrywanego problemu, a charakterystyczna prędkość jest porównywalna z prędkością przepływu. Skala czasowa $T_0 = \frac{L_0}{U_0}$ jest równa czasowi potrzebnemu na obrót wiru. Zakładając, że energetyczne wiry rozpadają się po wykonaniu obrotu, prędkość, z jaką energia ($k \approx U_0^2$) wejdzie do kaskady można wyrazić zależnością:

$$\epsilon_I \approx \frac{U_0^2}{L_0/U_0} = \frac{U_0^3}{L_0} . \quad (4.2.1)$$

Obszar przejściowy pomiędzy najbardziej energetycznymi wirami, a wirami dyssypatywnymi nosi nazwę podobszaru inercyjnego, w którym energia przekazywana jest poprzez siły bezwładności, bez wpływu lepkości ($\epsilon_T = \epsilon_I$). Region ten charakteryzuje tzw. mikro skala Teylora.

Najmniejsze wiry, nazywane wirami dyssypatywnymi, dyssypują energię turbulencji z prędkością ϵ . Według pierwszej hipotezy Kołmogorowa, wiry te charakteryzują się izotopowością oraz uniwersalnością statycznego opisu, zależnego jedynie od ϵ oraz ν . Bazując na powyższym fakcie oraz korzystając z analizy wymiarowej, można wyznaczyć relacje opisujące najmniejsze wiry, tzw. skale Kołmogorowa:

$$L_K = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}} , \quad T_K = \sqrt{\frac{\nu}{\epsilon}} . \quad (4.2.2)$$

Dla turbulencji w lokalnej równowadze możemy zapisać [94]:

$$\epsilon_I \approx \epsilon_T \approx \epsilon . \quad (4.2.3)$$

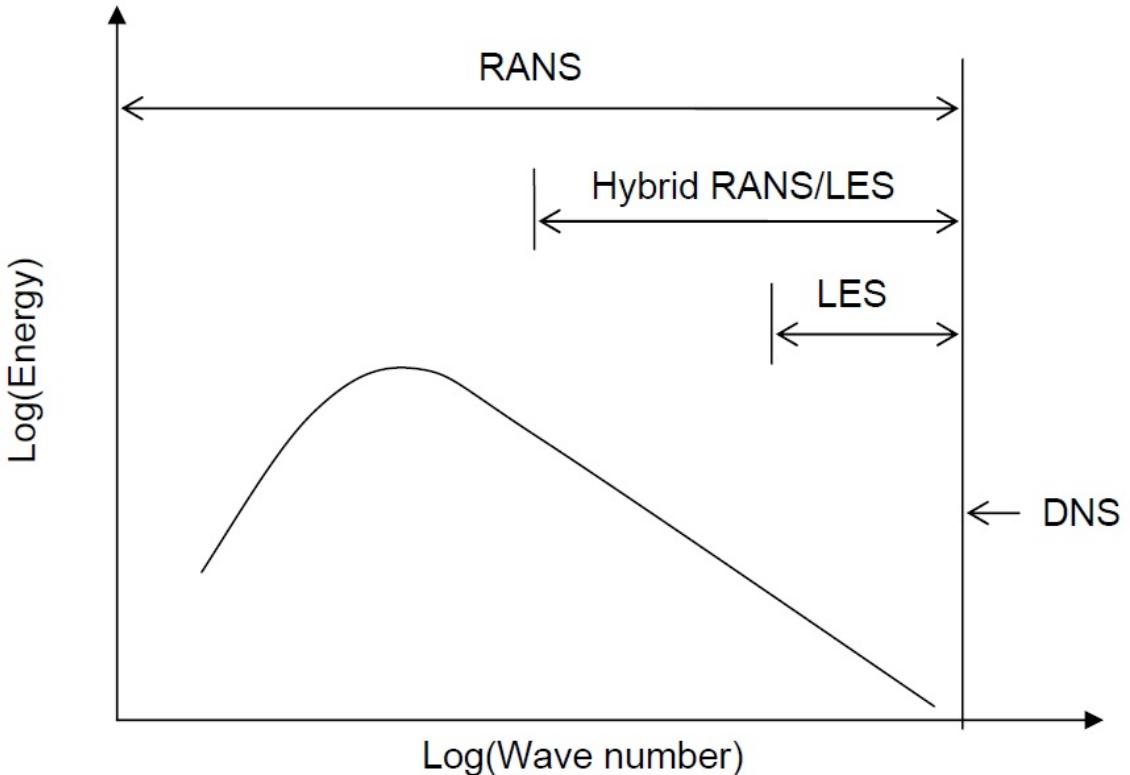
Na podstawie powyższej zależności 4.2.3, równania przedstawiającego prędkość wejścia energii do kaskady 4.2.1 oraz skali prędkości dużych wirów $U_0 = k^{1/2}$ można przedstawić skalę długości oraz czasu wirów energetycznych w następującej postaci:

$$L_0 = \frac{k^{3/2}}{\epsilon} , \quad T_0 = \frac{k}{\epsilon} , \quad U_0 = k^{1/2} . \quad (4.2.4)$$

Porównując skale Kołmogorowa 4.2.2 ze skalami wirów energetycznych (Rów. 4.2.4) można wyznaczyć zależności przedstawiające wzajemny stosunek najmniejszych struktur wirowych do największych, mianowicie:

$$\frac{L_K}{L_0} = Re_L^{-\frac{3}{4}} , \quad \frac{T_K}{T_0} = Re_L^{-\frac{1}{2}} . \quad (4.2.5)$$

Zależności 4.2.5 pokazują, że wraz ze wzrostem liczby Reynoldsa spektrum skal turbulentnych rośnie. Symulowanie przepływu poprzez numeryczne rozwiązywanie pełnych równań N-S (Direct Numerical Simulation (DNS)) pozwala w pełni odwzorować przepływ turbulentny, aczkolwiek wymaga to uwzględnienia w analizie wszystkich struktur wirowych, a więc wielkość oczek siatki, powinna być nie większa niż struktury wirowe opisane skalą Kołmogorowa. Co więcej, krok czasowy analizy, powinien być nie większy niż skala czasowa Kołmogorowa. Co w przypadku dużych liczb Reynoldsa prowadzi do ogromnych zadań obliczeniowych. Z tego, względu rozwijane są modele turbulencji, których celem jest zmniejszenie czasu obliczeń. Modele turbulencji mogą być sklasyfikowane w zależności od wielkości skal branych pod uwagę podczas modelowania.



Rysunek 4.3: Schematycznie przedstawiony podział modeli turbulencji w zależności od wielkości modelowanych przez nie skali [95].

Poza DNS jako dwie podstawowe grupy modeli turbulencji możemy wyróżnić:

- Metoda dużych wirów - Large Eddy Simulation (LES)

Metoda LES została zaproponowana w 1963 przez Smagorinsky'ego [96]. Ideą LES jest rozwiązywanie większości większych skal turbulencji (Rys. 4.3), a modelowanie mniejszych prawie izotropowych, które dzięki swoim "prawie" izotropowym własnościom, mogą być modelowane przez stosunkowo proste modele. Wymaga to przestrzennego filtrowania równań Naviera-Stoksa z mniejszych skal. Po przefiltrowaniu równań N-S powstaje człon, uwzględniający interakcję pomiędzy skalami, który wymaga domknięcia przy pomocy modeli podsiatkowych.

Dzięki temu podejściu jesteśmy w stanie otrzymać wystarczająco dokładne wyniki zmniejszając czas obliczeniowy w porównaniu do DNS.

- Uśrednianie równań N-S (Reynolds-Averaged Navier Stokes - (RANS))

Metody bazujące na rozwiązyaniu uśrednionych równań N-S. W metodach tych wszystkie skale turbulencji są modelowane, a rozwiązywany jest główny przepływ, co znacznie skraca czas obliczeniowy wykonywanych symulacji. Dzięki temu modele RANS są najbardziej popularną klasą modeli w zastosowaniach inżynierskich.

4.2.1 Modele turbulencji RANS

Ideą modeli turbulencji RANS jest uśrednianie równań N-S. Równania N-S mogą być uśrednione: po czasie (uśrednienie Reynoldsa), po gęstości (uśrednienie Favre). Jednak ze względu na to, iż idea uśredniania przepływów turbulentnych została zaproponowana przez Reynoldsa, noszą one ogólną nazwę metod RANS.

Reynolds [97] zaproponował dla statystycznie stacjonarnego turbulentnego przepływu przedstawienie dowolnej zmiennej w równaniach N-S jako wartości średniej w czasie oraz jej fluktuacji:

$$X(x, y, z, t) = \bar{X} + X'(t) \quad , \quad (4.2.6)$$

gdzie uśredniona po czasie wartość w rozpatrywanym dostatecznie dużym przedziale czasu jest zdefiniowana następująco:

$$\bar{X} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X dT \quad . \quad (4.2.7)$$

Uśrednienie równań N-S w czasie prowadzi do bardzo skompilowanej postaci równań, z tego względu uśrednienia w czasie stosuje się do równań N-S z pominięciem fluktuacji gęstości. Otrzymane równania nazywane są równaniami Reynoldsa.

Fluktuacje gęstości mają niewielki wpływ na turbulencje, jeżeli są dużo mniejsze od gęstości przepływu ($\rho' \ll \bar{\rho}$) (hipoteza Morkovinsa [98]). Fluktuacje gęstości oznaczają ściśliwość turbulencji, która jest istotna w modelowaniu zagadnień hipersonicznych, fali uderzeniowej, spalania oraz w zagadnieniach silnej wymiany ciepła [99]. Morkovins pokazał, że w przypadku opływu adiabatycznej ścianki, w warstwie przyściennej bez gradientów ciśnienia, ściśliwość turbulencji jest pomijalna do liczby Macha równej 5. Jednakże występowanie gradientów ciśnienia oraz wymiany ciepła na ściance zmniejsza tę wartość. Shadloo [100] pokazał, że dla przepływu supersonicznego ($M = 2$) z silną wymianą ciepła wpływ ściśliwości na turbulencje jest istotny. Podobnie ściśliwość turbulencji uwidacznia się w oddziaływaniu fali uderzeniowej z warstwą przyścienią, nawet dla przepływów transonicznych [101].

Większość modeli turbulencji RANS w niewielkim stopniu uwzględnia wpływ ściśliwości na turbulencje. W większości są to modele dla nieściśliwej turbulencji rozszerzone o niewielki wpływ ściśliwości na turbulencje, a większość członów uwzględniających ściśliwość jest pomijana. Zaprezentowane zostało takie podejście, z tego względu iż w niniejszej pracy, do modelowania

przepływu z wymianą ciepła użyto komercyjnego oprogramowania Fluent, używając nie wbudowanych modeli turbulencji.

W celu uwzględniania fluktuacji gęstości oraz uzyskania relatywnie prostej wersji równań stosuje się uśrednienie prędkości oraz temperatury przy pomocy uśrednienia ważonego zaproponowanego przez Favre [102, 103]:

$$\tilde{X} = \frac{1}{\bar{\rho}} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho X dT \quad . \quad (4.2.8)$$

Wówczas, chwilowe wielkości przedstawiają się następująco:

$$U_i = \widetilde{U}_i + U''_i \quad , \quad T = \widetilde{T} + T'' \quad . \quad (4.2.9)$$

Do uśrednienia gęstości, ciśnienia stosuje się uśrednienie Reynoldsa (Rów. 4.2.6):

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad , \quad p = \bar{p} + p' \quad . \quad (4.2.10)$$

Przy jedynym fizycznym założeniu braku fluktuacji lepkości μ oraz przewodności cieplnej k , stosując uśrednienia 4.2.9 oraz 4.2.10 do równań N-S 4.1.31 - 4.1.33 (pomijając człony źródłowe) otrzymujemy układ równań nazywany równaniami Reynoldsa-Favre [104, 105]:

- Równanie ciągłości:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \widetilde{U}_i) = 0 \quad . \quad (4.2.11)$$

- Równanie zachowania pędu:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \widetilde{U}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \widetilde{U}_i \widetilde{U}_j) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\widetilde{\tau}_{ij} + \overline{\tau''_{ij}}) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} U''_i \overline{U''_j}) \quad . \quad (4.2.12)$$

- Równanie zachowania energii:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \widetilde{E}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \widetilde{H} \widetilde{U}_i) &= - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{\rho U''_i h''} + \overline{\rho U''_i \frac{1}{2} U''_j U''_j} - k \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_i} - k \frac{\partial \overline{T''}}{\partial x_i} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} (\widetilde{\tau}_{ij} \widetilde{U}_j + \overline{\tau''_{ij}} \widetilde{U}_j - \overline{\rho U''_i U''_j} \widetilde{U}_j + \widetilde{\tau}_{ij} \overline{U''_j} + \overline{\tau''_{ij}} \overline{U''_j}) \quad . \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

gdzie całkowitą entalpię przestawia zależność:

$$\widetilde{H} = \widetilde{h} + \frac{\widetilde{U}_i \widetilde{U}_i}{2} + \frac{\overline{\rho U''_i U''_i}}{2\bar{\rho}} \quad . \quad (4.2.14)$$

Człony mające mniejsze znaczenie w równaniach 4.2.12 - 4.2.13 można pominąć [104, 106], są to:

$$\overline{\tau''_{ij}} \approx 0 \quad , \quad \overline{q''_j} = -k \frac{\partial \overline{T''}}{\partial x_i} \approx 0 \quad , \quad \overline{U''_i} \widetilde{\tau_{ij}} \approx 0 \quad . \quad (4.2.15)$$

Wówczas równania 4.2.11 - 4.2.13 przyjmują postać:

- Równanie ciągłości:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \widetilde{U}_i) = 0 \quad . \quad (4.2.16)$$

- Równanie zachowania pędu:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \widetilde{U}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \widetilde{U}_i \widetilde{U}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\widetilde{\tau}_{ij} - \overline{\rho U''_i U''_j}) . \quad (4.2.17)$$

- Równanie zachowania energii:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \widetilde{E}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \widetilde{H} \widetilde{U}_i) &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(-k \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_i} + \overline{\rho U''_i h''} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} (\widetilde{\tau}_{ij} \widetilde{U}_j - \overline{\rho U''_i U''_j} \widetilde{U}_j) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{\tau''_{ij} U''_j} - \rho U''_i \frac{1}{2} \overline{U''_j U''_j} \right) . \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

Po uśrednieniu równań N-S powstają cztery dodatkowe człony, które wymagają dodatkowego modelowania w celu domknięcia układu równań, są to mianowicie:

- Tensorem naprężeń turbulentnych (tensor Favre-Reynoldsa):

$$\tau_{ij}^F = -\overline{\rho U''_i U''_j} = -\widetilde{\rho U''_i U''_j} . \quad (4.2.19)$$

- Turbulentny strumień ciepła:

$$q_j^T = \overline{\rho U''_i h''} . \quad (4.2.20)$$

- Molekularna dyfuzja energii kinetycznej:

$$\overline{\tau''_{ij} U''_j} . \quad (4.2.21)$$

- Turbulentny transport energii kinetycznej:

$$-\rho U''_i \frac{1}{2} \overline{U''_j U''_j} . \quad (4.2.22)$$

Dwa ostatnie czlony są bezpośrednio związane ze ścisliwością turbulencji [93]. Przykładowo dla modeli bazujących na lepkości turbulentnej 4.2.1.1 najczęściej modelowane są jako [107]:

$$\overline{\tau''_{ij} U''_j} - \rho U''_i \frac{1}{2} \overline{U''_j U''_j} = \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} . \quad (4.2.23)$$

Modelowanie tensora naprężeń turbulentnych oraz turbulentnego strumienia ciepła zostało opisane poniżej.

4.2.1.1 Modelowanie tensora naprężeń turbulentnych

Główna uwaga modelowania turbulencji skupiona jest na modelowaniu domknięcia tensora naprężeń turbulentnych (Rów. 4.2.19):

$$\tau_{ij}^F = -\overline{\rho U''_i U''_j} = -\widetilde{\rho U''_i U''_j} . \quad (4.2.24)$$

W zależności od tego, w jaki sposób tensor ten jest modelowany, otrzymujemy następujący podział modeli turbulencji RANS:

- Liniowe modele lepkości turbulentnej (Linear Eddy Viscosity Models (LEVM))

Modele tej grupy bazują na hipotezie Boussinesqa (Rów. 4.2.25) łączącej tensor naprężen turbulentnych z tensorem prędkości odkształcenia głównego przepływu w liniowy sposób przy pomocy lepkości turbulentnej. Stąd wynika podstawowe ograniczenie modeli LEVM, polegające na niepoprawnym odwzorowaniu anizotropowości normalnych turbulentnych naprężen (izotropowość lepkości turbulentnej), co skutkuje brakiem możliwości odwzorowania, w ogólności, przepływów wtórnych, przepływów z zakrzywionymi liniami prądu oraz w obecności nieinercjonalnych sił - rotacja. Chociaż, wprowadza się pewne korekty umożliwiające modelowanie szczególnych przypadków tychże zjawisk. Pomimo tego, wiele istotnych zjawisk, takich jak chociażby przepływ w warstwie przyściennej, jest z powodzeniem modelowana przez LEVM. Co więcej, ze względu na stosunkowo bezproblemową zbieżność oraz efektywność znajdują one najczęstsze zastosowanie w zagadnieniach inżynierskich.

- Modele transportu tensora naprężen (Reynolds-stress transport equation (RSM))

W modelach RSM każda składowa tensora naprężen turbulentnych jest wyznaczana przy pomocy niezależnego równania transportu, więc jest to najbardziej zaawansowana grupa modeli RANS. Do wad tej metody można zaliczyć problemy ze zbieżnością.

- Nieliniowe modele lepkości turbulentnej (Nonlinear Eddy Viscosity Models (NEVM))

Modele NEVM w sposób nielinowy opisują zależność pomiędzy tensorem naprężen turbulentnych a prędkością odkształcenia przepływu głównego oraz jego wirowością. Dzięki temu uwzględniana jest część zależności wyższego rzędu opisujących naprężenia turbulentne, co pozwala w naturalny sposób odwzorować anizotropię naprężen normalnych, a w konsekwencji umożliwia szersze modelowanie przepływów wtórnych.

EARSM jest to podgrupa modeli NEVM, wykorzystująca równanie transportu naprężen turbulentnych (model RSM) do oszacowania algebraicznych zależności na tensor naprężen turbulentnych przy założeniu słabej równowagi turbulencji (efekty konwekcyjnego oraz dyfuzyjnego transportu mogą być pominięte). W obszarach, w których założenie słabej równowagi jest spełnione (logarytmiczny obszar warstwy przyściennej, jednorodna turbulencja) modele te dają porównywalne wyniki z modelami RSM.

4.2.1.1.1 Liniowe modele lepkości turbulentnej (Eddy Viscosity Models (EVM))

W przepływie turbulentnym duże energetyczne struktury wirowe, są głównie odpowiedzialne za transport pędu, a ich charakterystyczna prędkość jest porównywalna z prędkością przepływu głównego. Boussinesq bazując na tych faktach zaproponował przedstawienie tensora naprężen turbulentnych w funkcji składowych tensora prędkości deformacji głównego przepływu w analogii do dyfuzji molekularnej pędu (tensor naprężen lepkich (Rów. 4.1.14)), mianowicie [108, 109]:

$$\tau_{ij}^F = -\overline{\rho U''_i U''_j} = -\widetilde{\rho U''_i U''_j} = -\mu_T \left(\frac{\partial \widetilde{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{U}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \widetilde{U}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \overline{\rho k} \delta_{ij} \quad . \quad (4.2.25)$$

gdzie energia turbulencji przestawiona jest zależnością:

$$k = \frac{1}{2} \widetilde{U''_i U''_i} \quad . \quad (4.2.26)$$

Natomiast μ_T jest nazywana lepkością turbulentną (wiową), która w przeciwieństwie do lepkości molekularnej jest własnością przepływu, a nie płynu. Przedstawienie tensora naprężen

turbulentnych (Rów. 4.2.25) jest analogiczne do tensora naprężeń lepkich (Rów. 4.1.14) za wyjątkiem członu $\frac{2}{3}\bar{\rho}k\delta_{ij}$, który ma zapewnić spełnienie przez ślad tensora naprężień turbulentnych $\tau_{ii}^F = -\widetilde{\bar{\rho}U''_i U''_i} = -2\bar{\rho}k$ zależności 4.2.26 na energię kinetyczną turbulencji.

Lepkość turbulentną można przedstawić jako:

$$\mu_T = \bar{\rho}\nu_T \quad . \quad (4.2.27)$$

Kinematyczna lepkość turbulentna ν_T ma wymiar $\left[\frac{m^2}{s}\right]$, więc z analizy wymiarowej wnioskować można, że w celu jej opisu potrzebne są dwie skale: długości oraz prędkości lub zamiennie długości oraz czasu:

$$\nu_T \left[\frac{m^2}{s} \right] \sim U_m \left[\frac{m}{s} \right] \cdot L_m [m] = \frac{L_m^2 [m^2]}{T_m [s]} = U_m^2 \left[\frac{m^2}{s^2} \right] \cdot T_m [s] \quad . \quad (4.2.28)$$

Pierwszy model EVM został zaproponowany przez Prandtla [110]. Założył on, że naprężenia turbulentne są produkowane przez transfer pędu w kierunku normalnym do przepływu, z rejonu o większej wartości pędu. Model Prandtla do modelowania lepkości turbulentnej wykorzystuje skale prędkości oraz długości. Jako skale prędkości zakłada iloczyn długości drogi mieszanina oraz gradientu prędkości (prędkość ścinania, której jednostką jest $[1/s]$), a więc $U_m = l_{mix} \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|$. Natomiast jako skale długości model ten używa długość drogi mieszanina l_{mix} , która z definicji jest średnią odległością pomiędzy którymi płyn wymienia pęd i jest ściśle związana z turbulentnymi wirami. A więc, lepkość turbulentną możemy zapisać jako:

$$\nu_T = U_m L_m = l_{mix}^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad . \quad (4.2.29)$$

Model ten w oryginalnej postaci został zaproponowany dla prostych, dwu-wymiarowych, niesciśliwych przepływów. W obecnych czasach ma znaczenie historyczne. Model Prandtla jest modelem algebraicznym, ponieważ lepkość turbulencji jest modelowana przy pomocy wyrażenia algebraicznego. Ponieważ lepkość turbulencji zależy od historii turbulencji, więc obecne modele bazują na równaniach transportu poszczególnych skal, służących do opisu lepkości turbulencji. A więc, główny podział modeli LEVM bazuje na ilości równań branych pod uwagę podczas modelowania lepkości turbulentnej. Najpopularniejsze modele LEVM zostały opisane poniżej.

- Model $k - \epsilon$

Model $k - \epsilon$ zaproponowany w 1972 roku przez Jonesa i Laundera [111], jako skale do modelowania lepkości turbulentnej wykorzystuje skale długości oraz prędkości wirów energetycznych, które zgodnie z równaniami 4.2.4 można przedstawić:

$$L_0 = \frac{k^{3/2}}{\epsilon} \quad , \quad U_0 = k^{1/2} \quad . \quad (4.2.30)$$

A więc zgodnie z zależnościami 4.2.27, 4.2.28 lepkość turbulentną można przedstawić jako:

$$\mu_T = \bar{\rho} C_u \frac{k^2}{\epsilon} \quad . \quad (4.2.31)$$

Energia turbulencji k oraz prędkość dyssypacji ϵ wyznaczane są przy pomocy równań transportu. Ogólne równanie transportu dla energii turbulencji, może być wyznaczone na

podstawie równania transportu naprężeń turbulentnych (Rów. 4.2.53) i przedstawia się następująco [104, 105, 112]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho}k \widetilde{U}_i) = P_k - \epsilon \bar{\rho} + D_k + D_k^p + W_k^p , \quad (4.2.32)$$

gdzie P_k jest produkcją, wyrażenie D_k oznacza dyfuzyjny transport w skład którego wchodzą transport poprzez ciśnienie, turbulencje oraz lepkość, a człony D_k^p, W_k^p są związane ze ścisliwością płynu i reprezentują dylatacje ciśnienia oraz pracę ciśnienia.

Szybkość dyssypacji można przedstawić jako część solenoidalną związaną z nieściśliwym ruchem turbulentnym oraz część dylatacyjną związaną ze ścisliwością turbulencji:

$$\epsilon = \epsilon_s + \epsilon_d . \quad (4.2.33)$$

Najczęściej część solenoidalna jest rozwiązywana przy pomocy równania transportu, dla nieściśliwej prędkości dyssypacji (Rów. 4.2.36) rozszerzonej dla przepływów o zmiennej gęstości, a część dylatacyjna jest wyliczana na jej podstawie w oparciu o model przedstawiony przez Sarkara [113].

$$\epsilon = (\epsilon_s + \epsilon_d) = \frac{2}{3} \delta_{ij} (\epsilon_s \rho + 2\epsilon M_t^2) , \quad M_t = \sqrt{\frac{k}{a^2}} , \quad (4.2.34)$$

gdzie M_t jest turbulentną liczbą Macha.

Klasyczne równanie transportu energii kinetycznej turbulencji (pomija człony uwzględniające ścisłość (Rów. 4.2.32)) przyjmuje postać [111]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho}k \widetilde{U}_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + P_k - \epsilon \bar{\rho} , \quad (4.2.35)$$

gdzie pierwszy człon po prawej stronie przedstawia ogólny transport dyfuzyjny, natomiast człon produkcji energii turbulencji wyrażony jest poprzez zależność $P_k = \tau_{ij}^F \frac{\partial \widetilde{U}_i}{\partial x_j}$.

Równanie na szybkość dyssypacji zostało wyprowadzone poprzez przemnożenie równania transportu energii kinetycznej turbulencji 4.2.35 przez $\frac{\epsilon}{k}$. Przyjmuje ono postać [111]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}\epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho}\epsilon \widetilde{U}_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right] + C_{\epsilon 1} P_k \frac{\epsilon}{k} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \bar{\rho} . \quad (4.2.36)$$

Równania 4.2.35, 4.2.36 reprezentują standardowy model turbulencji $k - \epsilon$ z lepkością turbulentną zdefiniowaną równaniem 4.2.31, gdzie stałe $C_u, C_{\epsilon 1}, C_{\epsilon 2}, \sigma_k, \sigma_\epsilon$ kalibrowane są przy pomocy eksperymentów.

- Model $k - \omega$

Model zaproponowany przez Wilcoxa [114, 115] jako skale wykorzystuje skale prędkości $L_m = k^{1/2}$ oraz czasu $T_m = \frac{1}{\omega}$, gdzie $\omega = \frac{\epsilon}{k}$ jest częstością turbulencji (wirowością, jednostkową prędkością dyssypacji). A więc zależność na lepkość turbulentną przyjmuje postać:

$$\mu_T = \bar{\rho} C_u \frac{k}{\omega} . \quad (4.2.37)$$

Równanie na kinetyczną energię turbulencji jest takie same jak w przypadku standardowego modelu $k - \epsilon$ (Rów. 4.2.35). Uwzględniając $\epsilon = \beta^* \omega k$ ($\beta^* = 0.09$) otrzymujemy [114, 115]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho}k \widetilde{U}_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + P_k - \bar{\rho} \beta^* \omega k , \quad (4.2.38)$$

Równanie transportu częstości turbulencji zostało wyprowadzone analogicznie jak równanie transportu dyssypacji dla modelu $k - \epsilon$, poprzez przemnożenie równania 4.2.38 na energię turbulencji przez $\frac{\omega}{k}$, wówczas:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}\omega) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho}\omega \widetilde{U}_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] + \alpha P_k \frac{\omega}{k} - \bar{\rho}\beta\omega^2 , \quad (4.2.39)$$

gdzie stałe są wyznaczane przy kalibracji z eksperymentami.

- Baseline Model (BSL)

Model $k - \omega$ Wilcoxa cechuje duża wrażliwość częstości turbulencji ω w przepływie swobodnym na wartości turbulencji zadane jako wartości brzegowe [116, 117], w przeciwieństwie do modelu $k - \epsilon$. Z drugiej strony model $k - \omega$ dokładniej niż $k - \epsilon$ modeluje zachowanie w warstwie przyściennej (jest to model nisko-Reynoldsowski, który nie wymaga funkcji tłumiących). Bazując na tych faktach Menter zaproponował połączenie silnych stron obydwu modeli. Standardowy model $k - \epsilon$ (Rów. 4.2.35-4.2.36) został przetransformowany do opisu $k - \omega$ poprzez podstawienie $\epsilon = \beta^* \omega k$, co prowadzi do postaci [116]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho}k \widetilde{U}_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_{k_t}} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + P_k - \bar{\rho}\beta^* \omega k , \quad (4.2.40)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}\omega) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho}\omega \widetilde{U}_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_{\omega_t}} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] + \alpha_t P_k \frac{\omega}{k} - \bar{\rho}\beta_t \omega^2 + 2\bar{\rho}\sigma_{\omega 2t} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} . \quad (4.2.41)$$

Powstałe równania poza stałymi $\sigma_{k_t}, \sigma_{\omega_t}, \sigma_{\omega 2t}, \alpha_t, \beta_t$ różnią się od standardowego modelu $k - \omega$ (Rów. 4.2.38-4.2.39) o tzw. człon "cross-diffusion" (w którym po transformacji odrzucono człon turbulentny, ponieważ nie wpływa na turbulencje poza warstwą przyścienną [118]). A więc, w modelu BSL wykorzystano funkcję tłumiącą, która jest równa $F_1 = 1$ w warstwie przyściennej, natomiast na jej krawędzi płynnie zanika $F_1 = 0$. Równania 4.2.38-4.2.39 opisujące standardowy model $k - \omega$ zostały przemnożone przez funkcję tłumiącą F_1 , natomiast transformowane równania przez funkcję $(1 - F_1)$, a następnie dodane. Dzięki temu standardowy model $k - \omega$ jest aktywowany w warstwie przyściennej, natomiast transformowany model $k - \epsilon$ poza nią.

- Shear-Stress Transport Model (SST $k - \omega$)

Standardowe modele $k - \epsilon$, $k - \omega$ oraz BSL słabo modelują przepływ w warstwie przyściennej z dużymi dodatnimi gradientami ciśnienia. Dzieje się tak, ponieważ naprężenia turbulentne są przewartościowane przez te modele w obszarze dodatnich gradientów ciśnienia [116]. Z tego względu Menter [116] zaproponował modyfikację lepkości turbulentnej zgodnie z założeniem Bradshawa, które mówi, że w warstwie przyściennej, styczne naprężenia turbulentne są proporcjonalne do energii kinetycznej turbulencji:

$$\tau_{21} = \bar{\rho}a_1 k , \quad (4.2.42)$$

gdzie a_1 jest stałą. Dla warstwy przyściennej, modele turbulencji wyznaczają naprężenia styczne (aproksymując do 2d) z zależności:

$$\tau_{21} = \mu_T \Omega , \quad \text{gdzie} \quad \Omega = \frac{\partial U_1}{\partial x_2} . \quad (4.2.43)$$

Więc, Menter zaproponował następującą modyfikację lepkości turbulentnej [116]:

$$\mu_T = \bar{\rho} \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega; \Omega F_2)} , \quad (4.2.44)$$

gdzie funkcja tłumiąca F_2 jest równa jeden w warstwie przyściennej, a zero poza nią. Powyższa zależność gwarantuje spełnienie założenia Bradshawa (Rów. 4.2.42) w warstwie przyściennej, natomiast poza warstwą przyścienią lepkość turbulentna jest wyznaczana w standardowy sposób.

W późniejszej wersji lepkość turbulentna została zmodyfikowana, zamiast wirowości przyjęty został niezmiennik prędkości deformacji [119]:

$$\mu_T = \bar{\rho} \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega; SF_2)} , \quad \text{gdzie } S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} . \quad (4.2.45)$$

- Model $v^2 - f$

Model zaproponowany w 1991 roku przez Durbina [120] do opisu lepkości turbulentnej używa skali prędkości \bar{v}^2 , która jest utożsamiana z fluktuacją prędkości normalnej do linii prądu. Dodatkowo rozwiązuje rówanie eliptycznej relaksacji f , która uwzględnia informację o nielokalnej korelacji pomiędzy ciśnieniem a prędkością deformacji. Eliptyczna relaksacja wchodzi jako człon źródłowy do równania na skalę \bar{v}^2 , co pozwala uwzględnić tłumienie naprzężeń turbulentnych od ścianki w warstwie przyściennej. Drugą skalą jest skala czasowa T_m . A więc, turbulentną lepkość opisuje zależność:

$$\mu_T = \bar{\rho} C_u \bar{v}^2 T_m . \quad (4.2.46)$$

Skala czasowa jest definiowana jako:

$$T_m = \max \left[\frac{k}{\epsilon}, C_T \left(\frac{\nu}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \right] , \quad (4.2.47)$$

uwzględnia skalę czasową wirów energetycznych (Rów. 4.2.4) w dalszej odległości od ścianki, natomiast w pobliżu ścianki, gdzie turbulencja jest tłumiona ($k \rightarrow 0$) przyjmuje skalę Kołmogorowa (Rów. 4.2.2). Model $v^2 - f$ oprócz równania transportu skali prędkości \bar{v}^2 oraz równania eliptycznej relaksacji rozwiązuje równania transportu energii kinetycznej turbulencji k oraz dyssypacji energii ϵ . Poniższe równania przedstawiają ogólne równania modelu $v^2 - f$ dla skali prędkości oznaczonej jako $g = \bar{v}^2$ lub $g = \frac{\bar{v}^2}{k}$ w zależności od wersji, wówczas:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} k) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} k \bar{U}_i) = P - \bar{\rho} \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] , \quad (4.2.48)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \epsilon \bar{U}_i) = \frac{C_{\epsilon 1} P - C_{\epsilon 2} \epsilon}{T_m} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right] , \quad (4.2.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} g) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} g \bar{U}_i) = S_g + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_g} \right) \frac{\partial g}{\partial x_i} \right] , \quad (4.2.50)$$

$$f - L^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = f_h , \quad (4.2.51)$$

gdzie stałe oraz człony źródłowe dla różnych wersji modelu zostały przedstawione w [121]. Człon f_h w równaniu eliptycznej relaksacji (Rów. 4.2.51) wywodzi się z domknięcia drugiego rzędu, a w oryginalnej formule Durbina został zamodelowany przy użyciu modelu Laudera, jako suma powrotu do izotropii Rotty oraz izotropizacji produkcji [17, 120]:

$$f_h = \frac{C_1}{T} \left[\frac{2}{3} - \frac{\bar{v}^2}{k} \right] + C_2 \frac{P_k}{k} . \quad (4.2.52)$$

4.2.1.1.2 Modele transportu tensora naprężeń turbulentnych (RSM)

Równanie transportu tensora naprężeń turbulentnych wyprowadza się poprzez uśrednienie równania pędu przemnożonego przez wektor prędkości U_i . Tak powstałe równania przybierają postać [105, 122]:

$$\frac{\partial \tau_{ij}^F}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tau_{ij}^F \bar{U}_i \right) = P_{ij} + D_{ij} + \phi_{ij} + \epsilon_{ij} + T_{ij} . \quad (4.2.53)$$

Poszczególne człony oznaczają:

- Produkcja naprężeń turbulentnych:

$$P_{ij} = - \left(\tau_{ik}^F \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} + \tau_{kj}^F \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} \right) . \quad (4.2.54)$$

Naprężenia turbulentne są produkowane poprzez energię głównego przepływu w wyniku deformacji przepływu [123].

- Transport dyfuzyjny naprężeń turbulentnych:

$$D_{ij} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\bar{\rho} U_i'' U_j'' U_k'' + \bar{p}' U_j'' \delta_{ik} + \bar{p}' U_i'' \delta_{jk} - \bar{U}_i'' \tau_{kj}'' - \bar{U}_j'' \tau_{ki}'' \right) . \quad (4.2.55)$$

Transport naprężeń turbulentnych w wyniku: turbulentnej dyfuzji (poprzez fluktuacje prędkości), transport ciśnieniowy oraz molekularną dyfuzję [123].

- Korelacja ciśnienie-prędkość deformacji:

$$\phi_{ij} = \bar{p}' \left(\frac{\partial U_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j''}{\partial x_i} \right) . \quad (4.2.56)$$

Człon ten jest odpowiedzialny za redystrybucję energii turbulencji pomiędzy poszczególnymi kierunkami.

- Dyssypacja naprężeń turbulentnych:

$$\epsilon_{ij} = - \tau_{jk}'' \frac{\partial U_i''}{\partial x_k} - \tau_{ki}'' \frac{\partial U_j''}{\partial x_k} . \quad (4.2.57)$$

- Akceleracja ciśnieniowa oraz lepkościowa:

$$T_{ij} = - \bar{U}_i'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \bar{U}_j'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \bar{U}_j'' \frac{\partial \widetilde{\tau}_{ki}}{\partial x_k} + \bar{U}_i'' \frac{\partial \widetilde{\tau}_{kj}}{\partial x_k} . \quad (4.2.58)$$

Jest członem bezpośrednio wyrażającym efekty ścisliwości.

Do zamknięcia tego równania, aproksymacji wymagają wyrazy $D_{ij}, \phi_{ij}, \epsilon_{ij}, T_{ij}$. Większość modeli RSM pomija efekty ściśliwości turbulencji, poza korektą na człon dyssypacyjny.

Człon interakcji ciśnienie-prędkość deformacji ma największy wpływ na naprężenia turbulentne. Klasycznie, modelowany jest poprzez liniowy model [124–127]:

$$\Pi_{ij} = \Pi_{ij,1} + \Pi_{ij,21} + \Pi_{ij,w} , \quad (4.2.59)$$

gdzie $\Pi_{ij,1}$ zależy od pulsacji prędkości i jest nazywany członem "wolnym" lub powrotem do izotropii. $\Pi_{ij,2}$ jest nazywany członem "gwałtownym", który zależy dodatkowo od średniej prędkości deformacji [128]. Ostatni człon $\Pi_{ij,w}$ reprezentuje redystrybucję normalnych naprężen turbulentnych w pobliżu ścianki, poprzez wzmacnianie naprężen równoległych do ścianki kosztem naprężen prostopadłych do ścianki. Powyższe trzy człony są modelowane przy pomocy liniowych związków, co jest pewnym uproszczeniem. Badania wykazują, że szybkość procesu przechodzenia do izotropii słabnie w miarę zmniejszania się anizotropii przepływu [128].

Ściśliwość w członie interakcji ciśnienie-prędkość deformacji może być uwzględniona poprzez dylatację ciśnieniową [105, 122].

Człon reprezentujący dyssypację energii turbulencji jest modelowany poprzez założenie o jej izotropowości. Ściśliwość tego członu w najprostszej postaci wprowadzana jest przez przedstawienie dyssypacji jako sumy części solenoidalnej oraz dylatacyjnej:

$$\epsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} (\epsilon_h \rho + \epsilon_d) = \frac{2}{3} \delta_{ij} (\epsilon_h \rho + 2\rho \epsilon M_t^2) , \quad (4.2.60)$$

gdzie turbulentna liczba Macha jest definiowana według zależności $M_t = \sqrt{\frac{k}{a^2}}$. Część solenoidalna jest rozwiązywana przy pomocy równania transportu analogicznego jak w standardowym modelu $k - \epsilon$ (Rów. 4.2.36).

Człon dyfuzji turbulentnej modelowany jest za pomocą ogólnego gradientowo-dyfuzyjnego modelu Dalyiego i Harlowa [129]. Wówczas, dyfuzja z pominięciem dyfuzji ciśnieniowej modelowana jest przy pomocy następującego równania:

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\mu \delta_{kl} + C_s \frac{k}{\epsilon} \tau_{kl}^F \right) \widetilde{\frac{\partial U_i'' U_j''}{\partial x_l}} \right] . \quad (4.2.61)$$

Ze względu na to, iż człon opisujący turbulentny transport w powyższym równaniu jest numerycznie niestabilny [130], wprowadza się następujące uproszczenie:

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \widetilde{\frac{\partial U_i'' U_j''}{\partial x_k}} \right] . \quad (4.2.62)$$

4.2.1.1.3 Nieliniowe modele lepkości turbulentnej

Nieliniowe modele lepkości turbulentnej (Nonlinear Eddy Viscosity Models (NEVM)) jest to grupa modeli, która rozszerza hipotezę Boussinesqa poprzez nieliniowe połączenie naprężen turbulentnych z tensorem prędkości deformacji oraz tensorem wirowości [131]:

$$\tau_{ij}^F = -\bar{\rho} \widetilde{U_i'' U_j''} = F(S_{ij}, \Omega_{ij}, \dots) , \quad (4.2.63)$$

gdzie F jest nieliniową funkcją.

W ogólnej postaci powyższą zależność można przedstawić w postaci wielomianu jako [131]:

$$\tau_{ij}^F = -\frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij} + \sum_{n=1}^N \alpha_n' T_{ij}^n , \quad (4.2.64)$$

gdzie skalarne współczynniki α'_n są funkcjami niezmienników tensorów prędkości deformacji, wirowości oraz skal turbulencji. Natomiast tensorzy T_{ij}^n stanowią bazę tensorową złożoną z kombinacji tensorów prędkości deformacji oraz wirowości. Przyjęło się, że przypadku, gdy współczynniki wielomianu 4.2.64 są wyznaczane poprzez numeryczną lub/oraz numeryczną kalibrację, model zalicza się do grupy modeli NEVM [131]. Natomiast, jeżeli współczynniki α'_n wyznaczane są z równania transportu naprężeń Reynoldsa (Rów. 4.2.53) przy pomocy matematycznych operacji, wówczas model nazywany jest ogólnie niejawnym modelem transportu naprężeń (explicit algebraic Reynolds stress models (EARSM)). Ponieważ współczynniki α'_n zależą od skal turbulencji, modele NEVM oraz ich podgrupa EARSM sprzężone są z równaniami transportu tychże skal, najczęściej z analogicznymi równaniami transportu dwu-równaniowych modeli LEVM.

Modele EARSM wyznaczane są na podstawie równania modelu RSM (Rów. 4.2.53). Przy założeniu słabej równowagi turbulencji (efekty konwekcyjnego i dyfuzyjnego transportu mogą być pominięte), Rodi [132, 133] zasugerował, że transport naprężeń turbulentnych jest proporcjonalny do transportu energii turbulencji:

$$\frac{D\tau_{ij}^F}{Dt} - D_{ij} = \frac{\tau_{ij}^F}{k} \left(\frac{Dk}{Dt} - D_k \right) . \quad (4.2.65)$$

Pomijając człony bezpośrednio reprezentujące ściśliwość w równaniu 4.2.32 transportu energii turbulencji, równanie powyższe możemy dalej zapisać jako:

$$\frac{D\tau_{ij}^F}{Dt} - D_{ij} = \frac{\tau_{ij}^F}{k} (P_k - \bar{\rho}\epsilon) . \quad (4.2.66)$$

Podstawiając równanie transportu naprężeń turbulentnych (Rów. 4.2.53) (pomijając człony związane dosłownie ze ściśliwością) do powyższego równania, otrzymujemy:

$$\frac{\tau_{ij}^F}{k} (P_k - \bar{\rho}\epsilon) = P_{ij} + \phi_{ij} + \epsilon_{ij} . \quad (4.2.67)$$

Powyższy układ równań, przy zastosowaniu domknięć analogicznych jak w modelu RSM (Rozdział 4.2.1.1.2) stanowi algebraiczny układ równań, który pozwala wyznaczyć składowe tensora naprężeń turbulentnych. Model ten nosi nazwę algebraicznego modelu naprężeń (Algebraic stress model). Układ algebraicznych równań 4.2.67, stanowi układ równań uwikłanych/niejawnych (tensor naprężeń występuje z obydwóch stron równości), co wymaga iteracyjnego rozwiązywania. Powoduje to numeryczną sztywność tychże modeli, a co za tym idzie problemy ze zbieżnością rozwiązania.

Przy założeniu liniowego przedstawienia członu korekcji ciśnienia-prędkości deformacji, można wyznaczyć jawną zależność na tensor naprężeń turbulentnych tzw. model EARSM. Pierwszy model EARSM, do obliczeń dwu-wymiarowych, zaprezentował w 1975 roku Pope [134], natomiast w wersji trójwymiarowej Gatski w 1999 roku [135]. Menter przedstawił [136] model EARSM w połączeniu z dwu-równaniowym modelem BSL, natomiast przedstawienie EARSM uwzględniające ściśliwość zostało przedstawione przez Gomeza i Girimajiego [137].

4.2.1.2 Modelowanie turbulentnego strumienia ciepła

Turbulentny strumień ciepła (Rów. 4.2.20) można zapisać jako [107]:

$$q_i^T = \overline{\rho U''_i h''} = \widetilde{\rho U''_i h''} = \overline{\rho c_p \widetilde{U''_i T''}} . \quad (4.2.68)$$

Podział modeli wykorzystywanych do modelowania turbulentnego strumienia ciepła jest analogiczny do modeli reprezentujących naprężenia turbulentne [17]. Najpopularniejszą metodą modelowania turbulentnego strumienia ciepła jest metoda analogiczna do hipotezy Boussinesqa

(Rów. 4.2.25), wykorzystująca hipotezę opierającą się na pomocniczej wielkości, charakteryzującą turbulentną dyfuzyjność cieplną α_T , która wiąże turbulentny strumień ciepła z gradientem średniej temperatury [17]. Wśród tej grupy modeli można wyróżnić modele algebraiczne oraz wykorzystujące równania transportu reprezentujące turbulentne własności przepływu, najczęściej modele dwu-równaniowe. Podobnie, w analogii do modeli RSM, istnieją modele rozwiązuające bezpośrednio równania transportu poszczególnych składowych tensora turbulentnego strumienia ciepła [17], jak również modele nieliniowe [18, 19].

W modelowaniu zagadnień cieplno-przepływowych kluczowe jest poprawne odwzorowanie pola prędkości, a tylko dla przepływów o dużej liczbie Rayleigha (konwekcja swobodna) pole temperatury wpływa na pole prędkości. Z tego względu, większą uwagę przykłada się do poprawnego odwzorowania turbulentnego strumienia pędu, a turbulentny strumień ciepła modeluje się przy pomocy prostych algebraicznych modeli z wykorzystaniem koncepcji turbulentnej liczby Prandtla (Rów. 4.2.71), która zakłada że turbulentna wymiana ciepła jest następstwem jedynie turbulentnej wymiany pędu. W większości przypadków daje to zadowalające wyniki, jednakże w przypadku wystąpienia przykładowo oderwania lub przyklejenia przepływu, podobieństwo między polem prędkości a temperatury zanika [18, 19], wówczas, w celu poprawnego odwzorowania wymiany ciepła, powinny zostać użyte bardziej dokładne modele.

W niniejszym rozdziale opisano podstawowe modele algebraiczne, oraz przedstawiono ogólny zarys modeli dwu-równaniowych bazujących na hipotezie gradientowej, w których rozwój duży wkład ma zakład konwersji energii IMP PAN [20–22].

4.2.1.2.1 Modele bazujące na turbulentnej dyfuzyjności cieplnej

Domknięcie, do modelowania turbulentnego strumienia ciepła, wykorzystuje analogię opisu molekularnego strumienia ciepła, opierając się na pomocniczej wielkości charakteryzującej turbulentną dyfuzyjność ciepła α_T , wówczas [17]:

$$\frac{q_i^T}{\bar{\rho} c_p} = \widetilde{U'' T''} = \alpha_T \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} . \quad (4.2.69)$$

Turbulentna dyfuzyjność cieplna ma wymiar analogiczny jak kinematyczna lepkość turbulentna, więc można ją przedstawić przy pomocy analogicznych skal turbulencji (Rów. 4.2.28) [17]:

$$\alpha_T \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right] \sim U \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \cdot L [\text{m}] = \frac{L^2 [\text{m}^2]}{T [\text{s}]} = U^2 \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] \cdot T [\text{s}] . \quad (4.2.70)$$

4.2.1.2.1.1 Modele algebraiczne

Modele algebraiczne do wyznaczenia turbulentnej dyfuzyjności cieplnej, poprzez analogię do przypadku molekularnego, wykorzystują turbulentną liczbę Prandtla [17]:

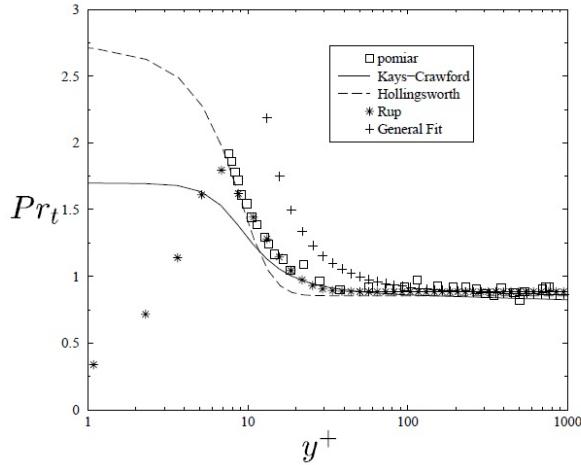
$$Pr_T = \frac{\nu_T}{\alpha_T} = \frac{\mu_T c_p}{k_T} . \quad (4.2.71)$$

Wykorzystując powyższe równanie, turbulentny strumień ciepła, dla hipotezy dyfuzyjności cieplnej (Rów. 4.2.69) przedstawia się zależnością:

$$q_i^T = \bar{\rho} c_p \alpha_T \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} = c_p \frac{\mu_T}{Pr_T} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} = k_T \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} . \quad (4.2.72)$$

A więc, do wyznaczenia turbulentnego strumienia ciepła konieczna jest znajomość lepkości turbulentnej μ_T oraz turbulentnej liczby Prandtla Pr_T . Lepkość μ_T wyznaczana jest z modelu turbulentnego strumienia pędu, natomiast turbulentną liczbę Prandtla $Pr_T = const$ najczęściej

przyjmuje się stałą [17, 138]. Przyjęcie stałej turbulentnej liczby Prandtla jest najczęstszą stosowaną praktyką i daje bardzo dobre wyniki w przypadku, gdy istnieje podobieństwo rozkładu temperatury i prędkości [17]. Jednakże, turbulentna liczba Prandtla, analogicznie jak lepkość turbulentna, nie jest cechą płynu, a przepływu. Przykładowo, w okolicy bliskiej ścianki następuje gwałtowny jej wzrost (Rys. 4.4), z tego względu powstały relacje, uzależniające turbulentną liczbę Prandtla od parametrów płynu i geometrii. Niemniej jednak, dla stosunkowo prostych przepływów nie zauważono różnic w wynikach, pomiędzy proponowanymi modelami, a modelami ze stałą turbulentną liczbą Prandtla Pr_T [17].



Rysunek 4.4: Turbulentna liczba Prandtla w obszarze przyściennym, dane eksperymentalne oraz modele analityczne [17].

Do najpopularniejszych analitycznych modeli przedstawiających turbulentną liczbę Prandtla można zaliczyć [17]:

- Model Kaysa-Crawforda:

$$Pr_T = \frac{1}{0.5882 + 0.228 \left(\frac{\nu_T}{\nu} \right) - 0.0441 \left(\frac{\nu_T}{\nu} \right)^2 \left[1 - \exp \left(\frac{-5.165}{\frac{\nu_T}{\nu}} \right) \right]} . \quad (4.2.73)$$

- Model GF (General Fit):

$$Pr_T = \frac{2}{\left(\frac{\nu_T}{\nu} \right) Pr} + 0.85 . \quad (4.2.74)$$

- Model Rupa:

$$Pr_T = \begin{cases} 0.313 y^+ & \text{dla } y^+ < 6 \\ 1.876 - 0.991 \cdot tgh[0.098(y^+ - 6)] & \text{dla } y^+ \geq 6 \end{cases} . \quad (4.2.75)$$

- Model Hollingswortha:

$$Pr_T = 1.885 - tgh[0.2(y^+ - 7.5)] . \quad (4.2.76)$$

4.2.1.2.1.2 Modele dwu-równaniowe

Modele algebraiczne bazują na założeniu, że turbulentna wymiana ciepła jest następstwem jedynie turbulentnej wymiany pędu [17]. Z tego, względu wyznaczanie turbulentnego współczynnika dyfuzji cieplnej na podstawie równań transportu może być korzystne w sytuacjach, gdy nie ma podobieństwa pomiędzy polem prędkości a temperaturą, między innymi w warstwie przyściennej, układach silnie lub niestacjonarnie obciążonych cieplnie, w sytuacjach występowania dużych gradientów temperatury [17], oraz w miejscach oderwania oraz przyklejenia przepływu (lokalna nierównowaga turbulencji) [18].

Najpopularniejszą grupą modeli są modele bazujące na turbulentnej skali prędkości oraz charakterystycznej skali czasu. Skala prędkości, analogicznie do modeli turbulentnego strumienia pędu, bazuje na energii kinetycznej turbulencji $V = k$. Natomiast, skala czasu jest kombinowaną skalą mechaniczno-termiczną. Jako skalę mechaniczną przyjmuje się $T_m = \frac{k}{\epsilon}$, natomiast termiczna skala czasowa stanowi stosunek wariancji temperatury $\overline{T''^2}$ do szybkości jej destrukcji ϵ_T , a więc współczynnik turbulentnej dyfuzji cieplnej można zapisać w następującej postaci [17]:

$$\alpha_T = k \left(\frac{k}{\epsilon} \right)^l \left(\frac{\overline{T''^2}}{\epsilon_T} \right)^m . \quad (4.2.77)$$

Z analizy wymiarowej wynika, że suma wykładników jest równa jedności $l + m = 1$ [17].

W celu wyznaczenia powyższej zależności niezbędne jest rozwiązanie dwóch równań transportu, jednego dla wariancji temperatury $\overline{T''^2}$, a drugiego dla szybkości destrukcji temperatury ϵ_T . Kilka wariantów tychże równań przedstawiono w pracy [17].

4.2.2 Turbulentna warstwa przyścienna

Turbulentny przepływ w okolicach ścianki jest bardzo skomplikowany. Na ściance, w wyniku lepkości płynu, prędkość oraz jej fluktuacje w kierunku stycznym do ścianki są równe zero $U_1 = 0$, $U_1'' = 0$. Dodatkowo, obecność ścianki w przepływie turbulentnym powoduje tłumienie składowych prędkości normalnych do ścianki przez co przepływ turbulentny staje się anizotropowy [139]. Blokowanie fluktuacji normalnych do ścianki U_2'' tłumii turbulentny transfer pędu w okolicy bardzo bliskiej ścianki, a więc naprężenia turbulentne są bliskie zeru $\tau_{ij}^F = \overline{\rho U_1'' U_2''} \approx 0$ [140]. Naprężenia lepkościowe dominują całkowite naprężenia ścinające, a więc przepływ w sąsiedztwie ścianki jest laminarny.

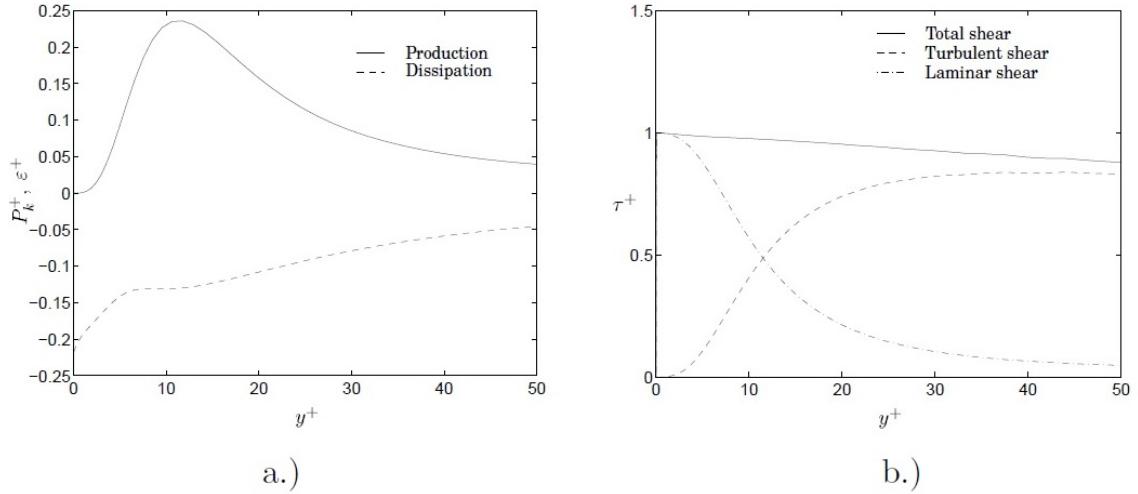
Zerowanie się prędkości stycznej do przepływu na ściance pociąga za sobą powstanie naprężzeń ścinających $\widetilde{\tau_w}$, których wymiarem jest kwadrat prędkości oraz gestość [140]. Na tej podstawie definiuje się prędkość tarcia:

$$U_\tau = \sqrt{\frac{\widetilde{\tau_w}}{\overline{\rho_w}}} . \quad (4.2.78)$$

Prędkość tarcia używana jest do bezwymiarowego opisu warstwy przyściennej, poprzez wprowadzenie bezwymiarowej prędkości oraz odległości od ścianki:

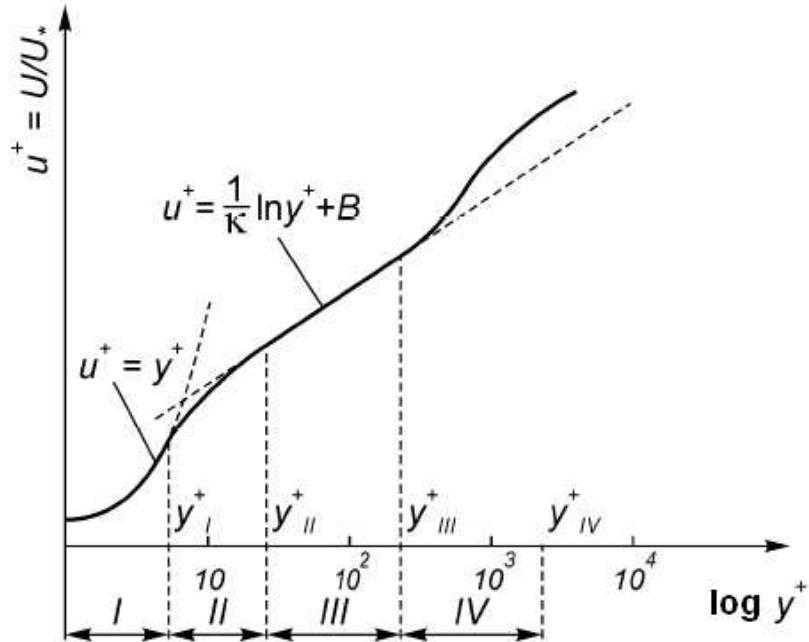
$$u^+ = \frac{\tilde{U}}{U_\tau} \quad y^+ = \frac{U_\tau y}{\nu} , \quad (4.2.79)$$

gdzie prędkość $U = U_1$ jest utożsamiana z prędkością w kierunku stycznym do ścianki, natomiast współrzędna $y = x_2$ ze składową normalną do ścianki.



Rysunek 4.5: Wyniki DNS w warstwie przyściennej przepływu przez rurę dla $Re_t = 395$ dla zerowego gradientu ciśnienia: a.) produkcja oraz dyssypacja energii kinetycznej turbulencji k , b.) lepkościowe, turbulentne oraz całkowite naprężenia styczne [139].

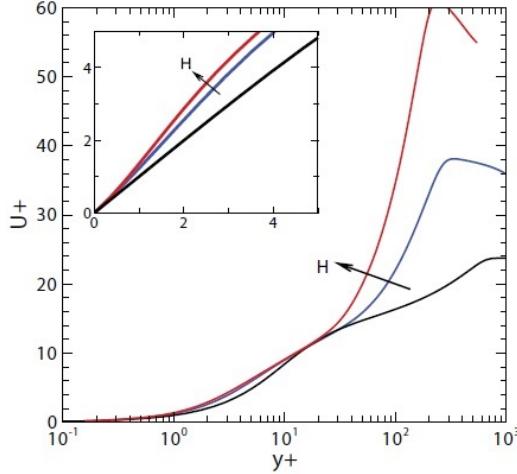
Turbulentna warstwa przyścienna, dla której turbulencja jest w lokalnej równowadze (produkcja jest równa dyssypacji, w obszarze pomijalnej lepkości molekularnej - rysunek 4.5 a.)), dla stosunkowo małych gradientów ciśnienia, może być opisana w uniwersalny sposób przy użyciu współrzędnych bezwymiarowych (Rys. 4.6).



Rysunek 4.6: Profil średniej prędkości w turbulentnej warstwie przyściennej dla zerowego gradientu ciśnienia oraz w stanie równowagi.

W przypadku występowania dużych gradientów ciśnienia, ale zachowując lokalną równowagę turbulencji (lub stan bliski równowagi) turbulentna warstwa przyścienna również zachowuje charakterystyczny kształt, jednakże ulegnie on deformacji [141], a więc da się ją aproksymować logarytmicznym prawem ścianki, jednak zależnym od gradientu ciśnienia.

W przypadku wystąpienia silnej nierównowagi lokalnej (przepływ w obecności fal uderzeniowych [142], przyklejenie warstwy przyściennej za laminarnym oderwaniem [141]) opis przy pomocy prawa ścianki przestaje obowiązywać - rysunek. 4.7.



Rysunek 4.7: Rozkład prędkości w turbulentnej warstwie przyściennej: kolor czarny - zerowy gradient ciśnienia, niebieski oraz czerwony - warstwa przyścienna w nierównowadze lokalnej, odpowiednio dla współczynnika kształtu 2 oraz 2.5 [141].

Turbulentną warstwę przyścienną, będącą w równowadze, przy barku gradientów ciśnienia, możemy podzielić na następujące obszary:

- I – podwarstwa lepka $y^+ \leq 3 \div 5$.

Dwu wymiarowe równanie warstwy przyściennej w warstwie lepkiej ($U'_1 = U'_2 = 0$) po znormalizowaniu przez prędkość tarcia U_τ przyjmuje postać:

$$\frac{\tilde{U}}{U_\tau} = \frac{U_\tau y}{\nu} = \frac{y}{l_\nu}, \text{ więc zgodnie ze wzorami 4.2.79 } u^+ = y^+, \quad (4.2.80)$$

gdzie $l_\nu = \frac{\nu}{U_\tau}$ nazywana jest lepkościową skalą długości charakteryzującą efekty lepkościowe indukowane przez ściankę [140].

- II – strefa przejściowa (buforowa) $3 \div 5 \leq y^+ \leq 30 \div 40$.

Strefa buforowa jest obszarem przejściowym, w którym następuje zanik wpływu lepkości molekularnej, a lepkość turbulentna zaczyna odgrywać znaczenie. Następuje gwałtowny wzrost produkcji energii turbulencji. W strefie buforowej nie obowiązuje ani logarytmiczny (Rów. 4.2.81) ani liniowy (Rów. 4.2.80) opis rozkładu prędkości.

- III – strefa logarytmicznego profilu prędkości $30 \div 40 \leq y^+ \leq 10^2 \div 10^3$.

Jest to strefa, w której lepkość molekularna przestaje mieć wpływ na naprężenia całkowite. Przepływ jest całkowicie turbulentny. Rozkład prędkości opisany jest zależnością:

$$\frac{\tilde{U}}{U_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{U_\tau y}{\nu} \right) + B, \text{ więc } u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln (y^+) + B, \quad (4.2.81)$$

gdzie κ oraz B są stałymi, wyznaczanymi eksperymentalnie.

W strefie logarytmicznej występuje równowaga turbulencji. Produkcja turbulencji jest równa jej dyssypacji.

Podwarstwa lepka, strefa buforowa wspólnie ze strefą logarytmicznego rozkładu prędkości tworzą wewnętrzny obszar turbulentnej warstwy przyściennej, który zajmuje w przybliżeniu 20 % całkowitej grubości warstwy. Jego górną granicą zależy od liczby Reynoldsa, która wraz ze wzrostem liczby Reynoldsa przesuwa się w górę.

- IV – strefa zewnętrzna „prawa śladu” $10^2 \div 10^3 \leq y^+ \leq 2 \cdot 10^3$.

Średnia prędkość w strefie logarytmicznej uwzględnia prędkość ścianki, która jest równa zero. W strefie zewnętrznej, gdzie $\left(\frac{y}{\delta} \rightarrow 1\right)$ prędkość średnia jest porównywalna z prędkością przepływu swobodnego \widetilde{U}_∞ . W zależności od odległości od ścianki, można zapisać dwa prawa opisujące rozkład średniej prędkości, odpowiednio dla obszaru wewnętrznego oraz zewnętrznego [140]:

$$\frac{\widetilde{U}}{U_\tau} = f_1 \left(\frac{U_\tau y}{\nu} \right) \quad \frac{\widetilde{U}_\infty - \widetilde{U}}{U_\tau} = f_2 \left(\frac{y}{\delta} \right) . \quad (4.2.82)$$

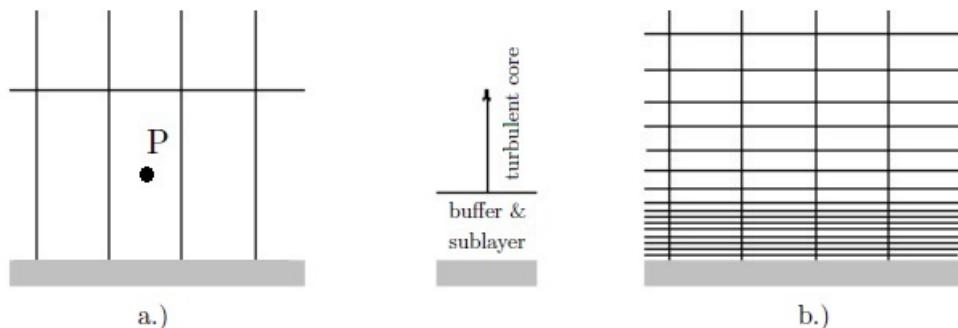
gdzie druga równość nosi nazwę prawa deformacji prędkości. Dla dostatecznie dużych liczb Reynoldsa obszary te nachodzą na siebie, wówczas można wyznaczyć zależności opisujące rozkład średniej prędkości. W strefie wewnętrznej jest to równość 4.2.81 opisująca logarytmiczny rozkład prędkości. Natomiast w strefie zewnętrznej rozkład prędkości przyjmuje postać [140]:

$$\frac{\widetilde{U}_\infty - \widetilde{U}}{U_\tau} = -\frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{\delta} + A . \quad (4.2.83)$$

Obszar wewnętrzny opisany logarytmicznym rozkładem prędkości (Rów. 4.2.81) oraz obszar zewnętrzny (Rów. 4.2.83) nachodzą na siebie. Wielkość wspólnej strefy zależy od liczby Reynoldsa [140].

4.2.2.1 Modelowanie warstwy przyściennej

Uwzględnienie efektów warstwy przyściennej, gdzie występują bardzo duże gradienty prędkości jest niezwykle istotne w zagadnieniach wymiany ciepła.



Rysunek 4.8: Schematyczne przedstawienie dyskretyzacji okolicy ścianki dla modelu: a) wysoko Reynoldsowskiego - funkcja ścianki, b.) nisko Reynoldsowskiego.

Bazując na podziale warstwy przyściennej 4.2.2 można w ogólności wyróżnić dwa podejścia do modelowania obszaru warstwy przyściennej:

- Modele nisko-Reynoldsowskie - rozwiązywanie podwarstwy lepkiej:
Jest to podejście, które polega na rozwiązaniu równań transportu w podwarstwie lepkiej.

Ponieważ wysokość podwarstwy lepkiej jest niewielka $y^+ \leq 3 \div 5$, więc rozmiar elementów domeny obliczeniowej powinien bazować na bezwymiarowym współczynniku wysokości $y^+ \approx 1$ w okolicy ścianki. Prowadzi to do bardzo dużych siatek obliczeniowych w obszarze warstwy przyściennej (Rys. 4.8 b.)).

W podwarstwie lepkiej lepkość molekularna odgrywa dominującą rolę, a przepływ w tym obszarze charakteryzuje się niewielką turbulentną liczbą Reynoldsa [143]:

$$Re_t = k^{1/2} \frac{L_0}{\nu} = \frac{k^2}{\epsilon \nu} , \quad (4.2.84)$$

gdzie L jest skalą długości wirów energetycznych (Rów. 4.2.4) związanych z wielkością rozpatrywanego problemu - grubością warstwy przyściennej. Stąd modele rozwiązujące podwarstwę laminarną nazywane są nisko-Reynoldsowskimi.

- Modele wysoko-Reynoldsowskie - funkcja ścianki:

W podejściu tym pomija się rozwiązywanie podwarstwy lepkiej, a jej wpływ na wielkości przepływu jest uwzględniany poprzez empiryczne korelacje nazywane funkcjami ścianki. Pierwszy punkt obliczeniowy "P" leży w obszarze pełno-turbulentnym (Rys. 4.8 a.)). Dzięki takiemu podejściu, zmniejsza się wielkość zadania obliczeniowego.

Standardowa funkcja ścianki (Rozdział 4.2.2.1.2) została zaprojektowana bazując na założeniach o lokalnej równowadze produkcji turbulencji i jej dyssypacji oraz na braku gradientów ciśnienia, a więc, niedokładnie modeluje większość praktycznych zagadnień inżynierskich. Z tego względu powstało wiele modyfikacji mających na celu bardziej ogólny opis prawa ścianki. Przykładowo funkcja ścianki przedstawiona w rozdziale 4.2.2.1.2, w której prawo ścianki zależy od gradientów ciśnienia, a wyznaczanie wielkości turbulentnych przy pomocy modelu dwu-warstwowego pozwala uwzględnić pewne efekty lokalnej nierównowagi.

Jednakże, funkcje ścianki projektowane są dla pewnych wyidealizowanych sytuacji. Co więcej, w przypadku wystąpienia silnej lokalnej nierównowagi, profil prędkości nie wykazuje logarytmicznego rozkładu (Rys. 4.7). Z tego względu, w przypadku, gdy rozpatrywane zagadnienie wymaga dokładnego odwzorowania warstwy przyściennej, użyty powinien zostać model nisko-Reynoldsowski.

4.2.2.1.1 Modele nisko-Reynoldsowskie

Modele turbulencji takie jak $k-\omega$, Spalart–Allmaras (S-A), v^2-f oraz modele RSM sprzężone z nimi mogą być bezproblemowo zaimplementowane w podwarstwie lepkiej [144, 145]. Jednakże przykładowo model $k-\epsilon$ (oraz niektóre modele RSM) błędnie oszacowuje wartości turbulencji w obszarze przyściennym, co więcej model ten wykazuje numeryczne osobliwości podczas implementacji w tym rejonie [144, 146]. Z powyższych powodów niektóre modele wymagają pewnej modyfikacji w warstwie przyściennej w celu implementacji w rejonie bliskiej ścianki. Wyróżnia się dwa główne podejścia do modyfikacji tychże modeli:

- Funkcja tłumiąca

Jedną z możliwości umożliwiających zastosowanie modeli $k-\epsilon$ w warstwie przyściennej jest zastosowanie funkcji tłumiących turbulencje w okolicach ścianki [147].

$$\mu_T = \bar{\rho} f_u C_u \frac{k^2}{\epsilon} . \quad (4.2.85)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} k) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} k \widetilde{U}_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + P_k - \epsilon \bar{\rho} + E_k , \quad (4.2.86)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}\epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho}\epsilon \widetilde{U}_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right] + f_1 C_{\epsilon 1} P_k \frac{\epsilon}{k} - f_2 C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \bar{\rho} + E_\epsilon \quad , \quad (4.2.87)$$

W celu wprowadzenia wpływu lepkości molekularnej na wielkość naprężen ścinających w podwarstwie lepkiej oraz warstwie buforowej stosuje się funkcję tłumiącą f_u bezpośrednio oddziaływaną na lepkość turbulentną. Lauder [147, 148] zauważał, że naprężenia styczne w warstwie przyściennej redukowane są poprzez fluktuacje ciśnienia, co można uwzględnić poprzez korelacje ciśnienie-prędkość odkształcenia, która jest niezależna od lepkości, więc nie mogą być korelowane jako funkcja zależna od Re_t, Re_y, y_+ . Jednak, ponieważ wpływ obydwu czynników jest trudny do odseparowania, więc funkcja tłumiąca f_u uwzględnia ich wpływ, jest głównie skorelowana względem parametrów odzwierciedlających wpływ lepkości.

W celu zapewnienia odpowiedniego poziomu energii turbulencji k , równanie dyssypacji wymaga odpowiedniego zbilansowania, poprzez funkcje f_1, f_2 [139] oraz dodatkowy człon destrukcyjny E_ϵ .

Gradient prędkości dyssypacji na ściance przyjmuje stałą wartość, jednakże ze względów numerycznych przyjmuje się warunek brzegowy $\epsilon_w = 0$, a w celu skompensowania różnicy wprowadzany jest dodatkowy człon w równaniu transportu energii k [143].

- Model dwu/wielo-warstwowy

Podejście dwuwarstwowe polega na podzieleniu obszaru przyścienego na obszar wewnętrzny, obejmujący podwarstwę lepką wraz z warstwą buforową oraz obszar zewnętrzny, przy pomocy turbulentnej liczby Reynoldsza bazującej na odległości od ścianki [149]:

$$Re_y = \frac{\sqrt{k} y}{\nu} \quad . \quad (4.2.88)$$

W obszarze zewnętrznym ($Re_y > 200$), w którym lepkość molekularna jest pomijalna, używany jest pełno-turbulentny model turbulencji, np. $k - \epsilon$ lub RSM. Natomiast w obszarze wewnętrznym używany jest inny model turbulencji, który bardziej rzetelnie odwzorowuje ten obszar. Najczęściej jest to jedno-równaniowy model transportu energii turbulencji k zaproponowany przez Wolfshtaina [149, 150], w którym lepkość turbulencji opisana jest zależnością:

$$\mu_t = \bar{\rho} C_\mu l_\mu \sqrt{k} \quad . \quad (4.2.89)$$

W modelu Wolfshtaina energia turbulencji k wyznaczana jest ze standardowego równania transportu, natomiast prędkość dyssypacji ϵ z algebraicznej zależności [149]:

$$\epsilon = \frac{k^{3/2}}{l_\epsilon} \quad . \quad (4.2.90)$$

W równaniach 4.2.89, 4.2.90 skale turbulencji l_μ, l_ϵ uwzględniają efekty tłumiące, zależne od turbulentnej liczby Reynoldsa (Rów. 4.2.88).

4.2.2.1.2 Modele wysoko-Reynoldsowskie - funkcja ścianki

Użycie funkcji ścianki ma za zadanie zmniejszenie zadania obliczeniowego, poprzez ograniczenie liczby węzłów w rejonie warstwy przyściennej. W przypadku użycia rzadkiej siatki, pierwszy punkt obliczeniowy leży poza podwarstwą lepką, w której występują bardzo duże gradienty prędkości. W celu poprawnego odwzorowania transportu pędu (Rów. 4.2.17) w tym punkcie niezbędne jest poprawne oszacowanie całkowitych naprężen stycznych $\widetilde{\tau}_{12}^T$.

- Standardowa funkcja ścianki

Standardowa funkcja ścianki została zaprojektowana do modelowania warstwy przyściennej będącej w równowadze oraz bez gradientów ciśnienia. Wówczas całkowite naprężenia styczne są prawie stałe w okolicach ścianki i równe naprężeniom stycznym na ściance [139]:

$$\tilde{\tau}_{12}^T \approx \text{const} \approx \tilde{\tau}_w \quad . \quad (4.2.91)$$

W przypadku użycia stosunkowo rzadkiej siatki, dla której pierwszy punkt obliczeniowy leży w obszarze logarytmicznym, naprężenia ścinające $\tilde{\tau}_{\text{solve}}$ oszacowane na podstawie liniowego rozkładu prędkości, są dużo mniejsze od naprężień rzeczywistych [139]:

$$\tilde{\tau}_{\text{real}} = \tilde{\tau}_w = \mu \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} \Big|_w > \mu \frac{\Delta \tilde{U}}{\Delta y} = \mu \frac{\tilde{U}_p - \tilde{U}_w}{y_p} = \mu \frac{\tilde{U}_p}{y_p} = \tilde{\tau}_{\text{solve}} \quad . \quad (4.2.92)$$

gdzie index p określa pierwszy punkt obliczeniowy "P" przy ściance (Rys. 4.8 a.)).

W przypadku, gdy pierwszy punkt obliczeniowy "P" leży w logarytmicznym obszarze warstwy przyściennej, naprężenia ścinające można oszacować z pominięciem lepkości molekularnej. Dodatkowo, zakładając że gradient prędkości jest równy iloczynowi różnicowemu, możemy zapisać [139]:

$$\tau_{12}^T = (\mu + \mu_t) \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} = \mu_t \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} \approx \mu_t \frac{\tilde{U}_p}{y_p} \quad . \quad (4.2.93)$$

Ponieważ punkt "P" leży w warstwie logarytmicznej, więc w celu korekty naprężeń ścinających wprowadza się modyfikacje lepkości turbulentnej bazując na logarytmicznym rozkładzie prędkości (Rów. 4.2.81), które można zapisać [139]:

$$\tilde{U}_p^+ = \frac{\tilde{U}_p}{U_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln(y_p^+ E) \quad . \quad (4.2.94)$$

Ponieważ naprężenia ścinające są stałe w okolicach ścianki $\tilde{\tau}_{12}^T = \tilde{\tau}_w$, więc wykorzystując definicję prędkości tarcia (Rów. 4.2.78) oraz równanie 4.2.93 możemy zapisać [151]:

$$\mu_t \frac{\tilde{U}_p}{y_p} = \tilde{\tau}_w = \bar{\rho} U_\tau^2 \quad \Rightarrow \quad \mu_t = \frac{U_\tau}{\tilde{U}_p} \bar{\rho} U_\tau y_p \quad . \quad (4.2.95)$$

Punkt "P" leży w logarytmicznej strefie, więc korzystając z równania 4.2.94, możemy zapisać zmodyfikowaną lepkość turbulentną [151]:

$$\mu_{eff} = \frac{\kappa \bar{\rho} U_\tau y_p}{\ln(y_p^+ E)} = \mu \kappa \frac{y_p^+}{\ln(y_p^+ E)} \quad , \quad (4.2.96)$$

która jest używana w równaniu transportu pędu (Rów. 4.2.17) dla punktu "P", dokładniej do obliczenia naprżeń stycznych $\tau_{12}^T = \tau_w$, od którego zależy y^+ (Rów. 4.2.79)) po prawej stronie powyższego równania. Więc powyższe równanie jest rozwiązywane iteracyjnie.

W punkcie "P" równania transportu wielkości turbulentnych są rozwiązywane lub wyznaczane z algebraicznych oraz/lub empirycznych korelacji. Poniżej przedstawione zostały najpopularniejsze metody wyznaczania wielkości turbulentnych, dla standardowej funkcji ścianki, na przykładzie modelu turbulencji $k - \epsilon$.

- Zależność algebraiczna na wartość k :

Do wyznaczenia zależności algebraicznej na wartość energii kinetycznej turbulencji k wykorzystuje się przedstawienie lepkości turbulentnej modelu $k - \epsilon$ (Rów. 4.2.31) oraz dalej korzystając z założenia o lokalnej równowadze produkcji i dyssypacji energii kinetycznej turbulencji, możemy wówczas zapisać [152, 153]:

$$k_p^2 = \frac{\mu_t \epsilon_p}{\bar{\rho} C_\mu} = \frac{\mu_t}{\bar{\rho} C_\mu} \frac{(P_k)_p}{\bar{\rho}} . \quad (4.2.97)$$

Korzystając z przedstawienia produkcji energii turbulencji $(P_k)_p = \tau_{12}^F \frac{\partial \widetilde{U}_p}{\partial y_p} = \tau_w \frac{\partial \widetilde{U}_p}{\partial y_p}$ oraz z równania 4.2.93: $\tau_w = \tau_{12}^T = \mu_t \frac{\partial \widetilde{U}_p}{\partial y_p}$ (zakładając stałości całkowitych naprężeń stycznych w okolicach ścianki), zależność 4.2.97 możemy dalej zapisać [152, 153]:

$$k_p^2 = \frac{\mu_t}{\bar{\rho} C_\mu} \frac{(P_k)_p}{\bar{\rho}} = \frac{\mu_t}{C_\mu} \frac{\tau_w \frac{\partial \widetilde{U}_p}{\partial y_p}}{\bar{\rho}^2} = \frac{\tau_w}{C_\mu \frac{\partial \widetilde{U}_p}{\partial y_p}} \frac{\tau_w \frac{\partial \widetilde{U}_p}{\partial y_p}}{\bar{\rho}^2} = \frac{1}{C_\mu} \frac{\tau_w^2}{\bar{\rho}^2} = \frac{U_\tau^4}{C_\mu} . \quad (4.2.98)$$

Prędkość dyssypacji ϵ_p wyznaczana z empirycznej korelacji [153]:

$$\epsilon_p = \frac{k_p^{3/2}}{C_l y_p} , \quad (4.2.99)$$

gdzie C_l jest stałą empiryczną reprezentującą skalę długości, najczęściej przyjmuje się $C_l = 2.55$ [153].

- Rozwiązywanie równania transportu k :

W przypadku kiedy równanie transportu energii kinetycznej turbulencji k jest rozwiązywane, produkcja energii turbulencji wyznaczana przy pomocy założenia 4.2.91 oraz z zależności na pochodną z prędkości z użyciem logarytmicznego prawa ścianki (Rów. 4.2.94) $\frac{\partial \widetilde{U}_p}{\partial y_p} = \frac{U_\tau}{\kappa y_p}$, wówczas:

$$(P_k)_p = \tau_{12}^T \frac{\partial \widetilde{U}_p}{\partial y_p} = \tau_w \frac{\partial \widetilde{U}_p}{\partial y_p} = \frac{\tau_w^{3/2}}{\bar{\rho}^{1/2} \kappa y_p} . \quad (4.2.100)$$

Wartość prędkości dyssypacji ϵ_p , zarówno wchodząca jako człon źródłowy do równania transportu k oraz zastępująca równanie transportu ϵ , wyznaczana jest z identycznej korelacji jak poprzednio (Rów. 4.2.99).

W literaturze często można spotkać skalowanie warstwy przyściennej zaproponowane przez Laundera i Spaldinga [143]:

$$U^* = \frac{1}{\kappa} \ln(y^* E) , \quad (4.2.101)$$

gdzie u^* oraz y^* przedstawiają się następującymi zależnościami:

$$u^* = \frac{\widetilde{U} C_\mu^{1/4} k^{1/2}}{\frac{\tau_w}{\bar{\rho}}} , \quad y^* = \frac{\bar{\rho} C_\mu^{1/4} k^{1/2} y}{\mu} . \quad (4.2.102)$$

Przy użyciu powyższych bezwymiarowych zależność na produkcję kinetycznej energii turbulencji k (Rów. 4.2.100) wyraża się zależnością [138]:

$$(P_k)_p = \tau_w \frac{\partial \widetilde{U}_p}{\partial y_p} = \tau_w \frac{\tau_w}{\kappa \bar{\rho} C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} y_p} . \quad (4.2.103)$$

Prędkość dyssypacji wyznaczana jest z korelacji 4.2.99 przedstawionej poprzednio [138]:

$$\epsilon_p = \frac{k_p^{3/2}}{C_l^* y_p} = \frac{C_\mu^{3/4} k_p^{3/2}}{\kappa y_p} , \quad (4.2.104)$$

gdzie stała została wyznaczona przy pomocy następującej zależności [138] $C_l^* = \frac{\kappa}{C_\mu^{3/4}}$.

W powyższych równaniach można zauważać, że gdy przyjęte założenia odnośnie warstwy przyściennej są spełnione, to zgodnie z równaniem 4.2.98: $\frac{k^{1/2} C_\mu^{1/4}}{U_\tau} = 1$, a więc $u^+ = u^*$ oraz $y^+ = y^*$.

- Funkcja ścianki turbulencji w nierównowadze

Standardowa funkcja ścianki zaprojektowana została z myślą o odwzorowaniu warstwy przyściennej bez gradientów ciśnienia, pozostającej w lokalnej równowadze. Jeżeli warstwa przyścienna narażona jest na gradienty ciśnienia, wówczas konieczne jest zastosowanie modyfikacji opisu prawa ścianki. Prawo ścianki zależne od gradientów ciśnienia zostało przykładowo zaproponowane przez Kima i Choudhuryego [154] w następującej postaci:

$$\frac{\widehat{U} C_\mu^{1/4} k^{1/2}}{\frac{\tau_w}{\bar{\rho}}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(E \frac{\bar{\rho} C_\mu^{1/4} k^{1/2} y}{\mu} \right) , \quad (4.2.105)$$

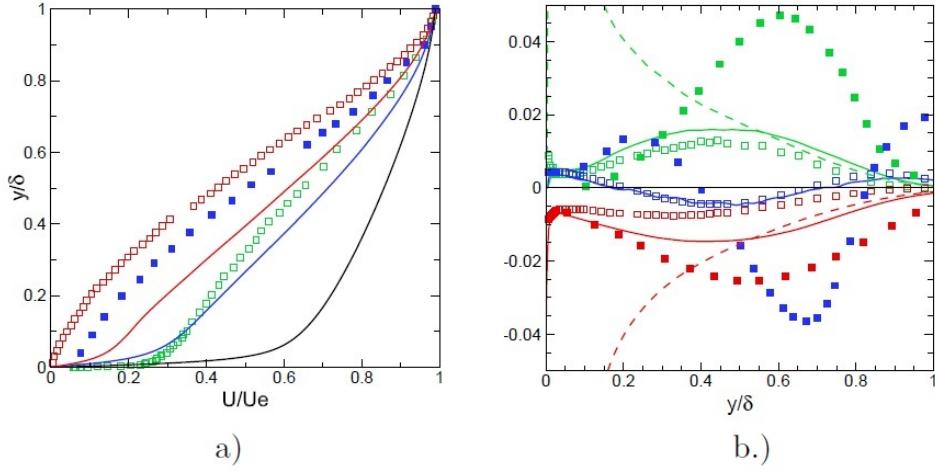
gdzie

$$\widehat{U} = \widetilde{U} - \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} \left[\frac{y_\nu}{\bar{\rho} \kappa k^{1/2}} \ln \left(\frac{y}{y_\nu} \right) + \frac{y - y_\nu}{\bar{\rho} \kappa k^{1/2}} + \frac{y_\nu^2}{\mu} \right] . \quad (4.2.106)$$

Fizyczna grubość podwarstwy lepkiej y_ν w powyższym równaniu może być wyrażona przy pomocy następującej zależności [138]:

$$y_\nu = \frac{\mu y_\nu^*}{\bar{\rho} C_\mu^{1/4} k_p^{1/2}} , \quad (4.2.107)$$

gdzie bezwymiarowa grubość podwarstwy lepkiej wynosi $y_\nu^* = 11.25$.



Rysunek 4.9: Turbulentna warstwa przyścienna z dodatnim gradientem ciśnienia: a) zielony \square - profil prędkości, b.) \square : zielony produkcja turbulencji, czerwony - dyssypacja, niebieski - turbulentny transport [141].

W przypadku wystąpienia gradientów ciśnienia warstwa przyścienna zaczyna odchodzić od lokalnej równowagi (Rys. 4.9), co pociąga za sobą szybką zmianę struktury turbulencji w kierunku przepływu, a więc zmianę wysokości podwarstwy lepkiej. W celu uwzględnienia tych zmian stosuje się tzw. model dwu-warstwowy do wyznaczenia wielkości turbulentnych w punkcie "P". W modelu dwu-warstwowym obszar obejmowany przez objętość kontrolną dzielony jest na podwarstwę lepką oraz obszar pełno-turbulentny, a wielkości turbulentne wyznaczone są w punkcie obliczeniowym "P" poprzez uśrednianie po objętości/powierzchni zadanych w sposób bezwymiarowy profili wielkości turbulentnych. Prowadzi to do relaksacji założenia o lokalnej równowadze [138]).

Wielkości turbulentne mogą być opisane następującymi profilami [138]:

$$\tau_{12}^F = \begin{cases} 0 & , y < y_\nu \\ \tau_w & , y \geq y_\nu \end{cases}, \quad k = \begin{cases} \left(\frac{y}{y_\nu}\right)^2 k_p & , y < y_\nu \\ k_p & , y \geq y_\nu \end{cases}, \quad \epsilon = \begin{cases} \frac{2\nu k}{y^2} & , y < y_\nu \\ \frac{k^{3/2}}{C_l^* y} & , y \geq y_\nu \end{cases}. \quad (4.2.108)$$

Przy pomocy powyższych profili, wartości średnie produkcji kinetycznej energii turbulencji k oraz prędkości dyssypacji ϵ wyznaczane są poprzez uśrednienie (dla elementu hex) [138]:

$$(P_k)_p = \frac{1}{y_n} \int_0^{y_n} \tau_{12}^F \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} dy = \frac{1}{\kappa y_n} \frac{\tau_w^2}{\bar{\rho} C_\mu^{1/4} k_p^{1/2}} \ln \left(\frac{y_n}{y_\nu} \right), \quad (4.2.109)$$

$$\epsilon_p = \frac{1}{y_n} \int_0^{y_n} \epsilon dy = \frac{1}{y_n} \left[\frac{2\nu}{y_\nu} + \frac{k_p^{1/2}}{C_l^*} \ln \left(\frac{y_n}{y_\nu} \right) \right] k_p, \quad (4.2.110)$$

gdzie $y_n = 2y_p$ jest wysokością elementu.

4.2.2.1.3 Wysokości komórek pierwszej warstwy w warstwie przyściennej

Podczas modelowania warstwy przyściennej konieczne jest zbudowanie siatki bazując na bezwymiarowej wysokości y^+ . W przypadku użycia modeli nisko-Reynoldsowskich rozwiązywana

jest podwarstwa lepka, a więc powinna ona zostać zdyskretyzowana bazując na współczynniku $y^+ \approx 1$. W przypadku, użycia funkcji ścianki, pierwszy punkt obliczeniowy powinien leżeć w strefie logarytmicznego rozkładu prędkości, a więc siatkę buduje się bazując na $30 < y^+ < 300$. Algorytm obliczeń rzeczywistej wysokości pierwszego elementu dla danej liczby Reynoldsa wygląda następująco [155]:

Współczynnik oporu tarcia szacuje się korzystając ze wzoru Schlichtinga [66]:

$$C_f = [2 \log_{10}(Re_x) - 0.65]^{-2.3} , \quad \text{dla } Re_x < 10^9 . \quad (4.2.111)$$

Następnie, naprężenia ścinające, a dalej prędkość tarcia wyznacza się z zależności:

$$\tau_w = C_f \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U_\infty^2 , \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} . \quad (4.2.112)$$

Ostatecznie, wysokość pierwszej warstwy komórek w warstwie wyznacza się z zależności:

$$y = \frac{y^+ \mu}{\rho u_\tau} . \quad (4.2.113)$$

4.2.2.2 Modelowanie przejścia laminarno-turbulentnego

W niniejszym rozdziale przedstawiono metody obliczeniowe pozwalające modelować przejście laminarno-turbulentne. Skupiono się przede wszystkim na modelach turbulencji RANS.

4.2.2.2.1 DNS oraz LES

Metoda DNS pozwala najdokładniej odwzorować przepływ. Ponieważ DNS modeluje przepływ poprzez bezpośrednie całkowanie równań N-S, rozwiązuje najmniejsze skale turbulencji, w naturalny sposób odwzorowuje przepływ zarówno laminarny jak i turbulentny oraz przejście pomiędzy tymi stanami. Jednakże ze względu na wysoki koszt obliczeniowy, metodę DNS stosuje się w celu zrozumienia struktury przepływu oraz przy opracowywaniu nowych modeli turbulencji. Przykładowo, przejście laminarno-turbulentne, indukowane oderwaniem, na łopatce turbiny zamodelowane metodą DNS zaprezentowane zostało w [156], natomiast śladem aerodynamicznym w [157].

Mniej kosztowna obliczeniowo metoda dużych wirów (LES) bezpośrednio rozwiązuje większe skale turbulencji, natomiast mniejsze modelującą przy pomocy modeli podsiatkowych jest w stanie modelować przejście laminarno-turbulentne, jednakże wyniki zależą od modelu podsiatkowego [67]. Powszechnie znany jest fakt, że standardowy model podsiatkowy Smagorinskyego nie jest w stanie odpowiednio modelować lepkości turbulentnej w przepływie laminarnym, ze względu na stałą Smagorinskyego, kalibrowaną dla przepływu turbulentnego, co pokazał Germano [158]. Z tego względu zaproponował on dynamiczny model podsiatkowy, który wylicza stałą Smagorinskyego lokalnie [67]. Przy zastosowaniu dynamicznego modelu podsiatkowego, lepkość turbulentna w przepływie laminarnym jest bliska零, co umożliwia dokładniejsze modelowanie przejścia laminarno-turbulentnego. Jednakże model ten przewiduje przejście laminarno-turbulentne indukowane oderwaniem z mniejszą dokładnością od DNS [159], podobnie model podsiatkowy WALE [26]. Podobne rozbieżności pomiędzy LES i DNS w przewidywaniu przejścia laminarno-turbulentnego indukowanego śladem aerodynamicznym zostały zaprezentowane w pracy [160].

4.2.2.2.2 Metoda e^n bazująca na liniowej teorii stabilności

Metoda ta przez wiele lat była najpopularniejszą metodą wyznaczania naturalnego przejścia laminarno-turbulentnego w warstwie przyściennej w zagadnieniach aeronautycznych [67].

Metoda e^n , zaproponowana w latach 60-tych XX wieku niezależnie przez Smitha wraz z Gamberonim [161] oraz von Ingena [162], bazuje na lokalnej liniowej teorii stabilności oraz założeniu przepływu lokalnie równoległego w warstwie przyściennej. Polega ona na badaniu zachowania zaburzeń w laminarnej warstwie przyściennej. Sinusoidalne, niewielkie zaburzenia dodawane są do ustalonego, przepływu laminarnego [162]:

$$\psi(x, y) = \phi(y)e^{-\alpha_i x}e^{i(\alpha_r x - \omega t)}, \quad (4.2.114)$$

gdzie $\phi(y)$, α_i , α_r , ω są odpowiednio amplitudą, współczynnikiem wzmacnienia/tłumienia, liczbą falową oraz częstością. Przykładowo dla przepływu nieściśliwego, superpozycja funkcji zaburzeń oraz równań N-S prowadzi do równania Orra-Sommerfelda [162]. Rozwiążanie tego równania lokalnie, dla poszczególnych przekrojów warstwy przyściennej dostarcza informacji, w którym miejscu zaburzenia zachowują się niestatecznie. Następnie wyznaczany jest współczynnik wzmacnienia amplitudy najbardziej niestatecznych zaburzeń [162]:

$$\frac{A}{A_0} = \int_{x_0}^x e^{-\alpha_i dx} = e^{\int_{x_0}^x -\alpha_i dx} = e^n, \quad (4.2.115)$$

gdzie $n = \int_{x_0}^x -\alpha_i dx$, a x_0 jest początkiem powstania niestateczności. Jeżeli wzmacnienie amplitudy zaburzenia przekroczy wartość e^N następuje przejście laminarno-turbulentne, gdzie wartość N jest wyznaczana eksperymentalnie.

Metoda składa się zasadniczo z trzech kroków:

- rozwiążanie laminarnego przepływu wokół badanego obiektu, w celu otrzymania laminarnego rozkładu prędkości w warstwie przyściennej
- na podstawie laminarnego rozkładu prędkości, przy pomocy liniowej teorii stabilności, wyznaczane jest miejsce początku niestateczności zaburzeń
- przy pomocy empirycznej metody e^n wyznaczany jest punkt inicjalizacji turbulencji, jako punkt wzmacnienia amplitudy zaburzeń o wartość e^N

Głównym problemem metody e^n jest fakt, że współczynnik n nie reprezentuje rzeczywistej amplitudy zaburzenia, ale raczej wzmacnienie początkowo nieznanej amplitudy, która powstaje w wyniku zaburzeń zewnętrznych poprzez w ogólności nieznany proces. Z tego względu współczynnik n musi być kalibrowany eksperymentalnie dla danych warunków zewnętrznych [67]. Co więcej, metoda e^n jest problematyczna w przypadku przejścia laminarno-turbulentnego indukowanego laminarnym oderwaniem. W oderwanym pęcherzu występuje ścieżka wirowa, dla której nie istnieje stateczne laminarne rozwiązanie, a więc lokalny wzrost zaburzeń nie może być wyznaczony przy pomocy liniowej teorii stateczności ani rozwiniętej metody nieliniowej (dopuszcza słabo nieliniowe efekty w przepływie) [67].

Dodatkowo, dla skomplikowanych trój-wymiarowych zagadnień problematyczna jest potrzeba całkowania zaburzeń wzduż linii prądu [67].

4.2.2.2.3 Metody sprężone z modelami RANS

Przepływ turbulentny w obszarze przyściennym charakteryzuje się dużą niejednorodnością oraz anizotropią [11, 163]. Co więcej, występujące często przejście laminarno-turbulentne sprawia, że zagadnienie modelowania warstwy przyściennej jest bardzo wymagające dla modeli RANS. Modele turbulencji RANS takie jak SA, $k - \epsilon$, $k - \omega$ oraz SST pracują jako "pełno-turbulentne" lub modelują pozorny punkt przejścia laminarno-turbulentnego, w miejscu dalekim od rzeczywistego [163, 164]. Jednakże, bardziej zaawansowane modele nisko-Reynoldsowskie RANS, takie

które uwzględniają anizotropię naprzędź Reynoldsa w rejonie bliskim ścianki, bardzo często są w stanie poprawnie odwzorować zjawisko przejścia laminarno-turbulentnego [32, 53, 165].

“Can turbulence models describe transition from laminar to turbulent flow? They are developed for fully turbulent conditions and calibrated with turbulence data; the answer would seem to be ‘no.’ However, most transport equation models do converge to a laminar solution at low Reynolds number and to a turbulent solution at sufficiently high Reynolds number; the model equations do evidence a transition between laminar and turbulent solution branches.” P. A. Durbin and B. A. Pettersson Reif [10]

Durbin [10] twierdzi, że modele turbulencji, które wyznaczają skale turbulencji na podstawie równań transportu są w stanie emulować przejście laminarno-turbulentne. Jednakże, dokładne matematyczne podstawy tego nie są dokładnie zrozumiałe. Durbin wyjaśnia, że takie zachowanie jest własnością równań, a nie fizycznym mechanizmem. A więc, jeżeli rozpatrywane zagadnienie wymaga dokładnego modelowania przejścia laminarno-turbulentnego, model turbulencji powinien być jawnie wyposażony w metodę do tego.

Przez wiele lat, jednymi z najpopularniejszych metod modelowania przejścia laminarno-turbulentnego były nielokalne modele bazujące na empirycznych korelacjach (rozdział 4.2.2.2.3.1), wiążących parametry przepływu z krytyczną liczbą Reynoldsa grubości straty pędu $Re_{\theta t}$ (Rów. 4.2.116). Modele te w celu wyznaczenia miejsca przejścia laminarno-turbulentnego wymagają porównania lokalnej liczby Reynoldsa Re_{θ} z liczbą krytyczną $Re_{\theta t}$, co wymaga znajomości grubości straty pędu θ (Rów. 4.2.117). Pociąga to za sobą konieczność całkowania warstwy przyściennej, co niesie za sobą problemy.

Całkowanie jest wykonywane w kierunku normalnym do ścianki, a więc w większości przypadków metody tej grupy implementowane są do strukturalnych kodów obliczeniowych [67]. Co więcej, w przypadku nowoczesnych, niestrukturalnych solverów projektowanych do obliczeń równoległych, może się zdarzyć, że elementy warstwy przyściennej będą obliczane na różnych procesorach, co uniemożliwia całkowanie [67].

Co więcej, nielokalne modele korelacyjne z natury są dwu-wymiarowe. Efekty takie jak przecieki przez luzy wierzchołkowe lub przepływ wzdłuż prostopadłych ścianek nie może być w nich uwzględniony [67].

Kolejną kwestią przy modelowaniu przejścia laminarno-turbulentnego jest długość obszaru przejściowego. W pierwszych klasycznych nielokalnych modelach bazujących na empirycznych korelacjach, długość obszaru turbulencji była pomijana, tzn. model turbulencji był aktywowany po osiągnięciu przez liczbę Reynoldsa Re_{θ} krytycznej wartości. Następne modele bazowały na algebraicznych, empirycznych korelacjach długości obszaru przejściowego (rozdział 4.2.2.2.3.1), które najczęściej bazują na liczbie Reynoldsa Re_{θ} początku oraz końca obszaru przejściowego. Najpopularniejszą metodą ich implementacji jest użycie koncepcji intermitencji γ , która zapewnia powolny wzrost produkcji turbulencji (lub lepkości turbulentnej) w obszarze przejściowym.

Ze względu na wzrost mocy obliczeniowej komputerów, praktyczne obliczenia inżynierskie wykorzystywane są do obliczeń dotyczących skomplikowanych geometrii, co często wymaga użycia niestrukturalnych siatek oraz wieloprocesorowych obliczeń. Pociągnęło to konieczność stworzenia elastycznych modeli, dających się bezproblemowo implementować do takich solverów, a więc bazujących na zmiennych lokalnych. Menter i in. przedstawili koncepcje modeli empirycznych bazujących na zmiennych lokalnych (Local-Correlation based Transition Modelling (LCTM)), w wyniku czego powstał uniwersalny model $\gamma - Re_{\theta}$ [67, 166–168]. Warty podkreślenia jest fakt, że model ten nie proponował nowego podejścia do modelowania przejścia laminano-turbulentnego w sensie fizycznym, ale dzięki równaniom transportu intermitencji γ

oraz liczby Reynoldsa $Re_{\theta t}$ pozwala zaimplementować dowolne korelacje empiryczne w lokalny sposób [166, 168]. Co więcej wykorzystanie równania transportu intermitencji umożliwia wyznaczenie rozkładu intermitencji na wskroś warstwy przyściennej, a co za tym idzie dokładniejszego odwzorowania procesu przejściowego [67]. Model ten został uproszczony do modelu jedno-równaniowego [169] opisanego w rozdziale 4.2.2.2.3.3. Lokalne modele jedno-równaniowe zostały również zaprezentowane przykładowo przez Durbina [170] oraz Ge i in. [171].

Innym podejściem do modelowania procesu przejścia laminarno-turbulentnego jest podejście bazujące na fizycznym modelowaniu rozwoju turbulencji, poprzez modelowanie rozwoju energii kinetycznej laminarnych fluktuacji opisana w rozdziale 4.2.2.3.5.

4.2.2.2.3.1 Empiryczne korelacje procesu przejścia laminarno-turbulentnego

- **Empiryczne korelacje określające początek przejścia laminarno-turbulentnego w przyklejonej warstwie przyściennej**

Empiryczne korelacje wiążą parametry przepływu mające wpływ na przejście laminarno-turbulentne, takie jak intensywność turbulencji, gradient ciśnienia, wielkość wirów energetycznych z krytyczną liczbą Reynoldsa grubości straty pędu $Re_{\theta t}$. Liczba Reynoldsa grubości straty pędu definiowana jest następująco:

$$Re_{\theta} = \frac{U_{\infty}\theta}{\nu} , \quad (4.2.116)$$

gdzie U_{∞} jest prędkością na krawędzi warstwy przyściennej, natomiast grubość straty pędu dla przepływu ściśliwego opisana jest zależnością:

$$\theta = \int_0^{\infty} \frac{\rho(y)U(y)}{\rho_{\infty}U_{\infty}} \left(1 - \frac{U(y)}{U_{\infty}}\right) dy . \quad (4.2.117)$$

Jedną z pierwszych empirycznych korelacji wiążącą krytyczną liczbę Reynoldsa bazującą na grubości straty pędu (opisującą początek przejścia w turbulencje typu bypass, $Tu > 1\%$) z intensywnością turbulencji Tu została zaproponowana w 1991 roku przez Maylea [172]:

$$Re_{\theta} \geq Re_{\theta t} = 400 Tu^{-0.625} , \quad (4.2.118)$$

gdzie wartość intensywności turbulencji Tu dotyczy krawędzi warstwy przyściennej. Wielkość wirów energetycznych wpływa, przede wszystkim, na szybkość zaniku intensywności turbulencji [25]. W celu uwzględnienia jej w korelacji (Rów. 4.2.118) Mayle zaproponował użycie efektywnej intensywności turbulencji w postaci [172]:

$$(Tu)_{eff} = 1.93 Tu \left(\frac{\theta}{L_0}\right)^{0.2} . \quad (4.2.119)$$

Korelacja Maylea uwzględnia wpływ gradientu ciśnienia w sposób niejawny poprzez grubość straty pędu θ [25].

Korelację dla mniejszych intensywności turbulencji Tu , charakteryzującą naturalne przejście laminarno-turbulentne oraz typu bypass (dla stosunkowo małych Tu), uwzględniającą gradient ciśnienia zaproponowana została przez Abu-Ghannama i Shawa (AGS) [173]:

$$Re_{\theta t} = 163 + e^{F(\lambda_{\theta}) - \frac{F(\lambda_{\theta})}{6.91} Tu} , \quad (4.2.120)$$

gdzie funkcja F jest postaci:

$$F(\lambda_\theta) = \begin{cases} 6.91 + 12.75 \lambda_\theta + 63.64 \lambda_\theta^2 & \text{dla } \lambda_\theta < 0 \\ 6.91 + 2.48 \lambda_\theta - 12.27 \lambda_\theta^2 & \text{dla } \lambda_\theta \geq 0 \end{cases} . \quad (4.2.121)$$

Parametr gradientu ciśnienia wyraża się zależnością:

$$\lambda_\theta = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_\infty}{dS} . \quad (4.2.122)$$

Korelacja AGS jest mało wrażliwa na ujemny gradient ciśnienia, który powinien opóźniać oderwanie [174].

Najogólniejsza korelacja według Dicka oraz Kubackiego [25], została zaproponowana przez Langtryego oraz Menter [166]:

$$Re_{\theta t} = \begin{cases} \left(1173.51 - 589.428 Tu + 0.2196 Tu^{-2} \right) F(\lambda_\theta) & \text{dla } Tu \leq 1.3 \\ 331.5 (Tu - 0.5658)^{-0.671} F(\lambda_\theta) & \text{dla } Tu > 1.3 \end{cases} , \quad (4.2.123)$$

gdzie funkcja F dana jest zależnością:

$$F(\lambda_\theta) = \begin{cases} 1 - \left(-12.986 \lambda_\theta - 123.66 \lambda_\theta^2 - 405.689 \lambda_\theta^3 \right) e^{\left(\frac{Tu}{1.5} \right)^{1.5}} & \text{dla } \lambda_\theta \leq 0 \\ 1 + 0.275 \left(1 - e^{-35\lambda_\theta} \right) e^{\left(-\frac{Tu}{0.5} \right)} & \text{dla } \lambda_\theta > 0 \end{cases} . \quad (4.2.124)$$

W przypadku zerowego gradientu ciśnienia powyższa korelacja daje wyniki podobne do korelacji Maylea oraz AGS.

- **Empiryczne korelacje określające początek przejścia laminarno-turbulentnego indukowanego oderwaniem**

Mayle [172] zaproponował korelacje określające początek x_t oraz koniec obszaru przejściowego x_E dla przejścia laminarno-turbulentnego indukowanego oderwaniem z uwzględnieniem podziału pomiędzy pęcherz krótki oraz długi. Dla pęcherza krótkiego [25, 172]:

$$(Re_x)_{s,t} = (Re_x)_t - (Re_x)_s = 300 Re_{\theta s}^{0.7} , \quad (4.2.125)$$

$$(Re_x)_{t,E} = (Re_x)_E - (Re_x)_t = 400 Re_{\theta s}^{0.7} . \quad (4.2.126)$$

Natomiast dla pęcherza długiego [25, 172]:

$$(Re_x)_{s,t} = (Re_x)_t - (Re_x)_s = 1000 Re_{\theta s}^{0.7} , \quad (4.2.127)$$

$$(Re_x)_{t,E} = (Re_x)_E - (Re_x)_t = 400 Re_{\theta s}^{0.7} , \quad (4.2.128)$$

gdzie indeks s oznacza punkt oderwania, natomiast indeksy t, E odpowiednio początek oraz koniec obszaru przejściowego. W powyższych zależnościach prędkość jest prędkością krawędzi warstwy przyściennej w punkcie oderwania.

Powyższe zależności (Rów. 4.2.125-4.2.128) są niezależne od poziomu turbulencji w przepływie głównym. Powstało wiele korelacji uwzględniających poziom intensywności turbulencji. Według Dicka oraz Kubackiego najrzetelniejsza jest korelacja zaprezentowana przez Suzena i in. [174]:

$$(Re_x)_{s,t} = 874 Re_{\theta s}^{0.71} e^{-0.4 Tu} . \quad (4.2.129)$$

- **Empiryczne korelacje rozkładu intermitencji**

Emmons [175] jako pierwszy scharakteryzował proces przejścia przepływu z laminarnego w turbulentny w warstwie przyściennej jako formowanie się turbulentnych punktów, które rozrastając się, a następnie łącząc się powodują pełną turbulencję warstwy przyściennej. To prowadzi do idei intermitencji, definiowanej jako ułamek czasu dla którego w danym punkcie przepływu jest turbulentny [176].

Jako pierwszy, ogólną, algebraiczną relację opisującą rozkład intermitencji zaproponował Narasimha [25, 176]:

$$\gamma(x) = 1 - e^{-\frac{N\sigma}{U}(x-x_t)^2} = 1 - e^{-\beta_\gamma^2(x-x_t)^2} \quad , \quad (4.2.130)$$

w której współczynnik przestrzennego wzrostu spotów turbulencji β_γ zależy od prędkości produkcji spotów turbulencji w jednostce długości w kierunku poprzecznym $N \left[\frac{1}{sm} \right]$, natomiast współczynnik propagacji spotu turbulencji σ zależy od kształtu spotu oraz prędkości jego rozchodzenia [25].

Prawo opisujące rozkład intermitencji (Rów. 4.2.130) może być zapisane w formie bezwymiarowej jako [25]:

$$\gamma(x) = 1 - e^{-\hat{N}\sigma(Re_x - Re_{ext})^2} \quad , \quad (4.2.131)$$

$$\text{gdzie } Re_x = \frac{Ux}{\nu} \text{ oraz } N\sigma = -\hat{N}\sigma \frac{U^3}{\nu^2} .$$

Mayle [172] zaproponował korelacje dla wzrostu intermitencji dla naturalnego przejścia laminarno-turbulentnego oraz typu bypass dla braku gradientu ciśnienia w postaci [25]:

$$\hat{N}\sigma = 15 \cdot 10^{-12} Tu^{7/4} \quad . \quad (4.2.132)$$

Powyzsza korelacja została rozszerzona o uwzględnienie gradientów ciśnienia przez Stelanta wraz z Dickiem [177] oraz przez Suzena i in. [174].

Abu-Ghannam and Shaw zaproponowali następujące ogólne przedstawienie wzrostu intermitencji [173]:

$$\gamma(x) = 1 - e^{-5\eta^3} \quad , \quad (4.2.133)$$

gdzie η jest bezwymiarową długością daną zależnością $\eta = \frac{x - x_S}{L_t}$, w której L_t określa długość obszaru przejściowego .

W przypadku przejścia laminarno-turbulentnego indukowanego oderwaniem Mayle zaproponował korelacje dla wzrostu intermitencji, w odniesieniu do zależności Narasimha (Rów. 4.2.131) w następującej postaci [25, 172]:

$$\hat{N}\sigma = 22.9 \cdot 10^{-6} Re_{\theta_s}^{-1.4} \quad . \quad (4.2.134)$$

4.2.2.3.2 Modele algebraiczne

Modele algebraiczne bazują na algebraicznym przedstawieniu rozkładu intermitencji. W celu wyznaczenia punktu inicjalizacji turbulencji najczęściej wykorzystywane są empiryczne korelacje 4.2.2.3.1. Dodatkowo, w celu modelowania przejścia laminarno-turbulentnego indukowanego oderwaniem niezbędne jest wykorzystanie empirycznej korelacji opisującej tej proces 4.2.2.3.1. Poniżej przedstawiono przykładowy model algebraiczny Abua-Ghannama i Shawa (AGS), który z przyzwoitą dokładnością modeluje proces przejścia laminarno-turbulentnego w maszynach przepływowych [28].

Model AGS proces przejścia laminarno-turbulentnego modeluje poprzez modyfikacje lepkości turbulentnej [28]:

$$\mu_{eff} = \mu + \gamma\mu_T \quad . \quad (4.2.135)$$

Punkt przejścia laminarno-turbulentnego wyznaczany jest na podstawie empirycznej korelacji opisaną równaniem 4.2.120, natomiast rozkład intermitencji na podstawie zależności 4.2.133. Koniec obszaru przejściowego $x_E = x_t + L_t$ wyznacza się na podstawie liczby Reynolsa bazującej na długości obszaru przejściowego L_t z zależności [28]:

$$Re_{L_t} = 16.8 [(Re_x)_t]^{0.8} \quad , \quad (4.2.136)$$

gdzie lokalna liczba Reynoldsa początku procesu przejściowego:

$$(Re_x)_t = \frac{x_t U_{\infty,t}}{\nu} \quad , \quad (4.2.137)$$

jest znana po wyznaczeniu miejsca x_t początku przejściowego.

W celu wyznaczenia miejsca przejścia laminarno-turbulentnego z zależności 4.2.120 konieczne jest całkowanie warstwy przyściennej, co wymaga znajomości położenia krawędzi warstwy przyściennej, która z definicji jest miejscem w którym prędkość osiąga 99% wartości przepływu głównego. W maszynach przepływowych jest to ciężkie do jednoznacznego określenia, ze względu na skomplikowany charakter przepływu. Grubość warstwy przyściennej można wyznaczyć z zależności Baldwina–Lomaxa [28].

W celu modelowania przejścia laminarno-turbulentnego indukowanego oderwaniem wykorzystano następujący model [28]:

$$Re_{L_{s,t}} = 25000 \lg [\coth(17.32Tu_e)] \quad . \quad (4.2.138)$$

$L_{s,t}$ jest długością łuku od punktu oderwania do inicjalizacji turbulencji. W pracy [28] założono, że długość obszaru przejściowego w przypadku laminarnego oderwania jest równa zero, a więc przepływ przechodzi natychmiastowo w turbulentny.

4.2.2.3.3 Modele transportu intermitencji

Ze względu na możliwość uwzględnienia zmiany intermitencji w kierunku normalnym do ścianki, modele bazujące na równaniu transportu intermitencji umożliwiają bardziej dokładne odwzorowanie procesu przejściowego od modeli algebraicznych, które są z natury jedno-wymiarowe.

Przy użyciu operacji różniczkowania, logarytmowania oraz przekształceń algebraicznych, na podstawie równania 4.2.130, możemy zapisać [25]:

$$\frac{d\gamma}{dx} = 2\beta_\gamma(1-\gamma)\sqrt{-\ln(1-\gamma)} \quad . \quad (4.2.139)$$

Powysze równanie, stanowi bazę dla członu źródłowego równania transportu intermitencji [25], które w ogólności może być zapisane następująco [67]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\gamma) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho}U_i\gamma) = P_\gamma + E_\gamma + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_f} \right) \frac{\partial\gamma}{\partial x_i} \right] \quad , \quad (4.2.140)$$

W równaniu transportu intermitencji, człon produkcji P_γ jest zbudowany w analogii do równania algebraicznego. Przykładowo może on być opisany równaniem 4.2.153. Różnice w członach źródłowych wynikają z procesów upraszczających równanie 4.2.139 [25] oraz z faktu, że ogólne równanie algebraiczne rozkładu intermitencji może być podane w innej postaci, na przykład

w postaci AGS (Rów. 4.2.133). Cz³on dyfuzyjny dodany jest w celu umożliwienia dyfuzji intermitencji na wskro¶ warstwy przy¶ciennej [25].

Istnieje wiele modeli bazuj±cych na równaniu transportu intermitencji. Poniewa¶ intermitencja opisuje rozwój turbulencji w warstwie przejściowej, więc dodatkowo konieczne jest podanie algebraicznej zale¿no¶ci pozwalaj±cej wyznaczy¶ miejsce inicjalizacji turbulencji. Przyk³adowo, opisany poniżej model zaproponowany w 2015 roku przez Mentera [169] wykorzystuje algebraiczną zale¿no¶ć bazuj±cą na zmiennych lokalnych do wyznaczenia miejsca inicjalizacji turbulencji.

Model jedno-równaniowy Mentera [169] jest uproszczoną wersją modelu $\gamma - Re_\theta$ opisanego w rozdziale 4.2.2.3.4. Równanie transportu intermitencji jest postaci 4.2.140, a więc analogiczne jak w modelu $\gamma - Re_\theta$. Cz³on destrukcyjny jest identyczny jak w modelu $\gamma - Re_\theta$. Uproszczony zosta³ natomiast cz³on produkcji (Rów. 4.2.153) do postaci [169]:

$$P_\gamma = F_{length} \rho S \gamma (1 - \gamma) F_{onset} \quad . \quad (4.2.141)$$

Cz³on produkcji ma analogiczne zadanie jak w przypadku modelu $\gamma - Re_\theta$. Modyfikacji uleg³a funkcja kontroluj±ca d³ugo¶ obrazu przejściowego F_{length} , która w obecnym modelu jest sta³a. Cz³on F_{onset} , równie¿ jest analogiczny jak w modelu $\gamma - Re_\theta$, a więc w uproszczeniu [169]:

$$F_{onset} = \max \left(1 - \frac{Re_\nu}{2.193 Re_{\theta c}} ; 0 \right) \quad . \quad (4.2.142)$$

Zmianie natomiast uleg³a procedura wyznaczania krytycznej liczby Reynoldsa $Re_{\theta c}$. Dodatkowe równanie transportu zast±piono zale¿no¶ci¹ algebraiczną:

$$Re_{\theta c} = f(Tu_L, \lambda_{\theta L}) \quad , \quad (4.2.143)$$

zale¿n¹ od zmiennych, które lokalnie imitują wpływ intensywno¶ci turbulencji Tu oraz wspó³czynnika gradientu ci¶nienia λ_θ . W prezentowanym modelu, turbulencja aktywowana jest w srodku warstwy przy¶ciennej. Zmienna imituj±ca intensywno¶ć turbulencji:

$$Tu_L = \min \left(100 \frac{\sqrt{2k/3}}{\omega y} ; 100 \right) \quad , \quad (4.2.144)$$

w której $\omega y \sim Sy \sim U_\infty$ stanowi skale prêdko¶ci, która zastępuje prêdko¶ć na krawędzi warstwy przy¶ciennej. Sformu³owanie 4.2.144 zapewnia równo¶ć Tu_L w srodku warstwy przy¶ciennej z intensywno¶ci¹ turbulencji na brzegu warstwy przy¶ciennej Tu_∞ [169].

Wspó³czynnik gradientu ci¶nienia (Rów. 4.2.122), dla płaskiej płytki mo¿na zapisać jako [169]:

$$\lambda_\theta = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_{1,\infty}}{dx_1} = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_{2,\infty}}{dx_2} \quad . \quad (4.2.145)$$

Powy¿sza zale¿no¶ć jest s³uszna dla krawędzi warstwy przy¶ciennej, jednakże w srodku warstwy przy¶ciennej mo¿e służy¶ jako wskaźnik gradientu ci¶nienia [169]. Grubo¶ straty pêdu θ zosta³a skalowana przy pomocy odleg³o¶ci srodkia warstwy przy¶ciennej $\theta \sim \delta/2 = d_w$. Wspó³czynnik kalibracyjny, zosta³ dobrany tak aby zapewnić zgodno¶ć λ_θ z warto¶ci¹ $\lambda_{\theta L}$ dla srodkia profili laminarnych Falknera-Skana [169]. Ostatecznie wspó³czynnik gradientu ci¶nienia przedstawia zale¿no¶ć [169]:

$$\lambda_{\theta L} = -7.57 \cdot 10^{-3} \frac{d_w^2}{\nu} \frac{dU_2}{dx_2} + 0.0128 \quad . \quad (4.2.146)$$

4.2.2.2.3.4 Model $\gamma - Re_\theta$ - bazujący na zmiennych lokalnych

Model $\gamma - Re_\theta$ jest modelem wykorzystującym jedynie zmienne lokalne, dzięki czemu z łatwością daje się implementować do nowoczesnych niestrukturalnych solverów, projektowanych do obliczeń wieloprocesorowych [167, 168]. Idea wykorzystania zmiennych lokalnych po raz pierwszy zaproponowana została w 2002 roku przez Mentera [167]. W 2004 roku Menter i in. [168] zaprezentowali pierwszy model $\gamma - Re_\theta$, który w 2009 roku został zmodyfikowany przez Langtry i Mentera [166]. Wersja zmodyfikowana z 2009 roku została zaprezentowana poniżej.

Model $\gamma - Re_\theta$ bazuje na klasycznych, nielokalnych korelacjach empirycznych do wyznaczania przejścia laminarno-turbulentnego (rozdział 4.2.2.3.1) oraz długości obszaru przejściowego (rozdział 4.2.2.3.1). Jednakże, dzięki zastosowaniu korelacji (Rów. 4.2.150) pomiędzy liczbą Reynoldsa wirowości (Rów. 4.2.149), a liczbą Reynoldsa grubości straty pędu (Rów. 4.2.116) miejsca przejściowego oraz wykorzystaniu równania transportu liczby Reynoldsa grubości straty pędu miejsca przejściowego $\widehat{Re}_{\theta t}$ konieczność całkowania warstwy przyściennej w celu wyznaczenia grubości straty pędu jest omijana. Dodatkowo wykorzystując równanie transportu intermitencji γ otrzymujemy model zbudowany całkowicie w oparciu o zmienne lokalne.

Menter zaproponował następujące równanie transportu liczby Reynoldsa $\widehat{Re}_{\theta t}$ [166]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{\rho} \widehat{Re}_{\theta t} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{\rho} U_i \widehat{Re}_{\theta t} \right) = P_{\theta t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sigma_{\theta t} (\mu + \mu_t) \frac{\partial \widehat{Re}_{\theta t}}{\partial x_i} \right] , \quad (4.2.147)$$

gdzie produkcja jest modelowana przy pomocy zależności

$$P_{\theta t} = c_{\theta t} \frac{\rho}{t} \left(Re_{\theta t} - \widehat{Re}_{\theta t} \right) (1.0 - F_{\theta t}) , \quad t = \frac{500\mu}{\rho U^2} . \quad (4.2.148)$$

W członie produkcyjnym 4.2.148 liczba Reynoldsa grubości straty pędu miejsca przejściowego $Re_{\theta t}$ obliczana jest z korelacji 4.2.123 w każdym punkcie przepływu swobodnego, a w warstwie przyściennej jest tłumiona poprzez funkcje $F_{\theta t}$. Ponieważ w korelacji 4.2.123 występuje grubość straty pędu θ_t zarówno po lewej stronie (w definicji liczby Reynoldsa - Rów. 4.2.116) jak i po prawej stronie, w funkcji λ_θ (Rów. 4.2.122), więc równanie 4.2.123 rozwiązywane jest iteracyjnie (w celu wyznaczenia poprawnego θ_t). W pierwszym kroku zakłada się brak gradientów ciśnienia, a więc $\lambda_\theta = 0$, co pozwala wyznaczyć $Re_{\theta t}$ ze wzoru 4.2.123, a następnie θ_t z definicji 4.2.116. Procedura jest powtarzana, aż do osiągnięcia zbieżności względem θ_t [166].

Człon produkcyjny (Rów. 4.2.148) jest zaprojektowany tak, aby w przepływie swobodnym wartość $\widehat{Re}_{\theta t}$ była równa wartości $Re_{\theta t}$ wyliczonej z korelacji. Natomiast, w warstwie przyściennej produkcja $P_{\theta t}$ jest tłumiona, a $\widehat{Re}_{\theta t}$ dzięki dyfuzji przenika do warstwy przyściennej [166]. Dzięki temu wartości liczby Reynoldsa $\widehat{Re}_{\theta t}$ są wyznaczane lokalnie w warstwie przyściennej.

W celu wprowadzenia lokalnego kryterium inicjalizacji turbulencji Menter [167], zaproponował korelację pomiędzy liczbą Reynoldsa wirowości:

$$Re_\nu = \frac{\rho y^2}{\mu} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| = \frac{\rho y^2}{\mu} S , \quad (4.2.149)$$

a liczbą Reynoldsa grubości straty pędu Re_θ , która dla laminarnego profilu Blasiusa (bez gradientów ciśnienia) przyjmuje postać [166]:

$$Re_\theta = \frac{\max(Re_\nu)}{2.193} . \quad (4.2.150)$$

Dzięki wykorzystaniu zależności 4.2.150 punkt przejścia laminarno-turbulentnego może być wyznaczony bazując wyłącznie na zmiennych lokalnych. Mianowicie, po przekroczeniu przez

liczbę Reynoldsa wirowości Re_ν (przeskalowanej, przykładowo zgodnie z równaniem 4.2.150) liczby Reynoldsa $\widehat{Re}_{\theta t}$ wyznaczonej z równania transportu, następuje inicjalizacja turbulencji:

$$Re_\theta = \frac{\max(Re_\nu)}{2.193} \geq \widehat{Re}_{\theta t} \quad . \quad (4.2.151)$$

Dokładniej, aktywacja intermitencji następuje dla liczby krytycznej Reynoldsa grubości straty pędu $Re_{\theta c}$, mniejszej od $Re_{\theta t}$, ze względu na czas potrzebny do zbudowania odpowiedniego poziomu turbulencji w miejscu x_t pojawienia się pierwszych spotów turbulencji [166]. Zależność opisująca krytyczną liczbę Reynoldsa $Re_{\theta c} = F(\widehat{Re}_{\theta t})$ w funkcji $\widehat{Re}_{\theta t}$ została podana w [166]. Ponieważ $y^2 S$ odpowiada za wzrost perturbacji w warstwie przyściennej, natomiast lepkość kinematyczna ν tłumie je, co fizycznie uzasadnia użycie liczby Reynoldsa wirowości Re_ν (Rów. 4.2.149) w powyżej przedstawionym rozumowaniu [166].

Po wyznaczeniu miejsca inicjalizacji turbulencji, rozwój turbulencji w obszarze przejściowym, jest kontrolowany poprzez parametr intermitencji γ , którego rozkład jest wyznaczany na podstawie następującego równania transportu [166]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}\gamma) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho}U_i\gamma) = P_\gamma + E_\gamma + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_f} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \right] \quad . \quad (4.2.152)$$

W powyższym równaniu człon produkcji intermitencji modelowany jest poprzez zależność [166]:

$$P_\gamma = F_{length} c_{a1} \rho S [\gamma F_{onset}]^{0.5} (1 - c_{e1} \gamma) \quad . \quad (4.2.153)$$

Produkcja intermitencji P_γ kontrolowana jest poprzez funkcję F_{onset} , która jest równa zero w przepływie laminarnym, a po inicjalizacji turbulencji gwałtownie rośnie [67]. Długość obszaru przejściowego kontrolowana jest poprzez funkcję F_{length} , która jest empiryczną korelacją zależną od $\widehat{Re}_{\theta t}$, wyznaczoną na podstawie serii numerycznych testów [166]. Ostatni człon w równaniu 4.2.153 zapobiega przekroczeniu przez intermitencje wartości jedności.

Człon destrukcyjny w równaniu transportu intermitencji, modelowany w postaci:

$$E_\gamma = c_{a2} \rho \Omega \gamma F_{turb} (c_{e2} \gamma - 1) \quad , \quad (4.2.154)$$

zapewnia aby intermitencja pozostała bliska零u w obszarze laminarnej warstwy przyściennej oraz podwarstwy lepkiej poprzez człon $F_{turb} = e^{-(R_t/4)^4}$, który wyłącza destrukcję w przepływie turbulentnym. Dodatkowo człon destrukcyjny umożliwia laminaryzację, w przypadku dużego ujemnego gradientu ciśnienia [67].

Stała c_{a2} zapewnia, aby człon destrukcyjny był mniejszy od członu produkcji P_γ co do wartości, w przypadku spełnienia kryterium turbulencji [67]. Natomiast stała c_{e2} , kontroluje dolną granicę intermitencji na poziomie 0.02 [67].

Fakt wzrostu liczby Reynoldsa wirowości Re_ν wraz ze wzrostem współczynnika kształtu laminarnej warstwy przyściennej (w przypadku dodatnich gradientów ciśnienia) umożliwia wykorzystanie modelu do modelowania przejścia laminarno-turbulentnego indukowanego oderwaniem [166]. Jednakże, z numerycznych eksperymentów otrzymano zbyt powolny rozwój turbulencji w tym przypadku, co skutkowało zbyt późnym przejściem w pełną turbulencję w oderwanej warstwie, a więc zbyt późnym przyklejeniem warstwy [67]. Zastosowana więc została korekcja intermitencji γ_{sep} , umożliwiająca gwałtowny jej wzrost powyżej wartości jeden, po przekroczeniu punktu inicjalizacji turbulencji [67], w przypadku wystąpienia oderwania. Dzięki temu, w obszarze warstwy ścinanej laminarnego oderwania, następuje wzrost produkcji turbulentnej energii kinetycznej, co skutkuje poprawą otrzymanych wyników [67]. Wartość intermitencji w oderwanej warstwie przyściennej przekracza jeden, więc efektywną wartość intermitencji

wyraża zależność [67]:

$$\gamma_{eff} = \max(\gamma, \gamma_{sep}) \quad . \quad (4.2.155)$$

4.2.2.2.3.5 Modele fluktuacji laminarnej energii kinetycznej

Modele tej grupy bazują na idei rozwoju energii kinetycznej laminarnych fluktuacji zaprezentowanej po raz pierwszy przez Maylea and Schulza [178]. Laminarna energia kinetyczna reprezentuje rozwój fal Tollmien-Schlichting w przypadku naturalnego przejścia lub zaburzeń Klebanoffa w przypadku przejścia typu bypass (lub niestabilności Kelvina-Helmholtza). Laminarna energia kinetyczna wzrasta w laminarnej warstwie przyściennej, a inicjalizacja turbulencji następuje po przekroczeniu przez nią krytycznego poziomu.

Mayle and Schulz [178] w swoim modelu zaproponowali wzrost laminarnej kinetycznej energii w wyniku transportu energii przepływu głównego do warstwy przyściennej poprzez ciśnieniową dyfuzję (fluktuacje ciśnienia) [179]. Jednakże, numeryczne badania [180] dowiodły, że rozwój laminarnej energii turbulencji wywołany jest poprzez duże struktury wirowe (porównywalne z grubością warstwy przyściennej) [179, 181, 182] i związany jest z interakcją naprężeń ściągających (związanych z laminarnymi fluktuacjami) z odkształceniami ściągającymi [25, 179], co wyjaśnia fakt utraty pędu w warstwie przyściennej w obecności laminarnych fluktuacji [179]. Z tego względu, laminarna kinetyczna energia może być opisana równaniem analogicznym do równania turbulentnej energii kinetycznej, a naprężenia związane z laminarnymi fluktuacjami mogą być opisane przy pomocy koncepcji analogicznej do lepkości turbulentnej [25]. Pierwszy model wykorzystujący powyższą analogię został zaprezentowany przez Waltersa i Leylekiego [182], a następnie ulepszony przez Waltersa i Cokljata [179]. W modelach tych całkowita lepkość fluktuacji $\mu_{Tot} = \mu_{T,s} + \mu_{T,l}$ została podzielona na część turbulentną $\mu_{T,s}$ związaną z małymi skalami oraz część laminarną $\mu_{T,l}$, związaną z dużymi skalami, odpowiedzialną za produkcję laminarnej energii kinetycznej k_L . Analogicznie, całkowita energia kinetyczna fluktuacji $k_{Tot} = k_T + k_L$ została podzielona na część turbulentną k_T oraz laminarną k_L , dla której wprowadzono dodatkowe równanie transportu. Produkcja laminarnej energii kinetycznej składa się z dwóch członów odpowiedzialnych za rozwój zaburzeń Klebanoffa oraz fal T-S. Inicjalizacja turbulencji, w przypadku naturalnego przejścia, kontrolowana jest przez liczbę Reynoldsa $Re_\Omega = \tau_d/\tau_{TS} = y^2\Omega/\nu$, a więc stosunek skali czasowej molekularnej dyfuzji w pobliżu ścianki $\tau_d = y^2/\nu$ i skali czasowej fal T-S, oszacowanej jako $\tau_{TS} = 1/\Omega$. Natomiast przejście typu bypass inicjalizowane jest po przekroczeniu krytycznej wartości przez $Re_k = \tau_d/\tau_r = k/(\nu\Omega)$, a więc zależy od stosunku skali czasowej molekularnej dyfuzji w połowie grubości warstwy przyściennej $\tau_d = k/(\nu\Omega^2)$ i skali czasowej małych skal turbulencji (izotopowej), oszacowanej jako $\tau_r = 1/\Omega$. Po inicjalizacji turbulencji, w obszarze przejściowym następuje równoczesny transfer energii kinetycznej laminarnej k_L do turbulentnej k_T , wraz z równoczesnym zmniejszaniem się skal turbulencji, a więc rozpoczęciem produkcji energii turbulentnej [179].

4.2.2.3 Chropowatość powierzchni

Chropowatość powierzchni przyśpiesza przejście laminarno-turbulentne (rozdział 2.1.2) oraz wpływa na turbulentną warstwę przyścienną. W turbulentnej warstwie przyściennej, chropowatość powoduje zaburzanie lub całkowitą destrukcję podwarstwy lepkiej, co wpływa znaczco na parametry przepływu, a tym samym na proces wymiany ciepła w rejonie warstwy przyściennej. Rzeczywista chropowatość jest ciężka do jednoznacznego opisania, ze względu na niejednorodność rzeczywistej powierzchni. Istnieje wiele opisów wysokości chropowatości, do najpopularniejszych można zaliczyć chropowatość R_a mierzoną przy pomocy metody średniej arytmetycznej

odchylenia profilu od linii średniej, lub R_z będącą wysokością chropowatości według dziesięciu punktów profilu. Co więcej, poza wysokością chropowatości, parametry przepływu zależą również od jej struktury. Z tego względu, Schlichting [66] wprowadził standardową chropowatość tzw. chropowatość piaskową. Idea chropowatości piaskowej polega na pokryciu powierzchni, tak gęsto jak to możliwe, kulkami (ziarnami piasku) o równej średnicy k_S . Taki wyidealizowany opis, może być odwzorowany poprzez eksperyment, w wyniku pokrycia badanej powierzchni ziarnami piasku, co po raz pierwszy wykorzystał Nikuradse [183] do oszacowania zależności pomiędzy spadkiem ciśnienia w rurze, a liczbą Reynoldsa oraz chropowatością. Wyniki otrzymane przez Nikuradse'ego zostały rozszerzone przez Colebrooką [184], a następnie przedstawione w formie graficznej przez Moody'ego [185]. Z wykresu Moody'ego, na podstawie bezwymiarowej wysokości (Rów. 4.2.79), nazywanej, w odniesieniu do wysokości chropowatości, liczbą Reynoldsa chropowatości [66]:

$$k^+ = \frac{U_\tau k}{\nu} , \quad (4.2.156)$$

można wyróżnić trzy obszary wpływu chropowatości [66]:

- $k_S^+ < 5$ - obszar hydrodynamicznie gładki.

Chropowatość leży całkowicie w podwarstwie lepkiej. Wpływ chropowatości jest pomijalny.

- $5 \leq k_S^+ < 70$ - obszar przejściowy.

Wysokość chropowatości wychodzi poza podwarstwę lepką. Pojawiają się zakłócenia podwarstwy lepkiej, co zaczyna wpływać na przepływ w warstwie przyściennej.

- $k_S^+ \geq 70$ - obszar całkowicie szorstki.

Wysokość chropowatości wchodzi w strefę logarytmicznego rozkładu prędkości. Podwarstwa lepka jest całkowicie zaburzona.

Większość modeli turbulencji używa korelacji pozwalających uwzględnić wpływ chropowatości na turbulentną warstwę przyścienną w zależności od chropowatości piaskowej k_S . W zagadnieniach praktycznych konieczne jest więc, zastąpienie rzeczywistej chropowatości poprzez równoważną chropowatość piaskową $k_{S,eq}$, wywołującą taki sam efekt na przypływ jak rzeczywista. Do jej oszacowania, można wykorzystać zależność zaproponowaną przez Adamsa i in. [186]:

$$k_{S,eq} = 0.978R_z , \quad k_{S,eq} = 5.863R_a . \quad (4.2.157)$$

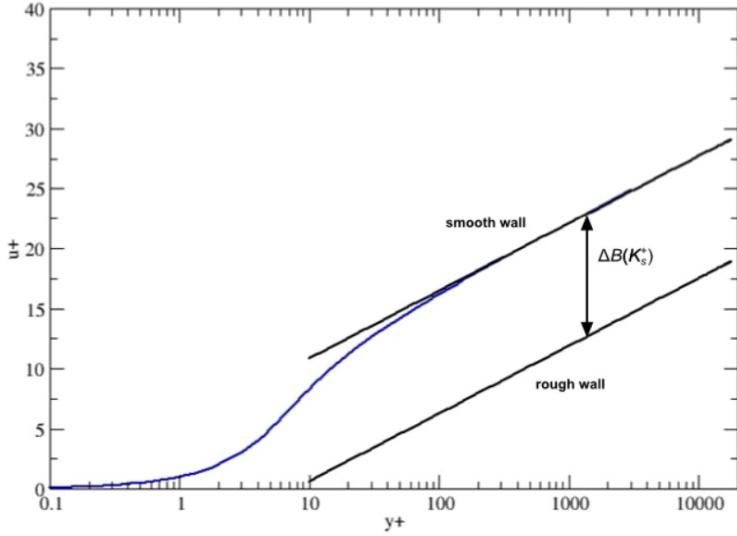
Jednakże, ze względu na to, iż rzeczywiste parametry chropowatości odgrywają większe znaczenie na proces przejścia laminarno-turbulentnego od chropowatości piaskowej [138], więc korelacje opisujące ten proces bazują na rzeczywistych wielkościach chropowatości.

4.2.2.3.1 Wpływ chropowatości na turbulentną warstwę przyścienną

W zależności od użytego podejścia do modelowania warstwy przyściennej, chropowatość ścianki może być uwzględniana w następujący sposób:

4.2.2.3.1.1 Funkcja ścianki

Eksperymentalne badania pokazały, że podczas opływu przez chropowatą powierzchnię, profil prędkości w strefie logarytmicznej turbulentnej warstwy przyściennej ma takie samo nachylenie jak w przypadku opływu przez gładką powierzchnię, jednakże jest odsunięty od niej (Rys. 4.10).



Rysunek 4.10: Wpływ chropowatości ścianki na przesunięcie średniego profilu prędkości turbulentnej warstwy przyściennej [138].

A więc można napisać zmodyfikowane prawo ścianki, analogiczne do zależności 4.2.101 [138]:

$$\tilde{U}^* = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^*) - \Delta B \quad , \quad (4.2.158)$$

gdzie przesunięcie ΔB jest wyznaczane w zależności od poziomu chropowatości [138, 187]:

$$\Delta B = \begin{cases} 0 & \text{dla } k_S^+ < 2.25 \\ \frac{1}{\kappa} \ln \left[\frac{k_S^+ - 2.25}{87.75} + c_S k_S^+ \right] \sin \left[0.4258 \left(\ln(k_S^+) - 0.811 \right) \right] & \text{dla } 2.25 \leq k_S^+ < 90 \\ \frac{1}{\kappa} \ln \left[1 + c_S k_S^+ \right] & \text{dla } 90 \leq k_S^+ \end{cases} \quad (4.2.159)$$

W zależności powyżej można zauważać odmienny podział, pomiędzy obszarami wpływu chropowatości, niż przedstawiony poprzednio, w rozdziale 4.2.2.3. Wynika to z faktu, iż poprzedni podział bazował na wynikach dla równomiernego rozkładu wielkości ziaren [188].

Z rysunku 4.10 widać, że w przypadku dużej chropowatości oraz gęstej siatki mogą pojawiać się osobliwości (ujemna prędkość). W celu ich wyeliminowania, najczęściej stosuje się wirtualne odsunięcie ścianki, poprzez [138]:

$$y^+ = y^+ + k_S^+/2 \quad . \quad (4.2.160)$$

Powyzszy zabieg bazuje na obserwacjach odnośnie istnienia niezaburzonej podwarstwy lepkiej, jedynie w przypadku hydrodynamicznie gładkiej ścianki. A więc, można założyć, że chropowatość charakteryzuje się efektem blokady w wielkości około 50% jej wysokości [138].

4.2.2.3.1.2 Modele nisko-Reynoldsowskie

Dla nisko-Reynoldsowskich modeli turbulencji, bazujących na hipotezie lepkości turbulentnej, uwzględnienie chropowatości powierzchni najczęściej odbywa się poprzez korekcję wielkości turbulentnych takich jak energia turbulencji lub prędkość dyssypacji lub poprzez modyfikację lepkości turbulentnej [24, 189]. Przykładowo w modelu $k-\omega$ (Wilcox (1988) [114]) korekcji ulega

warunek brzegowy na częstotliwość turbulencji ω_w na ściance [114]:

$$\omega_w = \frac{u_\tau^2 S_R}{\nu} , \quad S_R = \begin{cases} \left(\frac{50}{k_S^+}\right)^2 & \text{dla } k_S^+ \leq 25 \\ \frac{100}{k_S^+} & \text{dla } 25 < k_S^+ \leq 2000 \end{cases} . \quad (4.2.161)$$

Dla modelu SST 4.2.1.1.1 Hellsten i Laine [190] zaproponowali dodatkowo modyfikację lepkości turbulentnej 4.2.44, poprzez wprowadzenie dodatkowej funkcji tłumiącej F_3 :

$$\mu_T = \frac{a_1 \bar{\rho} k}{\max(a_1 \omega; |\Omega| F_2 F_3)} . \quad (4.2.162)$$

Funkcja tłumiąca F_2 jest równa jeden w warstwie przyściennej, a zero poza nią, gwarantując spełnienie założenia Bradshawa (Rów. 4.2.42) w warstwie przyściennej dla standardowego modelu SST. W przypadku opływu przez powierzchnię chropowatą, w rejonie bliskim ścianki, lepkość turbulentna nie jest pomijalna w porównaniu do lepkości molekularnej i założenie Bradshawa nie jest spełnione [190]. Z tego względu funkcja F_3 jest równa zero w obszarze podwarstwy lepkiej, a więc tłumia funkcję F_2 w podwarstwie lepkiej, pozwalając wyznaczyć lepkość turbulentną w rejonie podwarstwy lepkiej, w sposób jak dla modelu $k - \omega$.

4.2.2.3.2 Wpływ chropowatości na przejście laminarno-turbulentne

Podstawową zaletą modeli określających przejście laminarno-turbulentne na podstawie empirycznych korelacji jest fakt możliwości uwzględnienia w nich dowolnych mechanizmów wpływających na inicjalizację turbulencji [67].

W modelu $\gamma - Re_\theta$, zaproponowanym przez Mentera [168], korelacja określająca wpływ chropowatości na proces przejścia laminarno-turbulentnego stosowana jest do korekty liczby Reynoldsa $\widehat{Re}_{\theta t_R}$, która wykorzystywana jest w kryterium inicjalizacji turbulencji (Rów. 4.2.151) oraz w funkcji F_{length} , występującej w równaniu transportu intermitencji (Rów. 4.2.148), określającej długość obszaru przejściowego. Korelacja, wykorzystana w modelu $\gamma - Re_\theta$ grupy Mentera, jest utajiona [166]. Jednakże Elsner i Warzecha [24] zaproponowali korelacje do modelu $\gamma - Re_\theta$, która daje porównywalne wyniki z "oryginalną" zależnością, w następującej postaci:

$$\widehat{Re}_{\theta t_R} = \begin{cases} \widehat{Re}_\theta & \text{dla } k_r/\delta^* < 0.01 \\ \left(\frac{1}{\widehat{Re}_\theta} + 0.0061 f_\Lambda \left(\frac{k_r}{\delta^*} - 0.01 \right)^{f_{Tu}} \right)^{-1} & \text{dla } k_r/\delta^* > 0.01 \end{cases} , \quad (4.2.163)$$

gdzie k_r jest rzeczywistą wysokością chropowatości, δ^* grubością straty pędu, f_Λ jest stałą zależną od struktury chropowatości, natomiast f_{Tu} jest funkcją intensywności turbulencji.

4.3 Metoda objętości skończonych

W zagadnieniach CFD najpopularniejszą metodą numeryczną jest metoda objętości skończonych (MOS), bazująca na konserwatywnej, całkowej postaci równań N-S. FVM pracuje na objętościach skończonych, nie na węzłach, traktując elementy siatki jako brzeg rozpatrywanych objętości, z tego względu z natury jest konserwatywna [191]. Co więcej, użycie całkowej postaci równań umożliwia modelowanie nieciągłości w polach przepływu, np. fal uderzeniowych.

MOS w zastosowaniach CFD bazuje na konserwatywnej, całkowej postaci równań N-S:

- równanie zachowania masy 4.1.6:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \oint_S (\rho \vec{U}) \cdot \vec{n} dS = 0 \quad . \quad (4.3.1)$$

- równanie zachowania pędu 4.1.10 [192]:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \vec{U} d\Omega + \oint_{d\Omega} \left[(\rho \vec{U}) \oplus \vec{U} \right] \cdot \vec{n} dS = \\ & = \oint_{\partial\Omega} \mu \left[\nabla(\vec{U}) \right] \cdot \vec{n} dS - \oint_{\partial\Omega} p \vec{n} dS + \oint_{\partial\Omega} \mu \left[\nabla(\vec{U}) \right]^T \cdot \vec{n} dS + \oint_{\partial\Omega} \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{U}) \cdot \vec{n} dS + \int_{\Omega} \rho \vec{f}_e d\Omega \quad . \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

- równanie zachowania energii 4.1.20 dla energii wewnętrznej $e = E - \frac{\vec{U}^2}{2}$ (Rów. 4.1.17) [192]:

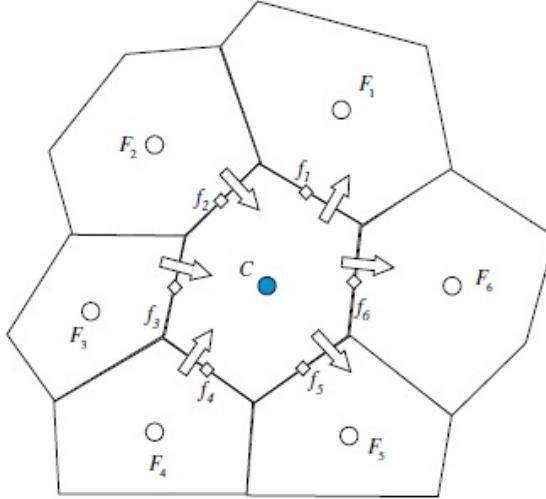
$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho e d\Omega + \oint_{d\Omega} (\rho e \vec{U}) \cdot \vec{n} dS = \\ & = \oint_{\partial\Omega} (k \nabla T) \cdot \vec{n} dS - \int_{\Omega} (p \nabla \cdot \vec{U}) d\Omega + \int_{\Omega} (\bar{\tau} : \nabla \vec{U}) d\Omega + \int_{\Omega} \rho q_h d\Omega \quad (4.3.3) \end{aligned}$$

Powyższe równania można ogólnie zapisać jako suma części niestacjonarnej, konwekcyjnej, dyfuzyjnej oraz źródłowej:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \phi d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\rho \phi \vec{U}) \cdot \vec{n} dS = \oint_{\partial\Omega} (\Gamma_\phi \nabla \phi) \cdot \vec{n} dS + \int_{\Omega} S d\Omega \quad , \quad (4.3.4)$$

gdzie $\phi = 1, \vec{U}, T$ odpowiednio dla poszczególnych równań. Warto zauważyć, że w równaniu zachowania energii 4.3.3, energia wewnętrzna może być powiązana z temperaturą przy pomocy równania stanu $e = c_u T$ [193]. Część dyfuzyjna obejmuje pierwsze członki po prawej stronie równań zachowania pędu oraz energii, natomiast pozostałe członki wchodzą w skład członu źródłowego. Ogólny zapis równania transportu 4.3.4 pozwala wprowadzić analogię w dyskretyzacji poszczególnych równań.

W metodzie objętości skończonych rozpatrywany obszar dzielony jest na skończoną liczbę elementów (objętości kontrolnych).



Rysunek 4.11: Przykładowa objętość kontrolna w przestrzeni 2d [192].

Każde równanie transportu w formie 4.3.4 jest dyskretyzowane, dla danej objętości kontrolnej Ω_C . Dowolny strumień J^ϕ wielkości ϕ można aproksymować z wykorzystaniem kwadratury Gaussa, w następujący sposób [192]:

$$\oint_{\partial\Omega_C} \left[J^\phi \cdot \vec{n} \right] dS = \sum_f^{N_{faces}} \left[\oint_f \left[J_f^\phi \cdot \vec{n} \right] dS \right] = \sum_f^{N_{faces}} \left[\sum_{ip}^{ip_f} \left(J_f^\phi \cdot \vec{n} \right)_{ip} \omega_{ip} S_f \right] = \\ = \sum_f^{N_{faces}} \left[J_f^\phi \cdot \vec{n} \right] S_f = \sum_f^{N_{faces}} J_f^\phi \cdot \vec{S}_f \quad (4.3.5)$$

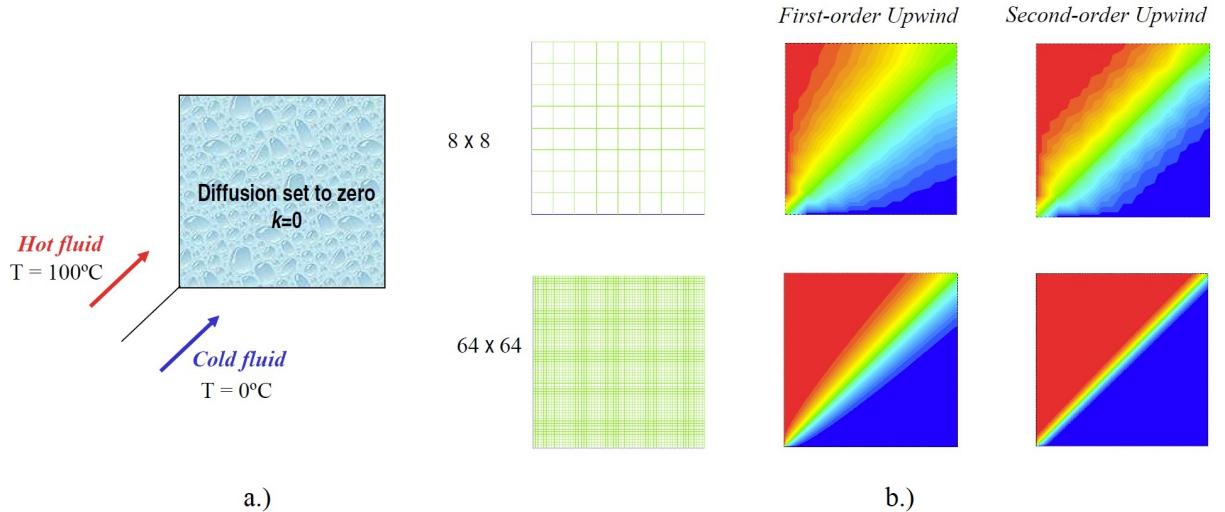
Ponieważ w zagadnieniach CFD przyjmuje się jeden punkt całkowania dla każdej ścianki objętości kontrolnej $ip_f = 1$, więc wagą z kwadratury Gaussa równą jeden $\omega_{ip} = 1$ dla jednego punktu całkowania.

Uwzględniając przedstawienie dowolnego strumienia w postaci przedstawionej równaniem 4.3.5 oraz analogicznie przedstawiając dyskretyzację członu źródłowego, równanie transportu 4.3.4, pomijając człon niestacjonarny, dla danej objętości kontrolnej o liczbie boków N_{faces} może być przedstawione w następującej postaci:

$$\sum_f^{N_{faces}} \left[\rho_f \phi_f \vec{U}_f \cdot \vec{S}_f \right] = \sum_f^{N_{faces}} \left[\left(\Gamma_\phi \right)_f \left[(\nabla \phi)_f \right]_n \cdot \vec{S}_f \right] + S_\phi V \quad . \quad (4.3.6)$$

W solverach CFD wartości poszczególnych zmiennych są obliczane oraz przechowywane w środku objętości kontrolnej. A więc, w celu obliczenia zdyskretyzowanego równania transportu 4.3.6 niezbędna jest interpolacja wielkości ϕ_f oraz ich gradientów $(\nabla \phi)_f$ ze ścianek f objętości kontrolnej Ω_C przy pomocy wielkości z jej środka ϕ_C . Do dwóch grup najpopularniejszych metod interpolacji zmiennych ϕ_f na ścianach f można zaliczyć metodę "pod wiatr" oraz metodę centralnego ilorazu różnicowego, które zostały przedstawione w załączniku C.1. Schemat interpolacji gradientu danej wielkości na ściankach $(\nabla \phi)_f$ danej objętości kontrolnej został przedstawiony w załączniku C.2.2. Metody interpolacji gradientów $(\nabla \phi)_f$ oraz zmiennych ϕ_f przy pomocy schematów wyższych rzędów wymagają znajomości gradientów w środku objętości kontrolnej, których schematy interpolacji przedstawiono w załączniku C.2.1.

W zagadnieniach, w których dominuje konwekcja (liczba Pecketa > 2), interpolacja strumienia konwekcyjnego przy pomocy schematu centralnego ilorazu różnicowego powoduje niefizyczne oscylacje lub nawet prowadzi do rozbieżności analizy [192]. Wynika to z faktu, iż wartości danej wielkości wyznaczane są na podstawie wartości z objętości, z których napływa i wypływa strumień, jednakże kluczowe znaczenie odgrywają informacje napływające [192]. Z tego względu, do dyskretyzacji członu konwekcyjnego najczęściej stosuje się metody "pod wiatr", natomiast w celu dyskretyzacji członu dyfuzyjnego schemat centralnego ilorazu różnicowego (Załącznik C.2.2). Co więcej, niektóre schematy numeryczne mogą wprowadzać fałszywą (numeryczną) dyfuzję w przypadku przepłyów z dominującą konwekcją [194]. Przykładowo na rysunku 4.12 przedstawiono numeryczną dyfuzję powstającą w wyniku zastosowania schematu numerycznego pierwszego rzędu "pod wiatr".



Rysunek 4.12: Przykład fałszywej dyfuzji wprowadzonej przez schemat interpolacji: a.) schemat zagadnienia, b.) wyniki analizy numerycznej [194].

Interpolacja wielkości oraz gradientów na ściankach przy pomocy wielkości ze środków objętości kontrolnych w zdyskretyzowanym równaniu 4.3.6 prowadzi do przedstawienia go w następującej postaci:

$$a_C \phi_C + \sum_{F_i} a_{F_i} \phi_{F_i} = b_C \quad , \quad (4.3.7)$$

gdzie współczynniki a_C oraz a_{F_i} są nielinowe, sprzężone oraz zależą od zmiennych ϕ . Z tego względu równanie 4.3.7 rozwiązuje się iteracyjnie, a współczynniki a_C, a_{F_i} poddaje się liniaryzacji poprzez uzależnienie od zmiennych z poprzedniej iteracji. Ponieważ, zarówno wartość danej zmiennej $(\phi_C)^{k+1}$ danej objętości kontrolnej Ω_C , jak i jej sąsiadów $(\phi_{F_i})^{k+1}$ są nieznane dla danej iteracji " $k+1$ ", wyróżnia się dwa podejścia do rozwiązywania równania 4.3.7, mianowicie metodę jawną, w której zakłada się, że wartości zmiennych dla sąsiadów danej komórki przyjmują wartości z poprzedniej iteracji $(\phi_{F_i})^k$ oraz metodę niejawną w której zakłada się, że wszystkie wartości zmiennych są nieznane, wówczas zlinearyzowane równanie transportu przyjmie postać:

$$a_C (\phi_C)^{k+1} + \sum_{F_i} a_{F_i} (\phi_{F_i})^{k+1} = b_C \quad . \quad (4.3.8)$$

W przypadku metody niejawnej, wszystkie równania muszą być rozwiązywane równocześnie.

Ponieważ rozwiązanie iteracyjne często jest niestabilne, więc w celu ustabilizowania stosuje się tzw. zabieg podrelaksacji. Wyróżnia się podrelaksacje jawną oraz niejawną, opisano je w załączniku C.3.

Sposób dyskretyzacji oraz iteracyjna metoda rozwiązywania zlinearyzowanych równań zależy od danego solvera. Do najbardziej popularnych można zaliczyć: solvery bazujące na ciśnieniu (pressure-based solver) oraz solvery bazujące na gęstości (density-based solver).

Solvery typu "density-based" projektowane były z myślą o przepływach z silnym wpływem ściśliwości. Rozwiążają one wszystkie równania zachowania jednocześnie, a równanie zachowania masy używane jest do wyznaczenia pola gęstości. Pole ciśnienia jest wyznaczane z równania stanu. Przepływy dla malej liczby Macha, którym towarzyszą niewielkie zmiany gęstości oraz temperatury, nazywane przepływami nieściśliwymi, stwarzały problemy numeryczne dla tych solverów. Z tego względu powstały solvery typu "pressure-based", jednakże w późniejszym czasie solvery "density-based" zostały rozwinięte na pełne spektrum prędkości [138].

Dla przepływów nieściśliwych, zakłada się że gęstość jest stała. Wówczas, równanie ciągłości narzuca więzy odnośnie zachowania masy na równanie pędu, a gradient ciśnienia występujący w równaniu pędu nie może być oszacowany z równania stanu. W celu wyznaczenia pola ciśnienia konieczne jest przekształcenie równania ciągłości, z wykorzystaniem równania pędu, na równanie wyznaczające ciśnienie, dokładniej równanie korygujące ciśnienie w celu zapewnienia spełnienia warunku ciągłości przez równanie pędu. A więc, w solverach "pressure-based" równanie zachowania masy, po modyfikacji, służy do wyznaczenia pola ciśnienia.

Istnieje wiele modeli sprzężenia prędkości występującej w równaniu ciągłości z ciśnieniem z równania pędu ("pressure-velocity coupling"). Jednym z najpopularniejszych jest model SIM-PLE. W metodzie tej równanie zachowania pędu oraz masy rozwiązywane są niezależnie, jedno po drugim (solver segregowany). W pierwszej kolejności rozwiązywane jest równanie zachowania pędu dla ciśnienia p^* , wyznaczonego w poprzedniej iteracji. Wyznaczone w ten sposób pole prędkości \vec{U}^* nie spełnia warunku zachowania ciągłości. Z tego względu, tworzy się równanie zachowania pędu dla korekty prędkości $\vec{U}' = \vec{U} - \vec{U}^*$ oraz ciśnienia $p' = p - p^*$, poprzez odjęcie równania pędu dla wartości wyliczonych od równania dla wartości "rzeczywistych", spełniających równie ciągłości. Następnie, poprzez uproszczenie tego równania, powstaje korekta pomiędzy korektą prędkości i korektą ciśnienia, przy pomocy której, na podstawie równania zachowania masy, tworzona jest równanie transportu korekty ciśnienia p' . Po wyznaczeniu korekty ciśnienia, aktualizowane są wartości ciśnienia oraz prędkości.

W przypadku, gdy rozpatrywany przepływ jest przepływem ściśliwym, równanie korekty ciśnienia wyznaczane jest analogicznie z uwzględnieniem korekty gęstości ρ' , wprowadzonej za pomocą korekty ciśnienia poprzez równanie stanu [192].

Innym podejściem do sprzężenia równania pędu i równania korekcji ciśnienia jest równoczesne rozwiązywanie tychże równań [138], tzw. metoda sprzężona "Coupled Algorithm". Dzięki temu, że obydwa równania rozwiązywane są równocześnie, można dużo szybciej oraz łatwiej uzyskać zbieżne rozwiązanie [138]. Minusem, w porównaniu do metody segregowanej, jest większa ilość pamięci niezbędnej do pomieszczenia współczynników z dwóch równań jednocześnie.

Rozdział 5

Obliczeniowa mechanika ciała stałego (CSD)

Poprawne projektowanie maszyn, konstrukcji wymaga zapewnienia bezpiecznego ich użytkowania. W tym celu konstruktory muszą jak najdokładniej przewidzieć charakter pracy, obciążień oraz odkształceń tychże konstrukcji aby zapewnić im odpowiednią wytrzymałość, sztywność, czy też żywotność. W tym celu rozwijane są takie dziedziny wiedzy jak obliczeniowa mechanika ciała stałego (Computational Solid Dynamics - CSD).

W zagadnieniach inżynierskich analizowane modele konstrukcji lub ich poszczególnych części są znaczących rozmiarów. Co więcej wymaga się, aby czas analizy był jak najkrótszy. Z tego też względu najefektywniejszymi metodami obliczeniowymi są metody bazujące na założeniu kontinuum materii, co założymy w naszych rozważaniach.

5.1 Termo-sprężysto-plastyczność

Założenie kontinuum materii pozwala nam używać aparatu różniczkowego oraz całkowego. Nasze rozważania dotyczyć będą części wykonanych ze stopów metali, z tego względu założymy jednorodność oraz izotropowość materiału. Dodatkowo pomijamy wpływ czasu oraz prędkości odkształcenia.

Jak dobrze wiadomo otaczający nas świat jest opisany w sposób nieliniowy. Oczywiście jest tak również w przypadku mechaniki ciała stałego. O nieliniowości w mechanice ciała stałego mówimy wówczas, gdy ścieżka równowagi jest nieliniowa, tzn. gdy odpowiedź struktury (deformacje) w sposób nieliniowy zależą od przyłożonych obciążzeń (Rys. 5.8). Do głównych źródeł nieliniowości w mechanice ciała stałego możemy zaliczyć:

- Nieliniowość geometryczna: powstaje w wyniku zmiany sztywności struktury spowodowanej zmianą kształtu geometrii. Może być to spowodowane dużymi odkształceniami lub/ oraz dużymi przemieszczeniami/rotacją. Uwzględnienie dużych przemieszczeń/rotacji zabezpiecza model przed powstawaniem naprężeń powstających w wyniku ruchu ciała sztywnego. Uwzględnienie nieliniowości geometrycznej w opisie matematycznym wiąże się z uwzględnieniem nieliniowego związku pomiędzy przemieszczeniami a odkształceniami.
- Nieliniowość materiałowa: jest związana ze zmianą własności materiału powstających pod wpływem zmiany obciążenia.
Nieliniowość materiałowa związana jest z nieliniowymi związkami konstytutywnymi.

- Nieliniowość warunków brzegowych - obciążeniowych: Przyłożone obciążenia (Rów. 5.1.20) zależą od deformacji: obciążenia aerodynamiczne, hydrodynamiczne itp.
- Nieliniowość warunków brzegowych - przemieszczeniowych: Przemieszczeniowe warunki brzegowe (Rów. 5.1.21) zależą od deformacji: zagadnienia kontaktowe.

Tematem naszych rozważań jest implementacja modelu wytężenia Burzyńskiego w zastosowaniu do części gorących maszyn przepływowych wykonanych ze stopów metali. Stopy metali charakteryzują się małymi odkształceniami w zakresie sprężystym, natomiast dużymi w zakresie plastycznym. Jednak uwzględnienie dużych przemieszczeń/rotacji jest istotne w zastosowaniu zarówno do zakresu sprężystego jak i plastycznego. Z tego względu, w celu odwzorowania nieliniowości geometrycznych jak i fizycznych (stan plastyczny) wzięto pod uwagę hyposprężysto-plastyczny model materiału.

Hyposprężysty model materiału charakteryzuje się opisem tensora odkształcenia w sposób nieliniowy (Rów. 5.1.7). Jednakże związki konstytutywne łączą odkształcenie sprężyste wraz naprężeniami przy pomocy odwzorowania liniowego (Rów. 5.1.16). Powoduje to, że w zakresie sprężystym uwzględniane są duże przemieszczenia/rotacje, pomijając duże odkształcenia.

Stan wytężenia w dowolnym punkcie ciała stałego jest znany, wtedy gdy znamy współrzędne tensora naprężenia σ_{ij} , tensora odkształcenia ϵ_{ij} oraz wektora przemieszczenia u_i . Analizy wytrzymałościowe wraz z implementacją są wykonywane w programie komercyjnym ANSYS Mechanical. Program ten jako model materiału hyposprężysto-plastycznego zakłada model, który przyjmuje następujące definicje ww. wielkości:

- Wektor przemieszczenia:

Do opisu wektora przemieszczenia u_i przyjmujemy opis Lagrange'a, opisujący przemieszczenia jako funkcję współrzędnych początkowych X_i , mianowicie:

$$u_i(X_j) = x_i - X_i \quad . \quad (5.1.1)$$

- Tensor naprężenia:

Jako opis stanu naprężenia posługujemy się tensorem naprężenia Cauchy'ego, opisującym stan naprężenia w punkcie ciała materialnego dla jego aktualnej konfiguracji:

$$T_j^n = \sigma_{ij} n_i \quad , \quad (5.1.2)$$

gdzie T_j^n jest wektorem naprężenia, a n_i jednostkowym wektorem normalnym wirtualnej powierzchni na które działa wektor naprężenia. W ogólnym przypadku zawiera 9 niezależnych składowych. Jednak rozpatrywanymi w niniejszej pracy materiałami są stopy metali, więc możemy założyć jego symetrię (symetrię możemy założyć w przypadku odrzucenia momentów pomiędzy ziarnami materiału, przykładowo koniecznych do wzięcia pod uwagę w przypadku rozpatrywania materiałów gruboziarnistych). Tensor naprężenia składa się wówczas z 6 niezależnych składowych.

Dowolny tensor drugiego rzędu można rozłożyć na dwie części:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_m \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) + \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) = \sigma_{ij}^A + \sigma_{ij}^D = \sigma_{ij}^A + s_{ij} \quad , \quad (5.1.3)$$

gdzie σ_m nazywamy naprężeniem hydrostatycznym:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} .$$

σ_{ij}^A nazywamy aksjatorem tensora naprężeń, natomiast s_{ij} dewiatorem tensora naprężeń. Aksjator tensora naprężenia odpowiada za stan hydrostatycznego rozciągania (ścisania) i ma wpływ na zmianę objętości, natomiast dewiator wpływa na odkształcenie postaciowe.

- Tensor odkształcenia:

Tenor odkształcenia jest używany jako miara deformacji. W przypadku dużych deformacji konieczne jest jego uniezależnienie od sztywnych obrotów. Z tego względu posługujemy się tensorem odkształcenia Hencky'ego (Rów. 5.1.7). Tensor ten jest definiowany w oparciu o tensor gradientu odkształcenia:

$$F_{ij} = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) , \quad (5.1.4)$$

który zgodnie z twierdzeniem o polarnej dekompozycji ($\det(F_{ij}) > 0$) może być jednoznacznie przedstawiony w postaci [195]:

$$F_{ij} = R_{ik} U_{kj} = V_{ik} R_{kj} . \quad (5.1.5)$$

W powyższym przedstawieniu, tensor obrotu skończonego R_{ij} reprezentuje obrót bryły sztywnej, natomiast symetryczne tensory rozciągnięcia, odpowiednio prawy oraz lewy, U_{ij}, V_{ij} reprezentują czystą deformację.

Bazując na uzyskanym tensorze rozciągnięcia:

$$U_{ij} = \sqrt{F_{ij}^T F_{ij}} , \quad (5.1.6)$$

Hencky [196] zdefiniował miarę deformacji - odkształcenie - przy pomocy następującej zależności [197]:

$$\epsilon_{ij} = \log(U_{ij}) . \quad (5.1.7)$$

Tensor dużych odkształceń (Rów. 5.1.7) nazywany jest tensorem odkształceń Hencky'ego lub tensorem odkształceń rzeczywistych. Jest to tensor reprezentujący w najbardziej rzeczywisty sposób miarę deformacji w przypadku nieliniowo-sprężystego materiału [198–201]. Tensor odkształcenia Hencky'ego należy do grupy tensorów Doyle–Ericksen'a, które mogą być aproksymowane poprzez zależność [202]:

$$\epsilon_{ij}^n = e_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{1}{2}(2-n)e_{ki}e_{kj} , \quad (5.1.8)$$

gdzie tensor $e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ jest liniowym tensorem małych odkształceń.

Tensor Hencky'ego otrzymamy dla $n = 0$, wówczas :

$$\epsilon_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - e_{ki}e_{kj} = e_{ij} + \eta_{ij} , \quad (5.1.9)$$

gdzie tensor η_{ij} reprezentuje nieliniową część tensora odkształcenia Hencky'ego. Ponieważ tensor U_{ij} jest tensorem symetrycznym, więc tensor odkształceń Hencky'ego (Rów. 5.1.7) jest również tensorem symetrycznym.

Dla materiałów hyposprężystych, dla których odkształcenia sprężyste są małe w porównaniu do odkształceń plastycznych część mechaniczna odkształceń może być addytywnie rozłożona na część sprężystą oraz plastyczną:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{el} + \epsilon_{ij}^{pl} + \epsilon_{ij}^{th} = \epsilon_{ij}^m + \epsilon_{ij}^{th} \quad . \quad (5.1.10)$$

Odkształcenia termiczne wywołane zmianą temperatury można przedstawić przy pomocy zależności:

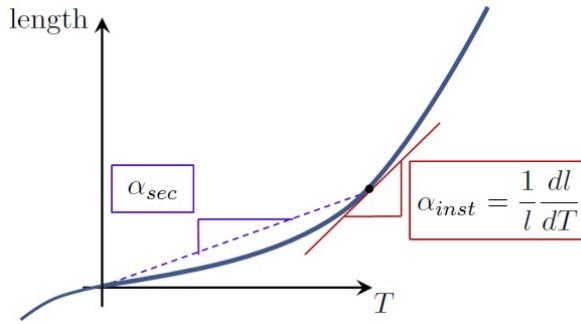
$$\epsilon_{ij}^{th} = \int_{T_0}^T \alpha_{inst}(T) dT \delta_{ij} = \alpha_{sec}(T) \Delta T \delta_{ij} \quad , \quad (5.1.11)$$

gdzie współczynnik (styczny) rozszerzalności cieplnej α_{inst} jest definiowany jako zmiana długości spowodowana zmianą temperatury [138, 203]:

$$\alpha_{inst}(T) = \frac{1}{l} \frac{dl}{dT} \quad , \quad (5.1.12)$$

lub jako średnia wartość (siecyny):

$$\alpha_{sec}(T) = \frac{l - l_0}{T - T_0} \quad . \quad (5.1.13)$$



Rysunek 5.1: Graficzne przedstawienie współczynnika rozszerzalności cieplnej.

5.1.1 Termo-sprężystość

Podsumowując, w celu określenia stanu naprężenia oraz odkształcenia dla rozważanego zagadnienia nieliniowo-sprężystego musimy określić 15 niewiadomych, w skład których wchodzą składowe wektora przemieszczenia u_i , tensora naprężenia Cauchy'ego σ_{ij} oraz tensora dużych odkształceń Hencky'ego ϵ_{ij} . W tym celu dysponujemy 15 równaniami:

- Trzema równaniami równowagi (Rów. 5.1.7):

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0 \quad , \quad (5.1.14)$$

gdzie b_i oznacza wektor sił masowych.

- Sześcioma równaniami geometrycznymi:

$$\epsilon_{ij} = \log(U_{ij}) \quad . \quad (5.1.15)$$

- Sześcioma równaniami konstytutywnymi:

W ogólnym sformułowaniu liniową konstytutywną relację pomiędzy tensorem naprężenia σ_{ij} , a odkształcenia sprężystego ϵ_{ij}^{el} możemy zapisać w postaci (zakładając $\epsilon_{ij}^{pl} = 0$):

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}^{el}(T)\epsilon_{kl}^{el} = E_{ijkl}^{el}(T)(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^{th}) \quad , \quad (5.1.16)$$

gdzie tensor czwartego rzędu E_{ijkl}^{el} jest nazywany tensorem sztywności.

Dla materiału izotropowego, przy założeniu symetrii tensora naprężenia i odkształcenia, tensor sztywności możemy zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} E_{ijkl}^{el}(T) &= K(T)\delta_{ij}\delta_{kl} + G(T) \left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \right) = \\ &= \lambda(T)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(T)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad . \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

gdzie λ, μ są stałymi Lamego, K modułem ściśliwości, natomiast G modułem ścinania.

A więc, prawo Hooke'a (Rów. 5.1.16) przyjmie postać:

$$\sigma_{ij} = \lambda(T)\epsilon_{kk}^{el}\delta_{ij} + 2\mu(T)\epsilon_{ij}^{el} \quad , \quad (5.1.18)$$

lub określając składowe stanu odkształcenia w zależności od składowych stanu naprężenia:

$$\epsilon_{ij}^{el} = \frac{1+\nu(T)}{E(T)}\sigma_{ij} - \frac{\nu(T)}{E(T)}\delta_{ij}\sigma_{kk} \quad . \quad (5.1.19)$$

Powyższy układ równań wraz z warunkami brzegowymi:

- przemieszczeniowymi: przemieszczenia u_i działające na część powierzchni brzegowej ∂S :

$$u_i = u_i^* \quad , \quad (5.1.20)$$

- naprężeniowymi: naprężenia t_j działające na część powierzchni brzegowej ∂S :

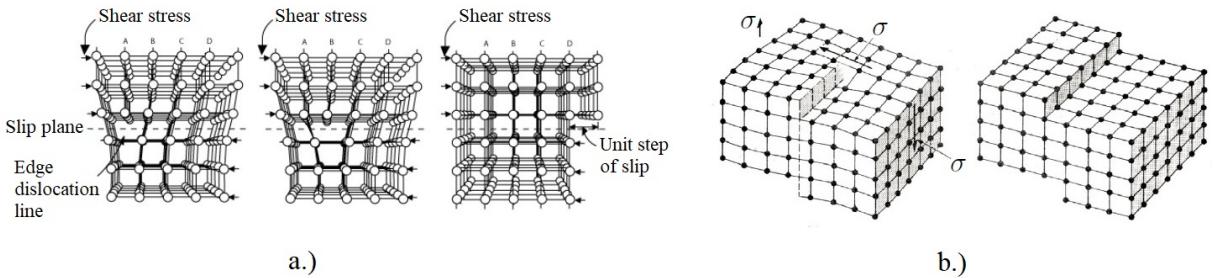
$$t_j = n_i\sigma_{ij} \quad , \quad (5.1.21)$$

stanowi silne sformułowanie zagadnienia nieliniowej-sprężystości, które uwzględnia geometryczną nieliniowość (małe odkształcenia, duże rotacje/przemieszczenia- materiał hyposprężysty).

5.1.2 Plastyczność

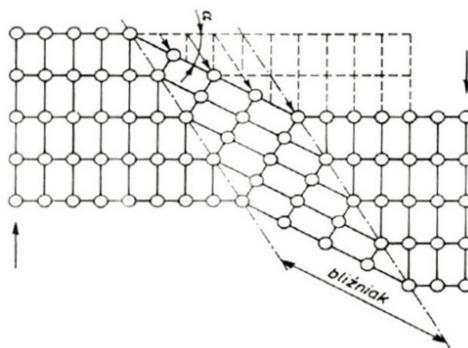
W stosunkowo wolno obciążanym materiale po przekroczeniu pewnego poziomu odkształceń zachodzi zmiana mikrostruktury. Dla materiałów metalicznych, nienarażonych na działanie temperatury, zmiana ta jest wywołana poprzez poślizg dyslokacji (Rys. 5.2) lub bliźniakowanie (Rys. 5.3), powodując wewnętrzną dyssypację energii [204], której większa część rozpraszana jest w postaci ciepła. Mówimy wówczas, że materiał doznał odkształceń plastycznych. W skali makroskopowej ujawnia się to tym, że po usunięciu obciążenia, materiał nie powróci do pierwotnego kształtu.

Poślizg dyslokacji jest mechanizmem dominującym w materiałach cechujących się dużą plastycznością o strukturze regularnie powierzchniowo centrowanej (Al, Ni).



Rysunek 5.2: Poślizg dyslokacji: a.) krawędziowej b.) śrubowej.

Bliźniakowanie natomiast jest dominującym mechanizmem odkształcenia plastycznego w metalach mniej plastycznych o strukturze o niskiej symetrii np. heksagonalnej ciasno upakowanej (Mg,Ti,Zn). Bliźniakowanie występuje również jako kolejny etap po zablokowaniu dyslokacji.



Rysunek 5.3: Schematyczne przedstawienie zjawiska bliźniakowania.

W podwyższonej temperaturze głównymi mechanizmami fizycznymi odkształceń plastycznych są: pełzanie dyslokacyjne, pełzanie dyfuzyjne oraz poślizg po granicach ziaren.

Istnieje kilka modeli służących do matematycznego opisu zachowania materiału w stanie plastycznym [205]. Do dwóch podstawowych możemy zaliczyć:

- deformacyjna teoria plastyczności [206–208] - zakłada podobnie jak teoria sprężystości, że tensor naprężenia jest funkcją tensora odkształcenia, a więc nie zależy od historii obciążenia. Znajduje zastosowanie jedynie w przypadku, gdy ciało jest początkowo nieobciążone, niezdeformowane oraz dodatkowo przy założeniu prostych lub propozycyjonalnych obciążień powodujących proporcjonalny przyrost wszystkich składowych tensora naprężzeń [209–211].
- teoria plastycznego płynięcia (przyrostowa) [205, 212, 213] - teoria ta zakłada, że odkształcenia plastyczne zależą nie tylko od aktualnego stanu obciążenia, ale od jego historii oraz charakteryzują się nieliniowością oraz nieodwracalnością [214, 215]. A więc, przyrost odkształcenia jest funkcją przyrostu naprężenia oraz dodatkowo zależy od aktualnego stanu wytężenia.

Teoria plastycznego płynięcia jest powszechnie akceptowaną teorią, która potwierdziła się eksperymentalnie w modelowaniu plastyczności metali, z tego względu w dalszej części pracy skupimy się tylko na niej. Opis matematyczny (równania konstytutywne) teorii plastycznego płynięcia składa się z następujących części:

- Kryteria wytężenia materialu - aby wyznaczyć przejście w stan plastyczności.

- Prawo plastycznego płynięcia - aby wyznaczyć przyrost odkształcenia plastycznego po przejściu w stan plastyczny.
- Prawo umocnienia - aby opisać umocnienie materiału wraz ze wzrostem odkształcenia plastycznego.
- Warunek obciążenie-odciążenie.

Poniżej opisano bardziej szczegółowo każdy z tych członów.

5.1.2.1 Równania teorii plastycznego płynięcia zależne od temperatury - sformułowanie ogólne

5.1.2.1.1 Hipotezy wytężenia

”Ogólnie pod wytężeniem rozumieć będziemy stan fizyczny ciała, pojęty w znaczeniu sprężystym, plastycznym, względnie wytrzymałościowem, a wywołyany powstaniem wewnątrz ciała naprężen i związań z niemi odkształceń” [48].

W celu opisu miary wytężenia stosuje się tzw. hipotezy wytężenia, które służą do porównania aktualnego stanu wytężenia z pewnym równoważnym wytężeniem, które można stosunkowo łatwo opisać oraz badać eksperymentalnie. Dzięki temu można określić ”odległość” danego stanu wytężenia do stanu granicznego. A więc, osiągniecie stanu granicznego w danym punkcie zajdzie po spełnieniu zależności nazywanej warunkiem granicznym:

$$F(\sigma_{ij}, K_0) = f(\sigma_{ij}) - K_0 = 0 \quad , \quad (5.1.22)$$

gdzie $f(\sigma_{ij}) = \sigma_{eq}$ jest pewnym naprężeniem zastępczym nazywanym naprężeniem zredukowanym, natomiast K_0 jest porównawczym stanem granicznym, najczęściej w odniesieniu do próby jednoosiowego rozciągania. W odniesieniu do materiałów ciągliwych, jako warunek graniczny najczęściej stosuje się punkt przejścia w stan plastyczności. Wówczas warunek 5.1.22 nosi nazwę warunku plastyczności, funkcję F nazywamy funkcją plastyczności, stała $K_0 = \sigma_{Y_0}^T$ jest granicą plastyczności na rozciąganie, natomiast naprężenia zredukowane są miarą wytężenia w zakresie sprężystym.

Ponieważ wraz ze zmianą temperatury następuje zmiana własności mechanicznych materiału, więc stała materiałowa $K_0 = K_0(T)$ zależy od temperatury.

Ze względu na czynnik brany pod uwagę przy definiowaniu, hipotezy wytężenia możemy podzielić na:

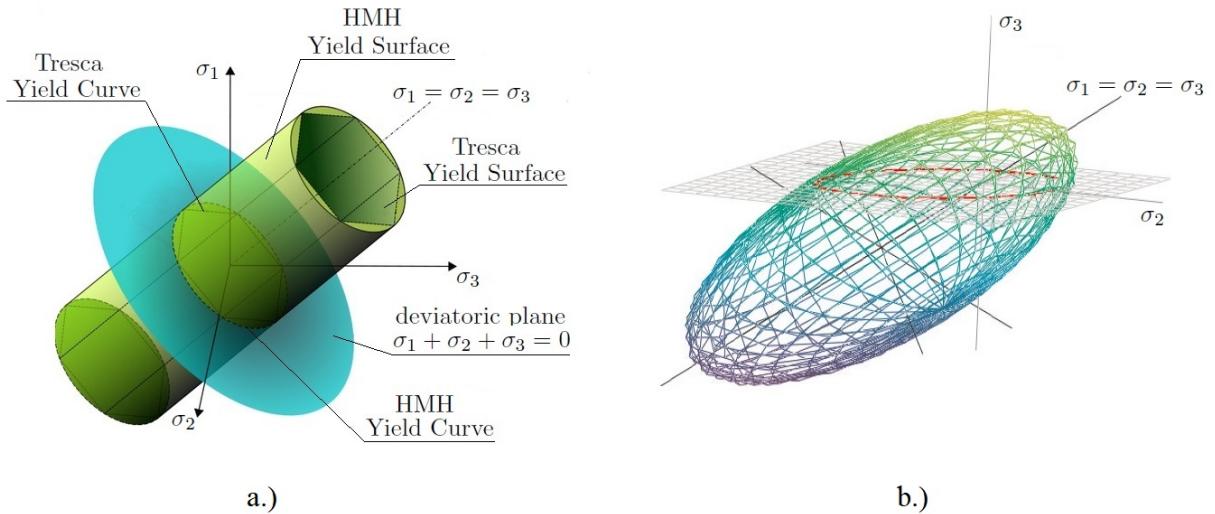
- naprężeniowe
- energetyczne
- odkształceniowe

Szczegółowy opis poszczególnych hipotez wytężenia przedstawiono w dalszej części.

Kryterium plastyczności (Rów. 5.1.22) w ogólnym przypadku przedstawia hiperpłaszczyznę w hiperprzestrzeni naprężen (dziewięć niezależnych zmiennych), której przedstawienie geometryczne nie jest możliwe. A więc, najczęściej przedstawia się je w przestrzeni naprężen głównych (Haigh-Westergaard), bądź niezmienników. Przykładowo kryterium HMH (Rów. 5.1.32) zapisane przy pomocy naprężen głównych ma następującą postać:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2 \left(\sigma_{Y_0}^T(T) \right)^2 = 0 \quad . \quad (5.1.23)$$

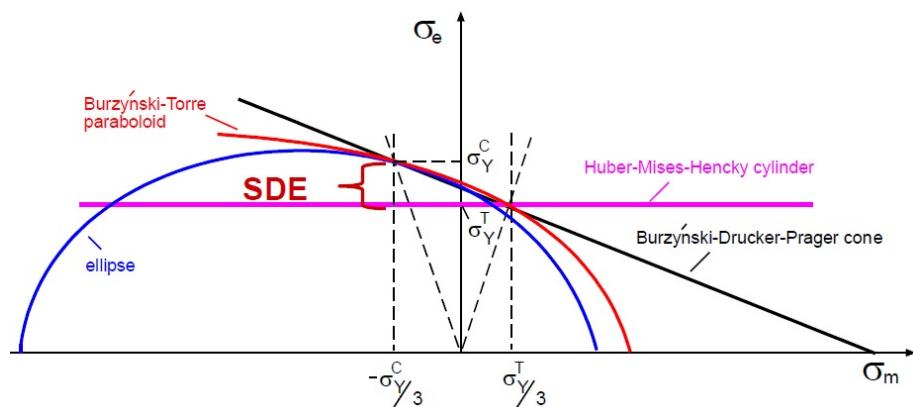
Obrazem geometrycznym tego równania w układzie współrzędnych naprężen głównych jest walec o promieniu $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{Y_0}^T(T)$ (Rys. 5.4 a.)).



Rysunek 5.4: Płaszczyzna plastyczności: a.) HHM oraz Treski, b.) Burzyńskiego [216].

Punkty leżące we wnętrzu ograniczonym powierzchnią plastyczności $F < 0$ reprezentują stan sprężysty. Wraz ze wzrostem wytężenia przechodzą na jej brzeg, co oznacza inicjalizację plastyczności. Dalej wraz ze wzrostem obciążenia powierzchnia plastyczności zmienia położenie lub/i kształt, co jest związane z umocnieniem materiału (Rozdział 5.1.2.1.3).

Hipotezy wytężenia często przedstawia się również jako krzywe na charakterystycznych płaszczyznach. Na rysunku 5.5 pokazane zostały krzywe przedstawiające hipotezy HMH, Burzyńskiego oraz Druckera-Pragera na płaszczyźnie $\sigma_e - \sigma_m$.



Rysunek 5.5: Krzywe plastyczności na płaszczyźnie $\sigma_e - \sigma_m$: Burzyńskiego-Torre, HMD, Burzyńskiego-Druckera-Pragera [41].

5.1.2.1.1 Hipotezy naprężeniowe

- Hipoteza maksymalnego naprężenia normalnego (Galileusz - 1632)

O wytężeniu materiału w punkcie decyduje maksymalna bezwzględna wartość naprężenia

głównego:

$$F(\sigma_{ij}, K_0(T)) = \sigma_1 - K_0(T) = 0 \quad . \quad (5.1.24)$$

Wyznaczając stałą K w odniesieniu do próby jednoosiowego rozciągania zakładamy, że jedyną składową tensora naprężeń różną od zera jest naprężenie rozciągające, które dla stanu granicznego przyjmie wartość $\sigma_1 = \sigma_{Y_0}^T$, więc z równania 5.1.24 wnioskujemy:

$$K_0(T) = \sigma_{Y_0}^T(T) \quad . \quad (5.1.25)$$

Hipoteza ta ma raczej znaczenie historyczne, ponieważ nie znalazła potwierdzenia eksperymentalnego.

- Hipoteza maksymalnych naprężień stycznych (Hipoteza Treski)

„Materiał przechodzi w danym punkcie w stan plastyczny wówczas, gdy maksymalne naprężenie styczne osiągnie pewną graniczną wartość, charakterystyczną dla tego materiału”. Podstawą do sformułowania tego warunku była obserwacja linii Lüdersa, które powstają w początkowej fazie uplastycznienia próbki rozciąganej. Ponieważ kąt pochylenia tych linii w stosunku do osi próbki jest bliski 45° i odpowiada płaszczyznom maksymalnych naprężień stycznych.

Zakładając, że znamy naprężenia normalne, kryterium Treski przyjmie postać:

$$F(\sigma_{ij}, K_0(T)) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - K_0(T) = 0 \quad , \quad (5.1.26)$$

gdzie σ_1 oraz σ_3 są odpowiednio największym oraz najmniejszym naprężeniem głównym. Wyznaczając stałą $K_0(T)$ na podstawie jednoosiowego rozciągania ($\sigma_1 = \sigma_{Y_0}^T(T)$, $\sigma_3 = 0$), otrzymujemy:

$$K_0(T) = \frac{\sigma_{Y_0}^T(T)}{2} \quad . \quad (5.1.27)$$

A więc na podstawie równania 5.1.26 jesteśmy w stanie wyznaczyć naprężenia zredukowane Treski w odniesieniu do próby jednoosiowego rozciągania:

$$F(\sigma_{ij}, K_0(T)) = (\sigma_1 - \sigma_3) - \sigma_{Y_0}^T(T) = \sigma_{eq} - \sigma_{Y_0}^T(T) = 0 \quad . \quad (5.1.28)$$

5.1.2.1.1.2 Hipotezy energetyczne

- Hipoteza Hubera-Misesa-Hencky'ego

„Materiał przechodzi w danym punkcie w stan plastyczny wówczas, gdy gęstość energii odkształcenia postaciowego (tj. energii dewiatorów) osiąga pewną wartość graniczną, charakterystyczną dla tego materiału” [217, 218].

Zgodnie z definicją kryterium plastyczności HMH możemy zapisać w postaci:

$$F(\sigma_{ij}, K_0(T)) = u^D - K_0(T) = 0 \quad . \quad (5.1.29)$$

Gęstości energii dewiatorów możemy zapisać przy pomocy drugiego niezmiennika dewiatora naprężień zgodnie ze wzorem (Rów. A.0.23): $u^D = \frac{1}{2G} J_2$. Biorąc ten fakt pod uwagę kryterium plastyczności HMH (Rów. 5.1.29) możemy zapisać w następujący sposób:

$$F(\sigma_{ij}, K_0(T)) = \sqrt{J_2} - \sigma_{Y_0}^S(T) = 0 \quad , \quad (5.1.30)$$

gdzie $\sigma_{Y_0}^S(T)$ jest granicą plastyczności na ścinanie w danej temperaturze. Doświadczalnie wykazano, że granicę plastyczności na ścinanie można powiązać z granicą plastyczności na rozciąganie przy pomocy zależności:

$$\sigma_{Y_0}^S(T) = \frac{\sigma_{Y_0}^T(T)}{\sqrt{3}} . \quad (5.1.31)$$

A więc, kryterium plastyczności HMH (Rów. 5.1.30) możemy zapisać w postaci:

$$F(\sigma_{ij}, K_0(T)) = \sqrt{3J_2} - \sigma_{Y_0}^T(T) = 0 . \quad (5.1.32)$$

Naprężenia zredukowane HMH możemy przedstawić według zależności:

$$\begin{aligned} \sigma_{HMH} &= \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 - 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)} . \end{aligned} \quad (5.1.33)$$

• Hipoteza Burzyńskiego

Burzyński zaprezentował hipotezę energetyczną dla materiałów charakteryzujących się asymetrią zakresu sprężystego, w której zaproponował zdefiniowanie granicy zakresu sprężystego jako sumę gęstości energii dewiatorów u^D (Rów. A.0.23) oraz części gęstości energii aksjatorów u^A (Rów. A.0.20) [46–48]:

$$u^D + \eta u^A = K , \quad (5.1.34)$$

gdzie parametr $\eta = \omega + \frac{\delta}{3\sigma_m}$ zależy od stałych materiałowych ω, δ , reprezentujących udział gęstości energii aksjatorów pod wpływem naprężenia hydrostatycznego $\sigma_m = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$. Stała K oznacza gęstość energii sprężystej dla granicy sprężystości. Burzyński oszacował parametry K, ω i δ przy pomocy stałych materiałowych wyznaczanych podczas podstawowych badań materiałowych, mianowicie granicy plastyczności na rozciąganie σ_Y^T , ściskanie σ_Y^C oraz ścinanie σ_Y^S , co prowadzi do następującej formy hipotezy [41, 46–48, 219]:

$$\frac{\sigma_Y^C \sigma_Y^T}{(3\sigma_Y^S)^2} \sigma_e^2 + \left(9 - \frac{3\sigma_Y^C \sigma_Y^T}{(\sigma_Y^S)^2} \right) \sigma_m^2 + 3(\sigma_Y^C - \sigma_Y^T) \sigma_m - \sigma_Y^C \sigma_Y^T = 0 , \quad (5.1.35)$$

gdzie $\sigma_e = \sigma_{HMH}$ oznacza naprężenia HMH. Wprowadzenie średniej harmonicznej pomiędzy stałymi materiałowymi: $\sigma_Y^S \sqrt{3} = \frac{2\sigma_Y^T \sigma_Y^C}{\sigma_Y^T + \sigma_Y^C}$, prowadzi do zależności niezależnie przedstawionej przez Druckera-Pragera [41, 46, 49, 219]:

$$\sigma_e + 3 \frac{\sigma_Y^C - \sigma_Y^T}{\sigma_Y^C + \sigma_Y^T} \sigma_m - 2 \frac{\sigma_Y^C \sigma_Y^T}{\sigma_Y^C + \sigma_Y^T} = 0 . \quad (5.1.36)$$

Natomiast, zakładając średnią geometryczną: $\sigma_Y^S \sqrt{3} = \sqrt{\sigma_Y^T \sigma_Y^C}$, pozwala otrzymać paraboliczny model Burzyńskiego-Torre'a [41, 46, 219, 220]:

$$\sigma_e^2 + 3(\sigma_Y^C - \sigma_Y^T) \sigma_m - \sigma_Y^C \sigma_Y^T = 0 . \quad (5.1.37)$$

Wprowadzając współczynnik asymetrii zakresu sprężystego $k = \frac{\sigma_Y^C}{\sigma_Y^T}$ (Rów. 1.2.2), równanie Burzyńskiego-Torre'a przyjmuje postać [41]:

$$\sigma_e^2 + 3(k-1)\sigma_m \sigma_Y^T - (\sigma_Y^T)^2 k = 0 . \quad (5.1.38)$$

Po rozwiązaniu powyższego równania względem σ_Y^T oraz wyznaczaniu dodatniego pierwiastka, otrzymujemy ostateczną formę parabolicznego warunku Burzyńskiego [41]:

$$F(\sigma_m, \sigma_e, \sigma_Y^T) = \frac{1}{2k} \left[3(k-1)\sigma_m + \sqrt{9(k-1)^2\sigma_m^2 + 4k\sigma_e^2} \right] - \sigma_Y^T = 0 \quad . \quad (5.1.39)$$

Własności materiału zależą od temperatury, a więc w równaniu 5.1.39 granice plastyczności σ_Y^T , σ_Y^C , a co za tym idzie współczynnik asymetrii $k_T = k(T) = \frac{\sigma_Y^C(T)}{\sigma_Y^T(T)}$ również zależą od temperatury. Wówczas możemy zapisać:

$$F(\sigma_m, \sigma_e, \sigma_Y^T(T)) = \frac{1}{2k_T} \left[3[k_T - 1]\sigma_m + \sqrt{9[k_T - 1]^2\sigma_m^2 + 4k_T\sigma_e^2} \right] - \sigma_Y^T(T) = 0 \quad . \quad (5.1.40)$$

Naprężenia zredukowane Burzyńskiego przyjmują następującą formę:

$$\sigma_B = \frac{1}{2k_T} \left[3(k_T - 1)\sigma_m + \sqrt{9(k_T - 1)^2\sigma_m^2 + 4k_T\sigma_e^2} \right] \quad . \quad (5.1.41)$$

5.1.2.1.2 Prawo plastycznego płynięcia

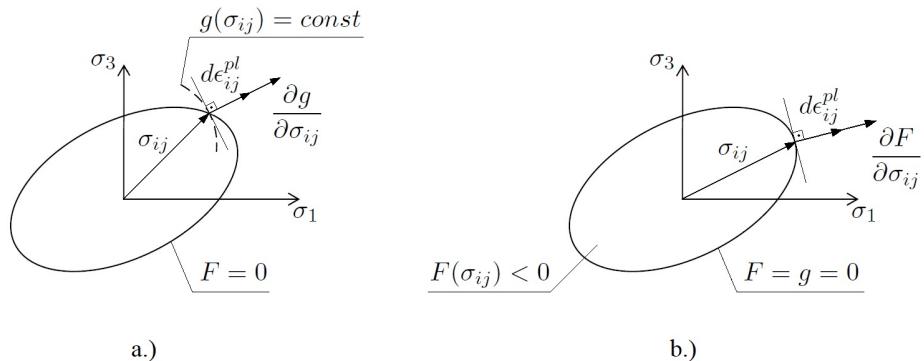
Prawo plastycznego płynięcia opisuje przyrost odkształcenia plastycznego po przejściu materiału w stan plastyczny. Pierwsze próby sformułowania związków konstytutywnych dla zakresu plastycznego, w odniesieniu do zagadnienia płaskich odkształceń, zostały poczynione w 1870 roku przez Saint-Venant [221], a następnie uogólnione na przypadek trój-wymiarowy niezależnie przez Mises'a [217] oraz Levy'ego [222], prowadząc do sformułowania: $d\epsilon_{ij} = d\lambda s_{ij}$, które pomija odkształcenia sprężyste, traktując je jako pomijalnie małe w stosunku do odkształceń plastycznych. Prandtl [223] oraz Reuss [224] uogólnili równanie Leve'ego-Mises'a, uwzględniając odkształcenia sprężyste: $d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^{pl} = \epsilon_{ij}^e + d\lambda s_{ij}$.

Ogólne równanie opisujące plastyczne płynięcie zostało zaproponowane przez von Mises'a w 1928 roku [225]. W teorii sprężystości tensor naprężenia oraz odkształcenia można powiązać przy pomocy potencjału sprężystości (energii odkształcenia), więc Mises zaproponował analogiczne przedstawienie tensora odkształceń plastycznych przy pomocy pewnego potencjału plastyczności g , mianowicie:

$$d\epsilon_{ij}^{pl} = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad , \quad (5.1.42)$$

gdzie $d\lambda$ jest dodatnim skalarem proporcionalności.

Geometricznie interpretacja równania 5.1.42 oznacza, że tensor przyrostu odkształcenia plastycznego $d\epsilon_{ij}^{pl}$ jest prostopadły do powierzchni potencjału plastyczności (Rys. 5.6 a.)).



Rysunek 5.6: Prawo płynięcia: a.) niestwarzyszone, b.) stwarzyszone.

Dla materiałów izotropowych potencjał plastyczności zależy od niezmienników tensora naprężenia $g(\sigma_{ij}) = g(I_1, I_2, I_3)$ [226].

Dla pewnej klasy materiałów rolę potencjału plastyczności pełni funkcja plastyczności $g = F$, wówczas prawo plastycznego płynięcia:

$$d\epsilon_{ij}^{pl} = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} , \quad (5.1.43)$$

nazywamy stwarzyszonym (z kryterium plastyczności), w przeciwnym przypadku niestwarzyszonym. Dla stwarzyszonego prawa płynięcia tensor przyrostu odkształcenia plastycznego jest prostopadły do powierzchni plastyczności - rysunek 5.6 b.).

5.1.2.1.3 Prawo umocnienia

Po osiągnięciu stanu plastycznego wraz z dalszym wzrostem wytężenia materiału następuje zmiana mikrostruktury materiału, co prowadzi do zmiany własności wytrzymałościowych, czyli powierzchni plastyczności. W przypadku metali obserwuje się wzrost gęstości dyslokacji, powodując wzmożnienie materiału, które opisuje prawo umocnienia. W przypadku materiałów ciągliwych wyróżniamy dwa podstawowe prawa opisujące wzmożnienie materiału:

- Wzmocnienie Izotropowe

Izotropowe prawo wzmożnienia zakłada, że wraz ze wzrostem obciążenia następuje proporcjonalna zmiana wielkości powierzchni plastyczności (Rys. 5.7 a.)). Zmianę wielkości powierzchni plastyczności możemy zapisać przy pomocy warunku plastyczności:

$$F(\sigma_{ij}, K(\kappa, T)) = f(\sigma_{ij}) - K(\kappa, T) = 0 . \quad (5.1.44)$$

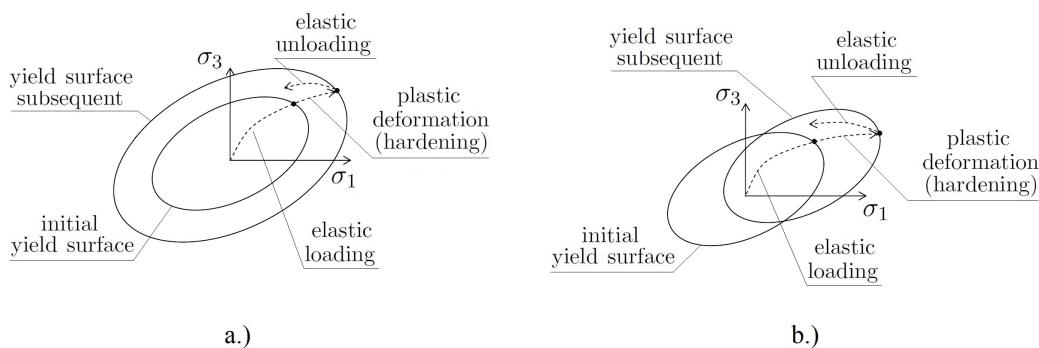
- Wzmocnienie Kinematyczne

W przypadku umocnienia kinematycznego powierzchnia plastyczności przesuwa się względem osi aksjatorów zachowując stałą wielkość (Rys. 5.7 b.)). Wówczas warunek plastyczności przyjmuje ogólną postać:

$$F(\sigma_{ij}, \alpha(\kappa), K(T)) = f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}(\kappa)) - K(T) = 0 , \quad (5.1.45)$$

gdzie tensor α_{ij} jest nazywany tensorem przesunięcia. Wzmocnienie kinematyczne opisuje efekt Bauschinger'a, który znajduje zastosowanie przy cyklicznym obciążeniu.

Parametr κ występujący przy opisie prawa umocnienia (Rów. 5.1.44, 5.1.45) jest miarą intensywności odkształcenia plastycznego. Najpopularniejszym jej opisem jest zredukowane odkształcenie plastyczne $\kappa = \epsilon_{eq}^{pl}$.



Rysunek 5.7: Schemat przedstawiający wzmożnienie: a.) izotropowe, b.) kinematyczne.

5.1.2.1.4 Warunek obciążenie-odciążenie

Równania plastyczności rozwiązywane są w sposób przyrostowy. W przypadku rozpatrywania modelu materiału z umocnieniem, może wystąpić sytuacja, w której wraz z rozpatrywanym przyrostem obciążenia stan wytężenia materiału pozostaje niezmienny (lub nastąpi odciążenie), tzn. stan naprężenia pozostaje na płaszczyźnie plastyczności, jedynie zmienia położenie. W celu określenia, jak rozpatrywany przyrost obciążenia wpłynie na zmianę stanu materiału posługujemy się następującymi warunkami:

- odciążenie - stan sprężysty:

$$F < 0 \quad \text{oraz} \quad dF < 0 \quad , \quad (5.1.46)$$

- stan neutralny - stan sprężysty:

$$F = 0 \quad \text{oraz} \quad dF = 0 \quad , \quad (5.1.47)$$

- obciążenie - stan plastyczny:

$$F = 0 \quad \text{oraz} \quad dF > 0 \quad . \quad (5.1.48)$$

Warunki powyższe noszą nazwę warunków odciążenie-obciążenie. Możemy wnioskować z nich, że w miarę wzrostu obciążenia, dalszy wzrost odkształceń plastycznych, a więc wytężenia materiału wymaga spełnienia warunku obciążenia, przedstawionego zależnością 5.1.48.

5.1.2.2 Równania plastyczności dla hipotezy Burzyńskiego

W niniejszej pracy rozważane jest kryterium plastyczności Burzyńskiego (Rów. 5.1.40). Z tego względu w rozdziale tym przedstawimy równania plastyczności opisujące ten model w zastosowaniu do modelowania plastyczności metali (odkształcenia plastyczne dużo większe od sprężystych). Dodatkowo pomijamy wpływ czasu, prędkości deformacji oraz cyklicznego charakteru obciążień (wzmocnienie izotropowe). Wówczas, podstawowe równania pozwalające opisać stan plastyczny (spełniony warunek obciążenie - Rów. 5.1.48) w zależności od temperatury przedstawiają się w następujący sposób:

- addytywna dekompozycja tensora odkształceń:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{el} + \epsilon_{ij}^{pl} + \epsilon_{ij}^{th} = \epsilon_{ij}^m + \epsilon_{ij}^{th} \quad , \quad (5.1.49)$$

- równanie konstytutywne dla części sprężystej odkształcenia (Rów. 5.1.18):

$$\sigma_{ij} = 2\mu(T)\epsilon_{ij}^{el} + \lambda(T)\epsilon_{kk}^{el}\delta_{ij} \quad , \quad (5.1.50)$$

- kryterium plastyczności Burzyńskiego ze wzmocnieniem izotropowym (Rów. 5.1.40, 5.1.44):

$$F(\sigma_m, \sigma_e, \sigma_Y^T(\epsilon_{eq}^{pl}, T)) = \frac{1}{2k_{T,\epsilon}} \left[3[k_{T,\epsilon} - 1]\sigma_m + \sqrt{9[k_{T,\epsilon} - 1]^2\sigma_m^2 + 4k_{T,\epsilon}\sigma_e^2} \right] - \sigma_Y^T(\epsilon_{eq}^{pl}, T) = 0 \quad , \quad (5.1.51)$$

gdzie $k_{T,\epsilon} = k(T, \epsilon_{eq}^{pl})$

- asocjatywne prawo płynięcia (Rów. 5.1.43):

$$d\epsilon_{ij}^{pl} = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad . \quad (5.1.52)$$

Dodatkowo dla asocjatywnego prawa płynięcia, przyrost zredukowanego odkształcenia plastycznego możemy powiązać z przyrostem tensora odkształcenia plastycznego przy pomocy równania stanu [227]:

$$d\epsilon_{eq}^{pl} = \frac{\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^{pl}}{\sigma_Y^T(\epsilon_{eq}^{pl}, T)} . \quad (5.1.53)$$

Powyższy układ równań w sposób ogólny opisuje zagadnienie plastycznego płynięcia. W celu implementacji kryterium plastyczności zależnego zarówno od drugiego niezmiennika dewiatora naprężenia jak i od naprężeń hydrostatycznych, w równaniach sprężysto-plastycznych separuje się człony dewiatorowe i hydrostatyczne [41, 55, 56]. Pozwala to sformułować użyteczny układ równań plastyczności podczas implementacji.

5.1.2.2.1 Dekompozycja członów na dewiatorowe oraz hydrostatyczne

- Prawo plastycznego płynięcia zależne od I_1 oraz od J_2 :

Dla modelu asocjatywnego prawo płynięcia wyrażone jest przez równanie 5.1.52. Zauważmy, że $\sigma_m = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij}$, więc

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_e} \frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{3} \frac{\partial F}{\partial \sigma_m} \delta_{ij} + \frac{3}{2} \frac{\partial F}{\partial \sigma_e} \frac{s_{ij}}{\sigma_e} . \quad (5.1.54)$$

Korzystając z równania (5.1.54) oraz oznaczając:

$$d\epsilon_p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_m} , \quad d\epsilon_q = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_e} , \quad (5.1.55)$$

równanie (5.1.52) możemy zapisać w postaci:

$$d\epsilon_{ij}^{pl} = \frac{1}{3} d\epsilon_p \delta_{ij} + d\epsilon_q n_{ij} , \quad (5.1.56)$$

gdzie $n_{ij} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{\sigma_e}$.

Poprzez porównanie zależności 5.1.55, możemy wyeliminować $d\lambda$:

$$\frac{d\epsilon_p}{\partial F} = \frac{d\epsilon_q}{\partial F} , \quad (5.1.57)$$

co prowadzi do równania:

$$d\epsilon_p \frac{\partial F}{\partial \sigma_e} - d\epsilon_q \frac{\partial F}{\partial \sigma_m} = 0 . \quad (5.1.58)$$

- Równanie stanu:

Korzystając z równania 5.1.56, równanie stanu 5.1.53 możemy zapisać w postaci:

$$d\epsilon_{eq}^{pl} = \frac{\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^{pl}}{\sigma_Y^T(\epsilon_{eq}^{pl}, T)} = \frac{\sigma_{ij} \delta_{ij} \frac{1}{3} d\epsilon_p + \sigma_{ij} n_{ij} d\epsilon_q}{\sigma_Y^T(\epsilon_{eq}^{pl}, T)} . \quad (5.1.59)$$

Dalej, wykorzystując fakt: $\frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij} = \sigma_m$ oraz $\sigma_{ij}n_{ij} = \sigma_e$ (Rów. E.1.2 - Załącznik E.1) równanie 5.1.59 przyjmie ostatecznie formę:

$$d\epsilon_{eq}^{pl} = \frac{\sigma_m d\epsilon_p + \sigma_e d\epsilon_q}{\sigma_Y^T(\epsilon_{eq}^{pl}, T)} . \quad (5.1.60)$$

Ostatecznie otrzymujemy układ równań za pomocą, którego możemy opisać ewolucję stanu plastycznego (dla spełnionego warunku obciążenia (Rów. 5.1.48)) dla kryterium plastyczności Burzyńskiego, zależnego od I_1 , J_2 oraz od temperatury:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{el} + \epsilon_{ij}^{pl} + \epsilon_{ij}^{th} = \epsilon_{ij}^m + \epsilon_{ij}^{th} \quad , \quad (5.1.61)$$

$$F(\sigma_m, \sigma_e, \sigma_Y^T(\epsilon_{eq}^{pl}, T)) = \frac{1}{2k_{T,\epsilon}} \left[3[k_{T,\epsilon} - 1]\sigma_m + \sqrt{9[k_{T,\epsilon} - 1]^2\sigma_m^2 + 4k_{T,\epsilon}\sigma_e^2} \right] - \sigma_Y^T(\epsilon_{eq}^{pl}, T) = 0 \quad , \quad (5.1.62)$$

$$d\epsilon_p \frac{\partial F}{\partial \sigma_e} - d\epsilon_q \frac{\partial F}{\partial \sigma_m} = 0 \quad , \quad (5.1.63)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu(T)\epsilon_{ij}^{el} + \lambda(T)\epsilon_{kk}^{el}\delta_{ij} \quad , \quad (5.1.64)$$

$$d\epsilon_{ij}^{pl} = \frac{1}{3}d\epsilon_p\delta_{ij} + d\epsilon_q n_{ij} \quad , \quad (5.1.65)$$

$$d\epsilon_{eq}^{pl} = \frac{\sigma_m d\epsilon_p + \sigma_e d\epsilon_q}{\sigma_Y(\epsilon_{eq}^{pl}, T)} \quad . \quad (5.1.66)$$

5.2 Metoda elementów skończonych

5.2.1 MES - zagadnienie liniowo sprężyste

Układ równań 5.1.14, 5.1.7, 5.1.18 przy założeniu liniowych równań geometrycznych (tensor małych odkształceń Cauchy'ego):

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0 \quad , \quad (5.2.1)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad , \quad (5.2.2)$$

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}^{el}(T) e_{kl}^{el} = E_{ijkl}^{el}(T) (e_{kl} - e_{kl}^{th}) \quad , \quad (5.2.3)$$

wraz z warunkami brzegowymi przemieszczeniowymi (Rów. 5.1.21) lub/oraz naprężeniowymi (Rów. 5.1.20) stanowi silne sformułowanie zagadnienia brzegowego teorii termo-sprężystości. Metoda elementów skończonych bazuje na słabym sformułowaniu równania równowagi.

Rozwiązywanie słabego sformułowania zagadnienia MES polega na znalezieniu pola przemieszczeń, spełniającego przemieszczeniowe warunki brzegowe (Rów. 5.1.21), dla którego ciało pozostaje w równowadze pod wpływem działających obciążień, bazując na zasadzie pracy wirtualnej. Zasada ta stanowi, że ciało pozostaje w równowadze, jeżeli wirtualna praca sił zewnętrznych δW wykonana na dowolnie małych wirtualnych przemieszczeniach δu_i , równoważy wirtualną pracę sił wewnętrznych δU na odpowiadających im wirtualnych odkształceniach $\delta \epsilon_{ij}$, tzn. wariacja energii potencjalnej układu jest równa zeru:

$$\delta \Pi = \delta U - \delta W = 0 \quad . \quad (5.2.4)$$

Funkcjonał Π reprezentuje całkowitą energię potencjalną ciała jako różnicę pomiędzy energią wewnętrzną U oraz pracą obciążeń zewnętrznych W , na którą składa się praca sił masowych b_i oraz obciążień powierzchniowych f_i :

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} e_{ij}^{el} dV - \int_V b_i u_i dV - \int_S f_i u_i dS \quad . \quad (5.2.5)$$

Korzystając z równań konstytutywnych (Rów. 5.2.3) energię potencjalną układu możemy przekształcić w następujący sposób [228]:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V E_{ijkl}^{el}(T) e_{kl} e_{ij} dV - \int_V E_{ijkl}^{el}(T) e_{kl}^{th} e_{ij} dV + \frac{1}{2} \int_V E_{ijkl}^{el}(T) e_{kl}^{th} e_{ij}^{th} dV - \int_V b_i u_i dV - \int_S f_i u_i dS \quad . \quad (5.2.6)$$

Nieskończanie małą zmianę energii potencjalnej układu (Rów. 5.2.6) możemy zapisać w postaci:

$$\delta \Pi = \int_V E_{ijkl}^{el}(T) e_{kl} \delta e_{ij} dV - \int_V E_{ijkl}^{el}(T) e_{kl}^{th} \delta e_{ij} dV - \int_V b_i \delta u_i dV - \int_S f_i \delta u_i dS = 0 \quad . \quad (5.2.7)$$

W Metodzie Elementów Skończonych rozpatrywane ciało dzielimy na skońzoną liczbę elementów:

$$V = \sum V_e \quad , \quad (5.2.8)$$

wówczas przyrost energii potencjalnej danego ciała możemy przedstawić jako sumę przyrostów energii każdego elementu:

$$\delta \Pi = \sum \delta \Pi_e \quad . \quad (5.2.9)$$

Zagadnienia MES, ze względu na późniejszą implementację do programów komputerowych, zwykle się zapisywać w formie macierzowej. Ze względu na symetrię tensora odkształcenia oraz naprężenia, przyrost energii potencjalnej (Rów. 5.2.7) dla dowolnego elementu możemy zapisać w macierzowej postaci:

$$\delta\Pi_e = \int_{V_e} \{\mathbf{E}^{el}(T)\mathbf{e}\}^T \{\boldsymbol{\delta e}\} dV_e - \int_{V_e} \{\mathbf{E}^{el}(T)\mathbf{e}^{th}\}^T \{\boldsymbol{\delta e}\} dV_e - \int_{V_e} \{\mathbf{b}\}^T \{\boldsymbol{\delta u}\} dV_e - \int_{S_e} \{\mathbf{f}\}^T \{\boldsymbol{\delta u}\} dS_e = 0 \quad , \quad (5.2.10)$$

gdzie wektor $\{\mathbf{e}\}$ jest wektorem odkształceń inżynierskich (Załącznik D.1).

W przemieszczeniowej Metodzie Elementów Skończonych pole przemieszczeń jest ciągłe, a dla dowolnego elementu jest opisane w zależności od wielkości węzłowych przy pomocy funkcji kształtu:

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{q}_e\} \quad . \quad (5.2.11)$$

Odkształcenia w dowolnym punkcie możemy wyznaczyć w zależności od przemieszczeń węzłowych danego elementu $\{\mathbf{q}_e\}$ w następującej postaci:

$$\{\mathbf{e}\} = [\boldsymbol{\partial}]\{\mathbf{u}\} = [\boldsymbol{\partial}][\mathbf{N}]\{\mathbf{q}_e\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{q}_e\} \quad , \quad (5.2.12)$$

gdzie macierz $[\mathbf{B}] = [\boldsymbol{\partial}][\mathbf{N}]$ jest nazywana macierzą odkształcenie-przemieszczenie, pozwalającą interpolować odkształcenia w elemencie przy pomocy przemieszczeń węzłowych (Załącznik D.1). Biorąc pod uwagę powyższe równania (Rów. 5.2.11, 5.2.12) pierwszy człon równania 5.2.10 przyjmie postać:

$$\int_{V_e} \{\mathbf{E}^{el}(T)\mathbf{e}\}^T \{\boldsymbol{\delta e}\} dV_e = \int_{V_e} \{\mathbf{e}\}^T [\mathbf{E}^{el}(T)]^T \{\boldsymbol{\delta e}\} dV_e = \int_{V_e} \{\mathbf{q}_e\}^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}^{el}(T)][\mathbf{B}]\{\boldsymbol{\delta q}_e\} dV_e \quad . \quad (5.2.13)$$

A więc równanie 5.2.10 przyjmie postać:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_e = & \int_{V_e} \{\mathbf{q}_e\}^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}^{el}(T)][\mathbf{B}]\{\boldsymbol{\delta q}_e\} dV_e - \int_{V_e} \{\mathbf{e}^{th}\}^T [\mathbf{E}^{el}(T)][\mathbf{B}]\{\boldsymbol{\delta q}_e\} dV_e - \\ & - \int_{V_e} \{\mathbf{b}\}^T [\mathbf{N}]\{\boldsymbol{\delta q}_e\} dV_e - \int_{S_e} \{\mathbf{f}\}^T [\mathbf{N}]\{\boldsymbol{\delta q}_e\} dS_e = 0 \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

Ponieważ wektor przemieszczeń węzłowych $\{\mathbf{q}_e\}$ nie zależy od aktualnej konfiguracji, możemy go wyciągnąć spod całki. Następnie korzystając z dowolności wirtualnego pola przemieszczeń δq_e otrzymujemy równanie:

$$\{\mathbf{q}_e\}^T \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}^{el}(T)][\mathbf{B}] dV_e = \int_{V_e} \{\mathbf{b}\}^T [\mathbf{N}] dV_e + \int_{S_e} \{\mathbf{f}\}^T [\mathbf{N}] dS_e + \int_{V_e} \{\mathbf{e}^{th}\}^T [\mathbf{E}^{el}(T)][\mathbf{B}] dV_e \quad , \quad (5.2.15)$$

które po transpozycji prowadzi do klasycznego równania elementu skońzonego zagadnienia liniowo termo-sprężystego [228, 229]:

$$[\mathbf{k}]\{\mathbf{q}_e\} = \{\mathbf{f}_e^M\} + \{\mathbf{f}_e^{th}\} = \{\mathbf{f}_e\} \quad , \quad (5.2.16)$$

gdzie:

$$[\mathbf{k}] = \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}^{el}][\mathbf{B}] dV_e \quad , \quad (5.2.17)$$

jest macierzą sztywności elementu,

$$\{\mathbf{f}_e^M\} = \int_{V_e} [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{b}\} dV_e + \int_{S_e} [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{f}\} dS_e \quad , \quad (5.2.18)$$

jest wektorem węzłowych obciążień mechanicznych, natomiast wektor

$$\{\mathbf{f}_e^{th}\} = \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}^{el}(T)] \{e^{th}\} dV_e , \quad (5.2.19)$$

reprezentuje fikcyjną siłę powstałą od rozszerzalności cieplnej.

Do wyznaczania macierzy sztywności elementu (Rów. 5.2.17) w programach komercyjnych najczęściej korzystamy z idei elementu izoparametrycznego. Koncepcja elementu izoparametrycznego polega na wykorzystaniu elementu referencyjnego o znormalizowanych wymiarach w referencyjnym układzie współrzędnych. Rzeczywisty element z rzeczywistego układu (x_1, x_2, x_3) jest odwzorowywany do referencyjnego układu współrzędnych (ξ, η, ζ), w którym przybiera regularny kształt o znormalizowanych wymiarach. Dzięki temu jesteśmy w stanie w łatwy sposób zbudować funkcje kształtu, a następnie wyznaczyć macierz sztywności elementu (przykładowo dla elementu 3d):

$$[\mathbf{k}] = \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta d\zeta . \quad (5.2.20)$$

Calka we wzorze (Rów. 5.2.20) jest wyznaczana numerycznie, przy pomocy kwadratur Gaussa:

$$[\mathbf{k}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta d\zeta = \sum_k \sum_l \sum_m w_k w_l w_m [\mathbf{W}](\xi_k, \eta_l, \zeta_m) , \quad (5.2.21)$$

gdzie w_k, w_l, w_m oznaczają wagi z kwadratur Gaussa, natomiast $W(\xi_k, \eta_l, \zeta_m)$ wartości iloczynu macierzy w punktach Gaussa:

$$[\mathbf{W}](\xi_k, \eta_l, \zeta_m) = [\mathbf{B}(\xi_k, \eta_l, \zeta_m)]^T [\mathbf{J}(\xi_k, \eta_l, \zeta_m)] [\mathbf{B}(\xi_k, \eta_l, \zeta_m)] . \quad (5.2.22)$$

Wektor sił węzłowych (Rów. 5.2.18) oraz fikcyjnych sił powstały od rozszerzalności cieplnej (Rów. 5.2.19) dla elementu izoparametrycznego jest wyznaczana numerycznie w analogiczny sposób jak macierz sztywności.

Po wyznaczeniu macierzy sztywności elementów oraz sił węzłowych elementów następuje alokacja do globalnego równania MES:

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{f}^M\} + \{\mathbf{f}^{th}\} = \{\mathbf{f}\} , \quad (5.2.23)$$

gdzie $[\mathbf{K}]$ nazywamy macierzą sztywności układu.

Z równania 5.2.5 widać, że podczas formułowania zagadnienia MES, naprężeniowe warunki brzegowe (Rów. 5.1.20) są naturalnie spełnione, natomiast warunki przemieszczeniowe (Rów. 5.1.21) są alokowane po zbudowaniu równania układu (Rów. 5.2.23).

Znając macierz sztywności układu $[\mathbf{K}]$ oraz wektor sił węzłowych możemy w prosty sposób z równania 5.2.23 wyznaczyć przemieszczenia $\{\mathbf{q}\}$ poszczególnych węzłów w układzie globalnym. Następnie na podstawie równania 5.2.12 wyznaczane są odkształcenia, a dalej na podstawie równania D.1.5 naprężenia. Jak wykazały numeryczne testy, najdokładniejsze wartości odkształceń oraz naprężen są otrzymywane w punktach Gaussa [230].

5.2.2 MES - Zagadnienia nieliniowe

Równanie MES 5.2.23 jest równaniem liniowym. W przypadku rozpatrywania zagadnień nieliniowych ścieżka równowagi jest nieliniowa (Rys. 5.8). Z tego względu zagadnienia nieliniowe rozwiązywane są metodami przyrostowo-iteracyjnymi. Obciążenie jest przykładowane w sposób

przyrostowy. Dla modelu materiału hyposprężysto-plastycznego, który charakteryzuje się małymi odkształceniami w stanie sprężystym oraz stosunkowo dużymi odkształceniami w stanie plastycznym (< 10%) oraz który uwzględnia duże przemieszczenia/rotacje, stan równowagi dla końca przyrostu obciążenia od stanu (n) do stanu ($n + 1$) może być opisany za pomocą zasad pracy wirtualnej [138, 202, 231, 232] :

$$\int_{V^{n+1}} (\sigma_{ij})_{n+1} (\delta e_{ij})_{n+1} dV^{n+1} = \int_{V^{n+1}} b_i^{n+1} (\delta u_i)_{n+1} dV^{n+1} + \int_{S^{n+1}} f_i^{n+1} (\delta u_i)_{n+1} dS^{n+1} . \quad (5.2.24)$$

Konfiguracja odkształconego ciała w końcowym stanie przyrostu rozpatrywanego obciążenia V_{n+1} nie jest znana, więc w celu rozwiązania równania równowagi (Rów. 5.2.24) zapisuje je się w konfiguracji znanej: dla stanu nieodkształconego V^0 - przy pomocy sformułowania całkowitego Lagrange'a lub dla początku przyrostu obciążenia V_n - sformułowanie aktualnione Lagrange'a. W niniejszej pracy stosować będziemy aktualnioną metodę Lagrange'a.

Zakładając niezależność obciążen zewnętrznych od deformacji, zasadę zachowania energii (Rów. 5.2.24) dla końca przyrostu obciążenia ($n + 1$) możemy zapisać równoważnie przy pomocy sformułowania aktualnionego Lagrange'a w następującej postaci [231, 233]:

$$\int_{V^n} (\sigma_{ij}^J)_{n+1} (\delta \epsilon_{ij})_{n+1} dV^n = \int_{V^n} b_i^{n+1} (\delta u_i)_{n+1} dV^n + \int_{S^n} f_i^{n+1} (\delta u_i)_{n+1} dS^n , \quad (5.2.25)$$

gdzie wielkości naprężeń, odkształceń oraz sił są wielkościami odnoszącymi się do stanu ($n + 1$), jednak mierzonymi w konfiguracji (n). W powyższym sformułowaniu (Rów. 5.2.25) odkształcienia ϵ_{ij} są dużymi odkształceniami Hencky'ego (Rów. 5.1.7), natomiast naprężenia σ_{ij}^J są pochodną Jaumanna naprężeń Cauchy'ego [231]:

$$(\sigma_{ij}^J)_{n+1} = \left(\frac{d\sigma_{ij}}{dt} \right)_{n+1} - (\sigma_{ik})_{n+1} \left(\frac{d\omega_{kj}}{dt} \right)_{n+1} - (\sigma_{jk})_{n+1} \left(\frac{d\omega_{ki}}{dt} \right)_{n+1} , \quad (5.2.26)$$

gdzie tensor ω_{ij} jest tensorem obrotu.

Do oszacowania energii wewnętrznej (Rów. 5.2.25) wykorzystano tensory naprężenia oraz odkształcenia pozwalające uniezależnić opisywane wielkości od sztywnych obrotów. Tensory te powinny być energetycznie sprzężone [202, 231, 232]. Tensor przyrostu odkształcenia Hencky'ego jest energetycznie sprzężony z pochodną Jaumanna z tensora naprężenia Kirchhoffa, który różni się od pochodnej Jaumanna tensora Cauchy'ego o człon objęciowy, którego pominięcie powoduje pomijalne błędy w przypadku modelowania plastyczności metali [202].

Uwzględniając fakt, że stan (n) traktujemy jako referencyjny oraz dodatkowo wykorzystano przedstawienie tensora odkształcenia na część liniową e_{ij} oraz nieliniową η_{ij} (Rów. 5.1.9) możemy zapisać:

$$(\sigma_{ij}^J)_{n+1} = (\sigma_{ij}^J)_n + \sigma_{ij}^J = (\sigma_{ij})_n + \sigma_{ij}^J , \quad (5.2.27)$$

$$(\epsilon_{ij})_{n+1} = (\epsilon_{ij})_n + \epsilon_{ij} = \Delta \epsilon_{ij} = e_{ij} + \eta_{ij} , \quad (5.2.28)$$

gdzie σ_{ij}^J , ϵ_{ij} oznaczają przyrosty odpowiednich tensorów od stanu (n) do stanu ($n + 1$).

Energię wewnętrzną w równaniu 5.2.25, przy użyciu powyższych zależności możemy przedstawić następująco:

$$\begin{aligned} & \int_{V^n} (\sigma_{ij})_{n+1}^J (\delta \epsilon_{ij})_{n+1} dV^n = \\ & = \int_{V^n} (\sigma_{ij})_n \delta e_{ij} dV^n + \int_{V^n} (\sigma_{ij})_n \delta \eta_{ij} dV^n + \int_{V^n} \sigma_{ij}^J \delta \epsilon_{ij} dV^n . \end{aligned} \quad (5.2.29)$$

Wykorzystując uogólnione równanie konstytutywne $\sigma_{ij}^J = E_{ijkl}^{pl}(T)\epsilon_{kl}^m = E_{ijkl}^{pl}(T)(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^{th})$, w którym tensor E_{ijkl}^{pl} oznacza tensor sztywności E_{ijkl}^{el} (Rów. 5.1.17) w przypadku stanu sprężystego lub zlinearyzowany styczny moduł sprężysto-plastyczny (Rów. 5.3.45) w przypadku stanu plastycznego, energię wewnętrzną możemy przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} & \int_{V^n} (\sigma_{ij})_{n+1}^J (\delta\epsilon_{ij})_{n+1} dV^n = \\ & = \int_{V^n} (\sigma_{ij})_n \delta e_{ij} dV^n + \int_{V^n} (\sigma_{ij})_n \delta \eta_{ij} dV^n + \int_{V^n} E_{ijkl}^{pl}(T)\epsilon_{kl}\delta\epsilon_{ij} dV^n - \int_{V^n} E_{ijkl}^{pl}(T)\epsilon_{kl}^{th}\delta\epsilon_{ij} dV^n . \end{aligned} \quad (5.2.30)$$

A więc, stan równowagi 5.2.25 przyjmie postać:

$$\int_{V^n} E_{ijkl}^{pl}(T)\epsilon_{kl}\delta\epsilon_{ij} dV^n + \int_{V^n} (\sigma_{ij})_n \delta \eta_{ij} dV^n = (f)_{n+1} - (f^i)_n , \quad (5.2.31)$$

gdzie wartości po prawej stronie są znane i oznaczają odpowiednio:
energię wewnętrzną początku przyrostu obciążenia:

$$(f^i)_n = \int_{V^n} (\sigma_{ij})_n \delta e_{ij} dV^n , \quad (5.2.32)$$

pracę obciążeń jako sumę obciążień mechanicznych oraz fikcyjnych, pochodzących od rozszerzałości cieplnej:

$$(f)_{n+1} = (f^M)_{n+1} + (f^{th})_{n+1} = \int_{V^n} b_i^{n+1} \delta u_i dV^n + \int_{S^n} f_i^{n+1} \delta u_i dS^n + \int_{V^n} E_{ijkl}^{pl}(T)\epsilon_{kl}^{th}\delta\epsilon_{ij} dV^n . \quad (5.2.33)$$

Równanie 5.2.31 jest równaniem nieliniowym. W celu jego rozwiązania aproksymuje się je (linearyzuje), zakładając: $\epsilon_{ij} = e_{ij}$, co prowadzi ostatecznie do sformułowania:

$$\int_{V^n} E_{ijkl}^{pl}(T)e_{kl}\delta e_{ij} dV^n + \int_{V^n} (\sigma_{ij})_n \delta \eta_{ij} dV^n = (f)_{n+1} - (f^i)_n , \quad (5.2.34)$$

które pozwala analogicznie jak w przypadku zagadnienia liniowego (Rozdział 5.2.1) wyprowadzić ogólne równanie elementu w postaci macierzowej [138, 202, 231, 232]:

$$[\mathbf{k}_T]_n \{\Delta \mathbf{q}_e\} = \{\mathbf{f}_e\}_{n+1} - \{\mathbf{f}_e^i\}_n \quad (5.2.35)$$

gdzie macierz styczna $[\mathbf{k}_T]_n$ jest sumą macierzy sztywności liniowej $[\mathbf{k}_l]_n$ - analogicznej jak dla zagadnienia liniowego (Rów. 5.2.17) oraz macierzy sztywności nieliniowej $[\mathbf{k}_{nl}]_n$ nazywanej macierzą sztywności naprężeniowej:

$$[\mathbf{k}_T]_n = [\mathbf{k}_l]_n + [\mathbf{k}_{nl}]_n = \int_{V_{e_n}} [\mathbf{B}]_n^T [\mathbf{E}^{pl}(T)]_n [\mathbf{B}]_n dV_{e_n} + \int_{V_{e_n}} [\mathbf{B}_{nl}]_n^T [\boldsymbol{\sigma}]_n [\mathbf{B}_{nl}]_n dV_{e_n} \quad (5.2.36)$$

Wektor sił węzłowych $\{\mathbf{f}_e^i\}_n$ reprezentuje naprężenia w elemencie, występujące na początku przyrostu obciążenia (stan - (n)):

$$\{\mathbf{f}_e^i\}_n = \int_{V_{e_n}} [\mathbf{B}]_n^T \{\boldsymbol{\sigma}\}_n dV_{e_n} . \quad (5.2.37)$$

Wektor obciążień zewnętrznych $\{\mathbf{f}_e\}_{n+1}$ przedstawia się analogicznie jak w przypadku zagadnienia liniowego (Rów. 5.2.18).

Sumując równanie 5.2.35 po wszystkich elementach, analogicznie jak w przypadku zagadnienia liniowego, otrzymujemy globalne równanie MES zagadnienia nieliniowego:

$$[\mathbf{K}_T]_n \{\Delta \mathbf{q}\} = (\{\mathbf{f}\}_{n+1}^M + \{\mathbf{f}\}_{n+1}^{th}) - \{\mathbf{f}^i\}_n = \{\mathbf{f}\}_{n+1} - \{\mathbf{f}^i\}_n . \quad (5.2.38)$$

5.2.2.1 Metoda Newtona-Raphsona

Równanie globalne MES zagadnienia nieliniowego (Rów. 5.2.38) zostało wyznaczone w sposób aproksymacyjny. Prawa strona reprezentuje stan niezrównoważenia: różnicę pomiędzy siłami węzłowymi zewnętrznymi, a wewnętrznymi - reprezentującymi naprężenia w elemencie:

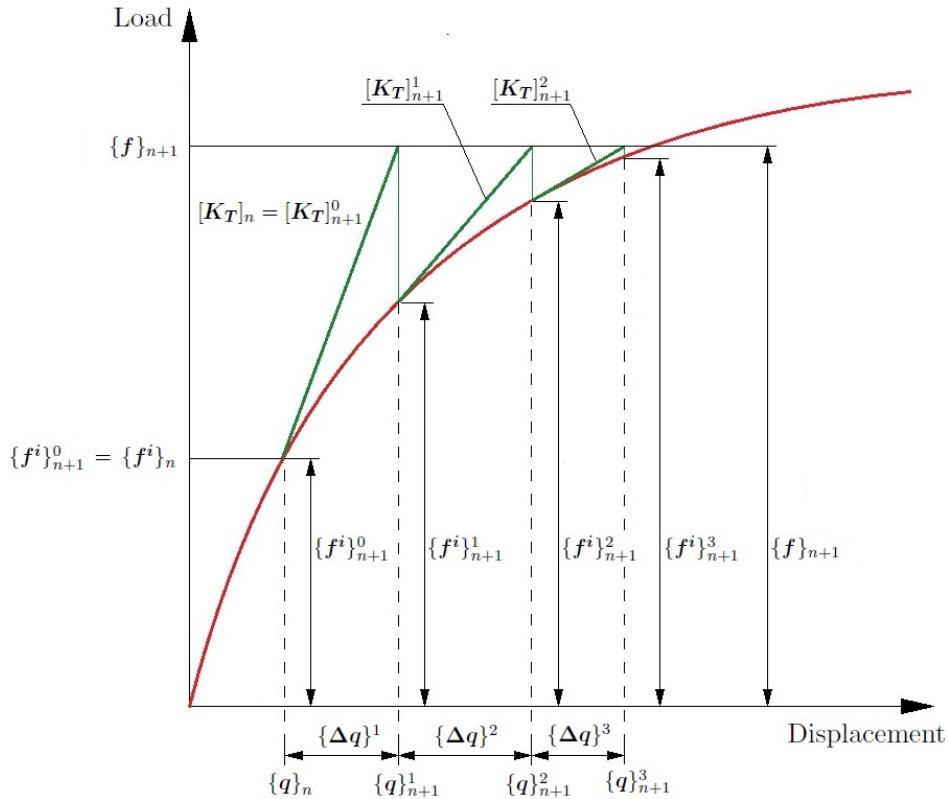
$$\{f\}_{n+1} - \{f^i\}_n = 0 \quad . \quad (5.2.39)$$

W celu wyznaczenia równowagi, konieczne jest jej wyzerowanie. Najpopularniejszą metodą rozwiązywania tego zagadnienia jest iteracyjna pełna metoda Newtona-Raphsona. Sprowadza ona równanie 5.2.38 do równania iteracyjnego [231]:

$$[K_T]_{n+1}^{j-1} \{\Delta q\}^j = \{f\}_{n+1} - \{f^i\}_{n+1}^{j-1} \quad . \quad (5.2.40)$$

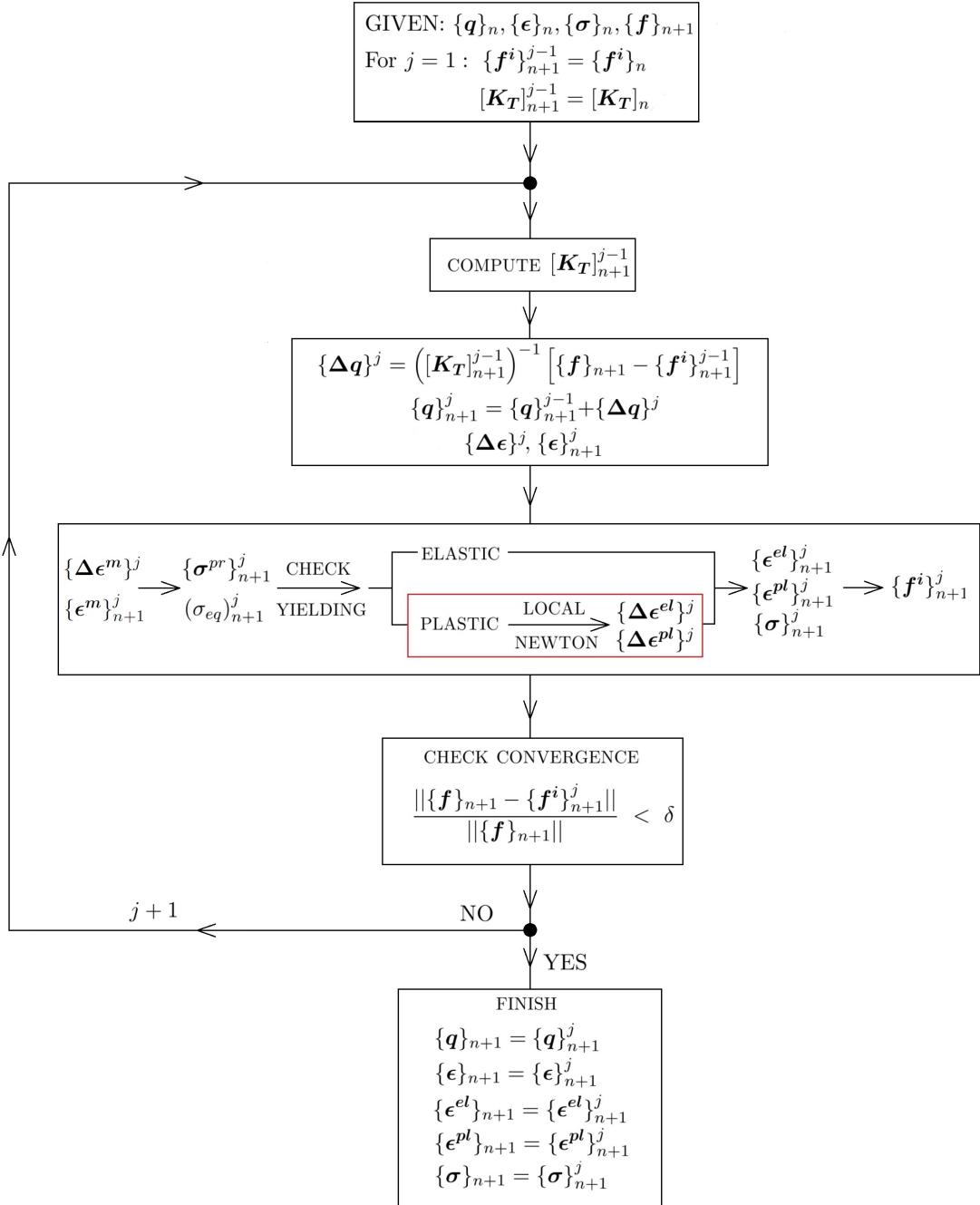
Równanie to jest wyznaczane w sposób iteracyjny, którego schemat został przedstawiony na rysunku 5.9, natomiast jego interpretację graficzną przedstawia rysunek 5.8.

Podczas iteracyjnego wyznaczania stanu równowagi danego przyrostu obciążenia, dla każdej iteracji wyznaczana jest styczna macierz sztywności. Mówimy wówczas o pełnej metodzie Newtona-Raphsona (Rys. 5.8). Dosyć popularną jest również zmodyfikowana metoda Newtona-Raphsona w której styczna macierz sztywności jest wyznaczana na początku przyrostu obciążenia, a podczas kolejnych iteracji pozostaje stała. Dzięki temu skracza się proces obliczeniowy poprzez zaniechanie budowania macierzy sztywności dla każdej iteracji, jednak metoda ta wymaga większej liczby iteracji w celu osiągnięcia zbieżności.



Rysunek 5.8: Schematyczne przedstawienie "pełnej" metody Newtona-Raphsona.

Na rysunku 5.9 reprezentującym iteracyjny proces Newtona-Raphsona czerwoną ramką zaznaczono miejsce, w którym w przypadku stanu plastycznego następuje wyznaczenie przyrostu odkształceń plastycznych (podzielenie przyrostu odkształceń całkowitych na część sprężystą oraz plastyczną), czyli miejsce w którym implementowane jest kryterium plastyczności. W celu podziału przyrostu odkształcenia na część sprężystą oraz plastyczną wykorzystywana jest lokalna metoda Newtona. Dodatkowo w celu wyznaczenia stycznej macierzy sztywności (Rów. 5.2.36), konieczna jest implementacja zlinearyzowanego modułu sprężysto-plastycznego (Rów. 5.3.45). Cały proces implementacji kryterium plastyczności oraz wyznaczania zlinearyzowanego modułu sprężysto-plastycznego został szeroko opisany w rozdziale 5.3.



Rysunek 5.9: Schemat zastosowanego iteracyjnego procesu Newtona-Raphsona.

5.3 Implementacja kryterium plastyczności do programów MES

W poprzednim rozdziale (Rozdział 5.2.2) zaprezentowany zastał przyrostowo-iteracyjny schemat (Rys. 5.9) obliczeń MES dla zagadnień nieliniowych przy użyciu metody Newtona-Raphsona dla sformułowania aktualnianego Lagrange'a. Jak widać ze schematu (Rys. 5.9) podczas analizowania zagadnienia sprężysto-plastycznego konieczne jest podzielenie przyrostu tensora całkowitych odkształceń na część sprężystą oraz plastyczną, które służą do wyznaczenia tensora naprężeń $(\sigma_{ij})_{n+1}^j$ oraz parametrów stanu: $(\epsilon_{ij}^{pl})_{n+1}^j, (\sigma_{eq})_{n+1}^j, (\sigma_Y^T)_{n+1}^j$ dla końca każdej iteracji (j) rozpatrywanego przyrostu obciążenia (w celu zwiększenia przejrzystości w niniejszym rozdziale pomijamy indeks "j"). W tym celu wykorzystuje się równania pozwalające opisać stan plastyczności (Rów. 5.1.61 - 5.1.66). Aby zaimplementować te związki w MES należy sformułować je w sposób przyrostowy. Znane są różne metody całkowania numerycznego układu równań zagadnienia sprężysto-plastycznego, do najpopularniejszych można zaliczyć [55, 57]:

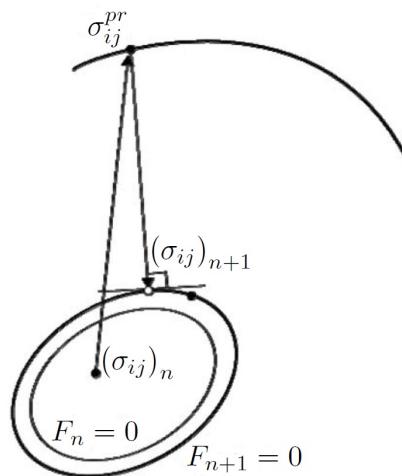
- niejawną metodą rzutowania wstecznego Eulera
- jawną metodą rzutowania w przód Eulera
- metoda punktu pośredniego

Metoda rzutowania wstecznego Eulera cechuje się dokładnością oraz stabilnością [55, 57] i z tych powodów jest wykorzystywana w komercyjnym oprogramowaniu MES. A więc, jako klasyczna metoda została wybrana do implementacji modelu Burzyńskiego w niniejszej pracy.

W niejawnej metodzie rzutowania wstecznego Eulera, w pierwszym kroku naprężenia wyznaczane są przy założeniu, że przyrost odkształcenia jest całkowicie sprężysty. Otrzymany w ten sposób tzw. predyktor naprężenia:

$$\sigma_{ij}^{pr} = (\sigma_{ij})_n + E_{ijkl}^{el} \Delta \epsilon_{kl} \quad , \quad (5.3.1)$$

jest następnie rzutowany na aktualną powierzchnię plastyczności, poprzez iteracyjne wyznaczenie przyrostu odkształceń plastycznych. Schematycznie obrazuje to rysunek 5.10.



Rysunek 5.10: Schematyczne przedstawienie niejawnego metody Eulera z rzutowaniem wstecznym [234].

Kolejną istotną kwestią przy implementacji równań sprężysto-plastycznych jest zapewnienie kwadratowej zbieżności metody Newtona-Raphsona. Wymaga to sformułowania związków, które w sposób liniowy aproksymują zależność pomiędzy tensorem naprężenia oraz odkształcenia

mechanicznego w stanie plastycznym dla danej temperatury:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}^{pl}(T) \epsilon_{kl}^m , \quad (5.3.2)$$

co pozwala zbudować styczną macierz sztywności (Rów. 5.2.36) dla kolejnego kroku obliczeniowego. Tensor E_{ijkl}^{pl} nazywany jest zlinearyzowanym stycznym modułem sprężysto-plastycznym. Powinien on być spójny ze schematem całkowania równań plastyczności. Algorytm wyznaczania oraz implementacji stycznej macierzy sztywności został przedstawiony w rozdziale 5.3.3.

5.3.1 Całkowanie numeryczne

W celu przeprowadzenia numerycznej implementacji kryterium plastyczności musimy dysponować równaniami plastyczności (Rów. 5.1.61 - 5.1.66) w formie przyrostowej. W tym celu, do całkowania numerycznego użyjemy niejawnej metody Eulera z rzutowaniem wstecznym. Tensor naprężenia możemy przedstawić w następującej postaci:

$$(\sigma_{ij})_{n+1} = (\sigma_m)_{n+1} \delta_{ij} + \frac{2}{3} (\sigma_e)_{n+1} (n_{ij})_{n+1} . \quad (5.3.3)$$

Tensory $(s_{ij})_{n+1}$ oraz s_{ij}^{pr} są współliniowe [55], więc możemy stąd wnioskować (szczegółowe wyprowadzenie w Dodatku E.2.0.2) :

$$(n_{ij})_{n+1} = n_{ij}^{pr} . \quad (5.3.4)$$

Tensor n_{ij}^{pr} jest wielkością znaną na początku kroku obliczeniowego, więc do określenia stanu naprężenia wystarczy znajomość dwóch wielkości: $(\sigma_m)_{n+1}$ oraz $(\sigma_e)_{n+1}$. Wówczas tensor naprężenia przyjmie postać:

$$(\sigma_{ij})_{n+1} = (\sigma_m)_{n+1} \delta_{ij} + \frac{2}{3} (\sigma_e)_{n+1} n_{ij}^{pr} . \quad (5.3.5)$$

Tensor naprężenia dla kroku $(n+1)$ możemy zapisać w postaci (szczegółowe wyprowadzenie w Dodatku E.2.0.1):

$$(\sigma_{ij})_{n+1} = \sigma_{ij}^{pr} - K(T_{n+1}) \Delta \epsilon_p \delta_{ij} - 2\mu(T_{n+1}) \Delta \epsilon_q (n_{ij})_{n+1} , \quad (5.3.6)$$

gdzie predyktor tensora naprężeń wyraża zależność $\sigma_{ij}^{pr} = (\sigma_{ij})_n + E_{ijkl}^{el}(T_{n+1}) \Delta \epsilon_{kl}^m$. Rzutując równanie 5.3.6 na $(n_{ij})_{n+1}$ otrzymujemy (szczegółowe wyprowadzenie w Dodatku E.2.0.3):

$$(\sigma_e)_{n+1} = \sigma_e^{pr} - 3\mu(T_{n+1}) \Delta \epsilon_q . \quad (5.3.7)$$

Rzutując równanie 5.3.6 na δ_{ij} otrzymujemy (szczegółowe wyprowadzenie w Dodatku E.2.0.3):

$$(\sigma_m)_{n+1} = \sigma_m^{pr} - K(T_{n+1}) \Delta \epsilon_p . \quad (5.3.8)$$

Przedstawienie $(\sigma_m)_{n+1}$ oraz $(\sigma_e)_{n+1}$ przy pomocy równania 5.3.8 oraz 5.3.7 pokazuje, że do określenia tensora naprężenia (Rów. 5.3.5) na końcu kroku $(n+1)$ wystarczy znajomość $\Delta \epsilon_q$ oraz $\Delta \epsilon_p$.

Rozważamy kryterium plastyczności ze wzmacnieniem izotropowym, dla którego krzywa umocnienia jest definiowana przy pomocy punktów, tworząc krzywą łamana, dla której poszczególne przedziały są prostymi odcinkami. Z tego powodu granice plastyczności możemy opisać równaniem:

$$\left(\sigma_Y^T(\epsilon_{eq}^{pl}, T) \right)_{n+1} = \left(\sigma_Y^T \right)_n + \left(H(\epsilon_{eq}^{pl}, T) \right)_{n+1} \cdot \Delta \epsilon_{eq}^{pl} , \quad (5.3.9)$$

gdzie $H(\epsilon_{eq}^{pl}, T)$ jest modułem plastyczności zależnym od zredukowanych odkształceń plastycznych oraz od temperatury.

Równania 5.1.61 - 5.1.66 zapisane w przyrostowej formie pozwalają podsumować układ równań potrzebny do opisania tensora naprężenia $(\sigma_{ij})_{n+1}$ oraz parametrów stanu $(\epsilon_{ij}^{pl})_{n+1}$, $(\sigma_{eq})_{n+1}$, $(\sigma_Y^T)_{n+1}$ dla końca kroku czasowego:

$$\frac{1}{2(k_{T,\epsilon})_n} \left[3[(k_{T,\epsilon})_n - 1] (\sigma_m)_{n+1} + 9\sqrt{[(k_{T,\epsilon})_n - 1]^2 ((\sigma_m)_{n+1})^2 + 4(k_{T,\epsilon})_n ((\sigma_e)_{n+1})^2} \right] - \\ - (\sigma_Y^T)_n - (H(\epsilon_{eq}^{pl}, T))_{n+1} \cdot \Delta\epsilon_{eq}^{pl} = 0 \quad (5.3.10)$$

$$\Delta\epsilon_p \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_e} \right)_{n+1} - \Delta\epsilon_q \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_m} \right)_{n+1} = 0 \quad (5.3.11)$$

$$(\sigma_e)_{n+1} = \sigma_e^{pr} - 3\mu(T_{n+1})\Delta\epsilon_q , \quad (5.3.12)$$

$$(\sigma_m)_{n+1} = \sigma_m^{pr} - K(T_{n+1})\Delta\epsilon_p , \quad (5.3.13)$$

$$\Delta\epsilon_{eq}^{pl} = \frac{(\sigma_m)_{n+1} \Delta\epsilon_p + (\sigma_e)_{n+1} \Delta\epsilon_q}{(\sigma_Y^T(\epsilon_{eq}^{pl}, T))_{n+1}} . \quad (5.3.14)$$

W warunku plastyczności (Rów. 5.3.10) parametr $k_T = k(T)$, opisujący asymetrię zakresu sprężystego, zależy od temperatury. W naszych obliczeniach zakładamy, że podczas obliczeń pozostało stały, równy wartości zależnej od temperatury końcowej w rozpatrywanym zagadnieniu. Układ równań 5.3.10-5.3.14 jest rozwiązywany w sposób iteracyjny metodą Newtona. Po jego rozwiązaniu otrzymujemy przyrosty $\Delta\epsilon_p$, $\Delta\epsilon_q$, na podstawie których przyrost tensora odkształceń plastycznych jest wyznaczany z równania (przyrostowa forma równania (5.1.65)):

$$\Delta\epsilon_{ij}^{pl} = \frac{1}{3} \Delta\epsilon_p \delta_{ij} + \Delta\epsilon_q n_{ij}^{pr} . \quad (5.3.15)$$

Natomiast tensor naprężenia dla końca przyrostu obciążenia wyznaczany jest z następującej zależności (5.3.5):

$$(\sigma_{ij})_{n+1} = (\sigma_m)_{n+1} \delta_{ij} + \frac{2}{3} (\sigma_e)_{n+1} n_{ij}^{pr} . \quad (5.3.16)$$

5.3.2 Rozwiązywanie przyrostowego układu równań sprężysto-plastycznych iteracyjną metodą Newtona

Do rozwiązania układu sprężysto-plastycznych równań 5.3.10 - 5.3.14 użyty został schemat iteracyjny Newtona, przedstawiony przez Aravas'a [55]. Jako bazowe równania przyjmujemy równania 5.3.10 - 5.3.11:

$$f_1 = \Delta\epsilon_p \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_e} \right)_{n+1} - \Delta\epsilon_q \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_m} \right)_{n+1} = 0 , \quad (5.3.17)$$

$$f_2 = F = \frac{1}{2k_{T,\epsilon}} \left[3(k_{T,\epsilon} - 1) (\sigma_m)_{n+1} + 9\sqrt{(k_{T,\epsilon} - 1)^2 ((\sigma_m)_{n+1})^2 + 4k_{T,\epsilon} ((\sigma_e)_{n+1})^2} \right] - \\ - (\sigma_Y^T)_n - (H(\epsilon_{eq}^{pl}, T))_{n+1} \cdot \Delta\epsilon_{eq}^{pl} = 0 . \quad (5.3.18)$$

Jako niewiadome traktujemy $\Delta\epsilon_p$ oraz $\Delta\epsilon_q$.

Możemy zdefiniować układ równań Newtona:

$$df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial \Delta\epsilon_p} d\Delta\epsilon_p + \frac{\partial f_1}{\partial \Delta\epsilon_q} d\Delta\epsilon_q = -f_1 , \quad (5.3.19)$$

$$df_2 = \frac{\partial f_2}{\partial \Delta \epsilon_p} d\Delta \epsilon_p + \frac{\partial f_2}{\partial \Delta \epsilon_q} d\Delta \epsilon_q = -f_2 \quad . \quad (5.3.20)$$

Oznaczając:

$$A_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial \Delta \epsilon_p}, \quad A_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial \Delta \epsilon_q}, \quad A_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial \Delta \epsilon_p}, \quad A_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial \Delta \epsilon_q}, \quad b_1 = -f_1, \quad b_2 = -f_2 \quad ,$$

powyższy układ równań (Rów. 5.3.19 - 5.3.21) możemy zapisać w postaci:

$$A_{11} d\Delta \epsilon_p + A_{12} d\Delta \epsilon_q = b_1 \quad , \quad (5.3.21)$$

$$A_{21} d\Delta \epsilon_p + A_{22} d\Delta \epsilon_q = b_2 \quad , \quad (5.3.22)$$

gdzie współczynniki $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ przedstawiają się według następujących zależności (dokładne wyprowadzenie w załączniku E.2.1):

$$A_{11} = \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_e} \right)_{n+1} - K(T_{n+1}) \Delta \epsilon_p \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \sigma_m \partial \sigma_e} \right)_{n+1} + K(T_{n+1}) \Delta \epsilon_q \left(\frac{\partial^2 F}{\partial^2 \sigma_m} \right)_{n+1} \quad , \quad (5.3.23)$$

$$A_{12} = - \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_m} \right)_{n+1} - 3\mu(T_{n+1}) \Delta \epsilon_p \left(\frac{\partial^2 F}{\partial^2 \sigma_e} \right)_{n+1} + 3\mu(T_{n+1}) \Delta \epsilon_q \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \sigma_e \partial \sigma_m} \right)_{n+1} \quad , \quad (5.3.24)$$

$$A_{21} = -K(T_{n+1}) \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_m} \right)_{n+1} - \left(H(\epsilon_{eq}^{pl}, T) \right)_{n+1} \frac{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}}{\partial \Delta \epsilon_p} \quad , \quad (5.3.25)$$

$$A_{22} = -3\mu(T_{n+1}) \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_e} \right)_{n+1} - \left(H(\epsilon_{eq}^{pl}, T) \right)_{n+1} \frac{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}}{\partial \Delta \epsilon_q} \quad . \quad (5.3.26)$$

Pochodne cząstkowe przedstawione w równaniach 5.3.23 - 5.3.26 opisujące współczynniki $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ przedstawiają się według następujących zależności:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_m} \right)_{n+1} = \frac{3}{2} \frac{(k_{T,\epsilon})_n - 1}{(k_{T,\epsilon})_n} \left(1 + \frac{3[(k_{T,\epsilon})_n - 1](\sigma_m)_{n+1}}{\sqrt{9[(k_{T,\epsilon})_n - 1]^2 ((\sigma_m)_{n+1})^2 + 4(k_{T,\epsilon})_n ((\sigma_e)_{n+1})^2}} \right) \quad , \quad (5.3.27)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_e} \right)_{n+1} = \frac{2(\sigma_e)_{n+1}}{\sqrt{9[(k_{T,\epsilon})_n - 1]^2 ((\sigma_m)_{n+1})^2 + 4(k_{T,\epsilon})_n ((\sigma_e)_{n+1})^2}} \quad , \quad (5.3.28)$$

$$\frac{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}}{\partial \Delta \epsilon_p} = \frac{(\sigma_m)_{n+1}}{(\sigma_Y^T)_{n+1}} \quad , \quad \frac{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}}{\partial \Delta \epsilon_q} = \frac{(\sigma_e)_{n+1}}{(\sigma_Y^T)_{n+1}} \quad , \quad (5.3.29)$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \sigma_m \partial \sigma_e} \right)_{n+1} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \sigma_e \partial \sigma_m} \right)_{n+1} = - \frac{18[(k_{T,\epsilon})_n - 1]^2 (\sigma_e)_{n+1} (\sigma_m)_{n+1}}{\left[\sqrt{9[(k_{T,\epsilon})_n - 1]^2 ((\sigma_m)_{n+1})^2 + 4(k_{T,\epsilon})_n ((\sigma_e)_{n+1})^2} \right]^3} \quad , \quad (5.3.30)$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial^2 \sigma_m} \right)_{n+1} = \frac{18[(k_{T,\epsilon})_n - 1]^2 ((\sigma_e)_{n+1})^2}{\left[\sqrt{9[(k_{T,\epsilon})_n - 1]^2 ((\sigma_m)_{n+1})^2 + 4(k_{T,\epsilon})_n ((\sigma_e)_{n+1})^2} \right]^3} \quad , \quad (5.3.31)$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial^2 \sigma_e} \right)_{n+1} = \frac{18[(k_{T,\epsilon})_n - 1]^2 ((\sigma_m)_{n+1})^2}{\left[\sqrt{9[(k_{T,\epsilon})_n - 1]^2 ((\sigma_m)_{n+1})^2 + 4(k_{T,\epsilon})_n ((\sigma_e)_{n+1})^2} \right]^3} \quad . \quad (5.3.32)$$

Z układu równań 5.3.21-5.3.22 wyliczamy przyrost $d\Delta\epsilon_p$ oraz $d\Delta\epsilon_q$ dla iteracji $(k+1)$ za pomocą wzorów (korzystając przykładowo z metody wyznaczników):

$$[d\Delta\epsilon_p]_{k+1} = \frac{b_1 A_{22} - b_2 A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{21} A_{12}} , \quad (5.3.33)$$

$$[d\Delta\epsilon_q]_{k+1} = \frac{A_{11} b_2 - A_{21} b_1}{A_{11} A_{22} - A_{21} A_{12}} . \quad (5.3.34)$$

A następnie wartości $\Delta\epsilon_p$, $\Delta\epsilon_q$ dla iteracyjnego kroku $(k+1)$:

$$[\Delta\epsilon_p]_{k+1} = [\Delta\epsilon_p]_k + [d\Delta\epsilon_p]_{k+1} , \quad (5.3.35)$$

$$[\Delta\epsilon_q]_{k+1} = [\Delta\epsilon_q]_k + [d\Delta\epsilon_q]_{k+1} . \quad (5.3.36)$$

Po wyznaczeniu wartości $\Delta\epsilon_p$, $\Delta\epsilon_q$ dla kroku $(k+1)$, wyznaczamy aktualne wartości definiujące tensor naprężenia oraz parametry stanu według wzorów (Rów. 5.3.12 - 5.3.14):

$$[(\sigma_e)_{n+1}]_{k+1} = \sigma_e^{pr} - 3\mu(T_{n+1}) [\Delta\epsilon_q]_{k+1} , \quad (5.3.37)$$

$$[(\sigma_m)_{n+1}]_{k+1} = \sigma_m^{pr} - K(T_{n+1}) [\Delta\epsilon_p]_{k+1} , \quad (5.3.38)$$

$$[\Delta\epsilon_{eq}^{pl}]_{k+1} = \frac{[(\sigma_m)_{n+1}]_{k+1} [\Delta\epsilon_p]_{k+1} + [(\sigma_e)_{n+1}]_{k+1} [\Delta\epsilon_q]_{k+1}}{\left[(\sigma_Y^T)_{n+1}\right]_k} , \quad (5.3.39)$$

$$\left[(\epsilon_{eq}^{pl})_{n+1}\right]_{k+1} = \left(\epsilon_{eq}^{pl}\right)_n + [\Delta\epsilon_{eq}^{pl}]_{k+1} , \quad (5.3.40)$$

$$\left[(\sigma_Y^T)_{n+1}\right]_{k+1} = \left(\sigma_Y^T\right)_n + \left(H(\epsilon_{eq}^{pl}, T)\right)_{n+1} \cdot \left[(\epsilon_{eq}^{pl})_{n+1}\right]_{k+1} . \quad (5.3.41)$$

Po uaktualnieniu wartości definiujących tensor naprężenia oraz parametry stanu, sprawdzamy czy równania f_1 oraz f_2 są spełnione:

$$[f_1]_{k+1} < 10^{-10} \quad \text{oraz} \quad [f_2]_{k+1} < 10^{-10} . \quad (5.3.42)$$

Jeżeli tak, wówczas uznajemy, że rozpatrywany układ równań jest zbieżny. A więc, możemy uaktualnić tensor naprężenia oraz odkształcenia plastycznego według zależności 5.3.15 - 5.3.16:

$$\left(\epsilon_{ij}^{pl}\right)_{n+1} = \left(\epsilon_{ij}^{pl}\right)_n + \Delta\epsilon_{ij}^{pl} = \left(\epsilon_{ij}^{pl}\right)_n + \frac{1}{3} \Delta\epsilon_p \delta_{ij} + \Delta\epsilon_q n_{ij}^{pr} , \quad (5.3.43)$$

$$(\sigma_{ij})_{n+1} = (\sigma_m)_{n+1} \delta_{ij} + \frac{2}{3} (\sigma_e)_{n+1} n_{ij}^{pr} . \quad (5.3.44)$$

W programie ANSYS odkształcenia styczne są odkształceniami inżynierskimi (podwojone odkształcenia styczne, tensorowe - Rów. D.1.2), więc w implementowanej procedurze, podczas aktualizacji tychże odkształceń, zostały one podzielone przez dwa (Załącznik 5.3.4).

5.3.3 Zlinearyzowany styczny moduł sprężysto-plastyczny

W przyrostowo-iteracyjnej metodzie Newtona-Raphsona równania równowagi wyznaczane są dla końca przyrostu obciążenia. W celu zapewnienia kwadratowej zbieżności metody Newtona-Raphsona należy zaimplementować zlinearyzowany styczny moduł sprężysto-plastyczny E_{ijkl}^{pl} spójny z metodą całkowania równań plastyczności. Zlinearyzowany styczny sprężysto-plastyczny

moduł definiuje przyrost tensora naprężenia spowodowany przyrostem tensora odkształcenia dla końca rozpatrywanego przyrostu obciążenia, co przedstawia zależność [55, 57]:

$$E_{ijkl}^{pl} = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_{n+1}. \quad (5.3.45)$$

W niniejszej pracy zaimplementowano zlinearyzowany spójny moduł styczny sprzężony z warunkiem plastyczności Burzyńskiego przedstawiony w pracy Zhang [57]:

$$E_{ijkl}^{pl} = d_0 \delta_{ijkl} + d_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + d_2 (n_{ij})_{n+1} (n_{kl})_{n+1} + d_3 \delta_{ij} (n_{kl})_{n+1} + d_4 (n_{ij})_{n+1} \delta_{kl} \quad (5.3.46)$$

gdzie $(n_{ij})_{n+1} = n_{ij}^{pr} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^{pr}}{\sigma_e^{pr}}$, $\delta_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jk}$ jest tensorem jednostkowym czwartego rzędu, natomiast współczynniki d_i przedstawiają zależności:

$$d_0 = 2\mu(T_{n+1}) \frac{(\sigma_e)_{n+1}}{\sigma_e^{pr}} \quad (5.3.47)$$

$$d_1 = K(T) - \frac{2\mu(T_{n+1})}{3} \frac{(\sigma_e)_{n+1}}{\sigma_e^{pr}} - 3K(T_{n+1})^2 C_{11} \quad (5.3.48)$$

$$d_2 = \frac{4\mu(T_{n+1})^2}{\sigma_e^{pr}} \Delta \epsilon_q - 4\mu(T_{n+1})^2 C_{22} \quad (5.3.49)$$

$$d_3 = -2\mu(T_{n+1}) K(T_{n+1}) C_{12} \quad (5.3.50)$$

$$d_4 = -6\mu(T_{n+1}) K(T_{n+1}) C_{21} \quad (5.3.51)$$

Współczynniki C_{ij} przedstawiają zależności:

$$C_{11} = \frac{[F_{22} + 3\mu(T_{n+1}) G_{22}] G_{11} - [F_{12} + 3\mu(T_{n+1}) G_{12}] G_{21}}{\Delta} \quad (5.3.52)$$

$$C_{21} = \frac{[F_{11} + 3K(T_{n+1}) G_{11}] G_{21} - [F_{21} + 3K(T_{n+1}) G_{21}] G_{11}}{\Delta} \quad (5.3.53)$$

$$C_{12} = \frac{[F_{22} + 3\mu(T_{n+1}) G_{22}] G_{12} - [F_{12} + 3\mu(T_{n+1}) G_{12}] G_{22}}{\Delta} \quad (5.3.54)$$

$$C_{22} = \frac{[F_{11} + 3K(T_{n+1}) G_{11}] G_{22} - [F_{21} + 3K(T_{n+1}) G_{21}] G_{12}}{\Delta} \quad (5.3.55)$$

gdzie

$$\Delta = [F_{11} + 3K(T_{n+1}) G_{11}] [F_{22} + 3\mu(T_{n+1}) G_{22}] - [F_{12} + 3\mu(T_{n+1}) G_{12}] [F_{21} + 3K(T_{n+1}) G_{21}] \quad (5.3.56)$$

Natomiast współczynniki G_{ij} oraz F_{ij} przedstawiają zależności:

$$F_{11} = \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_e} \right)_{n+1} \quad (5.3.57)$$

$$F_{12} = - \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_m} \right)_{n+1} \quad (5.3.58)$$

$$F_{21} = - \left(H(\epsilon_{eq}^{pl}, T) \right)_{n+1} \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_Y^T} \right)_{n+1} \quad (5.3.59)$$

$$F_{22} = - \left(H(\epsilon_{eq}^{pl}, T) \right)_{n+1} \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_Y^T} \right)_{n+1} \quad (5.3.60)$$

$$G_{11} = - \frac{\Delta \epsilon_p}{3} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \sigma_m \partial \sigma_e} \right)_{n+1} + \frac{\Delta \epsilon_q}{3} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial^2 \sigma_m} \right)_{n+1} \quad (5.3.61)$$

$$G_{12} = - \Delta \epsilon_p \left(\frac{\partial^2 F}{\partial^2 \sigma_e} \right)_{n+1} + \Delta \epsilon_q \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \sigma_e \partial \sigma_m} \right)_{n+1} \quad (5.3.62)$$

$$G_{21} = \frac{1}{3} \left[- \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_m} \right)_{n+1} + \left(H(\epsilon_{eq}^{pl}, T) \right)_{n+1} \frac{\Delta \epsilon_p}{\sigma_Y^T} \right] \quad (5.3.63)$$

$$G_{22} = - \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_e} \right)_{n+1} - \left(H(\epsilon_{eq}^{pl}, T) \right)_{n+1} \frac{\Delta \epsilon_q}{\sigma_Y^T} \right] \quad (5.3.64)$$

W programie ANSYS odkształcenia styczne są odkształceniami inżynierskimi (podwojone odkształcienia styczne tensorowe - Rów. D.1.2), więc podczas implementacji współczynniki z maticy E_{ijkl}^{pl} korespondujące z odkształceniami stycznymi zostały podzielone przez dwa.

5.3.4 Procedura USERMAT

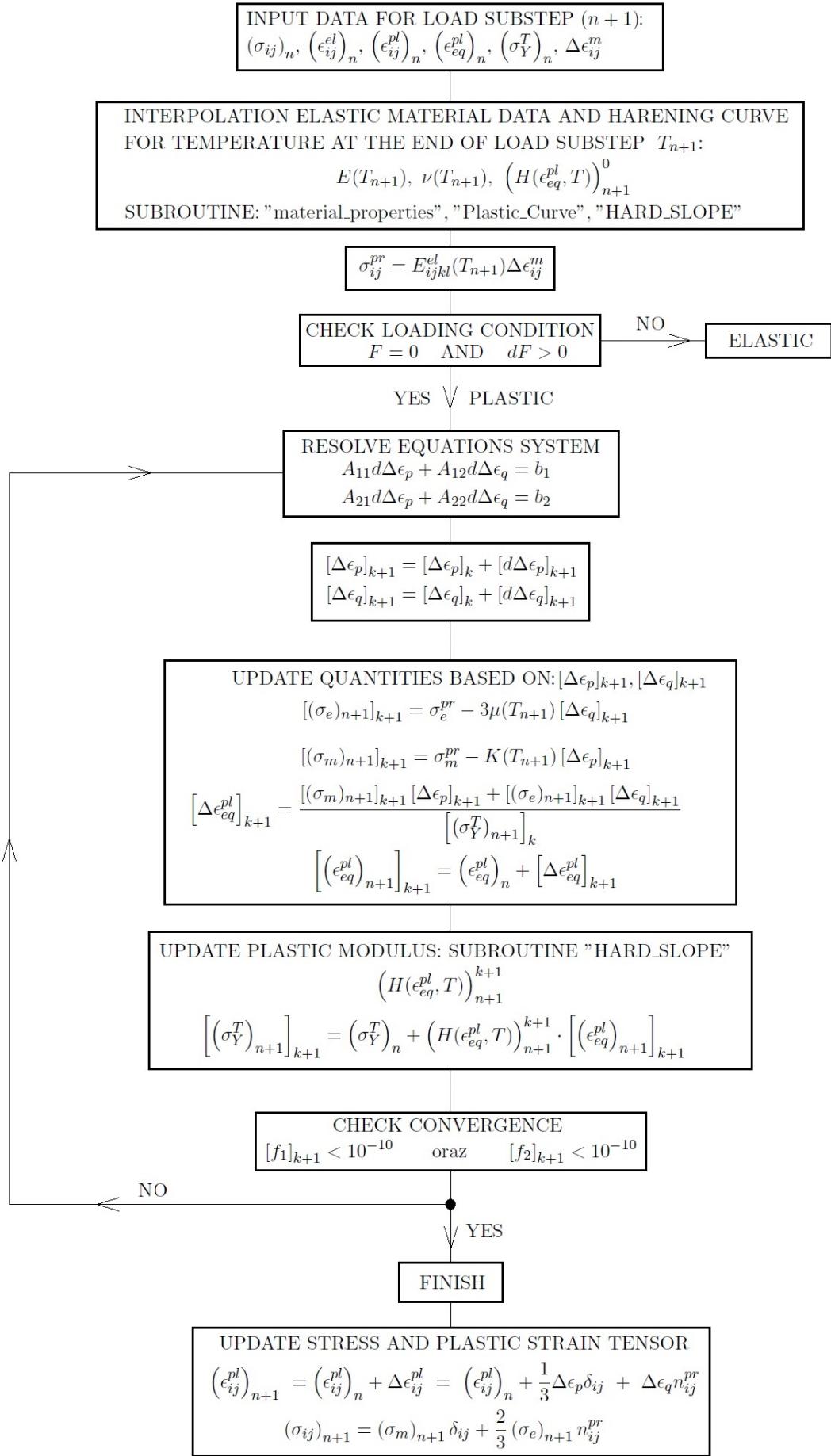
Kryterium plastyczności Burzyńskiego zostało zaimplementowane do programu ANSYS Workbench Mechanical przy pomocy procedury USERMAT napisanej w języku Fortran, którą przedstawiono w załączniku E.4. Zaimplementowana procedura wymaga wprowadzenia danych materiałowych przy pomocy skryptu APDL: modułów Younga, współczynników Poisson oraz krzywych umocnienia $\sigma - \epsilon_{eq}^{pl}$ zależnych od temperatury. Krzywe umocnienia zadaje się w formie punktów - tworząc krzywe "kawałkami" liniowe (multilinear hardening, Rys. 7.15)(dokładny opis sposobu wprowadzania danych w załączniku E.3).

Zaprezentowana procedura USERMAT, korzysta z pomocniczych procedur, służących do interpolowania danych materiałowych, które zależą od temperatury. W zagadnieniach nielinowych obciążenie przykładowe jest w sposób przyrostowy - tak jest również z temperaturą. Z tego względu, podczas wywoływania procedury, konieczne jest interpolowanie danych materiałowych dla temperatury T_{n+1} występującej dla końca przyrostu obciążenia.

Sprzęziste dane materiałowe interpolowane są funkcją liniową przy pomocy procedury "material_properties".

W przypadku plastycznych danych materiałowych, moduł plastyczności zależy od temperatury oraz od odkształceń plastycznych $H(\epsilon_{eq}^{pl}, T)$, z tego względu zmienia się podczas pętli Newtona. W celu zmniejszenia złożoności obliczeniowej, po wywołaniu procedury USERMAT (dla danego punktu obliczeniowego) tworzona jest krzywa umocnienia dla temperatury T_{n+1} występującej aktualnie w danym punkcie (Rys. 7.15) przy pomocy procedury "Plastic_Curve". Pozwala to odczytać moduł plastyczności w zależności od zredukowanych odkształceń plastycznych ϵ_{eq}^{pl} (procedura "HARD_SLOPE") i korzystać z aktualnej krzywej umocnienia, bez konieczności interpolowania jej w każdej iteracji Newtona.

Schemat procedury USERMAT oraz wykorzystanych procedur pomocniczych przedstawiono schematycznie na rysunku 5.11.



Rysunek 5.11: Schematyczne przedstawienie procedury USERMAT.

Rozdział 6

Wpływ modelu turbulencji, na rozkład temperatury oraz na wytężenie materiału

W rozdziale tym, bazując na analizie thermal-FSI, przeanalizowano wpływ modelowania strumienia pędu na rozkład temperatury oraz na wytężenie materiału łopatek kierujących.

W pierwszej części rozdziału pokazano zdolność odwzorowania przez modele turbulencji przejścia laminarno-turbulentnego, bazując na sprzążonej analizie wymiany ciepła konwekcyjnie chłodzonej, eksperymentalnej łopatki kierującej C3X [27]. Przeanalizowano kilka modeli bazujących na hipotezie lepkości turbulentnej: SST, $\gamma - Re_\theta$ SST-Transition, $v^2 - f$, $k - \epsilon$ Realizable, $k - kl - \omega$ Transition oraz domknięcie RSM z liniową korekcją ciśnienie-deformacja prędkości. Porównano rozkłady temperatur otrzymane przy użyciu tych modeli. Następnie zbadano wpływ wielkości wirów energetycznych na rozkłady temperatur otrzymane przy użyciu modeli turbulencji SST-Transition, $v^2 - f$ i RSM. Dodatkowo, na przykładzie modelu SST-Transition zbadano wpływ chropowatości powierzchni na proces przejścia laminarno-turbulentnego oraz rozkład temperatury.

Następnie przy użyciu analizy thermal-FSI pokazano wpływ uwzględnienia modelowania przejścia laminarno-turbulentnego na wytężenie materiału łopatki kierującej C3X. Przeprowadzono analizę CSD w celu wyznaczenia naprężeń termicznych dla temperatur otrzymanych przy pomocy modeli SST i SST-Transition. Większość przedstawionych wyników została opublikowana w artykule [53].

W drugiej części rozdziału przedstawiono wpływ modelowania turbulencji na rozkład temperatury oraz wytężenie materiału łopatki kierującej turbiny napędowej silnika PZL-10W. Zbadano dwa modele turbulencji bazujące na hipotezie lepkości turbulentnej: SST oraz SST-Transition, oraz dwa modele z domknięciem drugiego rzędu: $k - \omega$ WJ-BSL-EARSM oraz RSM z liniową korekcją ciśnienie-deformacja prędkości. Rozważana łopatka kierująca jest niechłodzona, jednakże uwzględniono chłodzenie obudowy oraz tarczy wirnika. Zbadano wpływ wydatku masowego strumienia chłodzącego tarcze wirnika na rozkład temperatury oraz wytężenie materiału łopatki kierującej. Finalnie, zaprezentowano wpływ zbieżności sprzążonej analizy wymiany ciepła na rozkład temperatury oraz wytężenie materiału. Jako kryterium zbieżności przyjęto strumień ciepła przepływający przez powierzchnie brzegowe rozważanej łopatki. Przedstawione wyniki zostały opublikowane w artykule [54].

6.1 Wpływ modelu turbulencji na przejście laminarno-turbulentne, rozkład temperatury oraz wytężenie materiału łopatki kierującej turbiny C3X

Badania przedstawione w tym rozdziale zostały przeprowadzone na konwekcyjnie chłodzonej łopatce kierującej C3X, dla której Hylton przeprowadził serię testów wymiany ciepła [27].

W pierwszej części pokazano zdolność odwzorowania przez modele turbulencji przejścia laminarno-turbulentnego. Porównanych zostało kilka modeli bazujących na hipotezie lepkości turbulentnej: SST, $\gamma - Re_\theta$ SST-Transition, $v^2 - f$, $k - \epsilon$ Realizable, $k - kl - \omega$ Transition oraz domknięcie RSM z liniową korekcją ciśnienie-deformacja prędkości. Dwa z pośród rozważanych modeli posiadają jawne metody umożliwiające modelowanie przejścia laminarno-turbulentnego, mianowicie: SST-Transition i $k - kl - \omega$ Transition (Rozdział 4.2.2.2.3). Uśrednione równania Reynoldsa-Favre'a zostały rozwiązane przy pomocy oprogramowania Ansys Fluent.

Mankamentem testów Hyltona jest fakt, że podczas ich przeprowadzenia nie zostały zmierzone wszystkie parametry mające wpływ na proces przejścia laminarno-turbulentnego, mianowicie: wielkość wirów energetycznych (turbulence length scale (TLS)) [32, 33] oraz chropowatość powierzchni.

Istnieją pewne wskazówki odnośnie wielkości wirów energetycznych w kanałach, jednakże podczas eksperymentu Hyltona, użyto pretów zwiększających turbulencje (Rys. 6.1) w celu uzyskania pożąданej wielkości intensywności turbulencji, co może wpływać na wielkość wirów energetycznych. Wpływ wielkości wirów energetycznych na miejsce przejścia laminarno-turbulentnego oraz na proces wymiany ciepła został poprzednio pokazany w [32, 33], jednakże w pracach tych nie rozważono kilku interesujących nas modeli równocześnie. Z tego względu, w niniejszym rozdziale zbadano ten wpływ na przykładzie trzech modeli turbulencji: SST-Transition, $v^2 - f$ oraz RSM. Założono wartości TLS wynoszące 2, 5, 10 i 20 [%] wysokości rozpatrywanej łopatki (76.2 [mm]) oraz 20 [%] długości cięciwy (144.93 [mm]), co stanowi odpowiednio 1.52, 3.81, 7.62, 15.24, 28.986 [mm].

Chropowatość powierzchni wpływa na proces przejścia laminarno-turbulentnego oraz na proces wymiany ciepła w turbulentnej warstwie przyściennej poprzez zaburzanie lub całkowitą destrukcję podwarstwy lepkiej. Efekty te zostały pokazane na przykładzie modelu SST-Transition. Model ten uwzględnia dwie korekty chropowatości, wymagające podania dwóch rodzajów chropowatości. Korekta procesu przejścia laminarno-turbulentnego (Rozdział 4.2.2.3.2) wymaga podania rzeczywistej chropowatości, ponieważ według [138] ma ona większe znaczenie na proces inicjalizacji turbulencji niż wartość równoważnej chropowatości piaskowej. Drugim rodzajem korekty wykorzystywanej przez model SST-Transition, a dokładniej przez model SST, jest korekta wymagana w celu zwiększenia naprężeń turbulentnych w turbulentnej warstwie przyściennej (Rozdział 4.2.2.3.1.2), która wymaga podania zastępczej chropowatości piaskowej.

Rozważono kilka chropowatości reprezentujących szlifowanie wykańczające według definicji wysokości chropowatości R_z , która jest bardziej reprezentatywną wielkością chropowatości rzeczywistej w analizach CFD [235]. Mianowicie, założono następujące wartości chropowatości: 1.6, 3.2 oraz 6.3 [μm]. Na podstawie wartości chropowatości rzeczywistej wyznaczono zastępczą chropowatość piaskową według zależności 4.2.157:

$$K_s = 0.978R_z \quad . \quad (6.1.1)$$

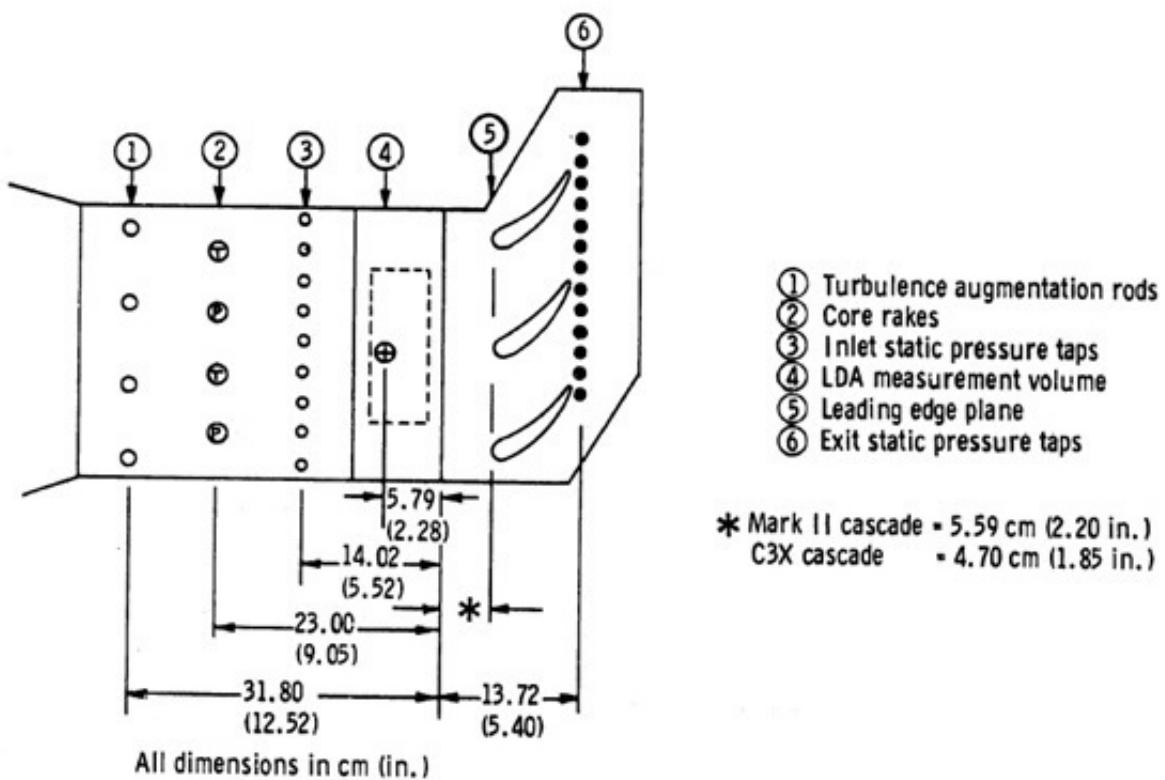
Finalnie pokazano wpływ uwzględnienia modelowania przejścia laminarno-turbulentnego na wytężenie materiału łopatki kierującej C3X. Wyznaczono naprężenia termiczne dla rozkładów

temperatury wyznaczonych przy pomocy dwóch modeli turbulencji: SST oraz SST-Transition. Do wyznaczenia naprężeń cieplnych wykorzystano program Ansys Mechanical.

6.1.1 Analiza wymiany ciepła

6.1.1.1 Opis analizowanego testu

Hylton przeprowadził serię eksperymentalnych testów wymiany ciepła na turbinowej łopatce kierującej C3X. Celem eksperymentów było zbadanie dwu-wymiarowych zjawisk cieplno-przepływowych zachodzących w konwekcyjnie chłodzonej łopatce. Z tego względu, badana łopatka posiadała stały przekrój poprzeczny. W celu zapewnienia periodyczności przepływu, testowana kaskada składała się z trzech łopatek (Rys. 6.1). Dokładny opis geometrii znajduje się w raporcie z testów [27].



Rysunek 6.1: Wymiary testowanej kaskady oraz rozmieszczenie instrumentów pomiarowych [27].

Numerycznej analizie poddano test numer 4311 [27]. Bazując na danych eksperymentalnych, wyznaczono warunki brzegowe (Tabela 6.1), przepływu głównego, niezbędne do przeprowadzenia analizy, mianowicie: całkowitą temperaturę na wlocie T_{inlet}^T , całkowite ciśnienie na wlocie p_{inlet}^T , intensywność turbulencji na wlocie Tu oraz ciśnienie statyczne na wylocie p_{outlet} .

Test case no.	T_{inlet}^T [K]	p_{inlet}^T [Pa]	p_{outlet} [Pa]	Tu [%]
4311	802	244764	143000	6.5

Tabela 6.1: Warunki brzegowe przepływu głównego.

Rozpatrywana łopatka jest chłodzona przez dziesięć okrągłych kanałów, dla których wyznaczono empiryczne korelacje na liczbę Nusselta, pozwalające dokładnie oszacować proces wymiany ciepła zachodzący na ich ściankach [28, 236, 237]. Liczba Nusselta dla przepływu turbulentnego w hydrodynamicznie gładkim kanale przedstawia się w następującej postaci [27]:

$$Nu_D = Cr \left(0.022 Pr^{0.5} Re_D^0.8 \right) , \quad (6.1.2)$$

gdzie Cr jest stałą pozwalającą uwzględnić wpływ obszaru wejściowego, natomiast Pr jest liczbą Prandtla, równą $Pr = 0.9$ dla turbulentnego przepływu powietrza [31]. Liczby Nusselta dla poszczególnych kanałów zostały wyznaczone w oparciu o eksperymentalne dane zamieszczone w raporcie Hyltona [27]. Bazując na liczbach Nusselta, oszacowano współczynniki przejmowania ciepła poszczególnych kanałów (Tab. 6.2), które wraz z temperaturą niezaburzonego płynu chłodzącego zostały zadane jako warunki brzegowe na ściankach kanałów chłodzących.

Hole No.	Diameter [m]	Cr	Temp. [K]	Re	Nu	$k \left[\frac{W}{mK} \right]$	$HTC \left[\frac{W}{m^2 K} \right]$
1	0.0063	1.118	360.63	154940	331	0.030729	1616
2	0.0063	1.118	360.63	161620	343	0.030729	1671
3	0.0063	1.118	346.23	159740	339	0.029675	1599
4	0.0063	1.118	352.5	158770	338	0.030136	1616
5	0.0063	1.118	341.41	170710	358	0.029319	1666
6	0.0063	1.118	380.08	161580	343	0.032132	1747
7	0.0063	1.118	352.47	162340	344	0.030134	1645
8	0.0031	1.056	387.16	104340	228	0.032637	2401
9	0.0031	1.056	421.81	63960	154	0.035063	1744
10	0.00198	1.025	466.79	46850	117	0.038107	2245

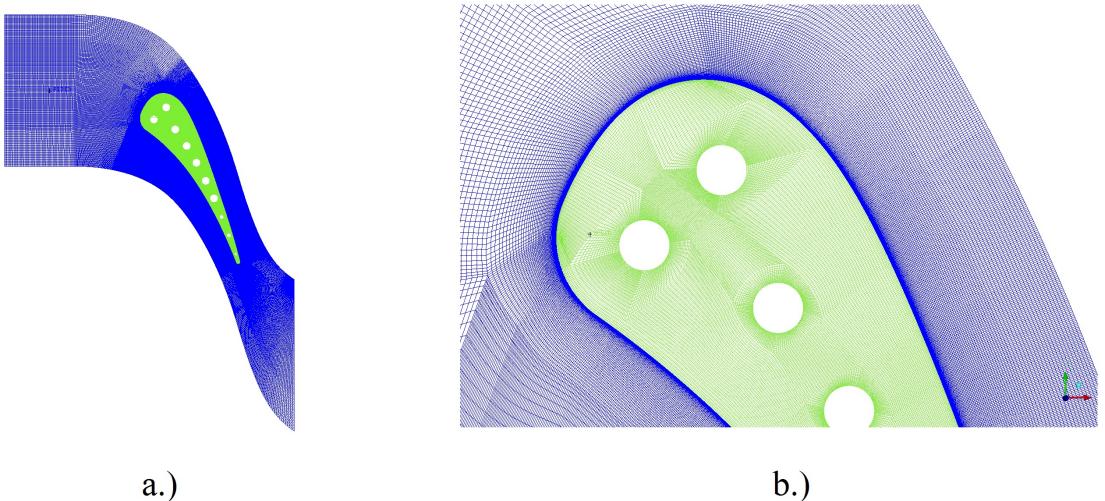
Tabela 6.2: Parametry określające współczynniki przejmowania ciepła dla poszczególnych kanałów chłodzących.

6.1.1.2 Analiza numeryczna

Sprzężoną analizę wymiany ciepła wykonano przy pomocy oprogramowania ANSYS Fluent. Użyto solvera "pressure-based" z zastosowaniem schematów dyskretyzacji "pod-wiatr" pierwszego rzędu.

Analizie poddano dwu-wymiarową domenę obliczeniową z wlotem usytuowanym w miejscu pomiaru intensywności turbulencji. Wylot domeny usytuowano w miejscu bliskim pomiaru ciśnienia statycznego, ale jednocześnie w odległości zapewniającej ustalenie parametrów przepływu (Rys. 6.1).

Domenę obliczeniową zdyskretyzowano przy pomocy strukturalnej siatki składającej się z 255,736 elementów typu hex, która zapewnia niezależność wyników od gęstości dyskretyzacji. Siatkę obliczeniową w rejonie warstwy przyściennej zbudowano w oparciu o bezwymiarową wysokość $y^+ \approx 1$, z parametrem wzrostu elementów mniejszym od 1.1.



Rysunek 6.2: Model CFD: a.) widok globalny, b.) widok szczegółowy.

Domenę płynu zamodelowano jako powietrze o właściwościach gazu kalorycznie niedoskonalego, a więc z gęstością opisaną przy pomocy równania stanu gazu idealnego i z ciepłem właściwym zależnym od temperatury. Dodatkowo założono, że przewodność cieplna oraz lepkość również zależą od temperatury, lepkość zgodnie z prawem Sutherlanda.

Testowana łopatka C3X wykonana była ze stali ASTM 310, dla której przewodność cieplna przedstawia się zależnością:

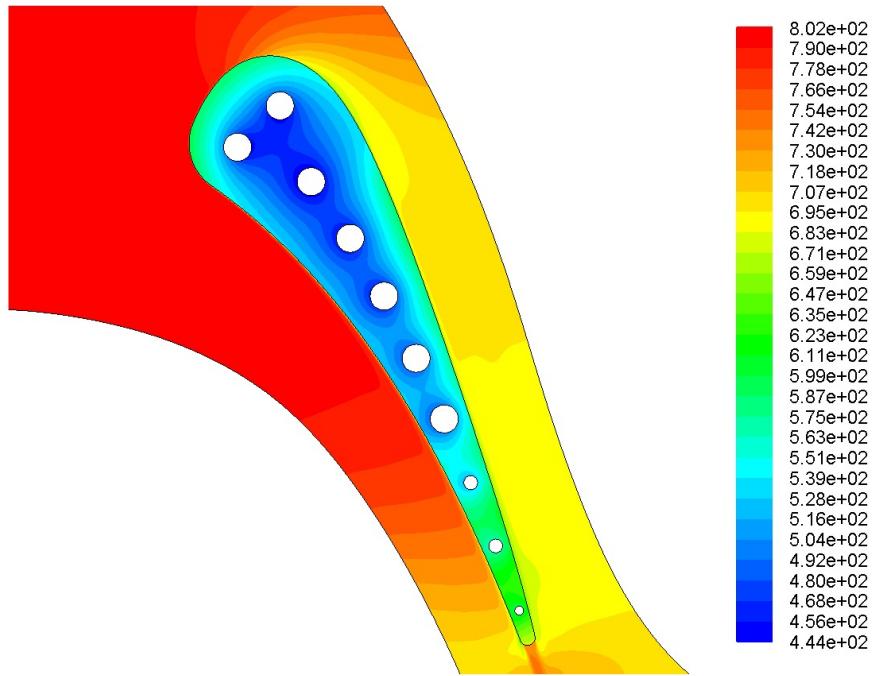
$$k_S(T) = 6.811 + 0.020176 \cdot T \quad . \quad (6.1.3)$$

W pierwszej kolejności zbadano zdolność odwzorowania przez modele turbulencji przejścia laminarno-turbulentnego. Użyto kilku modeli turbulencji bazujących na hipotezie lepkości turbulentnej, mianowicie: SST, $\gamma - Re_\theta$ SST-Transition, $v^2 - f$, $k - \epsilon$ Realizable, $k - kl - \omega$ -Transition oraz dodatkowo użyto modelu RSM z liniowym modelem korekcji ciśnienie-prędkość odkształcenia. Założono wartość TLS równą 15.24 oraz hydrodynamicznie gładką powierzchnię łopatki. Dla modeli bazujących na hipotezie lepkości turbulentnej użyto korekcji krzywizny powierzchni. Następnie dla trzech modeli turbulencji $\gamma - Re_\theta$ SST-Transition, $v^2 - f$ oraz RSM zbadano wpływ wartości TLS na proces przejścia laminarno-turbulentnego oraz na rozkład temperatury, zakładając hydrodynamicznie gładką powierzchnię.

Finalnie, pokazano wpływ chropowatości powierzchni na proces przejścia laminarno-turbulentnego oraz na proces wymiany ciepła w turbulentnej warstwie przyściennej na przykładzie modelu SST-Transition, przy założeniu stałej wartości TLS równej 15.24 [mm]. Założono typowe wartości chropowatości dla szlifowania wykańczającego, które na podstawie definicji chropowatości R_z wynoszą 1.6, 3.2 oraz 6.3 [μm]. Zastępcze chropowatości piaskowe wyznaczono na podstawie zależności 4.2.157.

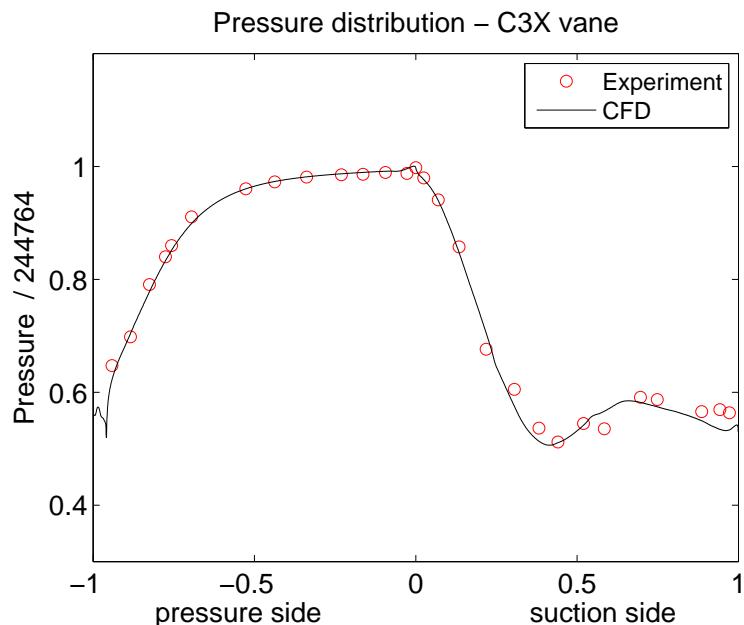
6.1.1.3 Wyniki

Rysunek 6.3 przedstawia typowy rozkład temperatury w płynie oraz w ciele stałym dla analizowanego przypadku nr 4311. Najgorętszy region w ciele stałym występuje w rejonie krawędzi spływu.

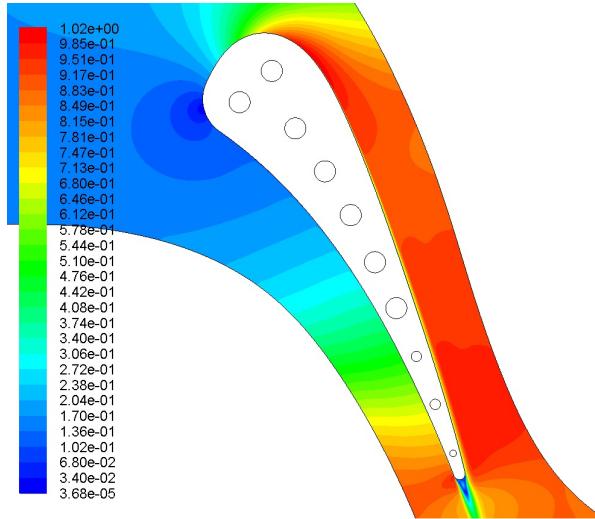


Rysunek 6.3: Rozkład temperatury [K] z analizy modelem SST-Transition z wartością TLS równą 15.24 [mm].

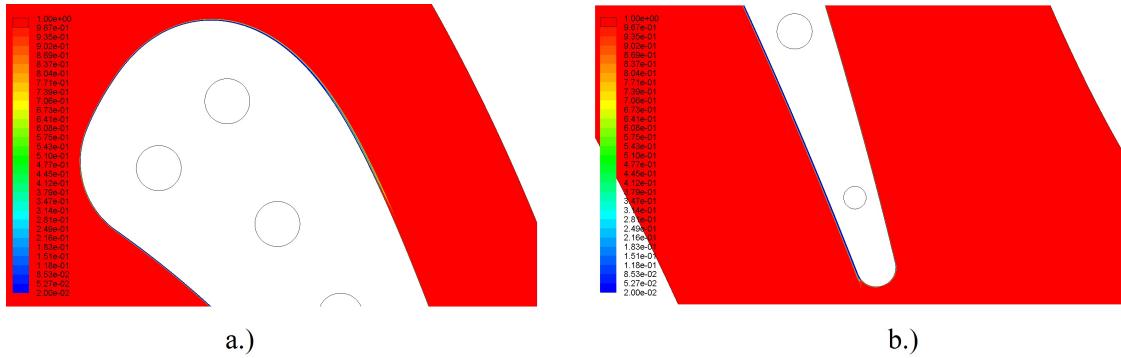
Przypadek testowy nr 4311 charakteryzuje się łagodnym rozkładem ciśnienia (Rys. 6.4), który prawidłowo został odwzorowany podczas analizy numerycznej. Na stronie ssącej łopatki, blisko krawędzi natarcia występuje niewielka fala uderzeniowa (Rys. 6.5). Zaraz, za falą uderzeniową, dodatni gradient ciśnienia oraz wysoki poziom turbulencji przepływu głównego powoduje wywołanie przejścia laminarno-turbulentnego (typu bypass), w odległości około $x/L \approx 0.4$ od krawędzi natarcia (Rys. 6.6). Strona ciśnieniowa w przypadku analizy modelem SST-Transition jest pokryta przez laminarną warstwą przyścienną (Rys. 6.6).



Rysunek 6.4: Rozkład ciśnienia statycznego z analizy modelem SST-Transition z wartością TLS równą 15.24 [mm].



Rysunek 6.5: Rozkład liczby Macha z analizy modelem SST-Transition z wartością TLS równą 15.24 [mm].



Rysunek 6.6: Rozkład intermitencji z analizy modelem SST-Transition, z wartością TLS równą 15.24 [mm], w rejonie: a.) krawędzi natarcia, b.) krawędzi spływu.

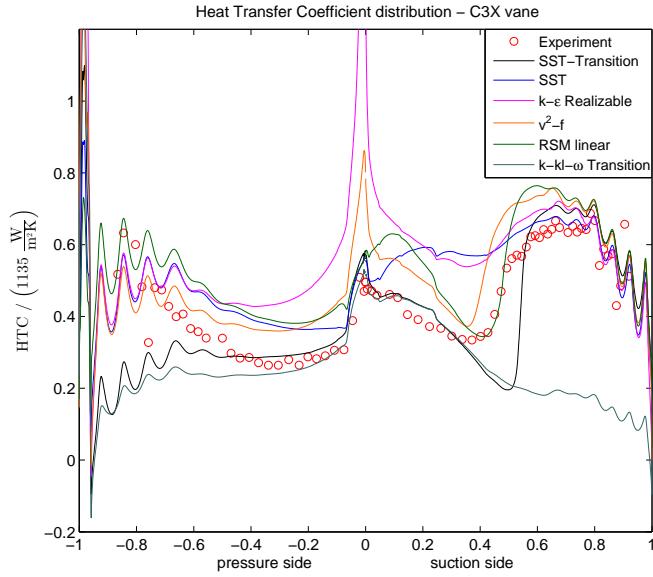
6.1.1.3.1 Modelowanie przejścia laminarno-turbulentnego

Rysunek 6.7 przedstawia rozkład współczynnika przejmowania ciepła (heat transfer coefficient HTC), dla rozpatrywanych modeli turbulencji, zdefiniowanego według zależności:

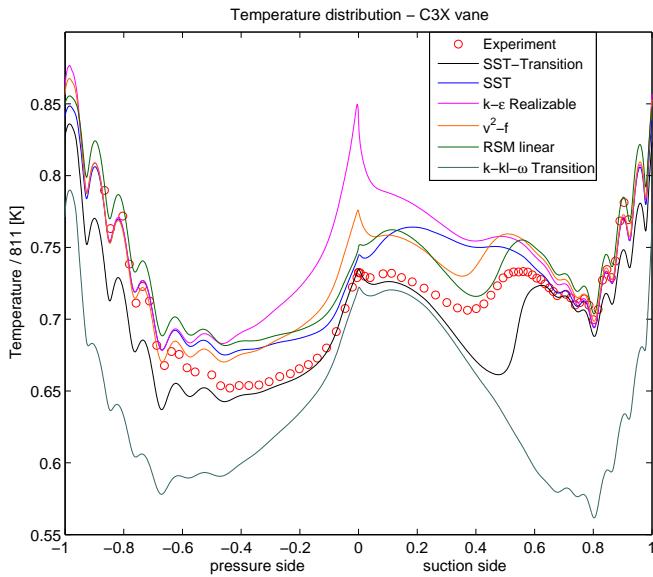
$$HTC = \frac{q}{T_{wall} - T_{bulk}} , \quad (6.1.4)$$

gdzie temperatura przepływu niezaburzonego T_{bulk} została założona na stałym poziomie równym 811 [K] [27]. Natomiast rysunek 6.8 przedstawia rozkład temperatury dla rozpatrywanych modeli turbulencji. Z porównania tych dwóch wykresów, widać, że wzrost HTC , na stronie ssącej w miejscu przejścia laminarno-turbulentnego odpowiada wzrostowi temperatury w tym miejscu. Z tego względu, nasze rozważania prowadzone są dla wykresów obrazujących rozkład temperatury.

Z rysunku 6.8 można wywnioskować, że z pośród rozpatrywanych modeli, trzy są w stanie odwzorować proces przejścia laminarno-turbulentnego, mianowicie SST-Transition, v^2-f i RSM. Wykres pokazuje również, że turbulentny obszar warstwy przyściennej jest lepiej odwzorowany przez pełno-turbulentne modele SST oraz $k-\epsilon$ Realizable, niż przez model SST-Transition. Modele v^2-f oraz RSM również bardzo dobrze odwzorowały ten obszar. Model $k-\epsilon$ Realizable znacznie przewartościował temperaturę w punkcie spiętrzenia.



Rysunek 6.7: Rozkład współczynnika przejmowania ciepła HTC dla różnych modeli turbulencji z wartością TLS równą 15.24 [mm].



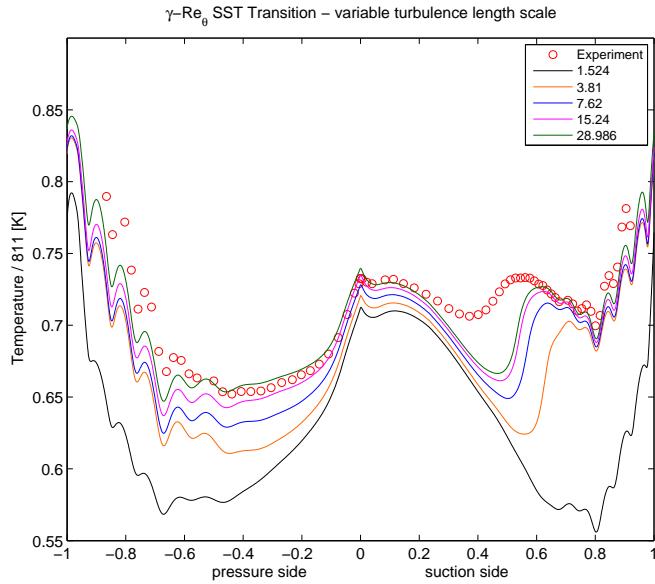
Rysunek 6.8: Rozkład temperatury dla rozpatrywanych modeli turbulencji z wartością TLS równą 15.24 [mm].

6.1.1.3.2 Wpływ wielkości wirów energetycznych TLS

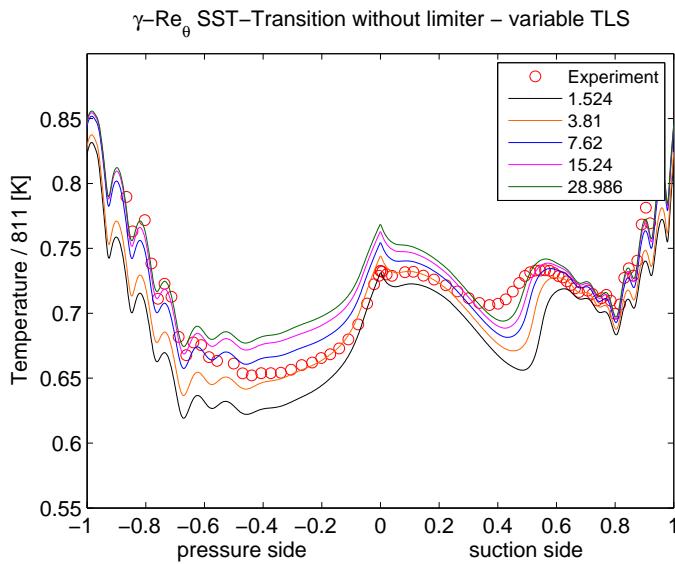
Rysunek 6.8 pokazuje, że modele $\gamma - Re_\theta$ SST-Transition, $v^2 - f$ i RSM są w stanie odwzorować proces przejścia laminarno-turbulentnego, jednak rozkłady temperatury wyznaczone przez te modele znaczająco się różnią. Z tego względu, bazując na tych modelach zbadano wpływ wielkości wirów energetycznych (TLS) na rozkład temperatury wyznaczany przez nie, a wyniki przedstawiono na rysunkach 6.9, 6.11, 6.12. Z rysunków tych widać, że wartość TLS znaczająco wpływa na rozkłady temperatury, szczególnie w strefie laminarnej. Co więcej, wzrost TLS znaczająco wpływa na punkt inicjalizacji turbulencji dla modeli $\gamma - Re_\theta$ SST-Transition i RSM,

przesuwając go w stronę krawędzi natarcia.

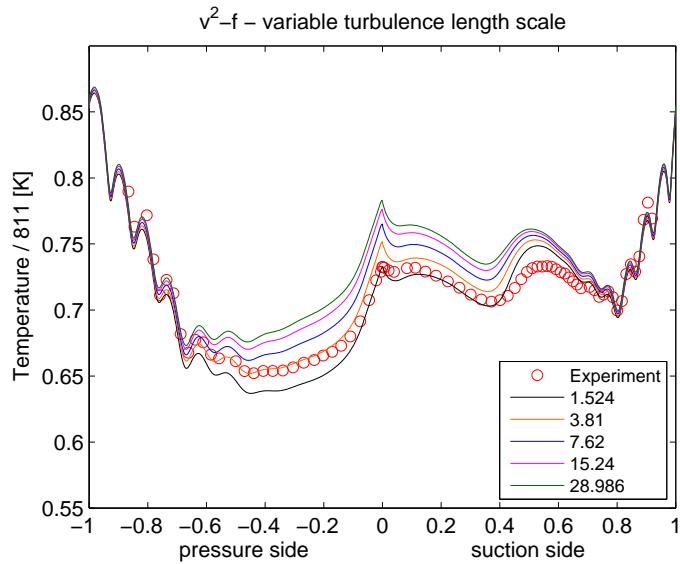
Dla rozpatrzonych modeli wzrost TLS spowodował wzrost temperatury łopatki. Dla modeli turbulencji $v^2 - f$ i RSM, wyniki są bliższe eksperymentalnych dla wartości TLS równej 1.524 i 3.81 [mm]. Natomiast model SST-Transition jest bardziej dokładny dla wyższej wartości TLS, równej około 15.24 [mm]. Może to wynikać stąd iż dla modelu SST-Transition użyto ograniczenia produkcji turbulentnej energii kinetycznej. Na rysunku 6.10 przedstawiono wyniki dla modelu SST-Transition bez użycia ograniczenia produkcji turbulentnej energii kinetycznej, jak widać są one bardziej zgodne z trendem prezentowanym przez modele $v^2 - f$ i RSM.



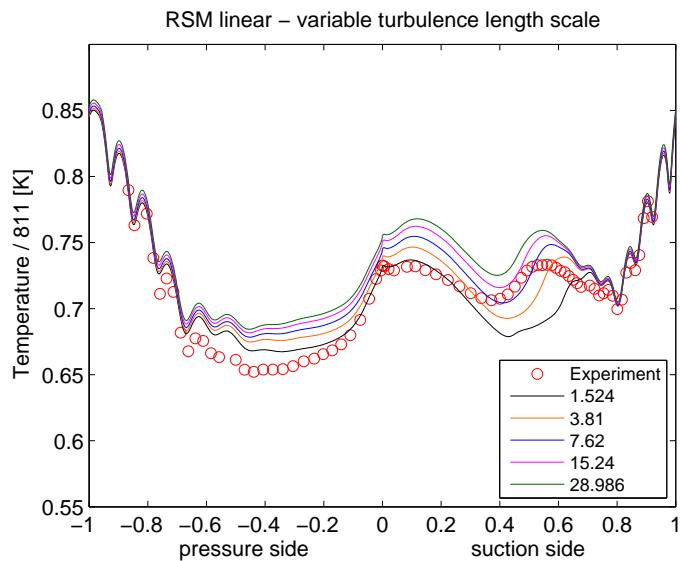
Rysunek 6.9: Rozkład temperatury dla modelu SST-Transition z uwzględnieniem ograniczenia kinetycznej energii turbulencji dla zmiennej wartości TLS.



Rysunek 6.10: Rozkład temperatury dla modelu SST-Transition bez uwzględnienia ograniczenia kinetycznej energii turbulencji dla zmiennej wartości TLS.



Rysunek 6.11: Rozkład temperatury dla modelu $v^2 - f$ dla zmiennej wartości TLS.

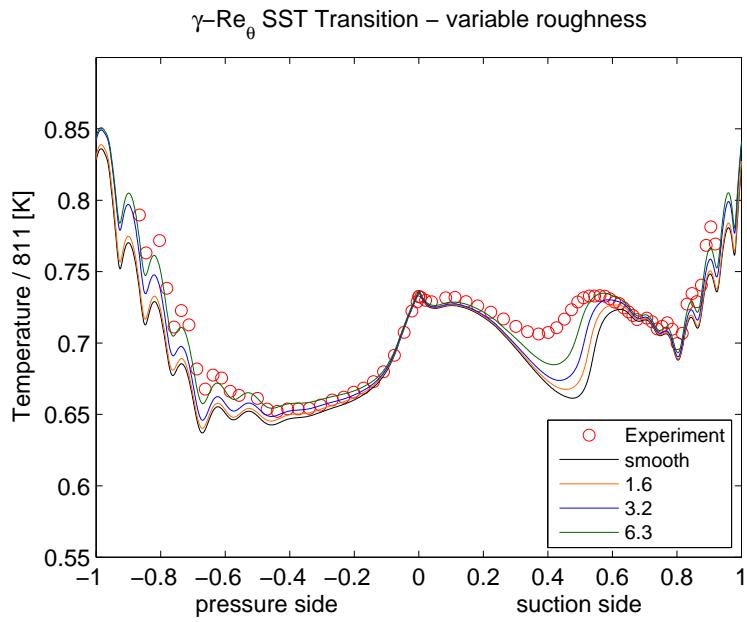


Rysunek 6.12: Rozkład temperatury dla modelu RSM-linear dla zmiennej wartości TLS.

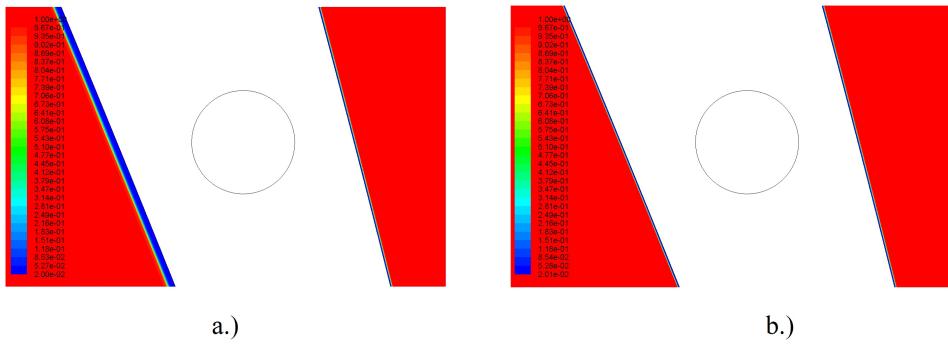
6.1.1.3.3 Wpływ chropowatości powierzchni

6.1.1.3.3.1 Korekcja procesu przejścia laminarno-turbulentnego

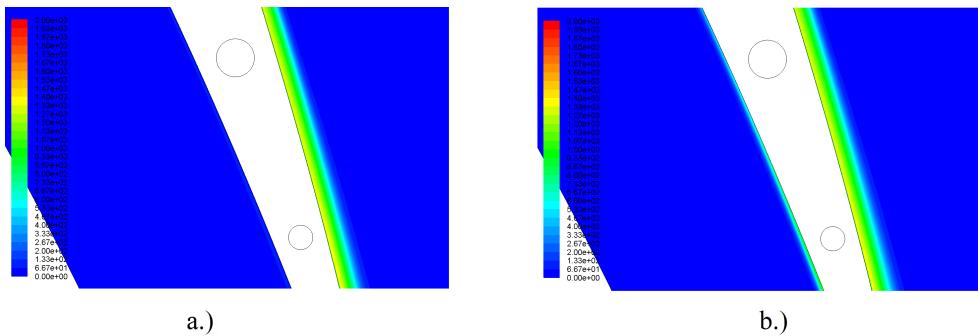
Rysunek 6.13 przedstawia rozkład temperatury dla gładkiej powierzchni oraz dla trzech wartości rzeczywistej chropowatości: 1.6, 3.2, and 6.3 [μm]. Z wykresu widać, że wzrost chropowatości powierzchni powoduje przesunięcie punktu inicjalizacji turbulencji w stronę krawędzi natarcia. Co więcej, dla wartości chropowatości 6.3 [μm], na stronie ciśnieniowej pojawiło się przejście laminarno-turbulentne typu bypass, co pokazują rysunki 6.14, 6.15. W konsekwencji prowadzi to do zwiększenia temperatury w materiale łopatki (Rys. 6.13).



Rysunek 6.13: Rozkład temperatury dla modelu SST-Transition z uwzględnieniem wpływów chropowatości na proces przejścia laminarno-turbulentnego.



Rysunek 6.14: Rozkład intermitencji na stronie ciśnieniowej w okolicy krawędzi spływu, dla:
a.) gładkiej ścianki, b.) dla wysokości chropowatości $6.3 \text{ } [\mu\text{m}]$

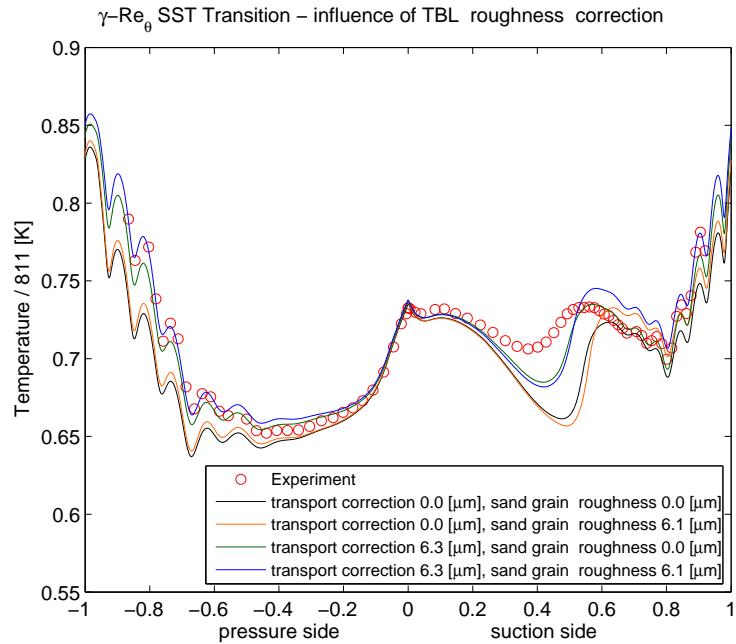


Rysunek 6.15: Rozkład turbulentnej energii kinetycznej na stronie ciśnieniowej w okolicy krawędzi spływu, dla: a.) gładkiej ścianki, b.) dla wysokości chropowatości $6.3 \text{ } [\mu\text{m}]$

6.1.1.3.3.2 Korekcja turbulentnej warstwy przyściennej

Wykres przedstawiony na rysunku 6.16 pokazuje, że zaburzenie podwarstwy lepkiej przez

chropowatość znacząco wpływa na proces wymiany ciepła w turbulentnej warstwie przyściennej. Co więcej, z wykresu 6.16 widać, że użycie korekcji uwzględniającej wpływ chropowatości na turbulentną warstwę przyścienną również wpływa na laminarną warstwę przyścienną. Wynika to z faktu, iż w celu uniknięcia osobliwości związanych z przesunięciem profilu prędkości spowodowanym chropowatością i małymi wartościami bezwymiarowej wysokości $y^+ \approx 1$, wysokość objętości kontrolnych sąsiadujących ze ścianką jest wirtualnie powiększana, co zostało opisane w rozdziale 4.2.2.3.

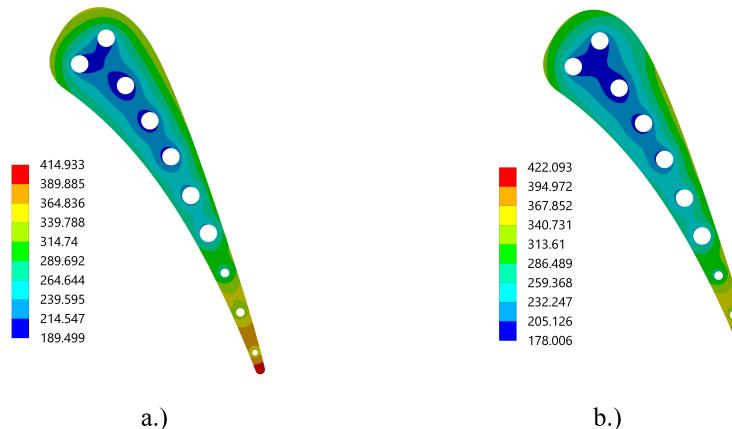


Rysunek 6.16: Rozkład temperatury dla modelu SST-Transition z uwzględnieniem wpływu chropowatości na proces przejścia laminarno-turbulentnego oraz na turbulentną warstwę przyścienną.

6.1.2 Analiza wyt zenia materiału

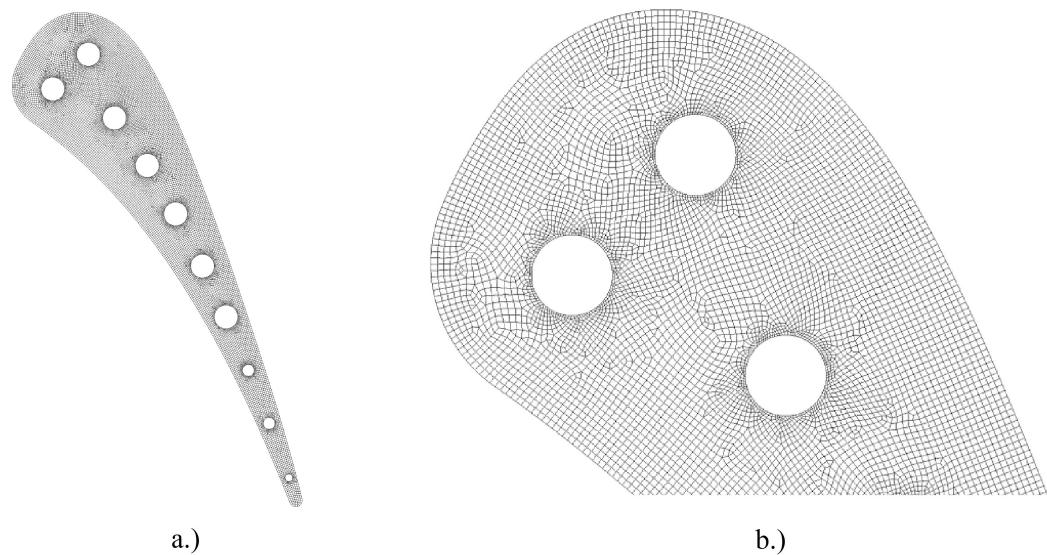
6.1.2.1 Opis analizy CSD

W celu pokazania wpływu uwzględnienia modelowania przejścia laminarno-turbulentnego na wyżęcenie materiału wyznaczono rozkład naprężeń termicznych, przy pomocy oprogramowania Ansys Mechanical. Przeanalizowano rozkłady temperatury wyznaczone przy pomocy dwóch modeli turbulencji: SST oraz SST-Transition (Rys. 6.17). Dla modelu turbulencji SST-Transition rozpatrzono rozkład temperatury dla chropowatości powierzchni 6.3 [μm], który był najbliższy rozkładowi eksperymentalnemu (Rys. 6.16).



Rysunek 6.17: Rozkład temperatury dla modelu: a.) SST, b.) SST-Transition.

Wykonano analizę dwu-wymiarową przy założeniu uogólnionego płaskiego stanu odkształcenia (stałe odkształcenia w kierunku normalnym do rozpatrywanej płaszczyzny). Model zdyrektyzowano przy pomocy izoparametrycznych elementów skończonych, z kwadratową funkcją kształtu, zawierających 39,000 węzłów (Rys. 6.18).



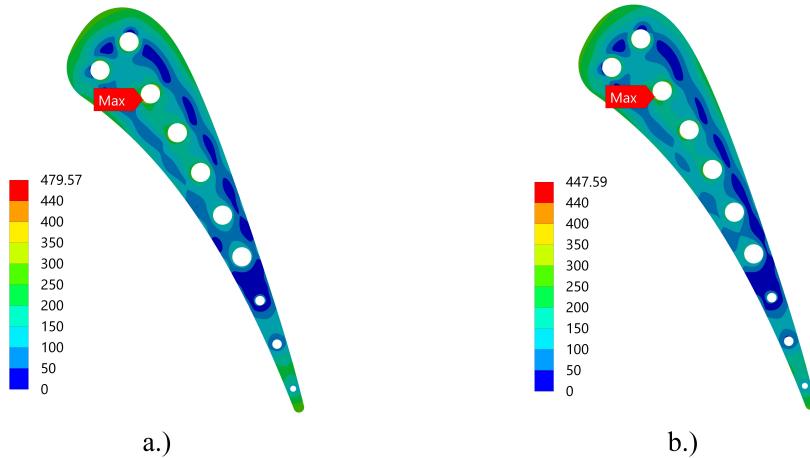
Rysunek 6.18: Zdyskretyzowany model CSD, widok: a.) globalny, b.) szczegółowy.

Własności materiału ASTM 310: moduł Younga oraz współczynnik rozszerzalności cieplnej, zadano w zależności od temperatury (Załącznik F.1, na podstawie [238]). Z powodu braku danych

odnośnie współczynnika asymetrii cyklu, założono hipotezę wytężenia materiału HMH.

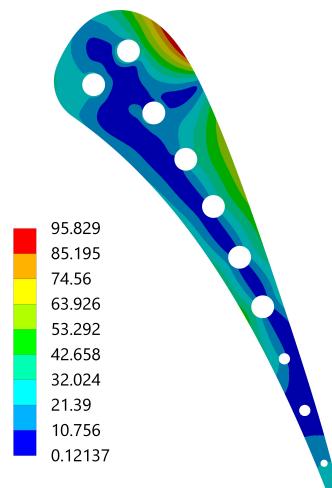
6.1.2.2 Wyniki

Rozkłady naprężeń zredukowanych, z przeprowadzonych analiz, przedstawiono na rysunku 6.19. Maksymalne naprężenia zredukowane występują w okolicy otworu chłodzącego i wynoszą 480 [MPa] dla modelu SST, natomiast dla modelu SST-Transition 448 [MPa]. A więc, różnica między maksymalnymi naprężeniami wynosi 32 [MPa], co stanowi około 7%.



Rysunek 6.19: Rozkład naprężzeń zredukowanych HMH dla temperatury wyznaczonej za pomocą modelu turbulencji: a.) SST, b.) SST-Transition.

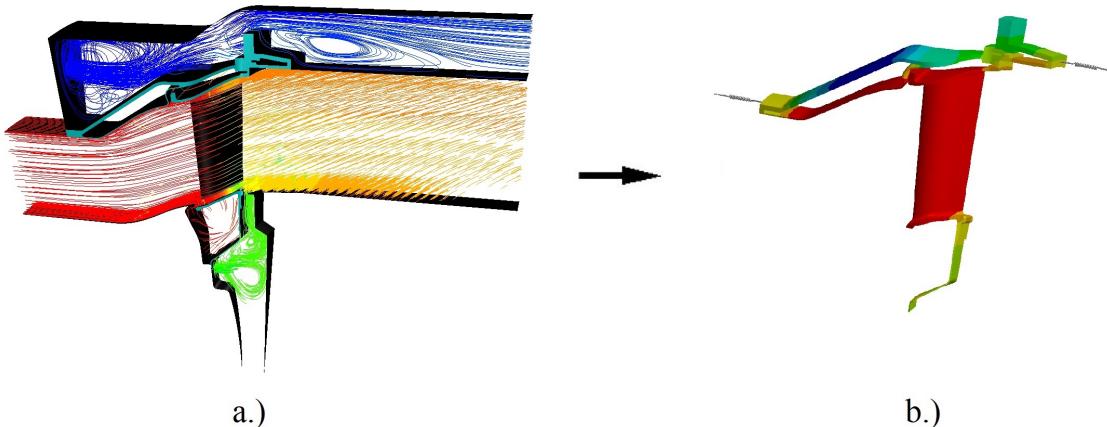
W celu bezpośredniego porównania wartości naprężzeń, na rysunku 6.20 przedstawiono różnicę pomiędzy naprężeniami zredukowanymi otrzymanymi z dwóch analiz. Z rysunku tego widać, że bardzo duże różnice występują na powierzchni ssącej, w miejscu, w którym występuje przejście laminarno-turbulentne i wynoszą one około 96 [MPa]. W tym miejscu, dla modelu SST naprężenia wynoszą około 270 [MPa], a więc różnica 96 [MPa] stanowi około 35 % błędu, co jest ogromną wartością.



Rysunek 6.20: Różnica pomiędzy naprężeniami zredukowanymi wyznaczonymi przy pomocy modeli turbulencji SST i SST-Transition.

6.2 Wpływ modelu turbulencji na rozkład temperatury oraz wytężenie łopatki aparatu kierującego turbiny napędowej silnika PZL-10W

W tej części pracy, bazując na analizie thermal-FSI pokazano wpływ modelowania turbulencji na wytężenie materiału łopatki kierującej turbiny napędowej silnika PZL-10W. Konstrukcja ta jest relatywnie sztywna, więc odkształcenia nie wpływają na pole temperatury, z tego względu rozpatrzono analizę jednokierunkową (Rys. 6.21).



Rysunek 6.21: Schemat jednokierunkowej analizy thermal-FSI: a.) analiza CFD - linie prądu w kolorze temperatury, b.) analiza CSD - termiczne warunki brzegowe.

W pierwszej kolejności przeprowadzono sprzężoną analizę wymiany ciepła, w celu wyznaczenia rozkładu temperatury oraz sił aerodynamicznych działających na łopatkę, a następnie wykonano analizę CSD, w celu wyznaczenia rozkładu naprężeń, a dalej wytężenia materiału. Analizę CFD wykonano przy pomocy oprogramowania Ansys Fluent, natomiast CSD w oprogramowaniu Ansys Mechanical.

Wpływ modelu turbulencji na rozkład temperatury oraz wytężenia materiału zbadany został w oparciu o dwa modele turbulencji bazujące na hipotezie Boussinesqa: SST oraz SST-Transition, oraz dwa modele z domknięciem drugiego rzędu: $k - \omega$ WJ-BSL-EARSM oraz RSM z liniową korekcją ciśnienie-deformacja prędkości.

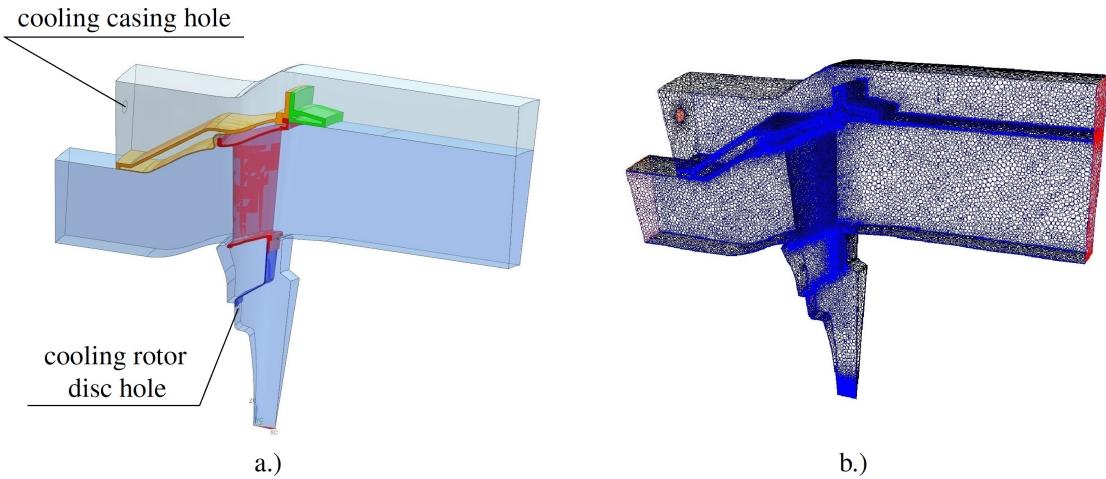
Łopatka kierująca turbiny napędowej silnika PZL-10W jest łopatką niechłodzoną, jednakże uwzględniono chłodzenie tarczy wirnika (Rys. 6.22 a.)) w celu pokazania jego negatywnego wpływu na wytężenie materiału statora. Zbadano wpływ wydatku masowego strumienia chłodzącego wirnik na rozkład temperatury oraz wytężenie materiału. Dodatkowo uwzględniono chłodzenie obudowy turbiny napędowej (Rys. 6.22 a.)), które również powoduje powstanie wysokich gradientów temperatury generujących wysokie naprężenia termiczne.

Finalnie, zaprezentowano wpływ zbieżności analizy wymiany ciepła, na rozkład temperatury oraz wytężenie materiału. Jako kryterium zbieżności przyjęto strumień ciepła przepływający przez powierzchnie brzegowe rozważanej łopatki.

Łopatka turbiny napędowej wykonana jest z materiału Inconel 738 LC. Założono, że materiał ten charakteryzuje się asymetrią zakresu sprężystego, więc jako modelu wytężenia materiału użyto hipotezy Burzyńskiego. Rozważana łopatka pracuje w zakresie sprężystym, więc równanie definiujące naprężenia zredukowane (Rów. 5.1.41) zostało zaimplementowane w oprogramowaniu Ansys przy pomocy "User Defined Results".

6.2.0.3 Sprzężona analiza wymiany ciepła

Modelowana domena CFD składa się z czterech domen płynu oraz czterech domen ciała stałego (Rys. 6.22 a.)).



Rysunek 6.22: Domena obliczeniowa CFD: a.) model CAD, b.) siatka objętości skończonych.

Główna domena płynu została zamodelowana jako spaliny o własnościach gazu kalorycznie niedoskonałego, a więc z gęstością opisaną przy pomocy równania stanu gazu idealnego oraz z ciepłem właściwym w funkcji temperatury. Dodatkowo założono, że przewodność cieplna oraz lepkość również zależą od temperatury. Spaliny zamodelowano jako gaz jedno-składnikowy, a uśrednione własności zostały oszacowane z zależności dla mieszanin, przy założeniu następujących udziałów molowych składników: 75.8% N₂, 16.8% O₂, 4.1% H₂O, and 3.3% CO₂. Uśredniona lepkość została otrzymana z zależności Sutherlanda dla mieszanin [239], a przewodność z zależności Chapmana-Enskoga. Ciepło właściwe dla każdego składnika opisane jest przy pomocy wielomianu zależnego od temperatury, a więc w punktach temperaturowych średnia wartość została otrzymana poprzez ważone uśrednienie z uwzględnieniem udziałów objętościowych składników.

Plyn chłodzący obudowę zamodelowano jako powietrze, z własnościami zależnymi od temperatury, podobnie jak własności ciała stałych.

Domenę obliczeniową zdyskretyzowano niestrukturalną siatką złożoną z 3,200,000 elementów polihedralnych z interfejsami płyn-ciało stałe oraz ciało stałe-ciało stałe typu węzeł w węzeł (Rys. 6.22 b.)). Siatkę obliczeniową w rejonie warstwy przyściennej zbudowano w oparciu o bezwymiarową wysokość $y^+ \approx 1$.

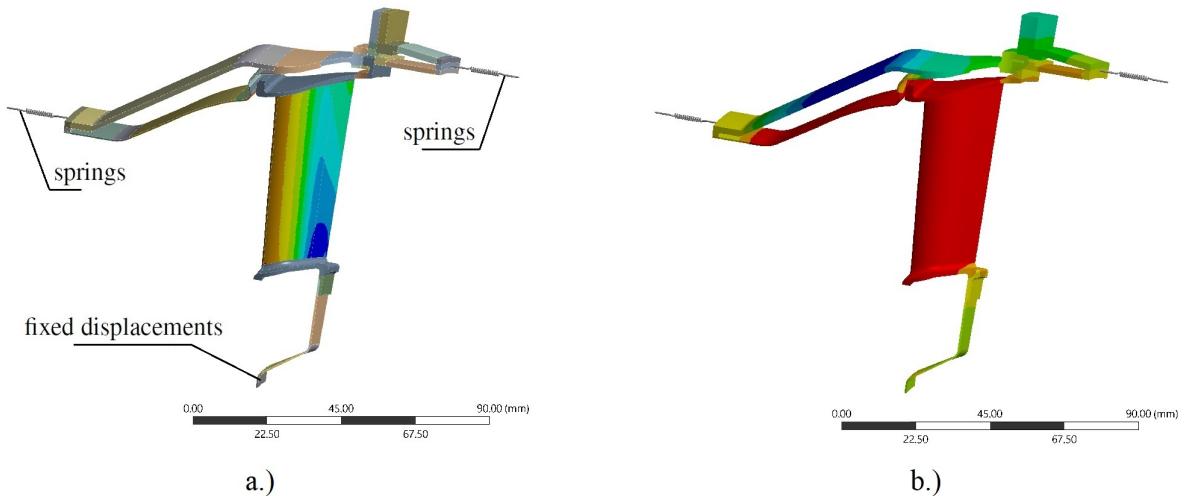
Użyto czterech modeli turbulencji: SST, SST-Transition, EARSM i RSM. Założono wydatek masowy strumienia chłodzącego tarcze wirnika na poziomie 1% przepływu głównego. W dalszej części, pokazano wpływ wielkości wydatku masowego strumienia chłodzącego na rozkład temperatury oraz wyżęcenie materiału, zakładając dwa razy większy wydatek.

Jako warunek zbieżności analizy, przyjęto wartość strumienia ciepła przepływającego przez powierzchnię łopatki na poziomie 0.2 [W].

6.2.0.4 Analiza wyżęcenia materiału

Model zdyskretyzowano przy pomocy izoparametrycznych elementów skończonych, z kwadratową funkcją kształtu. Otrzymane rozkłady temperatury oraz ciśnienia na łopatce zostały

użyte jako warunki brzegowe podczas analizy wytrzymałościowej (Rys. 6.23).



Rysunek 6.23: Warunki brzegowe analizy wytrzymałościowej: a.) mechaniczne, b.) termiczne.

Łopatka kierująca połączona jest z obudową przy pomocy kołków, dzięki czemu, moment z łopatki przenoszony jest na obudowę. Połączenie to zostało zamodelowane przy pomocy równań wiążących rotacyjne stopnie swobody, względem osi obrotu turbiny, pomiędzy stykiem łopatki i obudowy. Pozostałe połączenia zostały zamodelowane przy pomocy kontaktu tarcioowego, ze współczynnikiem tarcia 0.2.

Analizowany model utwierdzono w dolnej części, w miejscu, gdzie styka się z dużo sztywniejszym ciałem (Rys. 6.23 a.)). Na obudowie przyłożono sprężyny z wzdłużną i skrętną sztywnością (Rys. 6.23 a.)). Sztywności sprężyn wyznaczono w analizach pomocniczych. Promieniowy kierunek na obudowie pozostał wolny.

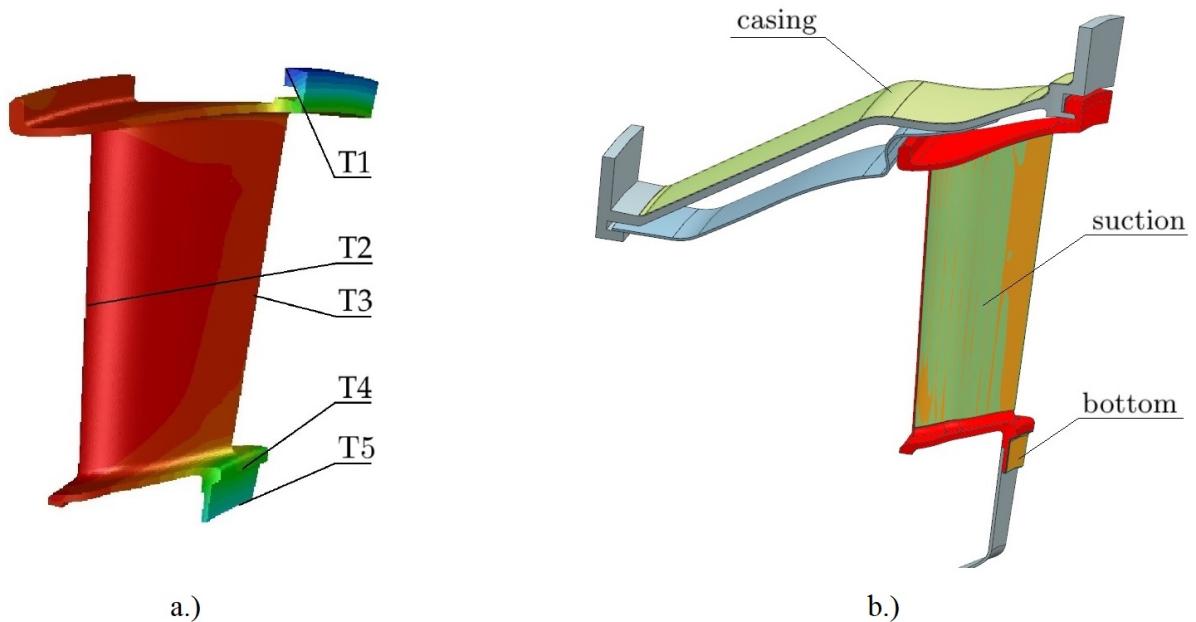
Łopatka turbiny napędowej wykonana jest z materiału Inconel 738 LC. Założono, że materiał ten charakteryzuje się asymetrią zakresu sprężystego, więc do zdefiniowania naprężen zredukowanych użyto hipotezy Burzyńskiego (Rów. 5.1.41). Założono stały współczynnik asymetrii zakresu sprężystego równy 1.10.

6.2.1 Wyniki

6.2.1.1 Wpływ modelowania turbulencji

W rozdziale tym ograniczono się do zaprezentowania wyników dotyczących wpływu modelowania turbulencji na rozkład temperatury i poziom naprężen zredukowanych, pomijając wpływ modelowania turbulencji na współczynniki przejmowania ciepła, co znaleźć można w [54].

W pierwszej kolejności przeanalizowano wpływ modeli turbulencji na rozkład temperatury, która została zmierzona w pięciu charakterystycznych lokalizacjach, zaprezentowanych na rysunku 6.24 a.), mianowicie: T1 - punkt reprezentujący chłodzenie obudowy, w którym występuje najwyższa temperatura w łopatce; T2 - punkt spiętrzenia, w połowie wysokości łopatki, reprezentujący najwyższą temperaturę; T3 - punkt na krawędzi spływu, w połowie wysokości łopatki; T4 i T5 punkty reprezentujące wpływ chłodzenia tarczy wirnika. Dodatkowo, podano średnie temperatury z powierzchni: strony ssącej oraz ciśnieniowej łopatki, dolnej powierzchni stopki oraz powierzchni obudowy bezpośrednio odsłoniętej na działanie strumienia chłodzącego. Charakterystyczne powierzchnie schematycznie przedstawiono na rysunku 6.24 b.).



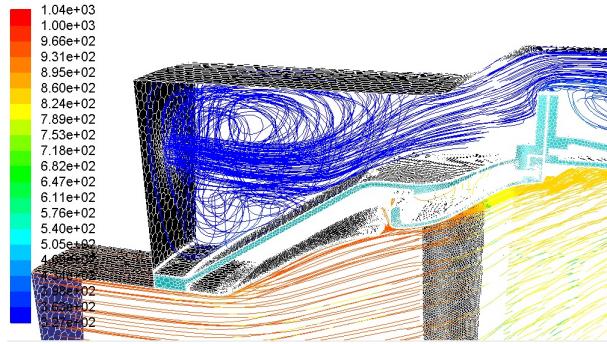
Rysunek 6.24: Schematycznie przedstawione miejsca pomiaru temperatury: a.) punktowe, b.) powierzchniowe.

Wartości temperatury, otrzymane za pomocą rozpatrywanych modeli turbulencji, w poszczególnych charakterystycznych punktach oraz uśrednione wartości z charakterystycznych powierzchni zaprezentowano w tabeli 6.3. W tabeli tej można zauważyć, że różnice w wartościach temperatury pomiędzy modelami turbulencji SST i SST-Transition w punktach T2 i T3 są niewielkie, podobnie jak na powierzchni ssącej oraz ciśnieniowej. Z faktów tych, można wnioskować, że przejście laminarno-turbulentne nie ma dużego wpływu na rozkład temperatury dla niechłodzonej łopatki.

PLACEMENT	T1	T2	T3	T4	T5	pressure	suction	bottom	casing
SST	700.9	940.6	922.2	813.6	771.6	930.5	930.4	796.9	527.0
TRANSI.	698.5	940.5	922.1	811.3	771.1	930.1	929.9	795.7	520.7
RSM	715.3	939.9	921.1	812.9	770.6	928.1	927.7	795.5	546.0
EARSM	689.1	940.8	921.7	807.1	759.5	930.7	930.5	787.6	511.9

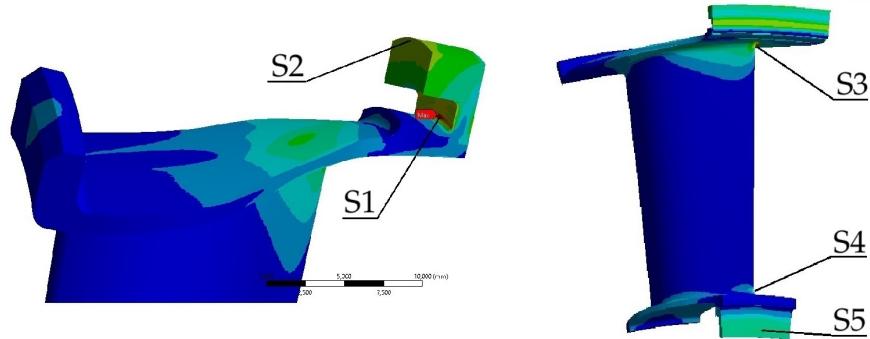
Tabela 6.3: Temperatura [K] dla różnych modeli turbulencji w charakterystycznych punktach oraz uśredniona na charakterystycznych powierzchniach.

Z tabeli 6.3 widać również, że dla punktów T1, T4, T5 rozbieżności w wartościach temperatur są większe. Szczególnie duże są dla punktu T1, reprezentującego chłodzenie obudowy. Największe rozbieżności w temperaturze wynoszą 26 [K] pomiędzy modelami RSM i EARSM. Pomiędzy modelami bazującymi na hipotezie lepkości turbulentnej, a modelem RSM rozbieżności wynoszą około 15 [K]. Jeszcze większe różnice w temperaturach otrzymanych za pomocą poszczególnych modeli turbulencji widać na powierzchni "casing", bezpośrednio odsłoniętej na powietrze chłodzące. Z rysunku 6.25 widać złożoność przepływu w tym rejonie, masywne odejmowanie które tam występuje jest dość trudne do odwzorowania przez modele RANS, co zostało potwierdzone w wielu pracach [240]. Bez danych eksperymentalnych ciężko jest powiedzieć, który model odwzorował pole temperatury w tym rejonie dokładniej.



Rysunek 6.25: Linie prądu w kolorze temperatury w kanale chłodzącym obudowę.

Głównym celem w tym rozdziale jest pokazanie wpływu modelowania turbulencji na wytężenie materiału. W tym celu zbadaliśmy poziom wytężenia materiału w kilku krytycznych punktach, przedstawionych na rysunku 6.26, dla których naprężenia zredukowane Burzyńskiego, w zależności od modelu turbulencji, przedstawiono w tabeli 6.26.



Rysunek 6.26: Schematycznie przedstawione miejsca pomiaru naprężeń zredukowanych.

W tabeli 6.4 widzimy, że maksymalne naprężenia zredukowane występują w górnej części łopatki. Największa rozbieżność 92 [MPa] występuje pomiędzy modelami EARSM i RSM, co stanowi około 19% procentowy błąd względny. Duża różnica 72 [MPa] występuje również między modelami RSM i SST-Transition, co daje błąd 15%. Maksymalne naprężenia pomiędzy modelami SST i SST-Transition różnią się o 6%.

POINT ID	S1	S2	S3	S4	S5
SST	536	339	373	177	238
SST-Transition	566	332	391	205	234
EARSM	586	354	381	186	245
RSM	494	316	337	153	250

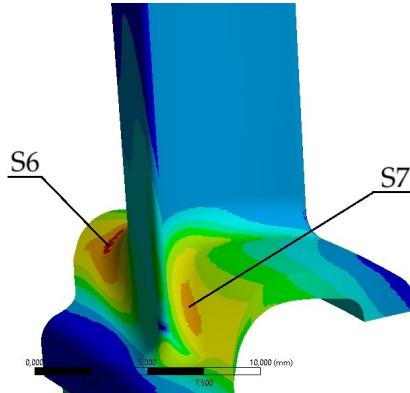
Tabela 6.4: Naprężenia zredukowane Burzyńskiego [MPa] w różnych punktach łopatki dla różnych modeli turbulencji.

6.2.1.2 Wpływ wydatku masowego strumienia chłodzącego

W rozdziale tym pokażemy wpływ wydatku masowego powietrza chłodzącego tarcze wirnika na poziom naprężzeń termicznych w rozpatrywanej łopatce. W pierwszej analizie założono wy-

datek masowy równy 1% wydatku przepływu głównego, następnie dwukrotnie zwiększyliśmy go, do poziomu 2%. Obydwie analizy przeprowadzono z użyciem modelu turbulencji EARSM.

Zwiększenie wydatku masowego spowodowało spadek temperatury w dolnej części łopatki, do wartości $T_4 = 782$ [K] oraz $T_5 = 725$ [K]. W konsekwencji spowodowało to wzrost gradientów temperatury, a finalnie wzrost naprężeń termicznych. Na rysunku 6.27 przedstawiono dwa dodatkowe punkty w celu dokładniejszego zobrazowania poziomu naprężeń w dolnej części łopatki.



Rysunek 6.27: Schematycznie przedstawione dodatkowe punkty pomiaru naprężeń.

W tabeli 6.5 przedstawiono naprężenia zredukowane Burzyńskiego z obydwu rozpatrywanych analiz. Widzimy z niej, że bardziej intensywne chłodzenie spowodowało wzrost naprężen termicznych w dolnej części łopatki. Jednakże, w górnej części łopatki, w wyniku deformacji dolnej części, naprężenia zmalały. Ten fakt pokazuje, że dzięki możliwości uwzględnienia kilku czynników jednocześnie, analiza thermal-FSI może być bardzo pomocna podczas procesu projektowania.

POINT	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
LOW	586	354	381	186	245	182	143
HIGH	539	341	372	166	283	206	181

Tabela 6.5: Naprężenia zredukowane Burzyńskiego [MPa] w różnych punktach łopatki dla różnej wartości wydatku strumienia chłodzącego.

6.2.1.3 Wpływ zbieżności strumienia ciepła

Finalnie pokazano wpływ zbieżności analizy wymiany ciepła na rozkład temperatury oraz naprężen w rozpatrywanej łopatce. W porównaniu tym użyto modeli turbulencji SST-Transition oraz EARSM. Wielkością monitorowaną, której użyto do oceny zbieżności rozwiązywanego procesu wymiany ciepła w ciele stałym był strumień ciepła na powierzchniach łopatki:

$$net = net_{heatflux} = \int_S q dS . \quad (6.2.1)$$

Rozpatrywane analizy są analizami ustalonymi, nie zależnymi od czasu. Z tego względu, w celu uzyskania pełnej zbieżności bilansu energii w ciele stałym, sumaryczny strumień ciepła przepływający przez brzeg tego ciała powinien być równy zero.

W pierwszej kolejności przedstawiono wpływ poziomu zbieżności strumienia ciepła na rozkład temperatury. Rozpatrzono poziomy zbieżności strumienia ciepła przepływającego przez brzeg łopatki równe $-1.2, -0.35, -0.2$ [W].

W tabeli 6.6 przedstawiono wartości temperatury w kilku charakterystycznych punktach (Rys. 6.24) dla różnego poziomu zbieżności strumienia ciepła. Z tabeli tej widać, że pomiędzy strumieniami ciepła na poziomie -1.2 i -0.35 [W] w punkcie T1, reprezentującym chłodzenie obudowy, występują duże różnice temperatury, wynoszące około 10 [K]. Jednakże, pomiędzy strumieniami ciepła na poziomie -0.35 i -0.2 zmiany temperatury są niewielkie, więc można uznać analizę za zbieżną.

<i>net</i> [W]	Turb. model	T1	T2	T3	T4
-1.2	SST-Transition	709.1	940.5	813.6	775.3
	EARSM	698.5	940.8	809.3	763.1
-0.35	SST-Transition	699.7	940.5	811.6	771.6
	EARSM	690.4	940.8	807.4	760
-0.2	SST-Transition	698.5	940.5	811.3	771.1
	EARSM	689.1	940.8	807.1	759.5

Tabela 6.6: Temperatura [K] dla różnego poziomu zbieżności strumienia ciepła w charakterystycznych punktach łopatki.

W tabeli 6.7 przedstawiono naprężenia zredukowane Burzyńskiego dla różnego poziomu zbieżności strumienia ciepła w różnych punktach łopatki. Największe rozbieżności w naprężeniach występują w punkcie S1, odpowiadającemu punktowi miar temperatury T1, a więc w miejscu gdzie temperatura zmieniała się najbardziej. Różnice w wartościach naprężenia w tym punkcie wynoszą około 30 [MPa], co stanowi około 6% błędu względnego.

<i>net</i> [W]	Turb. model	S1	S2	S3	S4	S5
-1.2	SST-Transition	534	317	376	188	236
	EARSM	559	338	369	170	246
-0.2	SST-Transition	566	332	391	205	234
	EARSM	586	354	381	186	245

Tabela 6.7: Naprężenia zredukowane Burzyńskiego [MPa] dla różnego poziomu zbieżności strumienia ciepła.

Strumień ciepła na wlocie do jedno-łopatkowego kanału przepływowego wynosi w przybliżeniu 75,000 [W], dlatego wydawać by się mogło, że zbieżność strumienia ciepła na poziomie 1 [W] jest wystarczająca. Jednakże, jak pokazano powyżej, w celu osiągnięcia dokładnych wyników, zbieżność strumienia ciepła na brzegach ciała stałego powinna być monitorowana, a jego wartość powinna osiągnąć jak najniższy poziom.

Rozdział 7

Wpływ asymetrii zakresu sprężystego na wyciążenie materiału

W rozdziale tym, bazując na analizie thermal-FSI, przeanalizowano wpływ asymetrii zakresu sprężystego na wyciążenie materiału. Porównano dwie hipotezy wyciążenia, klasyczną HMH (Rozdział 5.1.2.1.1.2) opisaną zależnością 5.1.32:

$$F(\sigma_{ij}, \sigma_Y^T(\epsilon_{eq}^{pl}, T)) = \sqrt{3J_2} - \sigma_Y^T(\epsilon_{eq}^{pl}, T) = 0 \quad , \quad (7.0.1)$$

oraz paraboliczną hipotezę Burzyńskiego (Rozdział 5.1.2.1.1.2), dla której warunek plastyczności przyjmuje postać (Rów. 5.1.51) :

$$F(\sigma_m, \sigma_e, \sigma_Y^T(\epsilon_{eq}^{pl}, T)) = \frac{1}{2k_{T,\epsilon}} \left[3[k_{T,\epsilon} - 1]\sigma_m + \sqrt{9[k_{T,\epsilon} - 1]^2\sigma_m^2 + 4k_{T,\epsilon}\sigma_e^2} \right] - \sigma_Y^T(\epsilon_{eq}^{pl}, T) = 0 \quad . \quad (7.0.2)$$

Hipoteza Burzyńskiego zależy od naprężeń hydrostatycznych oraz w naturalny sposób uwzględnia asymetrię zakresu sprężystego.

Warunek Burzyńskiego sprzyżony ze stwarzyszonym prawem płynięcia oraz modelem umocnienia zależnym od temperatury został zaimplementowany do komercyjnego oprogramowania MES przy pomocy klasycznego niejawnego schematu całkowania Eulera z rzutowaniem wstecznym (predyktor-korektor) [41,55,56]. W celu zapewnienia kwadratowej zbieżności, zlinearyzowany styczny moduł sprężysto-plastyczny spójny ze schematem całkowania został przedstawiony w jawnej postaci zaproponowanej przez Zhang [57]. Tak przygotowany model został zaimplementowany do oprogramowania Ansys Mechanical przy pomocy procedury USERMAT napisanej w języku Fortran. Pełny opis implementacji przedstawiono w rozdziale 5.3.

Hipoteza Burzyńskiego została zwalidowana w pracy [41] na przykładzie testu Iyera i Lissendena [39], w którym testowano próbki z Inconel 718, charakteryzującego się asymetrią zakresu sprężystego, w podwyższonej temperaturze 650 °C. Jednakże nie wzięto pod uwagę zależności współczynnika asymetrii od temperatury oraz od odkształceń plastycznych.

W pierwszej kolejności sprawdzono poprawność implementacji poprzez odwzorowanie testu Iyera i Lissendena [39]. Następnie na przykładzie tego testu zwalidowano model Burzyńskiego, zależny od temperatury oraz odkształceń plastycznych. Wyniki opublikowano w artykule [58].

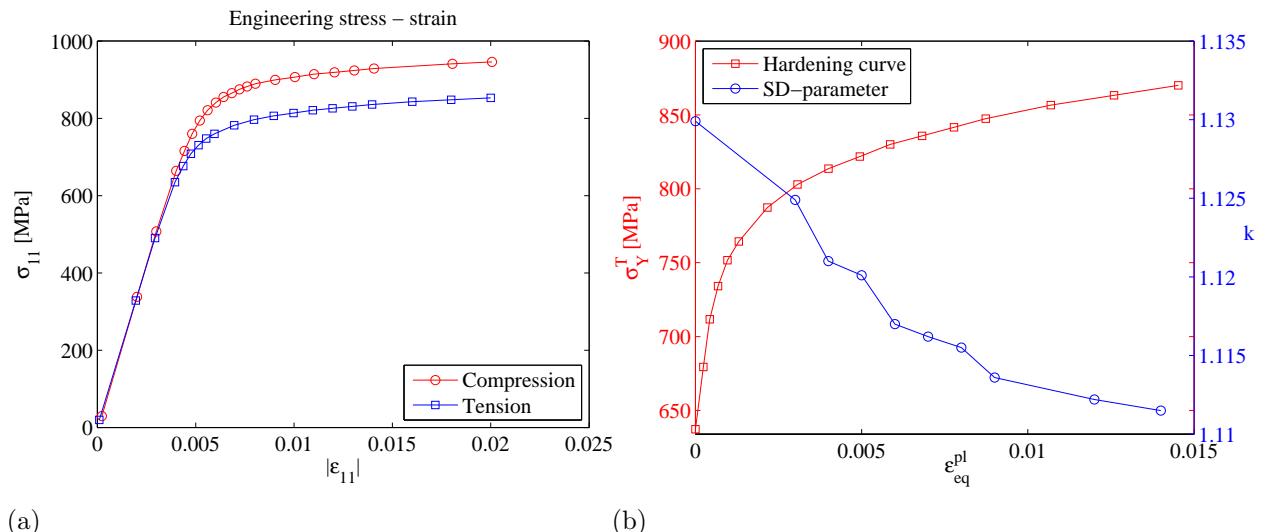
Następnie zbadano wpływ asymetrii zakresu sprężystego na poziom wyciążenia materiału turbinowych łopatek kierujących wykonanych z super-stopu na bazie niklu, porównując paraboliczny model Burzyńskiego z klasycznym modelem HMH. Pierwsze badania dotyczyły łopatki kierującej turbiny napędowej silnika PZL-10W, która pracuje w zakresie sprężystym.

Porównano poziom naprężeń zredukowanych oszacowany przez dwa modele. Wyniki opublikowane w artykule [59]. Następnie badaniom poddano łopatkę kierującą 1-st. turbiny sprężarki silnika PZL-10W, pracującą w zakresie sprężysto-plastycznym. Porównano poziom odkształceń plastycznych oszacowanych przez dwa rozpatrywane modele. Wyniki opublikowano w artykule [58].

7.1 Eksperymentalna weryfikacja hipotezy Burzyńskiego

Iyer i Lissenden [39] przeprowadzili test w podwyższonej temperaturze $650\text{ }^{\circ}\text{C}$ na próbce wykonanej z Inconelu 718. W teście tym drążony cylinder rozciągano lub ściskano, a następnie skręcano, co wywoływało trój-osiowy stan obciążenia. W celu pokazania poprawności naszej implementacji przeprowadzono analizę wytrzymałościową odwzorowującą test Iyera z wykorzystaniem hipotezy Burzyńskiego ze stałym współczynnikiem asymetrii zakresu sprężystego, po raz pierwszy zaprezentowaną przez Vadillo [41]. Założono stały współczynnik asymetrii zakresu sprężystego równy: $k = 1.0$ (HMH), $k = 1.10$ (dla Inconelu 718 w temperaturze otoczenia [50]) oraz $k = 1.13$ (dla Inconelu 718 w temperaturze $650\text{ }^{\circ}\text{C}$). Następnie przeprowadzono analizę ze współczynnikiem asymetrii zależnym od temperatury oraz od odkształceń plastycznych. Test Iyera i Lissendena był przeprowadzony w stałej temperaturze $650\text{ }^{\circ}\text{C}$, więc przyjęto współczynnik asymetrii opisany funkcją "kawałkami" liniową zależną od odkształceń plastycznych dla temperatury $650\text{ }^{\circ}\text{C}$, którą przedstawiono na rysunku 7.1 b.).

Krzywą naprężenie-odkształcenie dla jednoosiowego rozciągania oraz ściskania, na podstawie której przygotowano dane materiałowe zaprezentowano na rysunku 7.1 a.) [39,41]. Moduł Younga wynosi $E = 165\text{ [GPa]}$, natomiast współczynnik Poissona $\nu = 0.297$ [39,41]. "Kawałkami" liniową krzywą umocnienia użyta podczas analizy zaprezentowano na rysunku 7.1 b.).



Rysunek 7.1: Inconel 718 w temperaturze $650\text{ }^{\circ}\text{C}$: a.) krzywa naprężenie-odkształcenie dla rozciągania oraz ściskania, b.) krzywa umocnienia oraz współczynnik asymetrii w funkcji odkształceń plastycznych.

Analizie poddano próbki w kształcie drążonego cylindra o średnicy zewnętrznej 21 [mm], wewnętrznej 15.9 [mm] oraz długości 25 [mm] [41]. Numerycznie odwzorowano dwa testy: skręcanie poprzedzone rozciąganiem z warunkami brzegowymi: $\epsilon_{12} = 0.024$ poprzedzone $\epsilon_{11} = 0.03$, a następnie skręcanie poprzedzone ściskaniem z warunkami brzegowymi: $\epsilon_{12} = 0.024$ poprzedzone $\epsilon_{11} = -0.02$.

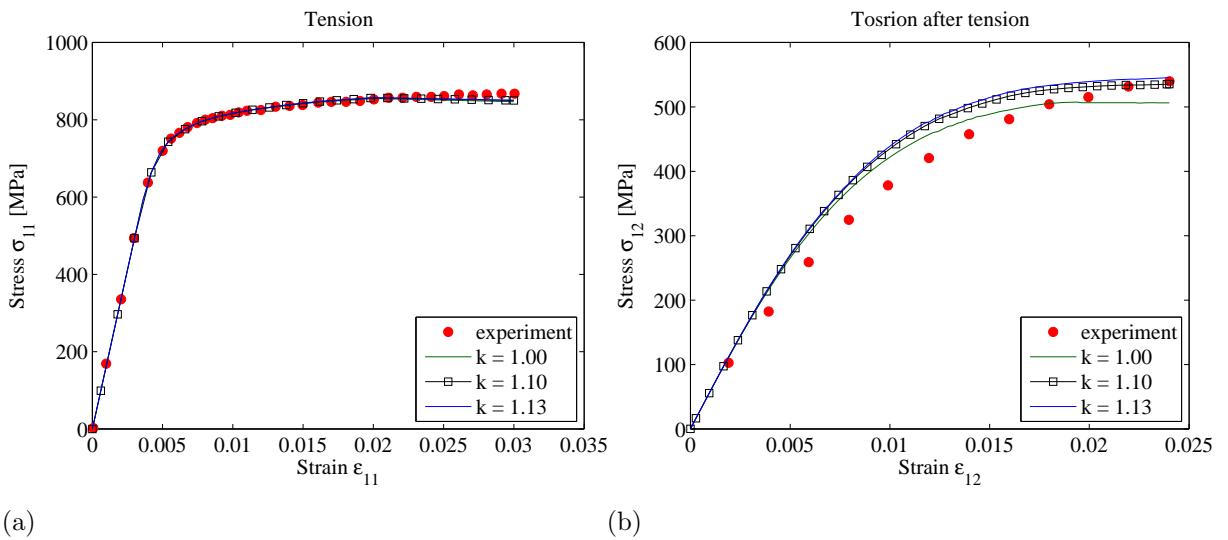
Podczas eksperymentalnego testu oraz analizy numerycznej mierzono następujące wielkości: przemieszczenia osiowe d , siłę osiową P , moment skręcający T oraz kąt skręcenia θ . Na podstawie tych wielkości oszacowano naprężenia oraz odkształcenia osiowe z następujących zależności [41]:

$$\sigma_{11} = \frac{4P}{\pi(D_0^2 - D_i^2)} , \quad \epsilon_{11} = \frac{\delta}{L_g} , \quad (7.1.1)$$

styczne natomiast z zależności [41]:

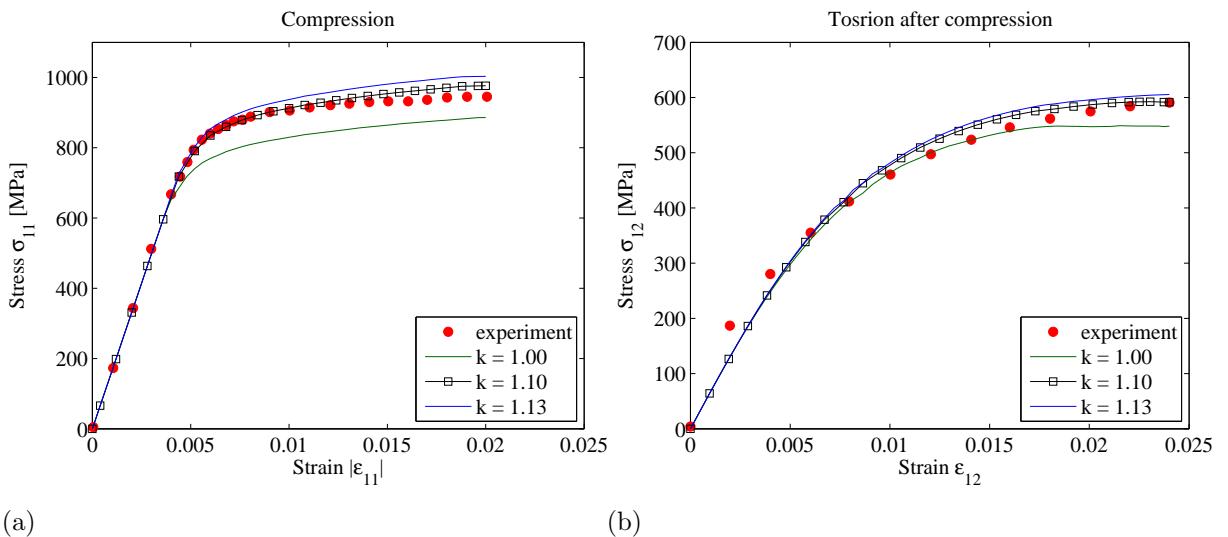
$$\sigma_{12} = \frac{16TD_0}{\pi(D_0^4 - D_i^4)} , \quad \epsilon_{12} = \frac{\gamma_{12}}{2} = \frac{D_0\theta}{2L_g} . \quad (7.1.2)$$

Eksperymentalne oraz numeryczne krzywe odpowiedzi materiału zaprezentowano na wykresie 7.2 oraz 7.3. Wyniki analizy z parametrem asymetrii równym $k = 1.1$ są podobne do wyników zaprezentowanych przez Vadillo [41], co świadczy o poprawności naszej implementacji.



Rysunek 7.2: Wyniki z analizy ze stałym parametrem asymetrii zakresu sprężystego.

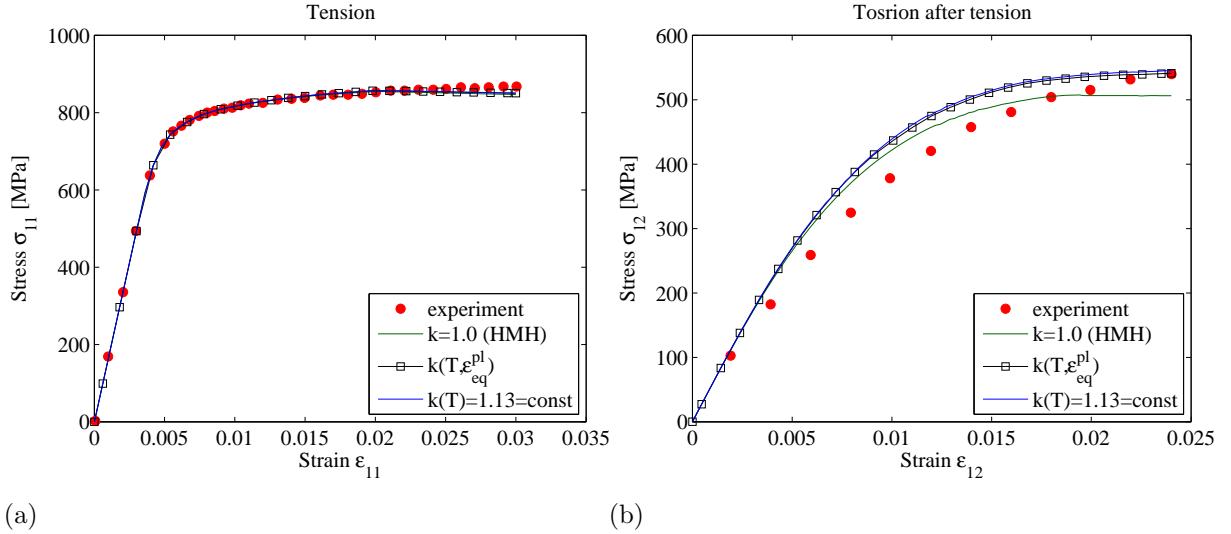
Skręcanie poprzedzone rozciąganiem: a.) rozciąganie, b.) skręcanie.



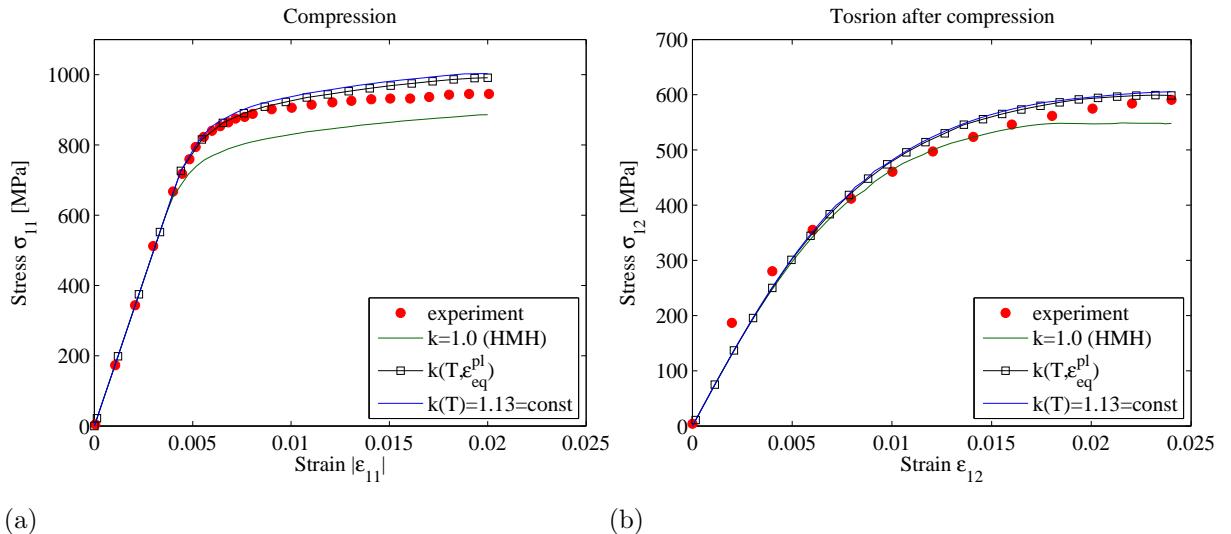
Rysunek 7.3: Wyniki z analizy ze stałym parametrem asymetrii zakresu sprężystego.

Skręcanie poprzedzone ściskaniem: a.) ściskanie, b.) skręcanie.

Z wykresu 7.2 oraz 7.3 widać, że warunek Burzyńskiego ze stałym parametrem asymetrii $k = 1.13$ nieznacznie przewartościowuje krzywe odpowiedzi materiału. Z tego względu, zbadaliśmy wpływ współczynnika asymetrii zależnego od odkształceń plastycznych na wyniki. Z wykresu 7.1 b.) widać, że wraz ze wzrostem odkształceń plastycznych, współczynnik asymetrii spada. Prowadzi to do bardziej dokładnego modelowania odpowiedzi materiału przez hipotezę Burzyńskiego, co pokazano na wykresie 7.4 i 7.5. Wykresy te pokazują, że warunek wytężenia Burzyńskiego pozwala na dokładniejsze odwzorowanie krzywej odpowiedzi materiału niż warunek HMH.



Rysunek 7.4: Wyniki z analizy ze zmiennym parametrem asymetrii zakresu sprężystego.
Skręcanie poprzedzone rozciąganiem: a.) rozciąganie, b.) skręcanie.



Rysunek 7.5: Wyniki z analizy ze zmiennym parametrem asymetrii zakresu sprężystego.
Skręcanie poprzedzone ściskaniem: a.) ściskanie, b.) skręcanie.

7.2 Wpływ asymetrii zakresu sprężystego na wytężenie materiału łopatki kierującej turbiny napędowej silnika PZL-10W - zakres sprężysty

Wpływ asymetrii zakresu sprężystego na wytężenie materiału w stanie sprężystym, a więc na naprężenia zredukowane, pokazano na przykładzie łopatki kierującej turbiny napędowej silnika PZL-10W. W tym celu wykonano analizę thermal-FSI, której pełny opis znajduje się w rozdziale 6.2. Porównania naprężen zredukowanych dokonano na wynikach otrzymanych przy użyciu modelu turbulencji SST-Transition. Łopatka wykonana jest z materiału Inconel 738 LC. Założono, że materiał ten charakteryzuje się asymetrią zakresu sprężystego. Przyjęto stały współczynnik zakresu asymetrii, równy $k = 1.10$. Porównano naprężenia zredukowane HMH (Rów. 5.1.33):

$$\sigma_{HMH} = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}} , \quad (7.2.1)$$

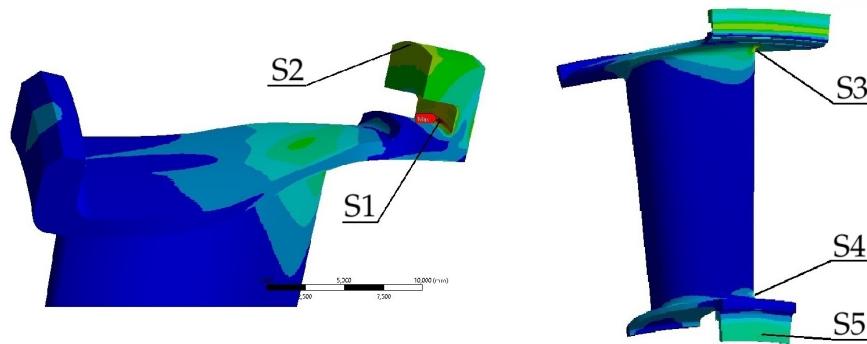
z naprężeniami Burzyńskiego (Rów. 5.1.41):

$$\sigma_B = \frac{1}{2k} \left[3(k-1)\sigma_m + \sqrt{9(k-1)^2\sigma_m^2 + 4k\sigma_e^2} \right] , \quad (7.2.2)$$

gdzie $\sigma_e = \sigma_{HMH}$.

7.2.1 Wyniki - porównanie naprężen zredukowanych

Naprężenia zredukowane Burzyńskiego i HMH zostały porównane w kilku krytycznych punktach łopatki przedstawionych na rysunku 7.6. Wartości naprężen zredukowanych w tych punktach dla poszczególnych hipotez zostały zaprezentowane w tabeli 7.1.



Rysunek 7.6: Schematycznie przedstawione miejsca pomiaru naprężen zredukowanych.

EQUIVALENT STRESS [MPa]					
	S1	S2	S3	S4	S5
Burzynski	534	317	376	188	236
Huber–Mises–Hencky	600	317	425	208	247

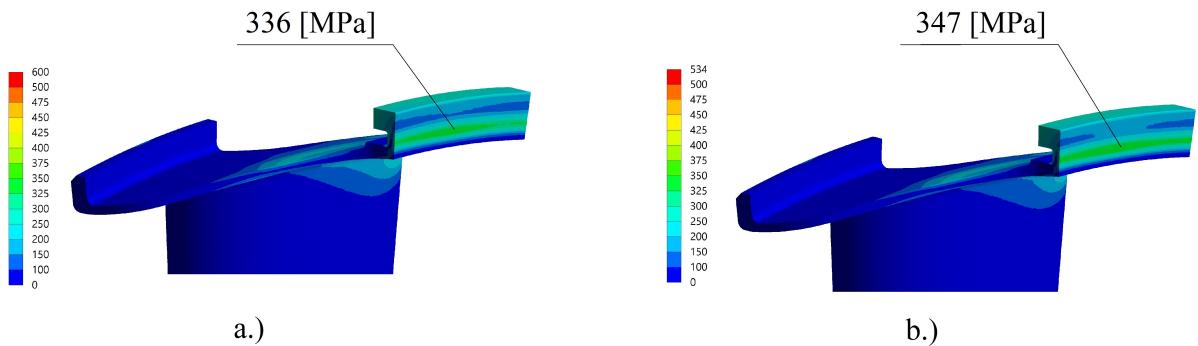
Tabela 7.1: Naprężenia zredukowane Burzyńskiego oraz HMH w różnych punktach łopatki.

W tabeli 7.1 widać, że rozbieżności pomiędzy naprężeniami HMH i Burzyńskiego są duże. Największa różnica w naprężeniach zredukowanych występuje dla najbardziej obciążonego punktu S1, w którym naprężenia Burzyńskiego wynoszą 534 [MPa], a HMH 600 [MPa], co daje

66 [MPa] różnicy, czyli 11% błędu względnego. Z wyników przedstawionych w tabeli 7.1 można zauważać, że naprężenia zredukowane oszacowane przy pomocy definicji HMH są większe od naprężeń Burzyńskiego. Z porównania tych dwóch definicji można oszacować zależność 7.2.3, która pokazuje, że w przypadku, gdy spełniona jest zależność $\sigma_e < 3\sigma_m$, to naprężenia Burzyńskiego przewyższają naprężenia HMH.

$$\begin{aligned} \sigma_e < 3\sigma_m &\rightarrow \sigma_B > \sigma_e \\ \sigma_e > 3\sigma_m &\rightarrow \sigma_B < \sigma_e \end{aligned} \quad (7.2.3)$$

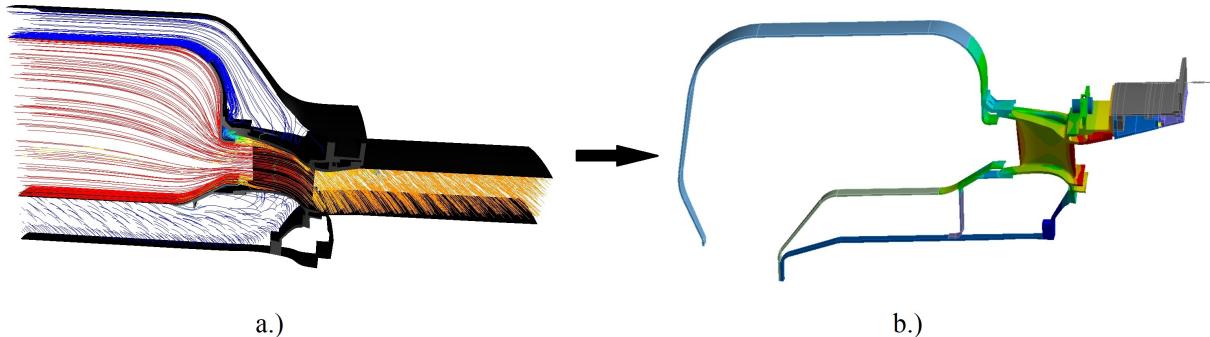
Przykład miejsca w którym naprężenia Burzyńskiego przewyższają naprężenia HMH zaprezentowano na rysunku 7.7. Z rysunku tego widać, że naprężenia Burzyńskiego wynoszące 347 [MPa] są większe o 11 [MPa] od naprężeń HMH, które wynoszą 336 [MPa].



Rysunek 7.7: Naprężenia zredukowane: a.) HMH, b.) Burzyńskiego.

7.3 Wpływ asymetrii zakresu sprężystego na wytężenie materiału łopatki kierującej turbiny sprężarki - zakres sprężysto-plastyczny

W celu pokazania wpływu asymetrii zakresu sprężystego na wytężenie materiału w stanie sprężysto-plastycznym przeprowadzono analizę thermal-FSI łopatki kierującej 1-st. turbiny sprężarki silnika PZL-10W. Konstrukcja ta jest relatywnie sztywna, więc odkształcenia nie wpływają na pole temperatury, z tego względu rozpatrzono analizę jednokierunkową (Fig. 7.8).



Rysunek 7.8: Schemat jednokierunkowej analizy thermal-FSI: a.) analiza CFD - linie prądu w kolorze temperatury, b.) analiza CSD - termiczne warunki brzegowe.

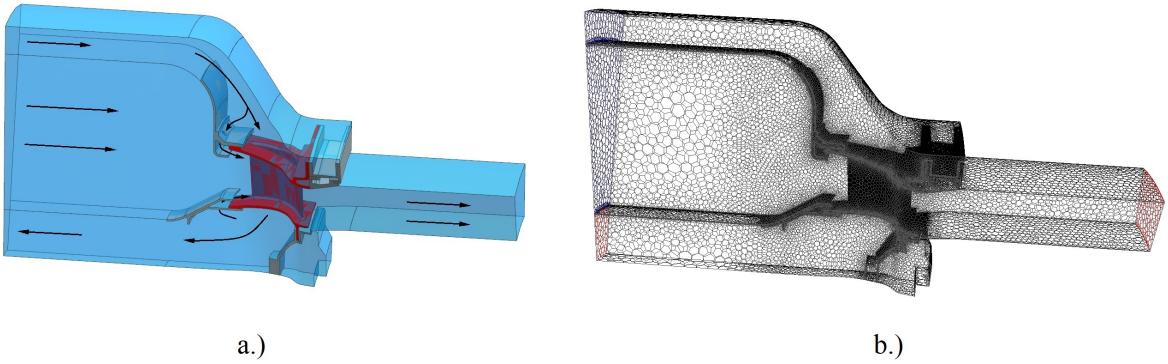
W pierwszej kolejności przeprowadzono sprzężoną analizę wymiany ciepła, w celu wyznaczenia rozkładu temperatury oraz sił aerodynamicznych działających na łopatkę. Następnie wykonano analizę CSD, w celu wyznaczenia wytężenia materiału. Analizę CFD wykonano przy pomocy oprogramowania Ansys Fluent, natomiast CSD w oprogramowaniu Ansys Mechanical.

Warunek plastyczności HMH (Rów. 5.1.32) porównano z hipotezą Burzyńskiego (Rów. 5.1.39). Rozpatrywana łopatka wykonana jest z super-stopu na bazie niklu. Założono, że materiał ten charakteryzuje się asymetrią zakresu sprężystego. Przyjęto stały współczynnik zakresu asymetrii, równy $k = 1.10$. Łopatka pracuje w zakresie sprężysto-plastycznym, więc warunek plastyczności Burzyńskiego został zaimplementowany do oprogramowania MES przy pomocy procedury opisanej w rozdziale 5.3.

7.3.1 Sprzężona analiza wymiany ciepła

Łopatka kierująca 1-st. turbiny sprężarki silnika PZL-10W jest konwekcyjnie chłodzona przez powietrze z za sprężarki. Większa część powietrza chłodzącego wpływa do komory spalania, a ponieważ proces spalania nie był modelowany, więc założono, że wypływa ono dodatkowym wylotem (Rys. 7.9 a.)). Część powietrza natomiast, wpływa poprzez dziurki do kanału głównego, umożliwiając zewnętrzne chłodzenie górnej oraz dolnej powierzchni łopatki (Rys. 7.9 a.)).

W skład domeny obliczeniowej CFD wchodzi jedna domena płynu oraz osiem domen ciała stałego (Rys. 7.9 a.)). Domena płynu została zamodelowana jako spaliny o własnościach analogicznych jak w analizie łopatki kierującej turbiny napędowej (Rozdział 6.2.0.3). Własności ciał stałych założono zależne od temperatury.



Rysunek 7.9: Domena obliczeniowa CFD: a.) model CAD ze schematycznie zaznaczonymi kierunkami przepływu , b.) siatka objętości skończonych.

Domenę obliczeniową zdyskretyzowano niestrukturalną siatką złożoną z 5,200,000 elementów polihedralnych z interfejsami płyn-ciało stałe oraz ciało stałe-ciało stałe typu węzeł w węzle (Rys. 7.9 b)). Siatkę obliczeniową w rejonie warstwy przyściennej zbudowano w oparciu o bezwymiarową wysokość $y^+ \approx 1$.

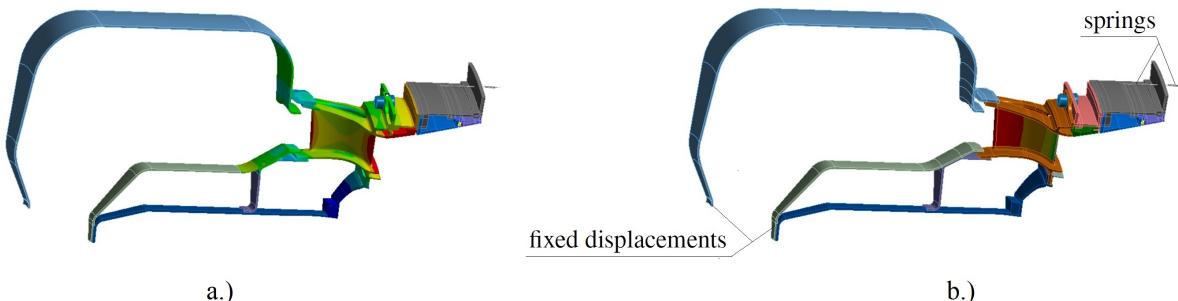
Użyto modelu turbulencji $\gamma - Re_\theta$ SST-Transition.

7.3.2 Analiza wytrzymałości materiału

Model analizy CSD zdyskretyzowano przy pomocy 489,751 izoparametrycznych elementów, z kwadratową funkcją kształtu (1,316,824 węzły). Otrzymane z analizy CFD rozkłady temperatury oraz ciśnienia na piórze łopatki, zostały użyte jako warunki brzegowe podczas sprężysto-plastycznej analizy CSD (Rys. 7.10).

Analizowany model utwierdzono w dolnej części komory spalania, w miejscu, gdzie styka się z dużo sztywniejszym ciałem (Rys. 7.10 b.)). Na obudowie przyłożono sprężyny z wzdłużną i skrętną sztywnością (Rys. 7.10 b.)). Sztywności sprężyn wyznaczono w analizach pomocniczych. Promieniowy kierunek na obudowie pozostał wolny.

Rozpatrywana łopatka połączona jest z obudową turbiny przy pomocy śrub. Siłę napięcia śruby zamodelowano przy pomocy modelu "bolt pretension", natomiast powierzchnie styku, między ciałami, w tym rejonie przy pomocy kontaktu tarcioowego, ze współczynnikiem tarcia 0.4. Pozostałe połączenia zamodelowano przy pomocy kontaktu typu klejonego.



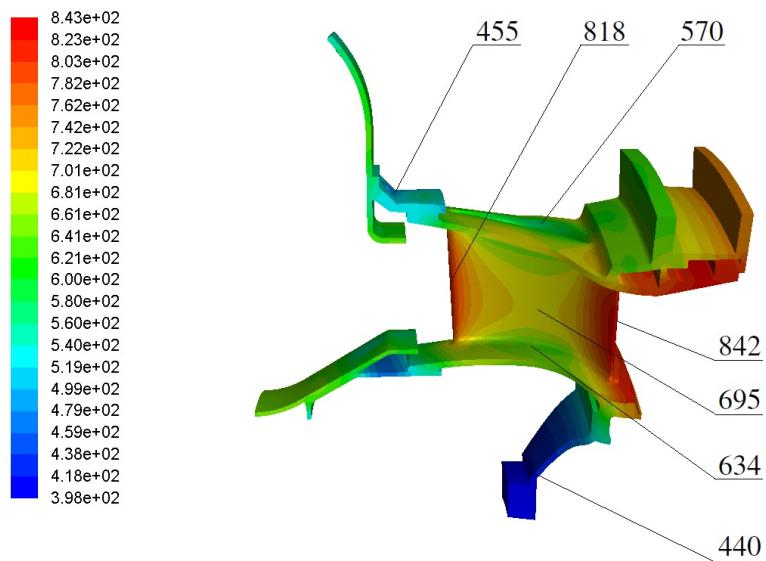
Rysunek 7.10: Warunki brzegowe analizy wytrzymałościowej: a.) termiczne, b.) mechaniczne.

Elementy strukturalne wchodzące w skład analizy wykonane są z różnych materiałów żarowymtrzymały. Dla łopatki założono sprężysto-plastyczne właściwości materiału, natomiast dla pozostałych ciał sprężyste. Dodatkowo, założono, że materiał łopatki charakteryzuje się asymetrią

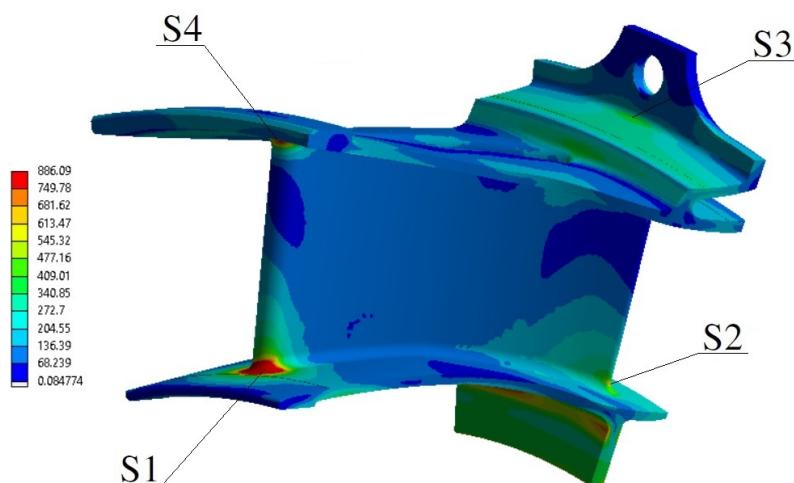
zakresu sprężystego. Przyjęto stały współczynnik asymetrii zakresu sprężystego, równy $k = 1.10$. Przeprowadzona analiza ma charakter monotoniczny, pominięto cykliczny charakter obciążenia, więc jako model umocnienia przyjęto model izotropowy opisany przy pomocy funkcji "kawałkami" liniowej.

7.4 Wyniki

Rysunek 7.11 przedstawia rozkład temperatury w rozpatrywanej łopatce, otrzymany ze sprzążonej analizy wymiany ciepła. Z rysunku tego widać, że w wyniku chłodzenia, powstały duże gradienty temperatury, które prowadzą do wysokiej wartości naprężeń termicznych (Rys. 7.12). Hipotezy wytężenia Burzyńskiego oraz HMH zostały porównane w kilku charakterystycznych punktach schematycznie przedstawionych na rysunku 7.12.



Rysunek 7.11: Wartości temperatury [$^{\circ}\text{C}$] w charakterystycznych punktach łopatki.

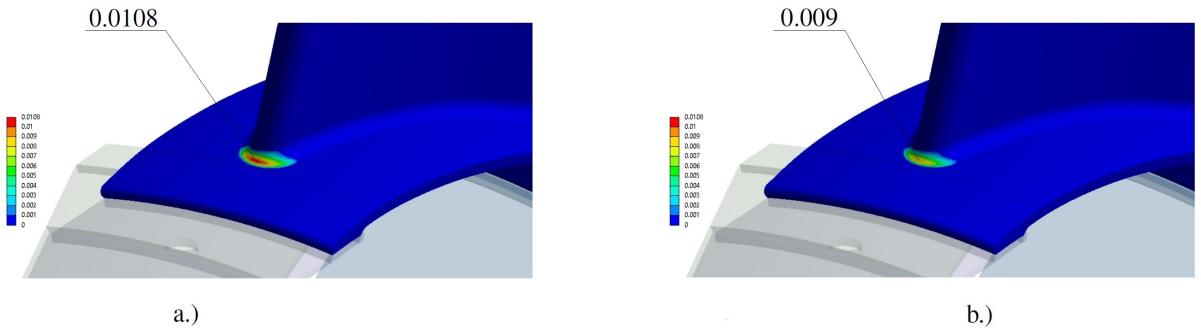


Rysunek 7.12: Schematycznie przedstawione miejsca pomiaru naprężeń zredukowanych.

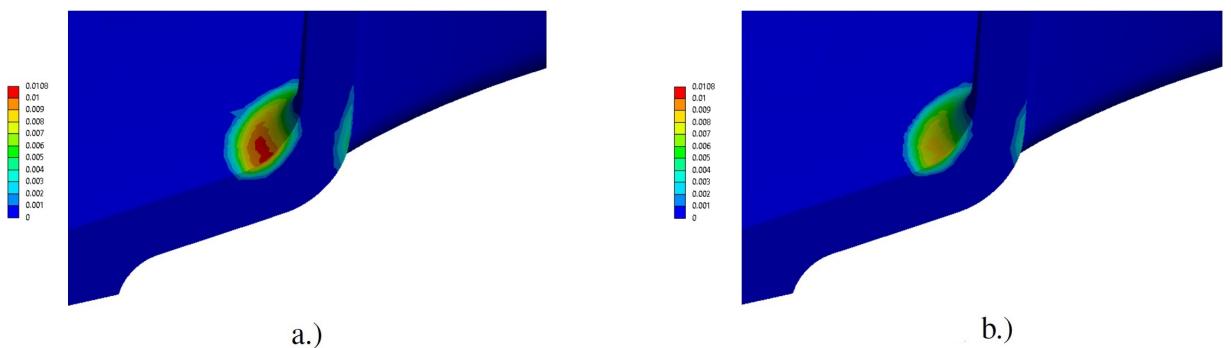
	EQUIVALENT STRESS [MPa]			
	S1	S2	S3	S4
Burzynski	886	554	428	763
Huber–Mises–Hencky	887	612	411	756
σ_m ($k = 1.1$)	-665	-225	263	360
Temperature [C]	704	790	652	695
Tension yield point [MPa]	844	838	848	841

Tabela 7.2: Naprężenia zredukowane: Burzyńskiego σ_B oraz HMH σ_e .

W tabeli 7.2 przedstawiono naprężenia zredukowane Burzyńskiego oraz HMH w charakterystycznych punktach łopatki (Rys. 7.12). Z tabeli tej widać, że największa różnica dla zakresu sprężystego wynosi 58 [MPa] w punkcie S2, co stanowi 10% błędu względnego. Naprężenia HMH przewyższają naprężenia Burzyńskiego. Z przedstawionej poprzednio zależności 7.2.3, wynika, że spełnienie warunku $\sigma_e < 3\sigma_m$ powoduje, że wartości naprężen Burzyńskiego przewyższają naprężenia HMH, co ma miejsce w punktach S3 i S4. Naprężenia w punkcie S3 według definicji Burzyńskiego są o 17 [MPa] wyższe od naprężen HMH, co daje 4% różnicę. W punkcie S1 wystąpiła plastyczność (Rys. 7.13), z tego względu zbadano to miejsce dokładniej.



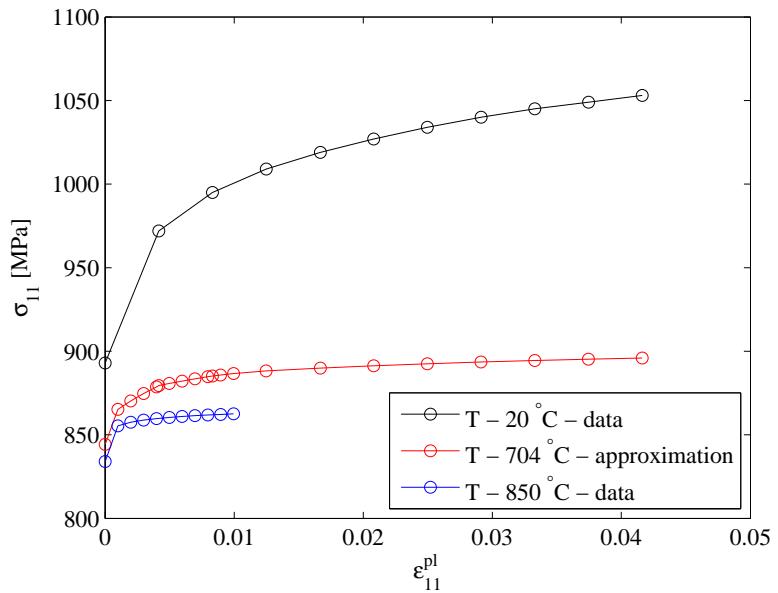
Rysunek 7.13: Zredukowane odkształcenia plastyczne (widok globalny) dla współczynnika asymetrii: a.) $k_T = 1.0$ (HMH), b.) $k_T = 1.1$ (Burzyński).



Rysunek 7.14: Zredukowane odkształcenia plastyczne (widok lokalny - przekrój) dla współczynnika asymetrii: a.) $k_T = 1.0$ (HMH), b.) $k_T = 1.1$ (Burzyński).

Zredukowane odkształcenia plastyczne oszacowane przy pomocy sprężysto-plastycznej analizy z warunkiem plastyczności Burzyńskiego mają niższe wartości oraz pokrywają mniejszy

obszar niż oszacowane przy użyciu modelu HMH (Rys. 7.13 i 7.14). Maksymalne zredukowane odkształcenia plastyczne wyznaczone przez model Burzyńskiego wynoszą 0.009, natomiast przez model HMH 0.0108, co daje 20% błędu względnego. Różnica w naprężeniach zredukowanych dla tego punktu wynosi 1 [MPa], jednakże krzywa umocnienia dla temperatury występującej w tym miejscu ma bardzo niewielkie nachylenie (Rys. 7.15).



Rysunek 7.15: Krzywe umocnienia na podstawie danych materiałowych w temperaturach 20 i 850 °C oraz oszacowana przez procedurę w temperaturze 704 °C.

Rozdział 8

Podsumowanie

W pracy zbadano wpływ modeli turbulencji RANS na rozkład temperatury oraz wytężenie materiału części gorących silników turbinowych oraz turbin energetycznych, a następnie wpływ asymetrii zakresu sprężystego na poziom wytężenia materiału. W badaniach bazowano na analizach thermal-FSI. Rozpatrywane struktury charakteryzują się względnie dużą sztywnością, więc ich deformacja nie wpływa na pole temperatury, z tego powodu wykorzystano analizy jedno-kierunkowe. W pierwszej kolejności przeprowadzano analizę CFD sprężonej wymiany ciepła, a następnie traktując otrzymywane rozkłady temperatury oraz ciśnienia jako warunki brzegowe, przeprowadzano analizę CSD mającą na celu wyznaczenie poziomu wytężenia materiału. Analizy CFD wykonywano przy użyciu oprogramowania Ansys Fluent, natomiast CSD w oprogramowaniu Ansys Mechanical.

W pierwszej części badań dotyczących modelowania turbulencji pokazano zdolność odwzorowania przez modele turbulencji przejścia laminarno-turbulentnego, bazując na sprężonej analizie wymiany ciepła konwekcyjnie chłodzonej, eksperymentalnej łopatki C3X, dla której dostępne są wyniki z testów wymiany ciepła [27]. Przeanalizowano kilka modeli bazujących na hipotezie lepkości turbulentnej: SST, $\gamma - Re_\theta$ SST-Transition, $v^2 - f$, $k - \epsilon$ Realizable, $k - kl - \omega$ Transition oraz domknięcie RSM z liniową korekcją ciśnienie-deformacja prędkości. W porównaniu tym założono gładkość powierzchni pióra łopatki oraz wielkość wirów energetycznych na poziomie 20 % wysokości łopatki, co odpowiada 15.24 [mm]. Porównanie współczynników przejmowania ciepła (HTC) otrzymanych numerycznie z eksperymentalnymi, pokazało, że z pośród analizowanych modeli trzy były w stanie odwzorować proces przejścia laminarno-turbulentnego, mianowicie SST-Transition, $v^2 - f$ i RSM. Na podstawie porównania wykresów rozkładu HTC i temperatury, pokazano, że wzrost HTC, na stronie ssącej w miejscu przejścia laminarno-turbulentnego odpowiada wzrostowi temperatury w tym miejscu. Z tego względu, nasze rozważania prowadzone były dla wykresów obrazujących rozkład temperatury. Pomimo, że modele SST-Transition, $v^2 - f$ i RSM odwzorowały dostatecznie dokładnie punkt przejścia laminarno-turbulentnego to rozkłady temperatury wyznaczone przez te modele znaczono się różniły. Turbulentny obszar warstwy przyściennej został lepiej odwzorowany przez pełno-turbulentne modele SST oraz $k - \epsilon$ Realizable, niż przez model SST-Transition. Modele $v^2 - f$ oraz RSM również bardzo dobrze odwzorowały ten obszar. Model $k - \epsilon$ Realizable znacznie przewartościował temperaturę w punkcie spiętrzenia.

W raporcie przedstawiającym wyniki z testów wymiany ciepła na łopatce C3X nie ma informacji odnośnie wielkości wirów energetycznych (TLS), które przede wszystkim wpływają na tłumienie intensywności turbulencji [25], a co za tym idzie na proces przejścia laminarno-turbulentnego. Z tego względu bazując na modelach $\gamma - Re_\theta$ SST-Transition, $v^2 - f$ i RSM zbadan-

no wpływ TLS na rozkład temperatury wyznaczany przez nie. Założono wartości TLS wynoszące 2, 5, 10 i 20 [%] wysokości łopatki (76.2 [mm]) oraz 20 [%] długości cięciwy (144.93 [mm]), co stanowi odpowiednio 1.52, 3.81, 7.62, 15.24, 28.986 [mm]. Otrzymane wyniki pokazały, że wartość TLS znacząco wpływa na rozkłady temperatury, szczególnie w strefie laminarnej. Co więcej, wzrost TLS znacząco wpływał na punkt inicjalizacji turbulencji dla modeli SST-Transition i RSM, przesuwając go w stronę krawędzi natarcia. Dla rozpatrzonych modeli wzrost TLS spowodował wzrost temperatury. Dla modeli turbulencji $v^2 - f$ i RSM, wyniki okazały się bliższe eksperymentalnym dla wartości TLS równej 1.524 i 3.81 [mm]. Natomiast model SST-Transition był bardziej dokładny dla wyższej wartości TLS, równej około 15.24 [mm]. Może, to wynikać stąd, iż dla modelu SST-Transition użyto ograniczenia produkcji turbulentnej energii kinetycznej. Rozkłady temperatury dla modelu SST-Transition bez użycia ograniczenia produkcji turbulentnej energii okazały się bardziej zgodne z trendem prezentowanym przez modele $v^2 - f$ i RSM.

Dodatkowo, w raporcie z badań eksperymentalnych nie podano informacji odnośnie chropowatości powierzchni badanej łopatki, która wpływa na proces przejścia laminarno-turbulentnego oraz na proces wymiany ciepła w turbulentnej warstwie przyściennej. Efekty te zostały pokazane na przykładzie modelu turbulencji SST-Transition, który uwzględnia dwie korekty chropowatości, wymagające podania dwóch rodzajów chropowatości. Korekta procesu przejścia laminarno-turbulentnego wymaga podania rzeczywistej chropowatości, a korekta wymagana w celu zwiększenia naprężeń turbulentnych, w turbulentnej warstwie przyściennej, wymaga podania zastępczej chropowatości piaskowej. Rozważono kilka chropowatości reprezentujących szlifowanie wykańczające według definicji wysokości chropowatości R_z : 1.6, 3.2 oraz 6.3 [μm]. Na ich podstawie wyznaczono zastępczą chropowatość piaskową. W pierwszej kolejności zbadano wpływ korekty procesu laminarno-turbulentnego. Z przedstawionych wyników widać, że wzrost chropowatości powierzchni powoduje przesunięcie punktu inicjalizacji turbulencji w stronę krawędzi natarcia. Co więcej, dla wartości chropowatości 6.3 [μm], na stronie ciśnieniowej pojawiło się przejście laminarno-turbulentne typu bypass, co w konsekwencji doprowadziło do zwiększenia temperatury w materiale łopatki. Następnie pokazano, że zaburzenie podwarstwy lepkiej przez chropowatość znacząco wpływa na proces wymiany ciepła w turbulentnej warstwie przyściennej, co uwidocznioło się poprzez wzrost temperatury łopatki.

Następnie przy użyciu analizy thermal-FSI pokazano wpływ uwzględnienia modelowania przejścia laminarno-turbulentnego na wytężenie materiału. Przeprowadzono analizę CSD w celu wyznaczenia naprężeń termicznych dla temperatur otrzymanych przy pomocy modeli SST i SST-Transition. Z powodu braku danych materiałowych odnośnie asymetrii zakresu sprężystego materiału łopatki C3X, przyjęto model HMH do oszacowania naprężeń zredukowanych. Maksymalne naprężenia zredukowane wystąpiły w okolicy otworu chłodzącego. Dla modelu SST wyniosły 480 [MPa], natomiast dla modelu SST-Transition 448 [MPa]. A więc, różniły się o 32 [MPa], co stanowi około 7% błędu względnego. Z bezpośredniego porównania wartości naprężeń otrzymano, że bardzo duże różnice, 96 [MPa], wystąpiły na powierzchni ssącej, w miejscu, w którym występuje przejście laminarno-turbulentne. W tym miejscu, dla modelu SST otrzymane naprężenia wyniosły około 270 [MPa], a dla modelu SST-Transition 174 [MPa], a więc otrzymana różnica 96 [MPa] stanowi około 35 % błędu względnego, co jest ogromną wartością.

W drugiej części badań dotyczących wpływu modelowania turbulencji na wytężenie materiału badano łopatkę kierującą turbiny napędowej silnika PZL-10W. Łopatka ta jest niechłodzona, jednakże uwzględniono chłodzenie tarczy wirnika oraz obudowy, co spowodowało powstanie wysokich gradientów temperatury generujących wysokie naprężenia termiczne. Rozpatrywana łopatka wykonana jest z materiału Inconel 738 lc. Założono, że materiał ten charakteryzuje się asymetrią zakresu sprężystego, a więc do wyznaczenia naprężeń zredukowanych wykorzystano

hipotezę Burzyńskiego, zakładając stały współczynnik asymetrii zakresu sprężystego $k = 1.10$.

Zbadano dwa modele bazujące na hipotezie lepkości turbulentnej: SST oraz SST-Transition, oraz dwa modele z domknięciem drugiego rzędu: $k - \omega$ WJ-BSL-EARSM oraz RSM z liniową korekcją ciśnienie-deformacja prędkości. Przedstawione rozkłady temperatury pokazały, że różnice w wartościach temperatury pomiędzy modelami turbulencji SST i SST-Transition na piorze łopatki były niewielkie, a więc można wnioskować, że przejście laminarno-turbulentne nie ma dużego wpływu na rozkład temperatury dla niechłodzonej łopatki. W miejscach reprezentujących chłodzenie obudowy oraz tarczy wirnika rozbieżności w wartościach temperatur, otrzymanych na podstawie rozpatrywanych modeli, okazały się widoczne. Szczególnie duże były w miejscu chłodzenia obudowy. Największe rozbieżności w temperaturze wyniosły 26 [K] pomiędzy modelami RSM i EARSM. Pomiędzy modelami bazującymi na hipotezie lepkości turbulentnej, a modelem RSM rozbieżności wyniosły około 15 [K]. Jeszcze większe różnice w temperaturach otrzymanych za pomocą poszczególnych modeli turbulencji wystąpiły na powierzchni obudowy bezpośrednio odsłoniętej na powietrze chłodzące. Ponieważ przepływ chłodzący obudowę okazał się bardzo złożony, a masywne oderwanie, które tam wystąpiło jest dość trudne do odwzorowania przez modele RANS, więc bez danych eksperymentalnych ciężko jest powiedzieć, który model odwzorował pole temperatury w tym rejonie dokładniej. Widoczne różnice temperatury w górnej części łopatki doprowadziły do dużych rozbieżności w naprężeniach zredukowanych, których największe wartości wystąpiły w górnej części łopatki. Największa rozbieżność 92 [MPa] wystąpiła pomiędzy modelami EARSM i RSM, co dało około 19% procentowy błąd względny. Duża różnica 72 [MPa] wystąpiła również między modelami RSM i SST-Transition, co dało błąd 15%. Maksymalne naprężenia pomiędzy modelami SST i SST-Transition różniły się o 6%.

Przedstawione wyniki pokazały, że chłodzenie tarczy wirnika oraz obudowy spowodowało powstanie dużych naprężeń termicznych. Z tego względu zbadano wpływ wydatku masowego strumienia chłodzącego tarcze wirnika na rozkład temperatury oraz wytężenie materiału. W pierwszej analizie założono wydatek równy 1% wydatku przepływu głównego, a następnie dwukrotnie zwiększyły go, do poziomu 2%. Obydwie analizy przeprowadzono z użyciem modelu turbulencji EARSM. Zwiększenie wydatku spowodowało spadek temperatury w dolnej części łopatki o około 30 [K]. W konsekwencji spowodowało to wzrost gradientów temperatury, a finalnie wzrost naprężeń termicznych w dolnej części łopatki. Jednakże, w górnej części łopatki, w wyniku deformacji dolnej części, naprężenia zmalały. Ten fakt pokazuje, że dzięki możliwości uwzględnienia kilku czynników jednocześnie, analiza thermal-FSI może być bardzo pomocna podczas procesu projektowania.

Finalnie, zaprezentowano wpływ zbieżności sprężonej analizy wymiany ciepła, na rozkład temperatury oraz wytężenie materiału. Jako kryterium zbieżności przyjęto strumień ciepła przepływający przez powierzchnie brzegowe rozważanej łopatki. Rozpatrzone poziomy zbieżności strumienia ciepła przepływającego przez brzeg łopatki równe $-1.2, -0.35, -0.2$ [W]. Przedstawione wyniki dla różnego poziomu zbieżności strumienia ciepła pokazały, że pomiędzy strumieniami ciepła na poziomie -1.2 i -0.35 [W] w miejscu reprezentującym chłodzenie obudowy, wystąpiły duże różnice temperatury, wynoszące około 10 [K]. Jednakże, pomiędzy strumieniami ciepła na poziomie -0.35 i -0.2 zmiany temperatury były niewielkie, więc analizę uznano za zbieżną. W górnej części łopatki, w miejscu gdzie temperatura zmieniała się najbardziej, różnice w wartości naprężeń wyniosły około 30 [MPa], co stanowi około 6% błędu względnego. Strumień ciepła na wlocie do jedno-łopatkowego kanału przepływowego wynosi około 75,000 [W], dlatego wydawać by się mogło, że zbieżność strumienia ciepła na poziomie 1 [W] jest wystarczająca. Jednakże, jak pokazano, w celu osiągnięcia dokładnych wyników, zbieżność strumienia ciepła na brzegach ciała stałego powinna być monitorowana, a jego wartość powinna osiągnąć jak najniższy poziom.

Drugim celem pracy było zbadanie wpływu asymetrii zakresu sprężystego na poziom wytrzymałości materiału. Porównano dwie hipotezy wytrzymałości, klasyczną HMH opisaną zależnością 5.1.32 oraz paraboliczną hipotezę Burzyńskiego 5.1.51, która zależy od naprężeń hydrostatycznych oraz w naturalny sposób uwzględnia asymetrię zakresu sprężystego. W zakresie sprężystym porównywano naprężenia zredukowane oszacowane przez dwa modele, natomiast w zakresie sprężysto-plastycznym dokonano porównania odkształceń plastycznych.

Warunek Burzyńskiego sprzedany ze stowarzyszonym prawem płynięcia oraz modelem umocnienia zależnym od temperatury został zaimplementowany do komercyjnego oprogramowania MES przy pomocy klasycznego niejawnego schematu całkowania Eulera z rzutowaniem wstecznym (predyktor-korektor) [41,55,56]. W celu zapewnienia kwadratowej zbieżności, zlinearyzowany styczny moduł sprężysto-plastyczny spójny ze schematem całkowania został przedstawiony w jawnej postaci zaproponowanej przez Zhang [57]. Tak przygotowany model został zaimplementowany do oprogramowania Ansys Mechanical przy pomocy procedury USERMAT napisanej w języku Fortran.

Hipoteza Burzyńskiego została zwalidowana w pracy [41] na przykładzie testu Iyera i Lissendena [39], w którym, w podwyższonej temperaturze 650°C , drażony cylinder, wykonany z Inconelu 718, rozciągano lub ściskano, a następnie skręcano, co wywoływało trój-osiowy stan obciążenia. Jednakże podczas przeprowadzonych badań założono stały współczynnik asymetrii zakresu sprężystego $k = 1.10$ (dla Inconelu 718 w temperaturze otoczenia [50]), a więc nie wzięto pod uwagę zależności współczynnika asymetrii od temperatury oraz od odkształceń plastycznych. W celu pokazania poprawności naszej implementacji przeprowadzono analizę numeryczną CSD odwzorowującą test Iyera z wykorzystaniem hipotezy Burzyńskiego ze stałym współczynnikiem asymetrii zakresu sprężystego: $k = 1.0$ (HMH), $k = 1.10$ oraz $k = 1.13$ (dla Inconelu 718 w temperaturze 650°C). Wyniki analizy z parametrem asymetrii równym $k = 1.10$ okazały się być podobne do wyników zaprezentowanych przez Vadillo [41], co świadczy o poprawności naszej implementacji. Otrzymane wyniki pokazały również, że krzywe odpowiadające materiałowi zostały lekko przewartościowane przez hipotezę Burzyńskiego ze stałym parametrem asymetrii $k = 1.13$. Z tego względu, zbadano wpływ współczynnika asymetrii zależnego od temperatury oraz od odkształceń plastycznych na wyniki. Rozważany test był przeprowadzony w stałej temperaturze 650°C , więc przyjęto współczynnik asymetrii opisaną funkcją "kawałkami" liniową zależną od odkształceń plastycznych, dla temperatury 650°C . Wraz ze wzrostem odkształceń plastycznych, współczynnik asymetrii spada. Prowadzi to do bardziej dokładnego modelowania odpowiedzi materiału przez hipotezę Burzyńskiego. Otrzymane wyniki pokazały, że paraboliczny warunek wytrzymałości Burzyńskiego pozwala na dokładniejsze odwzorowanie krzywej odpowiedzi materiału od warunku HMH.

Następnie zbadano wpływ asymetrii zakresu sprężystego na poziom wytrzymałości materiału turbinowych łopatek kierujących wykonanych z super-stopu na bazie niklu, porównując paraboliczny model Burzyńskiego z modelem HMH. Pierwsze badania dotyczyły łopatki kierującej turbiny napędowej silnika PZL-10W, która pracuje w zakresie sprężystym. Porównano poziom naprężen zredukowanych oszacowany przez dwa modele. Największa różnica w naprężeniach, 66 [MPa], wystąpiła dla najbardziej obciążonego miejsca, w którym naprężenia Burzyńskiego wyniosły 534 [MPa], a HMH 600 [MPa], co dało 11% błędu względnego. W najbardziej interesujących miejscach, naprężenia zredukowane oszacowane przy pomocy definicji HMH okazały się większe od naprężen Burzyńskiego, jednakże zależność 7.2.3 pokazuje, że w przypadku spełnienia warunku $\sigma_e < 3\sigma_m$, naprężenia Burzyńskiego przewyższają naprężenia HMH, co wystąpiło w miejscu styku łopatki z kadłubem, gdzie naprężenia Burzyńskiego wynoszące 347 [MPa] przekroczyły naprężenia HMH o 11 [MPa].

W dalszej części badaniom poddano łopatkę kierującą 1-st. turbiny sprężarki silnika śmigłowcowego PZL-10W, pracującą w zakresie sprężysto-plastycznym. Porównano poziom naprężeń zredukowanych, oszacowany przez dwa rozpatrywane modele, w miejscach pracujących sprężyste oraz poziom odkształceń plastycznych w strefie w której wystąpiła plastyczność. Dla zakresu sprężystego największa różnica w naprężeniach zredukowanych wystąpiła w punkcie przejścia pióra w stopkę od strony krawędzi spływu. Naprężenia oszacowane przez model Burzyńskiego wyniosły 554 [MPa], a przez HMH 612 [MPa], a więc różniły się o 58 [MPa], co stanowi 10% błędu względnego. Naprężenia Burzyńskiego przewyższyły naprężenia HMH przykładowo w obszarze połączenia łopatki z obudową, gdzie naprężenia według definicji Burzyńskiego wyniosły 428 [MPa] i okazały się o 17 [MPa] wyższe od naprżeń HMH, a więc różniły się o 4%. Obszar przejścia pióra w stopkę od strony krawędzi natarcia okazał się być najbardziej obciążonym miejscem, w którym wystąpiła plastyczność. Zredukowane odkształcenia plastyczne oszacowane przy pomocy warunku plastyczności Burzyńskiego miały niższe wartości oraz pokryły mniejszy obszar niż oszacowane przy użyciu modelu HMH. Maksymalne zredukowane odkształcenia plastyczne wyznaczone przez model Burzyńskiego wyniosły 0.009, natomiast przez model HMH 0.0108, co dało 20% błędu względnego.

Przedstawione wyniki w sposób jednoznaczny pokazują jak ważny jest dobór odpowiednich modeli podczas analizowania gorących części silników lotniczych oraz turbin energetycznych przy pomocy narzędzi thermal-FSI. Zarówno model turbulencji używany podczas analizy CFD jak i model wytężenia materiału odegrały ogromne znaczenie na wartość szacowanych wyników. Maksymalna różnica w maksymalnych naprężeniach zredukowanych pomiędzy różnymi modelami turbulencji wyniosła około 19%, natomiast dobór modelu wytężenia spowodował różnicę w maksymalnych naprężeniach zredukowanych na poziomie około 11%. A więc, niewłaściwy dobór modeli użytych podczas analizy może spowodować błąd w oszacowaniu maksymalnych naprżeń w konstrukcji rzędu nawet 30%. Co jest ogromną wartością z punktu widzenia statyki, a tym bardziej znacząco wpływie na oszacowanie żywotności.

Z niniejszej pracy widać jak ważny jest rozwój modeli obliczeniowych w celu dokładnego odwzorowania pola temperatury oraz wytężenia materiału. W przyszłości warto zwrócić uwagę na dokładniejsze odwzorowanie pola temperatury z użyciem bardziej precyzyjnych modeli turbulentnego strumienia pędu [17]. W przypadku modeli wytężenia materiału, w celu dokładniejszego opisu odpowiedzi materiałów, cechujących się asymetrią zakresu sprężystego, istotną kwestią jest zbadanie wpływu uwzględnienia trzeciego niezmiennika dewiatora naprężenia w modelu Burzyńskiego [241, 242].

Bibliografia

- [1] R. Jakubowski, *Lectures: Theory of aircraft engines*, Rzeszow University of Technology, 2015.
- [2] J. Badur, M. Karcz, R. Kucharski, A. Wisniewski and M. Kekana, *Coupled modelling of the cooling processes and the induced thermo-corrosive fatigue within a gas turbine*, State of art on gas turbine research in Poland Editor T. Uhl, Cracow TU Press, pp. 19-30, 2003.
- [3] J. Badur, P. Ziolkowski, D. Sławinski and S. Kornet, *An approach for estimation of water wall degradation within pulverized-coal boilers*, Energy, Vol. 92, No. 1, pp. 142–152, 2015.
- [4] W. Wróblewski, S. Dykas, K. Bochon and T. Chmielniak, *Conjugate heat transfer modeling of convective cooling blades*, 8th European Conference on Turbomachinery: Fluid Dynamics and Thermodynamics, ETC 2009 - Conference Proceedings, pp. 651-660, 2009.
- [5] M. Banaszkiewicz, *Online determination of transient thermal stresses in critical steam turbine components using a two-step algorithm*, Journal of Thermal Stresses, Vol. 40, No. 6, pp. 690-703, 2017.
- [6] W. Wróblewski and D. Frączek, *Heat transfer modelling in a rotating cavity using the SST $k - \omega$ turbulence model*, Archives of Mechanics, Vol. 66, pp. 343-364, 2014.
- [7] A. Staroselsky, T. J. Martin and B. Cassenti, *Transient Thermal Analysis and Viscoplastic Damage Model for Life Prediction of Turbine Components*, Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 137, No. 4, pp. 042501, 2015.
- [8] J. Taler, B. Wegłowski, T. Sobota, M. Jaremekiewicz and D. Taler, *Inverse Space Marching Method for Determining Temperature and Stress Distributions in Pressure Components*, in M. A. D. S. Bernardes (ed.), Development in Heat Transfer, In Tech, Rijeka, Croatia, 2011.
- [9] P. Duda, *Inverse Method for Stress Monitoring in Pressure Components of Steam Generators*, Transactions of the 17th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Prague, Czech Republic, 2003.
- [10] P. A. Durbin and B. A. Pettersson Reif, *Statistical Theory and Modeling for Turbulent Flows*, John Wiley & Sons, Inc., 2011.
- [11] M. Waclawczyk and J. Pozorski, *Modelling of turbulent flow in the near-wall region using PDF method*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 41, No. 1, pp. 3-18, 2003.
- [12] C. M. Gil, C. J. Lissenden and B. A. Lerch, *Yield of Inconel 718 by axial-torsional loading at temperature up to 649 C*, Journal of Testing and Evaluation, Vol. 27, No. 5, pp. 327-336, 1999.

- [13] R. Fransen, *LES based Aerothermal Modeling of Turbine Blade Cooling Systems*, Phd thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, France, 2013.
- [14] D. K. Tafti, L. He and K. Nagendra, *Large eddy simulation for predicting turbulent heat transfer in gas turbines*, Philosophical Transactions of the Royal Society A, Vol. 372, pp. 20130322, 2013.
- [15] F. Duchaine, N. Maheu, V. Moureau, G. Balarac and S. Moreau, *Large-eddy simulation and conjugate heat transfer around a low-mach turbine blade*, Journal of Turbomachinery, Vol. 136, No. 6, pp. 051015, 2014.
- [16] N. Maheu, V. Moureau, P. Domingo, F. Duchaine and G. Balarac, *Large-eddy simulations of flow and heat transfer around a low-Mach number turbine blade*, ICHMT Digital Library Online, Begel House Inc., 2012.
- [17] M. Karcz, *Analiza pracy dyfuzorów termicznych w aspekcie chłodzenia turbin gazowych*, Zeszyty Naukowe Instytutu Maszyn Przepływowych Polskiej Akademii Nauk w Gdańsk, Vol. 535/1494, pp. 1-164, 2004.
- [18] G. H. Rhee and H. J. Sung, *A nonlinear low-Reynolds number heat transfer model for turbulent separated and reattaching flows*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 43, No. 8, pp. 1439-1448, 2000.
- [19] K. Mazaheri, K. Chaharlang Kiani and M. Karimi, *A Modified Turbulent Heat-Flux Model for Predicting Heat Transfer in Separating-Reattaching Flows and Film Cooling Applications*, Applied Thermal Engineering, Vol. 110, pp. 1609-1623, 2017.
- [20] M. Karcz and J. Badur, *A turbulent heat flux two-equation $\overline{\theta^2} - \epsilon_\theta$ closure based on the v2f turbulence model*, TASK Quarterly: scientific bulletin of Academic Computer Centre in Gdańsk, Vol. 7, No. 3, pp. 375-387, 2003.
- [21] M. Karcz and J. Badur, *An alternative two-equation turbulent heat diffusivity closure*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 48, No. 10, pp. 2013-2022, 2005.
- [22] M. Karcz and J. Badur, *Mean and turbulent thermal fields due to film cooling via an eddy heat diffusivity closure*, TASK Quarterly: scientific bulletin of Academic Computer Centre in Gdańsk, Vol. 10, No. 4, pp. 377–390, 2006.
- [23] L. W. Chen, R. Pichler and R. D. Sandberg, *Compressible DNS of a Low Pressure Turbine Subjected to Inlet Disturbances*, Direct and Large-Eddy Simulation IX. ERCOFTAC Series, Vol. 20, pp. 383-388, 2015.
- [24] W. Elsner and P. Warzecha, *Modeling of rough wall boundary layers with intermittency transport model*, Task Quarterly, Vol. 14, No. 3, pp. 271–282, 2010.
- [25] E. Dick and S. Kubacki, *Transition Models for Turbomachinery Boundary Layer Flows: A Review*, International Journal of Turbomachinery, Propulsion and Power, Vol. 2, No. 2, 2017.
- [26] J. Marty, *Numerical investigations of separation-induced transition on high-lift low-pressure turbine using RANS and LES methods*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Journal of Power and Energy, Vol. 228, No. 8, pp. 924-952, 2014.

- [27] L. D. Hylton, M. S. Mihelc, E. R. Turner, D. A. Nealy and R. E. York, *Analytical and Experimental Evaluation of the Heat Transfer Distribution Over the Surfaces of Turbine Vanes*, NASA Lewis Research Center, Raport No.: NASA-CR 168015, 1983.
- [28] Z. Hongjun, Z. Zhengping, L. Yu, Y. Jian and S. Songhe, *Conjugate heat transfer investigations of turbine vane based on transition models*, Chinese Journal of Aeronautics, Vol. 26, No. 4, pp. 890–897, 2013.
- [29] G. Lin, K. Kusterer, A. H. Ayed, D. Bohn and T. Sugimoto, *Conjugate Heat Transfer Analysis of Convection-cooled Turbine Vanes Using $\gamma - Re_\theta$ Transition Model*, International Journal of Gas Turbine, Propulsion and Power Systems, Vol. 6, No. 3, pp. 9-15, 2014.
- [30] G. Nowak and W. Wróblewski, *Cooling system optimisation of turbine guide vane*, Applied Thermal Engineering, Vol. 29, pp. 567–572, 2009.
- [31] T. Yoshiara, D. Sasaki and K. Nakahashi, *Conjugate Heat Transfer Simulation of Cooled Turbine Blades Using Unstructured-Mesh CFD Solver*, 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, Orlando, Florida, 2011.
- [32] J. G. Bak, J. Cho, S. Lee and Y. S. Kang, *Effects of inlet turbulence conditions and near-wall treatment methods on heat transfer prediction over gas turbine vanes*, International Journal of Aeronautical and Space Sciences, Vol. 17, No. 1, pp. 8-19, 2016.
- [33] F. Mendonca, J. Clement, D. Palfreyman and A. Peck, *Validation of unstructured CFD modelling applied to the C3X turbine including conjugate heat transfer*, CD-adapco, London, UK, 2011.
- [34] W. A. Spitzig, R. J. Sober and O. Richmond, *Pressure Dependence of Yielding and Associated Volume Expansion in Tempered Martensite*, ACTA Metallurgica, Vol. 23, No. 7, pp. 885-893, 1975.
- [35] W. A. Spitzig, R. J. Sober and O. Richmond, *The Effect of Hydrostatic Pressure on the Deformation Behavior of Maraging and HY-80 Steels and its Implications for Plasticity Theory*, Metallurgical Transactions A, Vol. A, No. 11, pp. 377-386, 1976.
- [36] O. Richmond and W. A. Spitzig, *Pressure Dependence and Dilatancy of Plastic Flow*, International Union of Theoretical and Applied Mechanics Conference Proceedings, pp. 377-386, 1980.
- [37] W. A. Spitzig and O. Richmond, *The Effect of Pressure on the Flow Stress of Metals*, ACTA Metallurgica, Vol. 32, No. 3, pp. 457-463, 1984.
- [38] C. D. Wilson, *A Critical Reexamination of Classical Metal Plasticity*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 69, No. 1, pp. 63-68, 2002.
- [39] S. K. Iyer and C. J. Lissenden, *Multiaxial constitutive model accounting for the strength-differential in Inconel 718*, International Journal of Plasticity, Vol. 19, No. 12, pp. 2055–2081, 2003.
- [40] Y. Bai and T. Wierzbicki, *A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence*, International Journal of Plasticity, Vol. 24, No. 6, pp. 1071-1096, 2008.

- [41] G. Vadillo, J. Fernandez-Saez and R. B. Pecherski, *Some applications of Burzynski yield condition in metal plasticity*, Materials and Design, Vol. 32, No. 2, pp. 628-635, 2011.
- [42] R. B. Pecherski, T. Fras and M. Nowak, *Inelastic flow and failure of metallic solids*, CISM Lectures, Udine, July 16-20, 2012.
- [43] J. Marin and L. W. Hu, *On the Validity of Assumptions Made in Theories of Plastic Flow for Metals*, Transactions of the ASME, pp. 1181-1190, 1953.
- [44] L. W. Hu and J. F. Bratt, *Effect of Tensile Plastic Deformation on Yield Condition*, Journal of Applied Mechanics, pp. 411, 1958.
- [45] L. W. Hu, *Plastic Stress-Strain Relations and Hydrostatic Stress*, Proceedings of the Second Symposium on Naval Structural Mechanics: Plasticity, pp. 194-201, 1960.
- [46] W. Burzynski, *Theoretical foundations of the hypotheses of material effort*, Engineering Transactions (Rozprawy Inżynierskie), Vol. 56, pp. 269–305, 2008 (the recent edition of English translation of the paper in Polish published in 1929 in Czasopismo Techniczne, Vol. 47, pp. 1–41).
- [47] W. Burzynski, *Ueber die Anstrengungshypothesen*, Schweiz Bauzeitung, Vol. 94, No. 21, pp. 259–262, 1929; reprinted in Włodzimierz Burzynski: *Dzieła Wybrane*, tom I, Polska Akademia Nauk, PWN Warszawa, pp. 259–262, 1982.
- [48] W. Burzynski, *Studjum nad Hipotezami Wytężenia*, (Study on Material Effort Hypotheses), Nakładem Akademji Nauk Technicznych (issued by the Academy of Technical Sciences), Lwów, pp. 1–192, (in Polish) 1928; reprinted in: Włodzimierz Burzyński: *Dzieła Wybrane*, tom I, Polska Akademia Nauk, PWN Warszawa, pp. 67–258, (in Polish) 1982.
- [49] D. C. Drucker and W. Prager, *Soil mechanics and plastic analysis for limit design*, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 10, No. 2, pp. 157–165, 1952.
- [50] J. J. Lewandowski, P. Wesseling, N. S. Prabhu, J. Larose and B. A. Lerch, *Strength differential measurements in IN 718: Effects of superimposed pressure*, Metallurgical and Materials Transactions A, Vol. 34, No. 8, pp. 1736-1739, 2003.
- [51] B. Raniecki and Z. Mroz, *Yield or martensitic phase transformation conditions and dissipation functions for isotropic, pressure-insensitive alloys exhibiting SD effect*, Acta Mechanica, Vol. 195, No. 1, pp. 81-102, 2008.
- [52] K. Sengoz, *Development of A Generalized Isotropic Yield Surface for Pressure Insensitive Metal Plasticity Considering Yield Strength Differential Effect in Tension, Compression and Shear Stress States*, Phd Thesis, The George Washington University, 2017.
- [53] K. Banas and J. Badur, *Effect of turbulence model, turbulence length scale, and wall roughness on the laminar-turbulence transition and temperature distribution of a convectively cooled C3X turbine vane*, Transactions of the Institute of Fluid-Flow Machinery, Accepted, 2017.
- [54] K. Banas and J. Badur, *Influence of turbulence RANS models on heat transfer coefficients and stress distribution during thermal-FSI analysis of power turbine guide vane of helicopter turbine engine PZL-10W taking into account convergence of heat flux*, Progress in Computational Fluid Dynamics, in press, 2017.

- [55] N. Aravas, *On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models*, International Journal for numerical methods in engineering, Vol. 24, No. 7, pp. 1395-1416, 1987.
- [56] P. A. Allen, *Hydrostatic Stress Effects in low cycle fatigue*, Phd Thesis, Tennessee Technology University, USA, 2002.
- [57] Z. L. Zhang, *Explicit consistent tangent moduli with return mapping algorithm for pressure-dependent elastoplasticity models*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 121, No. 1-4, pp. 29-44, 1995.
- [58] K. Banas and J. Badur, *Influence of strength differential effect on material effort of a turbine guide vane based on thermoelastoplastic analysis*, Journal of Thermal Stresses, Vol. 40, No. 11, pp. 1368-1385, 2017.
- [59] K. Banas and J. Badur, *On an approach to the thermo-elasto-plastic failure based on the Burzyński criterion*, Transactions of the Institute of Fluid-Flow Machinery, Vol. 136, pp. 56-68, 2017.
- [60] J. C. Han, S. Dutta and S. Ekkad, *Gas Turbine Heat Transfer and Cooling Technology*, CRC Press, Boca Raton, Florida, 2012.
- [61] Wadley Research Group Notes, *High Temperature Coatings*, Materials Science and Engineering at the University of Virginia.
<http://www.virginia.edu/ms/research/wadley/high-temp.html>.
- [62] Rolls-Royce, *The Jet Engine*, Technical Publications Department, Rolls-Royce plc, Derby, England, 1996.
- [63] S. Acharya, *The Gas Turbine Handbook: Turbine Blade Aerodynamics*, U.S. DOE Fossil Energy, National Energy Technology Laboratory, 2006.
<https://www.netl.doe.gov/research/coal/energy-systems/turbines/publications/handbook>.
- [64] O. P. Sharma and T. L. Butler, *Predictions of Endwall Losses and Secondary Flows in Axial Flow Turbine Cascades*, Journal of Turbomachinery, Vol. 109, No. 2, pp. 229-236, 1987.
- [65] T. Behr, A. I. Kalfas and R. S. Abhari, *Control of Rotor Tip Leakage Through Cooling Injection From the Casing in a High-Work Turbine*, Journal of Turbomachinery, Vol. 130, No. 3, pp. 031014-12, 2008.
- [66] H. Schlichting and K. Gersten, *Boundary-layer theory, Ninth Edition*, Springer, Berlin, 2016.
- [67] R. B. Langtry, *A Correlation-Based Transition Model using Local Variables for Unstructured Parallelized CFD codes*, Phd Thesis, University of Stuttgart, 2006.
- [68] M. J. P. Hack and T. Zaki, *Bypass transition in three-dimensional time-dependent boundary layers*, Procedia IUTAM, Vol. 14, pp. 274-281, 2015.
- [69] B. Aupoix, D. Arnal, H. Bezard, B. Chaouat, F. Chedevergne, S. Deck, V. Gleize, P. Grenard and E. Laroche, *Transition and Turbulence Modeling*, AerospaceLab, Vol. 2, pp. 1-13, 2011.

- [70] X. Mao, T. Zaki, S. Sherwin and H. Blackburn, *Bypass transition induced by free-stream noise in flow past a blade cascade*, International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery, Hawaii, Honolulu, 2016.
- [71] L. Siconolfi, S. Camarri and J. H. M. Fransson, *Boundary layer stabilization using free-stream vortices*, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 764, pp. R2, 2015.
- [72] T. Zaki, *Receptivity, Instability and Breakdown to Turbulence in Boundary Layers*, SPE-CIAL CEAFM Seminar, Johns Hopkins University, 2012.
<http://pages.jh.edu/~ceafm/weekly-seminar/Fall12/Zaki.html>.
- [73] M. Jahanmiri, *Laminar Separation Bubble: Its Structure, Dynamics and Control*, Internal Report 2011:06, Department of Thermo and Fluid Dynamics, Chalmers University of Technology, Sweden, 2011.
- [74] T. A. Zaki, P. A. Durbin and X. Wu, *Separation and transition to turbulence in a compressor passage*, Proceedings of the Summer Program, pp. 19-33, 2006.
- [75] S. Hosseinvandi and H. F. Fasel, *Laminar-turbulent Transition in a Laminar Separation Bubble in the Presence of Free-stream Turbulence*, Procedia IUTAM, Vol. 14, pp. 570-579, 2015.
- [76] B. G. Newman and M. C. Tse, *Thin Uncambered Aerofoils With a Leading-edge Separation Bubble*, Proceedings of the 10th Australasian Fluid Mechanics Conference, Vol. 1, pp. 8-23, 1989.
- [77] R. E. Walraevens and N. A. Cumpsty, *Leading Edge Separation Bubbles on Turbomachine Blades*, Journal of Turbomachinery, Vol. 117, No. 1, pp. 115-125, 1995.
- [78] H. P. Hodson and R. J. Howell, *The role of transition in high-lift low-pressure turbines for aeroengines*, Progress in Aerospace Sciences, Vol. 41, No. 6, pp. 419-454, 2005.
- [79] K. Gundy-Burlet and D. J. Dorney, *Physics of Airfoil Clocking in Axial Compressors*, ASME 97-GT-444, 1997.
- [80] J. Badur, P. Ziolkowski, D. Ślawiński and S. Kornet, *An referential FSI model for estimation of an combustion chamber degradation*, 12th International Conference on Boiler Technology, Prace Naukowe IMiUE Pol. Śląskiej, Szczyrk, pp. 54-68, 2014.
- [81] D. Ślawiński, *Rozruch maszyn energetycznych z uwzględnieniem sprężysto-plastycznego dostosowania się konstrukcji*, Phd Thesis, Institute of fluid-flow machinery Polish Academy of Sciences, 2016.
- [82] J. Badur, M. Karcz, R. Kucharski, M. Lemański, S. Kowalczyk, A. Wiśniewski and S. Lewandowski, *Numerical modeling of degradation effects in a gas turbine silo-combustion chamber*, Technical, Economic and Environmental Aspects of Combined Cycle power Plants, ed. Z. Domachowski, TU Press, Gdańsk, pp. 135-143, 2004.
- [83] G. Hou, J. Wang and A. Layton, *Numerical Methods for Fluid-Structure Interaction — A Review*, Communications in Computational Physics, Vol. 12, No. 2, pp. 337-377, 2012.
- [84] P. B. Ryzhakov, R. Rossi, S. R. Idelsohn and E. Onate, *A monolithic Lagrangian approach for fluid–structure interaction problems*, Computational Mechanics, Vol. 46, No. 6, pp. 883–899, 2010.

- [85] J. Hron and S. Turek, *A monolithic FEM solver for an ALE formulation of fluid-structure interaction with configuration for numerical benchmarking*, ECCOMAS CFD 2006: Proceedings of the European Conference on Computational Fluid Dynamics, TU Delft, The Netherlands, 2006.
- [86] X. Zeng and G. Scovazzi, *A variational multiscale finite element method for monolithic ALE computations of shock hydrodynamics using nodal elements*, Journal of Computational Physics, Vol. 315, pp. 577-608, 2016.
- [87] M. Souli, A. Ouahsine and L. Lewin, *ALE formulation for fluid-structure interaction problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 190, No. 5-7, pp. 659-675, 2000.
- [88] T. Richter. *A Fully Eulerian Formulation for Fluid-Structure-Interaction Problems*, Journal of Computational Physics, Vol. 233, pp. 227-240, 2013.
- [89] C. Hesch, A. J. Gil, A. Arranz Carreno and J. Bonet, *On continuum immersed strategies for Fluid-Structure Interaction*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 247–248, pp. 51-64, 2012.
- [90] F. Sotiropoulos and X. Yang, *Immersed boundary methods for simulating fluid-structure interaction*, Progress in Aerospace Sciences, Vol. 65, pp. 1-21, 2014.
- [91] J. Badur and D. J. Jackson, *Uwagi o Sub-mechanice wszechświata Osborne'a Reynoldsa*, Transactions of the Institute of Fluid-Flow Machinery, Vol. 99, pp. 127-150, 1995.
- [92] G. G. Stokes, *On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids*, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 8, pp. 287-319, 1845.
- [93] J. Blazek, *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*, Third Edition, Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 2015.
- [94] P. Sagaut, S. Deck and M. Terracol, *Multiscale and Multiresolution Approaches in Turbulence LES, DES and Hybrid RANS/LES Methods: Applications and Guidelines*, Imperial College Press, London, 2013.
- [95] R. H. Nichols, *Turbulence Models and Their Application to Complex Flows*, University of Alabama at Birmingham, 2010.
- [96] J. Smagorinsky, *General Circulation Experiments with the Primitive Equations*, Monthly Weather Review, Vol. 91, No. 3, pp. 99-164, 1963.
- [97] O. Reynolds, *On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, Vol. 186, pp. 123-164, 1895.
- [98] M. V. Morkovin, *Effects of compressibility on turbulent flow*, The mechanics of turbulence, edited by A. Favre, pp. 367, 1961.
- [99] G. Biswas and V. Eswaran, *Turbulent Flows: Fundamentals, Experiments and Modeling*, CRC Press, Boca Raton, Florida, 2002.

- [100] M. S. Shadloo, A. Hadjadj and F. Hussain, *Statistical behavior of supersonic turbulent boundary layers with heat transfer at $M_\infty = 2$* , International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 53, pp. 113-134, 2015.
- [101] L. W. Chen, C. Y. Xu and X. Y. Lu, *Numerical Investigation of Shock Wave and Turbulent Boundary layer interaction on an airfoil*, Sixth International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena, Seoul, Korea, 22-24 June 2009.
- [102] A. Favre, *Equations des gaz turbulents compressibles, part 1: formes générales*, Journal de Mecanique, Vol. 4, pp. 361-390, 1965.
- [103] A. Favre, *Equations des gaz turbulents compressibles, part 2: méthode des vitesses moyennes; methode des vitesses moyennes pondérées par la masse volumique*, Journal de Mecanique, Vol. 4, pp. 391-421, 1965.
- [104] M. W. Rubesin, *Extra compressibility terms for Favre-averaged two-equation models of inhomogeneous turbulent flows*, NASA Technical Report No.: NASA-CR-177556, 1990.
- [105] V. Adumitroaie, J. R. Ristorcelli and D. B. Taulbee, *Progress in Favré-Reynolds stress closures for compressible flows*, Physics of Fluids, Vol. 11, No. 9, pp. 2696-2719, 1999.
- [106] CFD-Wiki, www.cfd-online.com/Wiki/Favre_averaged_Navier-Stokes_equations.
- [107] Turbulence Modeling Resource, Langley Research Center,
<https://turbmodels.larc.nasa.gov/implementrans.html>.
- [108] J. Boussinesq, *Essai sur la théorie des eaux courantes*, Imprimerie Nationale, Paris, 1877.
- [109] J. Boussinesq, *Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section*, Gauthier-Villars et fils, Paris, 1897.
- [110] L. Prandtl, *Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 5, pp. 136-139, 1925.
- [111] W. P. Jones and B. E. Launder, *The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 15, No. 2, pp. 301-314, 1972.
- [112] S. Sarkar, *Modeling the pressure-dilatation correlation*, NASA Technical Report No.: NASA-CR-187566, 1991.
- [113] S. Sarkar and L. Balakrishnan, *Application of a Reynolds-Stress Turbulence Model to the Compressible Shear Layer*, AIAA Journal, Vol. 29, No. 5, pp. 743-749, 1991.
- [114] D. C. Wilcox, *Reassessment of the Scale-Determining Equation for Advanced Turbulence Models*, AIAA Journal, Vol. 26, No. 11, pp. 1299-1310, 1988.
- [115] D. C. Wilcox, *Turbulence Modeling for CFD, 1st edition*, DCW Industries, Inc., La Canada CA, 1993.
- [116] F. R. Menter, *Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications*, AIAA Journal, Vol. 32, No. 8, pp. 1598-1605, 1994.

- [117] F. R. Menter, *Influence of Freestream Values on $k - \omega$ Turbulence Model Predictions*, AIAA Journal, Vol. 30, No. 6, pp. 1657-1659, 1992.
- [118] J. Bredberg, *On Two-equation Eddy-Viscosity Models*, Internal Report 01/8, Department of Thermo and Fluid Dynamics, Chalmers University of Technology, Sweden, 2001.
- [119] F. R. Menter, M. Kuntz and R. Langtry, *Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model*, Proceedings of the 4th International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer, Begell House Inc., West Redding, pp. 625 - 632, 2003.
- [120] P. Durbin, *Near-wall turbulence closure modeling without “damping functions”*, Theoretical and Computational Fluid Dynamics, Vol. 3, No. 1, pp. 1-13, 1991.
- [121] F. Billard and D. Laurence, *A robust $k - \epsilon - v^2/k$ elliptic blending turbulence model applied to near-wall, separated and buoyant flows*, International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 33, No. 1, pp. 45-58, 2012.
- [122] H. Khelifi and T. Lili, *A Reynolds Stress Closure for Compressible Turbulent Flow*, Journal of Applied Fluid Mechanics, Vol. 4, No. 2, pp. 99-104, 2011.
- [123] S. Kubacki, *Turbulence Modelling (CFD course)*, Faculty of Power and Aeronautical Engineering, Warsaw University of Technology, 2016.
- [124] S. Fu, B. E. Launder and M. A. Leschziner, *Modeling Strongly Swirling Recirculating Jet Flow with Reynolds-Stress Transport Closures*, In Sixth Symposium on Turbulent Shear Flows, Toulouse, France, 1987.
- [125] M. M. Gibson and B. E. Launder, *Ground Effects on Pressure Fluctuations in the Atmospheric Boundary Layer*, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 86, No. 3, pp. 491-511, 1978.
- [126] B. E. Launder, *Second-Moment Closure and Its Use in Modeling Turbulent Industrial Flows*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 9, No. 8, pp. 963–985, 1989.
- [127] B. E. Launder, *Second-Moment Closure: Present... and Future?*, International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 10, No. 4, pp. 282-300, 1989.
- [128] K. Karaśkiewicz, *Modelling turbulent flows in hydraulic machinery. Reynolds Stress Model*, Journal of Power Technologies, Vol. 89/90, pp. 3-13, 2004.
- [129] B. J. Daly and F. H. Harlow, *Transport Equations in Turbulence*, Physics of Fluids, Vol. 13, pp. 2634-2649, 1970.
- [130] F. S. Lien and M. A. Leschziner, *Assessment of turbulence-transport models including non-linear RNG eddy-viscosity formulation and second-moment closure for flow over a backward-facing step*, Computers and Fluids, Vol. 23, No. 8, pp. 983-1004, 1994.
- [131] T. B. Gatski and T. Jongen, *Nonlinear eddy viscosity and algebraic stress models for solving complex turbulent flows*, Progress in Aerospace Sciences, Vol. 36, No. 8, pp. 655-682, 2000.
- [132] W. Rodi, *The prediction of free turbulent boundary layers by use of a two-equation model of turbulence*, PhD Thesis, University of London, 1972.

- [133] W. Rodi, *A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses*, Gesellschaft Angewandte Mathematic und Mechanik Workshop, Paris, France, Vol. 56, pp. 219-221, 1976.
- [134] S. B. Pope, *A more general effective viscosity hypothesis*, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 72, pp. 331-340, 1975.
- [135] T. B. Gatski and C. G. Speziale, *On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows*, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 254, pp. 59-78, 1999.
- [136] F. R. Menter, A. V. Garbaruk and Y. Egorov, *Explicit algebraic Reynolds stress models for anisotropic wall-bounded flows*, Progress in Flight Physics, Vol. 3, pp. 89-104, 2012.
- [137] C. A. Gomez and S. S. Girimaji, *Explicit algebraic Reynolds stress model (EARSM) for compressible shear flows*, Theoretical and Computational Fluid Dynamics, Vol. 28, No. 2, pp. 171–196, 2014.
- [138] ANSYS Documentation.
- [139] J. Bredberg, *On the Wall Boundary Condition for Turbulence Models*, Internal Report 00/4, Department of Thermo and Fluid Dynamics, Chalmers University of Technology, Sweden, 2000.
- [140] C. Bailly and G. Comte-Bellot, *Turbulence*, Springer International Publishing, Switzerland, 2015.
- [141] A. G. Gungor, Y. Maciel, M. P. Simens and J. Soria, *Analysis of a turbulent boundary layer subjected to a strong adverse pressure gradient*, Journal of Physics: Conference Series, Vol. 506, No. 1, pp. 012007, 2014.
- [142] R. P. Lillard, A. B. Oliver, M. E. Olsen, G. A. Blaisdell and A. S. Lyrintzis, *The lagRST Model: a Turbulence Model for Non-Equilibrium Flows*, AIAA Paper, Vol. 444, 2012.
- [143] B. E. Launder and D. B. Spalding, *The numerical computation of turbulent flows*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 3, No. 2, pp. 269-289, 1974.
- [144] D. C. Wilcox, *Comparison of Two-Equation Turbulence Models for Boundary Layers with Pressure Gradient*, AIAA Journal, Vol. 31, No. 8, pp. 1414-1421, 1993.
- [145] P. A. Durbin, *A Reynolds stress model for near-wall turbulence*, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 249, pp. 465-498, 1993.
- [146] T. L. Chambers and D. C. Wilcox, *Critical Examination of Two-Equation Turbulence Closure Models for Boundary Layers*, AIAA Journal, Vol. 15, No. 6, pp. 821-828, 1977.
- [147] V. C. Patel, W. Rodi and Georg Scheure, *Turbulence Models for Near-Wall and Low Reynolds Number Flows: A Review*, AIAA Journal, Vol. 23, No. 9, pp. 1308-1319, 1985.
- [148] B. E. Launder, *Progress in the Modeling of Turbulent Transport*, Lecture Series, Vol. 76, von Karman Institute, Brussels, Belgium, 1975.
- [149] H. C. Chen and V. C. Patel, *Near-Wall Turbulence Models for Complex Flows Including Separation*, AIAA Journal, Vol. 26, No. 6, pp. 641-648, 1988.

- [150] M. Wolfshtein, *The velocity and temperature distribution in one-dimensional flow with turbulence augmentation and pressure gradient*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 12, No. 3, pp. 301-318, 1969.
- [151] L. Davidson and B. Farhanieh, *A Finite-Volume Code Employing Collocated Variable Arrangement and Cartesian Velocity Components for Computation of Fluid Flow and Heat Transfer in Complex Three-Dimensional Geometries*, Internal Report 95/11, Department of Thermo and Fluid Dynamics, Chalmers University of Technology, Sweden, 1995.
- [152] S. Pattijn, *Non-linear, low-Reynolds two-equation turbulence models*, Ph.D. Thesis, Ghent University, Belgium, 1999.
http://www.fem.unicamp.br/~phoenics/SITE_PHOENICS/Apostilas/PHD_Tesis_S.%20Pattijn/Chapters/chapter04.pdf.
- [153] M. Monticelli, *Generalized Wall Functions for RANS Computation of Turbulent Flows*, M.Sc. Thesis, University in Milan, Italy, 2011.
- [154] S. E. Kim and D. Choudhury, *A Near-Wall Treatment Using Wall Functions Sensitized to Pressure Gradient*, ASME FED, Vol. 217, pp. 273-280, 1995.
- [155] CFD-Wiki - Y plus wall distance estimation, https://www.cfd-online.com/Wiki/Y_plus_wall_distance_estimation.
- [156] J. Wissink and W. Rodi, *DNS of a Laminar Separation Bubble in the Presence of Oscillating External Flow*, Flow, Turbulence and Combustion, Vol. 71, No. 1–4, pp. 311–331, 2003.
- [157] V. Michelassi, J. Wissink and W. Rodi, *Analysis of DNS and LES of Flow in a Low Pressure Turbine Cascade with Incoming Wakes and Comparison with Experiments*, Flow, Turbulence and Combustion, Vol. 69, No. 3-4, pp. 295–329, 2002.
- [158] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin and W. H. Cabot, *A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model*, Physics of Fluids A: Fluid Dynamics, Vol. 3, No. 7, pp. 1760-1765, 1991.
- [159] F. Cadieux, J. A. Domaradzki, T. Sayadi, S. Bose and F. Duchaine, *DNS and LES of separated flows at moderate Reynolds numbers*, Proceedings of the 2012 Summer Program, Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford University, Stanford, CA, pp. 77-86, 2012.
- [160] V. Michelassi, J. G. Wissink, J. Frohlich and W. Rodi, *Large Eddy Simulation of Flow around a Turbine Blade with Incoming Wakes*, AIAA journal, Vol. 41, No. 11, pp. 2143-2156, 2003.
- [161] A. M. O. Smith and N. Gamberoni, *Transition, Pressure Gradient and Stability Theory*, Rept. ES 26388, Douglas Aircraft Co., El Segundo, California, 1956.
- [162] J. L. van Ingen, *A Suggested Semi-empirical Method for the Calculation of the Boundary Layer Transition Region*, Report VTH-74, Delft University of Technology, 1956.
- [163] C. L. Rumsey, B. A. Pettersson Reif and T. B. Gatski, *Arbitrary steady-state solutions with the K- Epsilon model*, AIAA Journal, Vol. 44, No. 7, pp. 1586–1592, 2006.

- [164] C. L. Rumsey, *Apparent transition behavior of widely-used turbulence models*, International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 28, No. 6, pp. 1460–1471, 2007.
- [165] R. Pecnik, P. Pieringer and W. Sanz, *Numerical investigation of the secondary flow of a transonic turbine stage using various turbulence closures*, ASME Turbo Expo 2005: Power for Land, Sea, and Air, Vol. 6, pp. 1185-1193, 2005.
- [166] R. B. Langtry and F. R. Menter, *Correlation-Based Transition Modeling for Unstructured Parallelized Computational Fluid Dynamics Codes*, AIAA Journal, Vol. 47, No. 12, pp. 2894-2906, 2009.
- [167] F. R. Menter, T. Esch and S. Kubacki, *Transition modelling based on local variables*, In: 5th International Symposium on Turbulence Modeling and Measurements, Mallorca, Spain, 2002.
- [168] F. R. Menter, R. B. Langtry, S. R. Likki, Y. B. Suzen, P. G. Huang and S. Völker, *A Correlation-Based Transition Model Using Local Variables—Part I: Model Formulation*, Journal of Turbomachinery, Vol. 128, No. 3, pp. 413-422, 2004.
- [169] F. R. Menter, P. E. Smirnov, T. Liu and R. Avancha, *A One-Equation Local Correlation-Based Transition Model*, Flow, Turbulence and Combustion, Vol. 95, No. 4, pp. 583–619, 2015.
- [170] P. Durbin, *An intermittency model for bypass transition*, International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 36, pp. 1-6, 2012.
- [171] X. Ge, S. Arolla and P. Durbin, *A Bypass Transition Model Based on the Intermittency Function*, Flow, Turbulence and Combustion, Vol. 93, No. 1, pp. 37–61, 2014.
- [172] R. E. Mayle, *The role of laminar-turbulent transition in gas turbine engines*, Journal of Turbomachinery, Vol. 113, No. 4, pp. 509–537, 1991.
- [173] B. J. Abu-Ghannam and R. Shaw, *Natural transition of boundary layers—The effects of turbulence, pressure gradient, and flow history*, Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 22, No. 5, pp. 213–228, 1980.
- [174] Y. B. Suzen, P. G. Huang, L. S. Hultgren and D. E. Ashpis, *Predictions of separated and transitional boundary layers under low-pressure turbine airfoil conditions using an intermittency transport equation*, Journal of Turbomachinery, Vol. 125, No. 3, pp. 455–464, 2003.
- [175] H. W. Emmons, *The laminar-turbulent transition in a boundary layer - Part I*, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 18, pp. 490-498, 1951.
- [176] R. Narasimha, *On the distribution of intermittency in the transition region of a boundary layer*, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 24, pp. 711–712, 1957.
- [177] J. Steelant and E. Dick, *Modelling of bypass transition with conditioned Navier-Stokes equations coupled to an intermittency transport equation*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 23, No. 3, pp. 193–220, 1996.
- [178] R. E. Mayle and A. Schulz, *The Path to Predicting Bypass Transition*, Journal of Turbomachinery, Vol. 119, pp. 405-411, 1997.

- [179] D. K. Walters and D. Cokljat, *A Three-Equation Eddy-Viscosity Model for Reynolds-Averaged Navier–Stokes Simulations of Transitional Flow*, Journal of Fluids Engineering, Vol. 130, No. 12, pp. 121401, 2008.
- [180] S. Lardeau, N. Li and M. A. Leschziner, *Large eddy simulation of transitional boundary layers at high free-stream turbulence intensity and implications for RANS modeling*, Journal of Turbomachinery, Vol. 129, No. 2, pp. 311–317, 2007.
- [181] C. Turner, *"Laminar Kinetic Energy" and its Potential for Improving Transition Prediction*, Technical Report, University of Manchester, 2008.
- [182] D. K. Walters and J. H. Leylek, *A new model for boundary layer transition using a single-point RANS approach*, Journal of Turbomachinery, Vol. 126, No. 1, pp. 193–202, 2004.
- [183] J. Nikuradse, *Laws of flow in rough pipes*, NACA Technical Memorandum 1292, 1937.
- [184] C. F. Colebrook, *Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transitional region between smooth and rough wall laws*, Journal of the Institution of Civil Engineers, Vol 11, No. 4, pp. 133–156, 1939.
- [185] L. F. Moody, *Friction factors for pipe flow*, Transactions of the ASME, Vol. 66, No. 8, pp. 671–684, 1944.
- [186] T. Adams, C. Grant and H. Watson, *A Simple Algorithm to Relate Measured Surface Roughness to Equivalent Sand-grain Roughness*, International Journal of Mechanical Engineering and Mechatronics, Vol. 1, No. 1, pp. 66-71, 2012.
- [187] T. Cebeci and P. Bradshaw, *Momentum Transfer in Boundary Layers*, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1977.
- [188] T. Cebeci and J. Cousteix, *Modeling and Computation of Boundary-Layer Flows*, Horizons Publishing Inc., Long Beach, California, 2005.
- [189] B. Aupoix, *Wall Roughness Modelling with $k - \omega$ SST Model*, in 10th International ERCOFTAC Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements, Spain, 2014.
- [190] A. Hellsten and S. Laine, *Extension of the $k - \omega$ shear-stress transport turbulence model for rough-wall flows*, AIAA Journal, Vol. 36, pp. 1728-1729, 1998.
- [191] J. Tu, G.-H. Yeoh and C. Liu, *Computational Fluid Dynamics, A Practical Approach*, Elsevier Ltd., 2012.
- [192] F. Moukalled, L. Mangani and M. Darwish, *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics: An Advanced Introduction with OpenFOAM and Matlab*, Springer International Publishing AG Switzerland, 2015.
- [193] H. K. Versteeg and W. Malalasekera, *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*, Pearson Education Limited, England, 2007.
- [194] A. Bakker, *Applied Computational Fluid Dynamics*, Lecture notes at Dartmouth College, USA, 2006.

- [195] R. J. Asaro and V. A. Lubarda, *Mechanics of Solids and Materials*, Cambridge University Press, New York, pp. 55-91, 2006.
- [196] H. Hencky, *Über die form des elastizitätsgesetzes bei ideal elastischen stoffen*, Zeitschrift fur Technische Physik, Vol. 9, pp. 214–247, 1928.
- [197] V. A. Lubarda, *Elastoplasticity Theory*, CRC Press, 2002.
- [198] M. Hanin and M. Reiner, *On isotropic tensor-functions and the measure of deformation*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP, Vol. 7, No. 5, pp. 377–393, 1956.
- [199] A. D. Freed, *Natural strain*, Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 117, No. 4, pp. 379–385, 1995.
- [200] A. Tarantola, *Stress and strain in symmetric and asymmetric elasticity*, available at arXiv:0907.1833, 2009.
- [201] P. Neff, B. Eidel and R. J. Martin, *Geometry of logarithmic strain measures in solid mechanics*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 222, No. 2, pp. 507-572, 2016.
- [202] Z. P. Bažant, M. Gattu and J. Vorel, *Work conjugacy error in commercial finite-element codes: its magnitude and how to compensate for it*, Proceedings of the Royal Society A, Vol. 468, pp. 3047–3058, 2012.
- [203] H. B. Callen, *Thermodynamics and Introduction to Thermostatistics*, 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1985.
- [204] E. W. V. Chaves, *Notes on Continuum Mechanics (Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences)*, Springer, Netherlands, 2013
- [205] R. Hill, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press, 1998.
- [206] H. Hencky, *Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Vol. 4, No. 4, pp. 323-334, 1924.
- [207] A. A. Ilyushin, *Theory of plasticity at simple loading of the bodies exhibiting plastic hardening*, Prikladnaya Matematika i Mekhanika, Vol. 11, pp. 291-296, (in Russian) 1947.
- [208] A. A. Ilyushin, *Plasticity. Foundations of the General Mathematical Theory*, Academy of Sciences of the USSR, Moscow, (in Russian) 1963.
- [209] B. Budiansky, *A reassessment of deformation theories of plasticity*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 26, pp. 259-264, 1959.
- [210] L. M. Kachanov, *Foundations of Theory of Plasticity*, North-Holland, Amsterdam, 1971.
- [211] R. S. Hanson, *Solutions of two plasticity problems by the deformation and incremental theories*, Phd thesis, Iowa State University, 1958.
- [212] R. Hill, *Aspects of in variance in solid mechanics*, Advances in Applied Mechanics, Vol. 18, pp. 1-75, 1978.

- [213] K. S. Havner, *Finite Plastic Deformation of Crystal line Solids*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [214] J. F. Bell, *The physics of large deformation of crystalline solids*, Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. 14, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 1968.
- [215] V. A. Lubarda, *Deformation theory of plasticity revisited*, Proceeding of Montenegrin Academy Science and Art, Vol. 13, pp. 117–143, 2000.
- [216] T. Frąś and R. B. Pečcherski, *Application of the Burzyński hypothesis of material effort for isotropic solids*, Mechanics and Control, Vol. 29, No. 2, pp. 45–50, 2010.
- [217] R. von Mises, *Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, Vol. 1, pp. 582–592, 1913.
- [218] M. Huber, *Specific work of strain as a measure of material effort*, Proceedings of Lwów Polytechnic Society, 1903.
- [219] M. Zyczkowski, *Discontinuous bifurcations in the case of the Burzynski–Torre yield condition*, Acta Mechanica, Vol. 132, No. 1, pp. 19–35, 1999.
- [220] C. Torre, *Grenzbedingungen für spröden Bruch und plastisches Verhältnis bildsamer*, Metall. Ing. Archiv., Vol. 4, pp. 174–189, 1950.
- [221] B. de Saint-Venant, *Sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, Vol. 70, pp. 473–480, 1870.
- [222] M. Levy, *Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, Vol. 70, pp. 1323–1325, 1870.
- [223] L. Prandtl, *Spannungsverteilung in plastischen Körpern*, Proceedings of the 1st International Congress on Applied Mechanics, Delft, pp. 43–54, 1924.
- [224] A. Reuss, *Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 10, No. 3, pp. 266–274, (in German) 1930.
- [225] R. von Mises, *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 8, No. 3, pp. 161–185 (in German) 1928.
- [226] A. S. Khan and S. Huang, *Continuum Theory of Plasticity*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.
- [227] J. Chakrabarty, *Theory of Plasticity, 3rd Edition*, Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 2006.
- [228] G. P. Nikishkov, *Programming Finite Elements in Java*, Springer, London, 2010.
- [229] P. Dechaumphai and E. A. Thornton, *Improved Finite Element Methodology for Integrated Thermal Structural Analysis*, NASA Contractor Report 3635, 1982.

- [230] C. Felippa, *Introduction to Finite Element Methods*, Department of Aerospace Engineering Sciences University of Colorado at Boulder.
- [231] K. J. Bathe, E. Ramm and E. L. Wilson, *Finite element formulations for large deformation dynamic analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 9, No. 2, pp. 353–386, 1975.
- [232] R. M. McMeeking and J. R. Rice, *Finite-Element formulations for problems of large elastic-plastic deformation*, International Journal of Solids and Structures, Vol. 11, No. 5, pp. 601-616, 1975.
- [233] S. Yaghmai, *Incremental analysis of large deformations in mechanics of solids with applications to axisymmetric shells of revolution*, Report No. SESM 69-17, University of California, Berkeley, 1968.
- [234] R. P. R. Cardoso and J. W. Yoon, *Stress integration method for a nonlinear kinematic/isotropic hardening model and its characterization based on polycrystal plasticity*, International Journal of Plasticity, Vol. 25, No. 9, pp. 1684–1710, 2009.
- [235] C. Johansson, *Optimization of wall parameters using CFD*, Master Thesis, Royal Institute of Technology, 2014.
- [236] J. Zeng and X. J. Qing, *Conjugate flow and heat transfer investigation of a turbine cascade*, Journal of Aerospace Power, Vol. 24, No. 6, pp. 1204-1210, 2009.
- [237] Z. F. Wang, P. G. Yan, H. F. Tang, H. Y. Huang and W. J. Han, *Study of inner-cooling channel's heat transfer coefficient criteria formula of a high pressure air-cooled turbine*, Journal of Engineering Thermophysics, Vol. 31, No. 2, pp. 247-250, 2010.
- [238] Nickel Development Institute, *High-temperature characteristics of stainless steels*, A Designers handbook series, No 9004, American Iron and Steel Institute.
- [239] R. S. Brokaw, *Viscosity of gas mixtures*, NASA Technical note, TN, D-4496, 1968.
- [240] A. Ghajar, C. C. Tang and G. L. Foutch, *Comparison of near-wall treatment methods for high Reynolds number backward-facing step flow*, International Journal of Computational Fluid Dynamics, Vol. 19, No. 7, pp. 493–500, 2005.
- [241] R. B. Pecherski, P. Szeptynski and M. Nowak, *An extension of Burzyński hypothesis of material effort accounting for the third invariant of shear tensor*, Archives of metallurgy and materials, Vol. 56, No. 2, pp. 503-508, 2011.
- [242] M. Nowak, J. Ostrowska-Maciejewska, R. B. Pecherski and P. Szeptynski, *Yield criterion accounting for the third invariant of stress tensor deviator. Part I. Proposition of the yield criterion based on the concept of influence functions*, Engineering Transactions (Rozprawy Inżynierskie), Vol. 59, No. 4, pp. 273-281, 2011.
- [243] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *Finite Element Method - Solid Mechanics*, Elsevier, 2000.

Appendices

Dodatek A

Sprężystość - wiadomości podstawowe

A.0.1 Niezmienne tensora naprężeń

Wielkości I_1, I_2, I_3 nie zależą od wyboru układu współrzędnych, z tego względu nazywane są niezmiennikami tensora naprężenia:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ii} \quad , \quad (\text{A.0.1})$$

$$I_2 = \det \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\sigma_{rr}\sigma_{kk} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}) \quad , \quad (\text{A.0.2})$$

$$I_3 = \det \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = I_1 I_2 - \frac{1}{2}(I_1^3 - \sigma_{ij}\sigma_{ip}\sigma_{jp}) \quad . \quad (\text{A.0.3})$$

Niezmienniki dewiatora naprężenia s_{ij} (Rów. 5.1.3) możemy zapisać w analogicznej formie jak dla tensora naprężenia (Rów. A.0.1, A.0.2, A.0.3), mianowicie:

$$I_1^D = s_{ii} = 0 \quad , \quad (\text{A.0.4})$$

$$I_2^D = \frac{1}{2}(s_{rr}s_{kk} - s_{ij}s_{ij}) = -\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} \quad , \quad (\text{A.0.5})$$

$$I_3^D = I_1^D I_2^D - \frac{1}{2}((I_1^D)^3 - s_{ij}s_{ip}s_{jp}) = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ip}s_{jp} \quad . \quad (\text{A.0.6})$$

Każda funkcja operująca na niezmiennikach jest również niezmiennikiem, więc często niezmienniki dewiatora naprężeń podaje się w postaci bardziej użytecznej w zastosowaniach [243]:

$$J_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} \quad , \quad (\text{A.0.7})$$

$$J_3 = \frac{1}{3}s_{ij}s_{jk}s_{ki} \quad . \quad (\text{A.0.8})$$

A.0.2 Energia odkształcenia liniowo sprężystego

Przyrost energii wewnętrznej odkształcenia sprężystego, podczas quasi-statycznego obciążania można wyrazić za pomocą zależności:

$$\delta U = \int_V \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV . \quad (\text{A.0.9})$$

Następnie relację na całkowitą energię odkształcenia sprężystego obciążonego ciała można uzyskać korzystając dodatkowo z zależności konstytutywnej (Rów. 5.1.16):

$$\begin{aligned} U &= \int_V \left[\int_0^e \sigma_{ij} de_{ij} \right] dV = \int_V \left[\int_0^e E_{ijkl}^{el} e_{kl} de_{ij} \right] dV = \int_V \left[\int_0^e E_{ijkl}^{el} e_{kl} de_{ij} \right] dV = \\ &= \int_V \frac{1}{2} E_{ijkl}^{el} e_{kl} e_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} e_{ij} dV . \end{aligned} \quad (\text{A.0.10})$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV . \quad (\text{A.0.11})$$

Gęstość energii odkształcenia sprężystego (energia przypadająca na jednostkę objętości) wyrażamy wzorem:

$$u = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} . \quad (\text{A.0.12})$$

Gęstość energii odkształcenia możemy przedstawić jako sumę energii aksjatorów i dewiatów. Według równania 5.1.3 tensor naprężenia możemy przedstawić w postaci sumy aksjatora i dewiatora:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^A + s_{ij} = \left(\frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) + \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) . \quad (\text{A.0.13})$$

Analogicznie możemy przedstawić tensor odkształcenia:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^A + \epsilon_{ij}^D = \left(\frac{1}{3} \delta_{ij} \epsilon_{kk} \right) + \left(\epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \epsilon_{kk} \right) . \quad (\text{A.0.14})$$

Podstawiając równania A.0.13, A.0.14 do zależności A.0.12 otrzymamy:

$$u = \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij}^A + s_{ij} \right) \left(\epsilon_{ij}^A + \epsilon_{ij}^D \right) = \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij}^A \epsilon_{ij}^A + \sigma_{ij}^A \epsilon_{ij}^D + s_{ij} \epsilon_{ij}^A + s_{ij} \epsilon_{ij}^D \right) . \quad (\text{A.0.15})$$

Zauważmy, że korzystając z $\delta_{ij} \epsilon_{ij} = \epsilon_{ll}$ oraz $\delta_{ij} \delta_{ij} = 3$, możemy zapisać:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^A \epsilon_{ij}^D &= \left(\frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) \left(\epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \epsilon_{ll} \right) = \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \epsilon_{ij} - \frac{1}{9} \delta_{ij} \sigma_{kk} \delta_{ij} \epsilon_{ll} = \\ &= \frac{1}{3} \sigma_{kk} \epsilon_{ll} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \epsilon_{ll} = 0 . \end{aligned} \quad (\text{A.0.16})$$

Analogicznie:

$$s_{ij} \epsilon_{ij}^A = 0 . \quad (\text{A.0.17})$$

A więc korzystając z powyższych faktów, równanie A.0.15 przyjmie postać:

$$u = \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij}^A \epsilon_{ij}^A + s_{ij} \epsilon_{ij}^D \right) = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^A \epsilon_{ij}^A + \frac{1}{2} s_{ij} \epsilon_{ij}^D = u^A + u^D . \quad (\text{A.0.18})$$

Przy użyciu równań fizycznych (Rów. 5.1.19) aksjator odkształcenia możemy zapisać:

$$\epsilon_{ij}^A = \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij} = \frac{1}{3} \left(\frac{1+\nu}{E} \sigma_{kk} - \frac{\nu}{E} \delta_{kk} \sigma_{ll} \right) \delta_{ij} = \frac{1}{3} \left(\frac{1+\nu}{E} \sigma_{kk} - \frac{3\nu}{E} \sigma_{ll} \right) \delta_{ij} = \frac{1-2\nu}{3E} \sigma_{kk} \delta_{ij} . \quad (\text{A.0.19})$$

A więc gęstość energii aksjatorów wyrazimy za pomocą następującego wzoru:

$$u^A = \frac{1}{2}\sigma_{ij}^A\epsilon_{ij}^A = \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}\frac{1-2\nu}{6E}\sigma_{ll}\delta_{ij} = \frac{1-2\nu}{6E}\sigma_{kk}\sigma_{ll} = \frac{1-2\nu}{6E}\sigma_{kk}^2 \quad . \quad (\text{A.0.20})$$

Gęstość energii dewiatorów wyznaczamy w analogiczny sposób:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^D &= \epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^A = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk} - \frac{1-2\nu}{3E}\delta_{ij}\sigma_{kk} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{3\nu+1-2\nu}{3E}\delta_{ij}\sigma_{kk} = \\ &= \frac{1+\nu}{E}\left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}\right) = \frac{1+\nu}{E}s_{ij} = \frac{1}{2G}s_{ij} \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.0.21})$$

A więc:

$$u^D = \frac{1}{2}s_{ij}\epsilon_{ij}^D = \frac{1}{2}s_{ij}\frac{1}{2G}s_{ij} = \frac{1}{4G}s_{ij}s_{ij} \quad . \quad (\text{A.0.22})$$

Gęstość energii dewiatorów możemy zapisać również przy pomocy drugiego niezmiennika dewiatora tensora naprężenia. Podstawiając równanie A.0.7 do zależności A.0.22 otrzymujemy:

$$u^D = \frac{1}{2G}J_2 \quad . \quad (\text{A.0.23})$$

Dodatek B

CFD - podstawowe oznaczenia

Kartezjański układ współrzędnych $x_1x_2x_3$

$a = a(x_1, x_2, x_3)$ - pole skalarne

$\vec{a} = a_i = (a_1, a_2, a_3) = [a_1(x_1, x_2, x_3), a_2(x_1, x_2, x_3), a_3(x_1, x_2, x_3)]$ - pole wektorowe

$\bar{x} = x_{ij}$ - tensor II rzędu

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ - operator Nabla

$\vec{a} \otimes \vec{b} = a_i b_j = c_{ij} = \bar{c}$ - iloczyn diadyczny

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ - iloczyn skalarny

$\nabla a = \text{grad}(a) = \frac{\partial a}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial a}{\partial x_1}, \frac{\partial a}{\partial x_2}, \frac{\partial a}{\partial x_3} \right)$ - gradient z pola skalarnego

$\nabla \vec{a} = \text{grad}(\vec{a}) = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}$ - gradient z pola wektorowego - tensor

$\nabla \cdot \vec{a} = \text{div}(\vec{a}) = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}$ - dywergencja pola wektorowego

$\nabla \cdot \bar{a} = \text{div}(\bar{a}) = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} = c_j$ - dywergencja pola tensorowego

$\bar{a} \cdot \vec{b} = a_{ij} b_j = c_j$ - kontrakcja

$\bar{\tau} : \nabla \vec{a} = \tau_{ij} \frac{\partial a_i}{\partial x_j}$ - skalar

Dodatek C

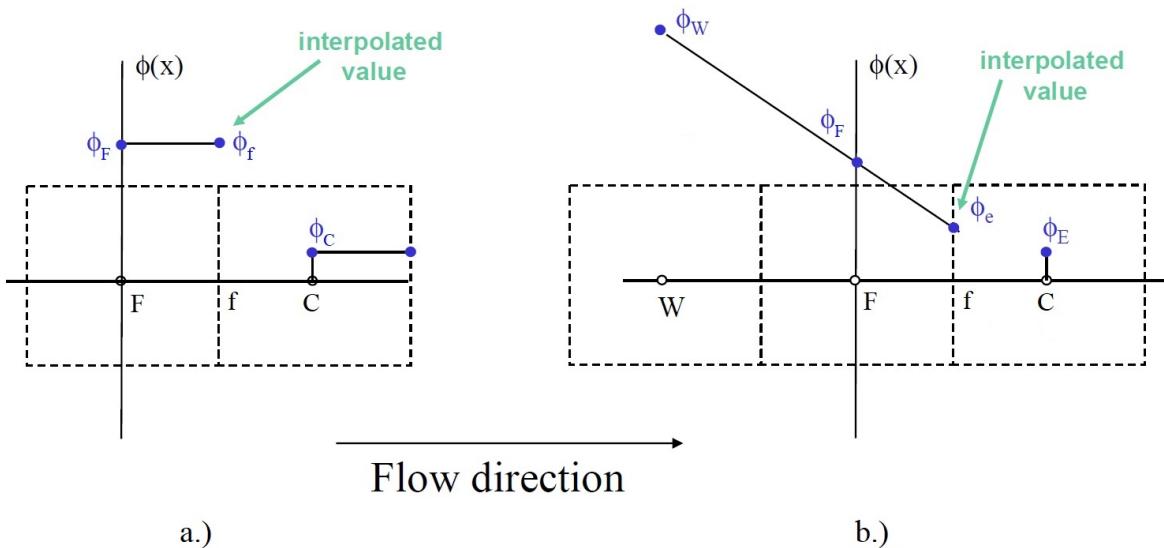
Metoda Objętości skończonych

C.1 Metody interpolacji zmiennych na ściankach objętości kontrolnej

Do dwóch grup najpopularniejszych metod interpolacji wielkości ϕ_f na ściankach f , w celu wyznaczenia strumienia, można zaliczyć metodę "pod wiatr" oraz metodę centralnego ilorazu różnicowego. W zależności od poziomu dokładności wyróżnić można schematy pierwszego, drugiego oraz wyższych rzędów.

C.1.1 Schemat "pod wiatr"

W metodzie "pod wiatr" wartość rozpatrywanej wielkości na ściance jest interpolowana ze środka objętości kontrolnej z kierunku z którego napływa strumień masowy.



Rysunek C.1: Schematyczne przedstawienie schematu "pod wiatr": a.) pierwszego rzędu, b.) drugiego rzędu [194].

- Schemat pierwszego rzędu:

Schemat "pod wiatr" pierwszego rzędu zakłada, że wartość w środku danej objętości reprezentuje wartość w całej objętości kontrolnej, a więc i na jej brzegach. Z tego powodu,

wartość na ściance pomiędzy dwoma sąsiadującymi elementami jest równa wartości ze środka objętości kontrolnej z której napływa przepływ [138]:

$$\phi_f = \phi_{up} . \quad (\text{C.1.1})$$

Schematycznie schemat ten został zaprezentowany na rysunku C.2 a.), gdzie wartość wielkości na brzegu f pomiędzy objętościami Ω_F i Ω_C jest równa wartości ze środka elementu z którego napływa przepływ, a więc $\phi_f = \phi_F$.

- Schemat drugiego rzędu:

Schemat "pod prąd" drugiego rzędu wyznacza wartość danej wielkości ϕ_f na ścianie z zależności [138]:

$$\phi_f = \phi_{up} + (\nabla\phi)_{up} \overrightarrow{r_{up,f}} , \quad (\text{C.1.2})$$

gdzie ϕ_{up} oraz $(\nabla\phi)_{up}$ są wartością oraz gradientem danej wielkości w środku objętości kontrolnej z której napływa przepływ, natomiast $\overrightarrow{r_{up,f}}$ jest wektorem pomiędzy środkiem objętości z której napływa przepływ a ścianką. Metody wyliczania gradientu przedstawiono w rozdziale C.2.1.

Graficznie schemat "pod prąd" drugiego rzędu przedstawiono na rysunku C.2 b.). Można zauważyć, że w celu obliczenia wartości na ścianie ϕ_f wymagany jest udział dwóch objętości, wynika to z faktu konieczności wyliczenia gradientu.

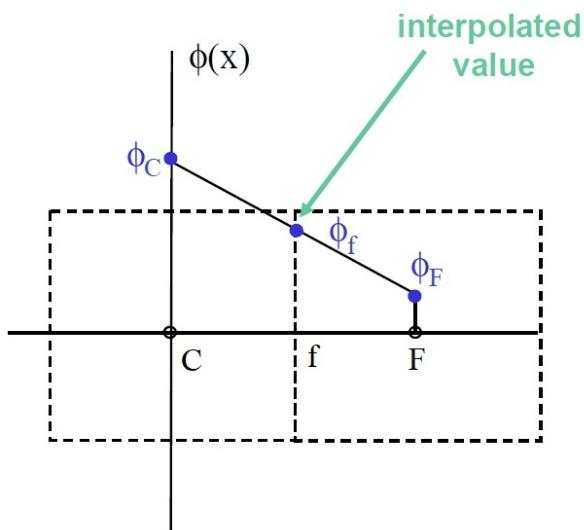
C.1.2 Schemat centralnego ilorazu różnicowego

Schemat centralnego ilorazu różnicowego jest schematem drugiego rzędu, w którym wartość danej wielkości ϕ_f na ścianie wyznaczana jest z zależności [138]:

$$\phi_f = \frac{1}{2} (\phi_0 + \phi_1) + \frac{1}{2} [(\nabla\phi)_0 \overrightarrow{r_{0,f}} + (\nabla\phi)_1 \overrightarrow{r_{1,f}}] , \quad (\text{C.1.3})$$

gdzie indeksy "0" oraz "1" oznaczają sąsiadujące objętości zawierające wspólną ściankę f .

Graficznie schemat centralnego ilorazu różnicowego przedstawiono na rysunku C.2.



Rysunek C.2: Graficzne przedstawienie schematu centralnego ilorazu różnicowego [194].

C.2 Metody interpolacji gradientu

C.2.1 Metody interpolacji gradientu w środku objętości kontrolnej

Do najpopularniejszych metod wyznaczania gradientu danej wielkości ϕ dla środka "C" objętości kontrolnej Ω_C można zaliczyć:

- Metoda Greena-Gaussa bazująca na wartościach z objętości kontrolnych:

Gradient wielkości ϕ w środku "C" objętości kontrolnej wyznaczany jest z zależności [138]:

$$(\nabla\phi)_C = \frac{1}{V_C} \sum_f^{N_{faces}} \bar{\phi}_f \vec{S}_f \quad , \quad (\text{C.2.1})$$

gdzie wartość zmiennej $\bar{\phi}_f$ dla wspólnej ścianki pomiędzy objętościami kontrolnymi " Ω_C " i " Ω_{F_i} " jest wyznaczana ze średniej arytmetycznej [138]:

$$\bar{\phi}_f = \frac{\phi_C + \phi_{F_i}}{2} \quad . \quad (\text{C.2.2})$$

- Metoda Greena-Gaussa bazująca na wartościach węzłowych:

W metodzie tej gradient wyznaczany jest w analogiczny sposób jak w metodzie przedstawionej powyżej (Rów. C.2.1), jednakże wartość zmiennej $\bar{\phi}_f$ na ściance szacowana jest przy pomocy średniej arytmetycznej z wartości $\bar{\phi}_n$ z węzłów danej ścianki [138]:

$$\bar{\phi}_f = \frac{1}{N_f} \sum_n^{N_f} \bar{\phi}_n \quad . \quad (\text{C.2.3})$$

Zmienne w węzłach $\bar{\phi}_n$ wyznaczane są ze średniej ważonej z wartości ze środków elementów zawierających dany węzeł.

- Metoda najmniejszych kwadratów bazująca na wartościach z objętości kontrolnych:

W metodzie tej gradient pomiędzy rozpatrywaną Ω_C i sąsiadującą z nią Ω_{F_i} objętością kontrolną wyznaczany jest z zależności [138]:

$$(\nabla\phi)_{C,F_i} \cdot \vec{r}_{C,F_i} = (\phi_{F_i} - \phi_C) \quad . \quad (\text{C.2.4})$$

Uwzględnienie zależności dla wszystkich sąsiadujących objętości, pozwala zbudować zależność: $[J](\nabla\phi)_C = \Delta\phi$, z której gradient $(\nabla\phi)_C$ wyznaczany jest poprzez metodę najmniejszych kwadratów [138].

C.2.2 Metody interpolacji gradientu na brzegu objętości kontrolnej

W celu wyznaczenia dyfuzyjnego strumienia, przy pomocy równania 4.3.6, niezbędna jest znajomość gradientu danej zmiennej na brzegach objętości kontrolnej $(\nabla\phi)_f$. Naturalnym podejściem wydaje się być uśrednienie ważone $(\bar{\nabla}\phi)_f$ gradientów ze środków objętości kontrolnych Ω_C, Ω_F dzielących wspólną ściankę f [192]. Jednakże, poszczególne gradienty $(\nabla\phi)_C, (\nabla\phi)_F$ wyznaczane są ze wszystkich sąsiadujących objętości, więc w przypadku niestrukturalnych, nieortogonalnych siatek wymagana jest korekta wzmacniająca role gradientu bazującego na bezpośrednich wartościach ϕ_C, ϕ_F ze środków objętości dzielących ściankę f . Najczęściej spotykana jest następująca korekta [192]:

$$(\nabla\phi)_f = (\bar{\nabla}\phi)_f + \left[\frac{\phi_F - \phi_C}{r_{CF}} - (\bar{\nabla}\phi)_f \cdot \vec{e}_{CF} \right] \vec{e}_{CF} \quad , \quad (\text{C.2.5})$$

gdzie r_{CF} jest odległością pomiędzy rozpatrywanymi punktami, a $\overrightarrow{e_{CF}} = \frac{\overrightarrow{r_{CF}}}{r_{CF}}$ wektorem jednostkowym.

C.3 Metody podrelaksacji

Podrealaksacja jawną polega na relaksacji przyrostu zmiennych, co można zapisać [138]:

$$(\phi)^{k+1} = (\phi)^k + \alpha \Delta \phi \quad , \quad (\text{C.3.1})$$

gdzie α jest współczynnikiem podrelaksacji.

W metodzie niejawnej, podrelaksacji podlegają całe zdyskretyzowane równania transportu, które, w przypadku niejawnej metody iteracyjnej (Rów. 4.3.8), po sztucznie dodanym i odjętym członie $(\phi_C)^k$ można zapisać jako [192]:

$$(\phi_C)^{k+1} = (\phi_C)^k + \left(\frac{-\sum_{F_i} a_{F_i} (\phi_{F_i})^{k+1} + b_C}{a_C} - (\phi_C)^k \right) \quad , \quad (\text{C.3.2})$$

Wprowadzając współczynnik podrelaksacji członu w nawiasie, po przekształceniach możemy zapisać [192]:

$$\frac{a_C (\phi_C)^{k+1}}{\alpha} = -\sum_{F_i} a_{F_i} (\phi_{F_i})^{k+1} + b_C + \frac{1-\alpha}{\alpha} a_C (\phi_C)^k \quad , \quad (\text{C.3.3})$$

gdzie współczynnik $\frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{1}{CLF}$ można zapisać przy pomocy tzw. liczby Couranta.

Dodatek D

Metoda Elementów skończonych

D.1 MES - podstawowe oznaczenia

W metodzie elementów skończonych posługujemy się zapisem, macierzowym. Z tego względu, że zakładamy symetrię tensora naprężeń oraz odkształceń możemy zapisać:

- Wektor naprężenia:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} . \quad (\text{D.1.1})$$

- Wektor odkształcenia - w MES posługujemy się wektorem odkształceń inżynierskich:

$$[e] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \end{bmatrix} . \quad (\text{D.1.2})$$

- Macierz danych materiałowych (materiał izotropowy), występującą w liniowym związkę konstytutywnym:

$$[\mathbf{E}^{el}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} , \quad (\text{D.1.3})$$

gdzie μ, λ są stałymi Lamego:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad , \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} . \quad (\text{D.1.4})$$

A więc, macierzowa postać prawa Hooke'a przyjmie postać:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = [\mathbf{E}^{el}][\boldsymbol{\epsilon}] \quad . \quad (\text{D.1.5})$$

Przemieszczenia do dowolnego punktu elementu są interpolowane za pomocą funkcji kształtu $[\mathbf{N}]$ na postawie przemieszczeń węzłów danego elementu:

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{q}_e\} \quad . \quad (\text{D.1.6})$$

Przykładowo dla elementu 3d:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \\ q_3^1 \\ q_1^2 \\ q_2^2 \\ q_3^2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} , \quad (\text{D.1.7})$$

gdzie N_i oznacza funkcje kształtu "i"-tego węzła, natomiast $\{\mathbf{q}^i\}$ wektor jego przemieszczeń. Liczba kolumn w macierzy $[\mathbf{N}]$ oraz elementów wektora $\{\mathbf{q}_e\}$ zależy od liczby węzłów w elemencie.

Małe odkształcenia $[\boldsymbol{\epsilon}]$ dla dowolnego punktu elementu wyznaczane są na podstawie przemieszczeń węzłowych przy pomocy macierzy $[\mathbf{B}]$ nazywanej macierzą odkształcenia-przemieszczenia:

$$[\boldsymbol{\epsilon}] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\partial}]\{\mathbf{u}\} = [\boldsymbol{\partial}][\mathbf{N}]\{\mathbf{q}_e\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{q}_e\} \quad , \quad (\text{D.1.8})$$

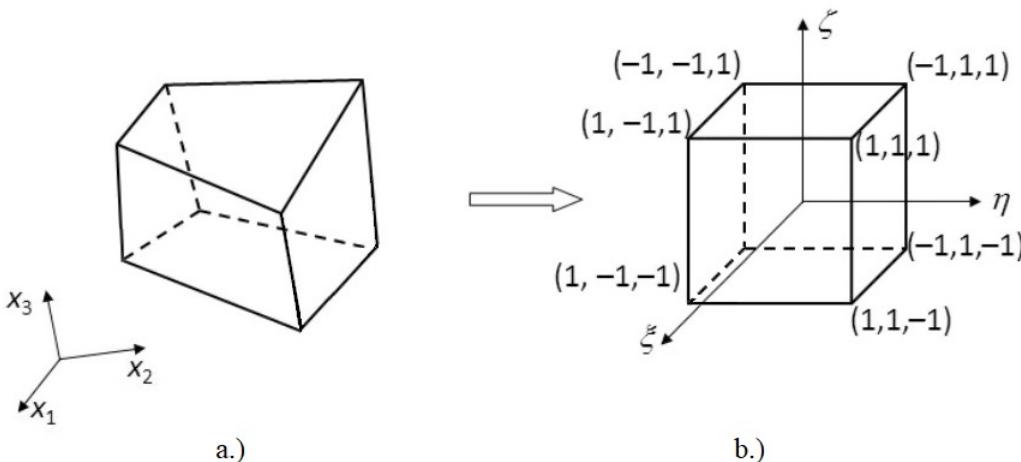
gdzie macierz odkształcenie-przemieszczenie $[\mathbf{B}]$ przedstawia się zależnością:

$$[\mathbf{B}] = [\boldsymbol{\partial}][\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots \end{bmatrix} . \quad (\text{D.1.9})$$

D.2 Element izoparametryczny

Budowa funkcji kształtu opisującej pole przemieszczenia, przy zapewnieniu ciągłości pola przemieszczeń oraz dostatecznie dokładnego jego opisu "dostosowanie elementu" (consistency requirements), w przypadku elementów wyższych rzędów jest bardzo skomplikowana. Co więcej wyznaczanie macierzy sztywności (Rów. 5.2.17) wymaga obliczenia całki, co w przypadku nieregularnego kształtu elementu może być kłopotliwe. W celu pozbicia się powyższych problemów w programach komercyjnych stosuje się koncepcję elementu izoparametrycznego wraz z całkowaniem numerycznym przy pomocy kwadratury Gaussa.

Koncepcja elementu izoparametrycznego polega na wykorzystaniu elementu referencyjnego o znormalizowanych wymiarach w referencyjnym układzie współrzędnych. Rzeczywisty element z układu $\{x_1, x_2, x_3\}$ jest odwzorowywany do referencyjnego układu współrzędnych $\{\xi, \eta, \zeta\}$ w którym przybiera regularny kształt o znormalizowanych wymiarach (Rysunek D.1). Z tego względu układ $\{\xi, \eta, \zeta\}$ jest nazywany układem współrzędnych normalnych.



Rysunek D.1: Ideowe przedstawienie elementu izoparametrycznego: a.) aktualny element, b.) element referencyjny.

W referencyjnym układzie współrzędnych z łatwością możemy wyznaczyć funkcje kształtu przy pomocy wielomianu Lagrange'a, co jest charakterystyczne dla elementu izoparametrycznego, dla którego funkcje kształtu opisują również geometrię elementu, tzn.:

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{q}\} \quad , \quad \{\mathbf{x}\} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{x}_n\} \quad , \quad (\text{D.2.1})$$

gdzie wektory $\{\mathbf{q}\}, \{\mathbf{x}_n\}$ reprezentują przemieszczenia węzłowe oraz współrzędne węzłów. Oczywiście muszą spełniać warunek:

$$\sum_i N_i = 1 \quad , \quad (\text{D.2.2})$$

który zapewnia spójność modelu dyskretnego po odkształceniu.

W celu wyznaczenia macierzy $[\mathbf{B}]$ (Rów. D.1.9) odkształcenie-przemieszczenie należy zróżniczkować funkcje kształtu $[\mathbf{N}(\xi, \eta, \zeta)]$ względem współrzędnych x_i . Ponieważ funkcje kształtu są opisane współrzędnymi normalnymi, więc w tym celu wykorzystuje się Macierz Jacobiego. Dla funkcji kształtu N_i dowolnego " i "-tego węzła możemy zapisać:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial x_3} \end{bmatrix} = [\mathbf{J}]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.2.3})$$

gdzie macierz $[\mathbf{J}]$ jest macierzą Jackobiego:

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_1}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta} & \frac{\partial x_3}{\partial \zeta} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{J}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} & \frac{\partial \eta}{\partial x_1} & \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi}{\partial x_2} & \frac{\partial \eta}{\partial x_2} & \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi}{\partial x_3} & \frac{\partial \eta}{\partial x_3} & \frac{\partial \zeta}{\partial x_3} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.2.4})$$

Dzięki temu jesteśmy w stanie wyznaczyć macierz odkształcenie-przemieszczenie $[\mathbf{B}]$, a dalej wyznaczyć macierz sztywności elementu (przykładowo dla 3d):

$$[\mathbf{k}] = \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta d\zeta. \quad (\text{D.2.5})$$

Całka we wzorze D.2.5 jest wyznaczana numerycznie, przy pomocy kwadratur Gaussa:

$$[\mathbf{k}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta d\zeta = \sum_k \sum_l \sum_m w_k w_l w_m [\mathbf{W}](\xi_k, \eta_l, \zeta_m), \quad (\text{D.2.6})$$

gdzie w_k, w_l, w_m oznaczają wagi z kwadratur Gaussa, natomiast $W(\xi_k, \eta_l, \zeta_m)$ wartości iloczynu macierzy w punktach Gaussa:

$$[\mathbf{W}](\xi_k, \eta_l, \zeta_m) = [\mathbf{B}(\xi_k, \eta_l, \zeta_m)]^T [\mathbf{J}(\xi_k, \eta_l, \zeta_m)] [\mathbf{B}(\xi_k, \eta_l, \zeta_m)]. \quad (\text{D.2.7})$$

Macierz sił węzłowych (Rów. 5.2.18) dla elementu izoparametrycznego jest wyznaczana w analogiczny sposób jak macierz sztywności, mianowicie:

- macierz sił masowych:

$$\int_{V_e} [\mathbf{N}]^T \{ \mathbf{b} \} dV_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{N}]^T \{ \mathbf{b} \} \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta d\zeta, \quad (\text{D.2.8})$$

- macierz sił powierzchniowych dla przykładowej powierzchni S_e elementu:

$$\int_{S_e} [\mathbf{N}]^T \{ \mathbf{p} \} dS_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{N}_S]^T \{ \mathbf{p} \} \det[\mathbf{J}_S] d\xi d\eta. \quad (\text{D.2.9})$$

Powyższe całki są również obliczane numerycznie.

Dodatek E

Implementacja hipotezy wytężenia Burzyńskiego

E.1 Użyteczne przekształcenia

$$\begin{aligned}
 s_{ij}s_{ij} &= (\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij})(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}) = \\
 &= \sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{2}{3}\sigma_{ij}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{9}\sigma_{kk}^2\delta_{ij}\delta_{ij} = \sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{2}{3}\sigma_{kk}^2 + \frac{1}{3}\sigma_{kk}^2 = \\
 &= \sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}^2 = \sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\sigma_{ij}\delta_{ji} = \sigma_{ij}(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}) = \sigma_{ij}s_{ij} \quad .
 \end{aligned} \tag{E.1.1}$$

$$\sigma_{ij}n_{ij} = \sigma_{ij}\frac{3}{2}\frac{s_{ij}}{\sigma_e} = \frac{\frac{3}{2}s_{ij}\sigma_{ij}}{\sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}} = \frac{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}{\sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}} = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}} = \sigma_e \quad . \tag{E.1.2}$$

$$n_{ij}n_{ij} = \frac{3}{2}\frac{s_{ij}}{\sigma_e}\frac{3}{2}\frac{s_{ij}}{\sigma_e} = \frac{3}{2}\frac{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}{\sigma_e^2} = \frac{3}{2} \quad . \tag{E.1.3}$$

E.2 Niejawnna metoda Eulera

E.2.0.1 Przyrostowa postać prawa Hooke'a

Prawo Hooke'a dla materiałów izotropowych charakteryzujących się symetrycznością tensora naprężenia i odkształcenia wyraża zależność:

$$\sigma_{ij} = \lambda\epsilon_{kk}^{el}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}^{el} \quad . \tag{E.2.1}$$

Prawo Hooke'a (Równanie E.2.1) w przyrostowej formie przyjmie postać:

$$(\sigma_{ij})_{n+1} = \lambda\left(\epsilon_{kk}^{el}\right)_{n+1}\delta_{ij} + 2\mu\left(\epsilon_{ij}^{el}\right)_{n+1} \quad . \tag{E.2.2}$$

Odkształcenie $(\epsilon_{ij})_{n+1}$ dla kroku $n+1$ możemy zapisać jako sumę odkształcenia dla kroku n oraz jego przyrost $(\epsilon_{ij})_{n+1} = (\epsilon_{ij})_n + \Delta\epsilon_{ij}$, więc równanie E.2.2 przyjmie następującą formę:

$$(\sigma_{ij})_{n+1} = \lambda \left(\epsilon_{kk}^{el} \right)_n \delta_{ij} + \lambda \Delta \epsilon_{kk}^{el} \delta_{ij} + 2\mu \left(\epsilon_{ij}^{el} \right)_n + 2\mu \Delta \epsilon_{ij}^{el} . \quad (\text{E.2.3})$$

Korzystając ze wzoru (Równanie E.2.1) oraz z założenia o addytywności tensora odkształcenia $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{pl} + \epsilon_{ij}^{el}$, tensor naprężenia w kroku $n+1$ możemy dalej zapisać jako:

$$\begin{aligned} (\sigma_{ij})_{n+1} &= \left[\lambda \left(\epsilon_{kk}^{el} \right)_n \delta_{ij} + 2\mu \left(\epsilon_{ij}^{el} \right)_n \right] + \lambda \Delta \epsilon_{kk}^{el} \delta_{ij} + 2\mu \Delta \epsilon_{ij}^{el} = \\ &= (\sigma_{ij})_n + [\lambda \Delta \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \Delta \epsilon_{ij}] - [\lambda \Delta \epsilon_{kk}^{pl} \delta_{ij} + 2\mu \Delta \epsilon_{ij}^{pl}] = \\ &= (\sigma_{ij})_n + C_{ijkl} \Delta \epsilon_{kl} - [\lambda \Delta \epsilon_{kk}^{pl} \delta_{ij} + 2\mu \Delta \epsilon_{ij}^{pl}] = \\ &= \sigma_{ij}^{pr} - [\lambda \Delta \epsilon_{kk}^{pl} \delta_{ij} + 2\mu \Delta \epsilon_{ij}^{pl}] = \sigma_{ij}^{pr} - E_{ijkl} \Delta \epsilon_{kl}^{pl} , \end{aligned} \quad (\text{E.2.4})$$

gdzie $\sigma_{ij}^{pr} = (\sigma_{ij})_n + E_{ijkl} \Delta \epsilon_{kl}$ oznacza predyktor naprężenia.

Korzystając ze wzoru $\Delta \epsilon_{ij}^{pl} = \frac{1}{3} \Delta \epsilon_p \delta_{ij} + \Delta \epsilon_q (n_{ij})_{n+1}$ (przyrostowa postać równania 5.1.65) tensor naprężenia $(\sigma_{ij})_{n+1}$ dla kroku $n+1$ (Równanie E.2.4) możemy dalej zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} (\sigma_{ij})_{n+1} &= \sigma_{ij}^{pr} - \left[\lambda \delta_{ij} \left(\frac{1}{3} \Delta \epsilon_p \delta_{kk} + \Delta \epsilon_q (n_{kk})_{n+1} \right) + 2\mu \left(\frac{1}{3} \Delta \epsilon_p \delta_{ij} + \Delta \epsilon_q (n_{ij})_{n+1} \right) \right] = \\ &= \sigma_{ij}^{pr} - \left[\delta_{ij} \Delta \epsilon_p \left(\frac{1}{3} \lambda \delta_{kk} + \frac{2}{3} \mu \right) + \Delta \epsilon_q \left((n_{kk})_{n+1} \lambda \delta_{ij} + 2\mu (n_{ij})_{n+1} \right) \right] . \end{aligned} \quad (\text{E.2.5})$$

Ponieważ $n_{kk} = \frac{3}{2} \frac{s_{kk}}{\sigma_e} = 0$ oraz korzystając z faktu $\delta_{kk} = 3$ równanie E.2.6 możemy przekształcić do postaci:

$$(\sigma_{ij})_{n+1} = \sigma_{ij}^{pr} - \left[\delta_{ij} \Delta \epsilon_p \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) + \Delta \epsilon_q \left(2\mu (n_{ij})_{n+1} \right) \right] . \quad (\text{E.2.6})$$

Finalnie

$$(\sigma_{ij})_{n+1} = \sigma_{ij}^{pr} - K \Delta \epsilon_p \delta_{ij} - 2\mu \Delta \epsilon_q (n_{ij})_{n+1} . \quad (\text{E.2.7})$$

E.2.0.2 Współosiowość

Z definicji dewiatoru tensora naprężenia możemy zapisać w postaci:

$$(s_{ij})_{n+1} = (\sigma_{ij})_{n+1} - (\sigma_m)_{n+1} \delta_{ij} . \quad (\text{E.2.8})$$

Korzystając z równania 5.3.6 oraz z równania 5.3.13 możemy równanie E.2.8 przekształcić w następujący sposób:

$$\begin{aligned} (s_{ij})_{n+1} &= \sigma_{ij}^{pr} - K \Delta \epsilon_p \delta_{ij} - 2\mu \Delta \epsilon_q (n_{ij})_{n+1} - [\sigma_m^{pr} - K \Delta \epsilon_p] \delta_{ij} = \\ &= \sigma_{ij}^{pr} - \sigma_m^{pr} \delta_{ij} - 2\mu \Delta \epsilon_q (n_{ij})_{n+1} = s_{ij}^{pr} - 2\mu \Delta \epsilon_q (n_{ij})_{n+1} . \end{aligned} \quad (\text{E.2.9})$$

Korzystając z definicji tensora $n_{ij} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{\sigma_e}$, równanie E.2.9 możemy zapisać w postaci:

$$(s_{ij})_{n+1} \left[1 + \frac{3\mu \Delta \epsilon_q}{(\sigma_e)_{n+1}} \right] = s_{ij}^{pr} . \quad (\text{E.2.10})$$

Z równania E.2.10 wynika, że tensor $(s_{ij})_{n+1}$ jest współosiowy z tensorem s_{ij}^{pr} . Dzięki temu możemy pokazać, że tensory n_{ij}^{pr} , $(n_{ij})_{n+1}$ są równe. W tym celu korzystamy z zależności $(\sigma_e)_{n+1} = \sigma_e^{pr} - 3\mu\Delta\epsilon_q$, wówczas:

$$n_{ij}^{pr} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^{pr}}{\sigma_e^{pr}} = \frac{3}{2\sigma_e^{pr}} (s_{ij})_{n+1} \frac{(\sigma_e)_{n+1} + 3\mu\Delta\epsilon_q}{(\sigma_e)_{n+1}},$$

a więc:

$$n_{ij}^{pr} = (n_{ij})_{n+1}. \quad (\text{E.2.11})$$

E.2.0.3 Rzutowanie

W rozdziale tym zaprezentujemy rzutowanie równania 5.3.6 opisującego tensor naprężenia:

$$(\sigma_{ij})_{n+1} = \sigma_{ij}^{pr} - K\Delta\epsilon_p\delta_{ij} - 2\mu\Delta\epsilon_q (n_{ij})_{n+1}. \quad (\text{E.2.12})$$

Rzutowanie przeprowadzimy niezależnie na dwa tensory: $(n_{ij})_{n+1}$ oraz δ_{ij} .

W pierwszej kolejności rzutujemy równanie E.2.12 na tensor $(n_{ij})_{n+1}$:

$$(\sigma_{ij})_{n+1} (n_{ij})_{n+1} = \sigma_{ij}^{pr} (n_{ij})_{n+1} - K\Delta\epsilon_p\delta_{ij} (n_{ij})_{n+1} - 2\mu\Delta\epsilon_q (n_{ij})_{n+1} (n_{ij})_{n+1}. \quad (\text{E.2.13})$$

Wykorzystując fakt $\sigma_{ij}n_{ij} = \sigma_e$, $(n_{ij})_{n+1} = n_{ij}^{pr}$, $n_{ij}n_{ij} = \frac{3}{2}$ oraz definicję tensora $n_{ij} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{\sigma_e}$ możemy dalej zapisać:

$$(\sigma_e)_{n+1} = \sigma_{ij}^{pr} n_{ij}^{pr} - K\Delta\epsilon_p\delta_{ij} \frac{3}{2} \left(\frac{s_{ij}}{\sigma_e} \right)_{n+1} - 3\mu\Delta\epsilon_q. \quad (\text{E.2.14})$$

Korzystając z faktu $s_{ij}\delta_{ij} = s_{ii}$ powyższe równanie przyjmie postać:

$$(\sigma_e)_{n+1} = \sigma_e^{pr} - K\Delta\epsilon_p \frac{3}{2} \left(\frac{s_{ii}}{\sigma_e} \right)_{n+1} - 3\mu\Delta\epsilon_q. \quad (\text{E.2.15})$$

Ponieważ $s_{ii} = 0$, więc ostatecznie otrzymujemy:

$$(\sigma_e)_{n+1} = \sigma_e^{pr} - 3\mu\Delta\epsilon_q. \quad (\text{E.2.16})$$

Poniżej zaprezentowane zostało rzutowanie równania E.2.12 na tensor δ_{ij} .

$$(\sigma_{ij})_{n+1} \delta_{ij} = \sigma_{ij}^{pr} \delta_{ij} - K\Delta\epsilon_p \delta_{ij} \delta_{ij} - 2\mu\Delta\epsilon_q (n_{ij})_{n+1} \delta_{ij}. \quad (\text{E.2.17})$$

Dla dowolnego tensora $a_{ij}\delta_{ij} = a_{ii}$, więc

$$(\sigma_{ii})_{n+1} = \sigma_{ii}^{pr} - K\Delta\epsilon_p \delta_{ii} - 2\mu\Delta\epsilon_q (n_{ii})_{n+1}. \quad (\text{E.2.18})$$

Korzystając z faktów: $\delta_{ii} = 3$, $n_{ii} = \frac{3}{2} \frac{s_{ii}}{\sigma_e} = 0$ oraz dzieląc obustronnie powyższe równanie przez 3 otrzymujemy ostatecznie:

$$(\sigma_m)_{n+1} = \sigma_m^{pr} - K\Delta\epsilon_p. \quad (\text{E.2.19})$$

E.2.1 Równania Newtona - lokalne

$$f_1 = \Delta\epsilon_p \frac{\partial F}{\partial \sigma_e} - \Delta\epsilon_q \frac{\partial F}{\partial \sigma_m} = 0 \quad , \quad (\text{E.2.20})$$

$$f_2 = F = \frac{1}{2k} \left[3(k-1)(\sigma_m)_{n+1} + 9\sqrt{(k-1)^2 ((\sigma_m)_{n+1})^2 + 4k ((\sigma_e)_{n+1})^2} \right] - (\sigma_Y^T)_n - H \cdot \Delta\epsilon_{eq}^{pl} = 0 \quad . \quad (\text{E.2.21})$$

Jako niewiadome traktujemy $\Delta\epsilon_p$ oraz $\Delta\epsilon_q$.

Możemy zdefiniować układ równań Newtona:

$$df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial \Delta\epsilon_p} d\Delta\epsilon_p + \frac{\partial f_1}{\partial \Delta\epsilon_q} d\Delta\epsilon_q = -f_1 \quad , \quad (\text{E.2.22})$$

$$df_2 = \frac{\partial F}{\partial \Delta\epsilon_p} d\Delta\epsilon_p + \frac{\partial F}{\partial \Delta\epsilon_q} d\Delta\epsilon_q = -F \quad . \quad (\text{E.2.23})$$

Oznaczając:

$$A_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial \Delta\epsilon_p}, \quad A_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial \Delta\epsilon_q}, \quad A_{21} = \frac{\partial F}{\partial \Delta\epsilon_p}, \quad A_{22} = \frac{\partial F}{\partial \Delta\epsilon_q}, \quad b_1 = -f_1, \quad b_2 = -F \quad ,$$

powyższy układ równań E.2.22 - E.2.23 możemy zapisać w postaci:

$$A_{11} d\Delta\epsilon_p + A_{12} d\Delta\epsilon_q = b_1 \quad , \quad (\text{E.2.24})$$

$$A_{21} d\Delta\epsilon_p + A_{22} d\Delta\epsilon_q = b_2 \quad . \quad (\text{E.2.25})$$

W pierwszej kolejności wyznaczymy współczynniki A_{21}, A_{22} . W tym celu wyznaczamy różniczkę zupełną równania F (Równanie E.2.23). Mając na uwadze fakt, że funkcja F jest zależna od zmiennych $\sigma_m, \sigma_e, \Delta\epsilon_{eq}^{pl}$ tzn. $F(\sigma_m, \sigma_e, \Delta\epsilon_{eq}^{pl})$, możemy zapisać:

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F}{\partial \Delta\epsilon_p} d\Delta\epsilon_p + \frac{\partial F}{\partial \Delta\epsilon_q} d\Delta\epsilon_q = \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \Delta\epsilon_p} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_e} \frac{\partial \sigma_e}{\partial \Delta\epsilon_p} + \frac{\partial F}{\partial \Delta\epsilon_{eq}^{pl}} \frac{\partial \Delta\epsilon_{eq}^{pl}}{\partial \Delta\epsilon_p} \right) d\Delta\epsilon_p + \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \Delta\epsilon_q} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_e} \frac{\partial \sigma_e}{\partial \Delta\epsilon_q} + \frac{\partial F}{\partial \Delta\epsilon_{eq}^{pl}} \frac{\partial \Delta\epsilon_{eq}^{pl}}{\partial \Delta\epsilon_q} \right) d\Delta\epsilon_q \quad . \end{aligned} \quad (\text{E.2.26})$$

Korzystając z równania 5.3.13: $(\sigma_m)_{n+1} = \sigma_m^{pr} - K\Delta\epsilon_p$ oraz z równania 5.3.12:

$(\sigma_e)_{n+1} = \sigma_e^{pr} - 3\mu\Delta\epsilon_q$ możemy wyznaczyć następujące pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial \Delta\epsilon_p} = -K, \quad \frac{\partial \sigma_m}{\partial \Delta\epsilon_q} = 0 \quad , \quad (\text{E.2.27})$$

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial \Delta\epsilon_p} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_e}{\partial \Delta\epsilon_q} = -3\mu \quad . \quad (\text{E.2.28})$$

Dodatkowo wyznaczając pochodną cząstkową z równania E.2.21 względem $\Delta\epsilon_{eq}^{pl}$:

$$\frac{\partial F}{\partial \Delta\epsilon_{eq}^{pl}} = -H \quad , \quad (\text{E.2.29})$$

jestesmy w stanie zapisać równanie (E.2.26) w postaci:

$$dF = \left(-K \frac{\partial F}{\partial \sigma_m} - H \frac{\partial \Delta\epsilon_{eq}^{pl}}{\partial \Delta\epsilon_p} \right) d\Delta\epsilon_p + \left(-3\mu \frac{\partial F}{\partial \sigma_e} - H \frac{\partial \Delta\epsilon_{eq}^{pl}}{\partial \Delta\epsilon_q} \right) d\Delta\epsilon_q \quad . \quad (\text{E.2.30})$$

A więc, z powyższego zapisu jesteśmy w stanie wyznaczyć współczynniki A_{21}, A_{22} :

$$A_{21} = -K \frac{\partial F}{\partial \sigma_m} - H \frac{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}}{\partial \Delta \epsilon_p} , \quad (\text{E.2.31})$$

$$A_{22} = -3\mu \frac{\partial F}{\partial \sigma_e} - H \frac{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}}{\partial \Delta \epsilon_q} , \quad (\text{E.2.32})$$

gdzie pochodne cząstkowe $\frac{\partial F}{\partial \sigma_m}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_e}$ wyznaczamy różniczkując równanie E.2.21 względem kolejno σ_m, σ_e :

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_m} = \frac{3}{2} \frac{k-1}{k} \left(1 + \frac{3(k-1)(\sigma_m)_{n+1}}{\sqrt{9(k-1)^2 ((\sigma_m)_{n+1})^2 + 4k ((\sigma_e)_{n+1})^2}} \right) , \quad (\text{E.2.33})$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_e} = \frac{2(\sigma_e)_{n+1}}{\sqrt{9(k-1)^2 ((\sigma_m)_{n+1})^2 + 4k ((\sigma_e)_{n+1})^2}} , \quad (\text{E.2.34})$$

natomiast pochodne $\frac{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}}{\partial \Delta \epsilon_p}, \frac{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}}{\partial \Delta \epsilon_q}$ różniczkując równanie 5.3.14:

$$\Delta \epsilon_{eq}^{pl} = \frac{(\sigma_m)_{n+1} \Delta \epsilon_p + (\sigma_e)_{n+1} \Delta \epsilon_q}{(\sigma_Y^T)_{n+1}} \text{ względem kolejno } \Delta \epsilon_p \text{ oraz } \Delta \epsilon_q;$$

$$\frac{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}}{\partial \Delta \epsilon_p} = \frac{(\sigma_m)_{n+1}}{(\sigma_Y^T)_{n+1}} , \quad \frac{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}}{\partial \Delta \epsilon_q} = \frac{(\sigma_e)_{n+1}}{(\sigma_Y^T)_{n+1}} . \quad (\text{E.2.35})$$

Poniżej wyznaczamy współczynniki A_{11}, A_{12} . W tym celu wyznaczamy różniczkę zupełną równania f_1 (Równanie E.2.22). Mając na uwadze fakt, że funkcja f_1 jest zależna od zmiennych $\sigma_m, \sigma_e, \Delta \epsilon_{eq}^{pl}$ tzn. $f_1(\sigma_m, \sigma_e, \Delta \epsilon_{eq}^{pl})$, możemy zapisać:

$$\begin{aligned} df_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial \Delta \epsilon_p} d\Delta \epsilon_p + \frac{\partial f_1}{\partial \Delta \epsilon_q} d\Delta \epsilon_q = \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \Delta \epsilon_p} + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_e} \frac{\partial \sigma_e}{\partial \Delta \epsilon_p} + \frac{\partial f_1}{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}} \frac{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}}{\partial \Delta \epsilon_p} \right) d\Delta \epsilon_p + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \Delta \epsilon_q} + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_e} \frac{\partial \sigma_e}{\partial \Delta \epsilon_q} + \frac{\partial f_1}{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}} \frac{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}}{\partial \Delta \epsilon_q} \right) d\Delta \epsilon_q . \end{aligned} \quad (\text{E.2.36})$$

Korzystając z faktów (Rów. E.2.27, E.2.28): $\frac{\partial \sigma_m}{\partial \Delta \epsilon_q} = 0, \frac{\partial \sigma_e}{\partial \Delta \epsilon_p} = 0$, równanie E.2.36 przyjmie postać:

$$df_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \Delta \epsilon_p} + \frac{\partial f_1}{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}} \frac{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}}{\partial \Delta \epsilon_p} \right) d\Delta \epsilon_p + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_e} \frac{\partial \sigma_e}{\partial \Delta \epsilon_q} + \frac{\partial f_1}{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}} \frac{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}}{\partial \Delta \epsilon_q} \right) d\Delta \epsilon_q . \quad (\text{E.2.37})$$

Podstawiając równanie E.2.21 definujące funkcję f_1 do równania E.2.37 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} df_1 &= \left(\frac{\partial \Delta \epsilon_p}{\partial \sigma_m} \frac{\partial F}{\partial \sigma_e} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \Delta \epsilon_p} + \Delta \epsilon_p \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma_m \partial \sigma_e} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \Delta \epsilon_p} - \frac{\partial \Delta \epsilon_q}{\partial \sigma_m} \frac{\partial F}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \Delta \epsilon_p} - \Delta \epsilon_q \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma_m^2} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \Delta \epsilon_p} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Delta \epsilon_p}{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_e} \frac{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}}{\partial \Delta \epsilon_p} + \Delta \epsilon_p \frac{\partial^2 F}{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl} \partial \sigma_e} \frac{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}}{\partial \Delta \epsilon_p} - \frac{\partial \Delta \epsilon_q}{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}}{\partial \Delta \epsilon_p} - \Delta \epsilon_q \frac{\partial^2 F}{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl} \partial \sigma_m} \frac{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}}{\partial \Delta \epsilon_p} \right) \Delta \epsilon_p + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial \Delta \epsilon_p}{\partial \sigma_e} \frac{\partial F}{\partial \sigma_e} \frac{\partial \sigma_e}{\partial \Delta \epsilon_q} + \Delta \epsilon_p \frac{\partial^2 F}{\partial^2 \sigma_e} \frac{\partial \sigma_e}{\partial \Delta \epsilon_q} - \frac{\partial \Delta \epsilon_q}{\partial \sigma_e} \frac{\partial F}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_e}{\partial \Delta \epsilon_q} - \Delta \epsilon_q \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma_e \partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_e}{\partial \Delta \epsilon_q} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial \Delta \epsilon_p}{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_e} \frac{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}}{\partial \Delta \epsilon_q} + \Delta \epsilon_p \frac{\partial^2 F}{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl} \partial \sigma_e} \frac{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}}{\partial \Delta \epsilon_q} - \frac{\partial \Delta \epsilon_q}{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}}{\partial \Delta \epsilon_q} - \Delta \epsilon_q \frac{\partial^2 F}{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl} \partial \sigma_m} \frac{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}}{\partial \Delta \epsilon_q} \right) d\Delta \epsilon_q . \tag{E.2.38}
\end{aligned}$$

Uprościmy równanie E.2.38 korzystając z faktów:

$$\frac{\partial \Delta \epsilon_p}{\partial \sigma_m} \frac{\partial F}{\partial \sigma_e} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \Delta \epsilon_p} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_e} , \quad \frac{\partial \Delta \epsilon_q}{\partial \sigma_e} \frac{\partial F}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_e}{\partial \Delta \epsilon_q} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_m} , \tag{E.2.39}$$

oraz z (Rów. E.2.27, E.2.28): $\frac{\partial \sigma_m}{\partial \Delta \epsilon_p} = -K$, $\frac{\partial \sigma_e}{\partial \Delta \epsilon_q} = -3\mu$. Dodatkowo korzystając z równania 5.3.13: $(\sigma_m)_{n+1} = \sigma_m^{pr} - K\Delta \epsilon_p$ oraz z równania 5.3.12: $(\sigma_e)_{n+1} = \sigma_e^{pr} - 3\mu\Delta \epsilon_q$ jesteśmy w stanie wyznaczyć następujące pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial \Delta \epsilon_p}{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}} = \frac{\partial \left[\frac{\sigma_m^{pr}}{K} - \frac{(\sigma_m)_{n+1}}{K} \right]}{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}} = 0 , \quad \frac{\partial \Delta \epsilon_p}{\partial \sigma_e} = \frac{\partial \left[\frac{\sigma_m^{pr}}{K} - \frac{(\sigma_m)_{n+1}}{K} \right]}{\partial \sigma_e} = 0 , \tag{E.2.40}$$

$$\frac{\partial \Delta \epsilon_q}{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}} = \frac{\partial \left[\frac{\sigma_e^{pr}}{3\mu} - \frac{(\sigma_e)_{n+1}}{3\mu} \right]}{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl}} = 0 , \quad \frac{\partial \Delta \epsilon_q}{\partial \sigma_m} = \frac{\partial \left[\frac{\sigma_e^{pr}}{3\mu} - \frac{(\sigma_e)_{n+1}}{3\mu} \right]}{\partial \sigma_m} = 0 . \tag{E.2.41}$$

Co więcej, korzystając z równania 5.3.28 oraz 5.3.27 możemy zapisać:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl} \partial \sigma_e} = 0 , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \Delta \epsilon_{eq}^{pl} \partial \sigma_m} = 0 . \tag{E.2.42}$$

Powyzsze uproszczenia pozwalają zapisać równanie E.2.38 w następującej formie:

$$\begin{aligned}
df_1 = & \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_e} - K\Delta \epsilon_p \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma_m \partial \sigma_e} + K\Delta \epsilon_q \frac{\partial^2 F}{\partial^2 \sigma_m} \right) d\Delta \epsilon_p \\
& + \left(-\frac{\partial F}{\partial \sigma_m} - 3\mu\Delta \epsilon_p \frac{\partial^2 F}{\partial^2 \sigma_e} + 3\mu\Delta \epsilon_q \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma_e \partial \sigma_m} \right) d\Delta \epsilon_q . \tag{E.2.43}
\end{aligned}$$

A więc, z powyższego zapisu jesteśmy w stanie wyznaczyć współczynniki A_{11}, A_{12} :

$$A_{11} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_e} - K\Delta \epsilon_p \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma_m \partial \sigma_e} + K\Delta \epsilon_q \frac{\partial^2 F}{\partial^2 \sigma_m} , \tag{E.2.44}$$

$$A_{12} = -\frac{\partial F}{\partial \sigma_m} - 3\mu\Delta \epsilon_p \frac{\partial^2 F}{\partial^2 \sigma_e} + 3\mu\Delta \epsilon_q \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma_e \partial \sigma_m} , \tag{E.2.45}$$

gdzie pochodne $\frac{\partial F}{\partial \sigma_m}$ oraz $\frac{\partial F}{\partial \sigma_e}$ wyrażają się poprzez równania E.2.33-E.2.34.

Natomiast pozostałe pochodne cząstkowe przedstawiają się w następującymi wzorami:

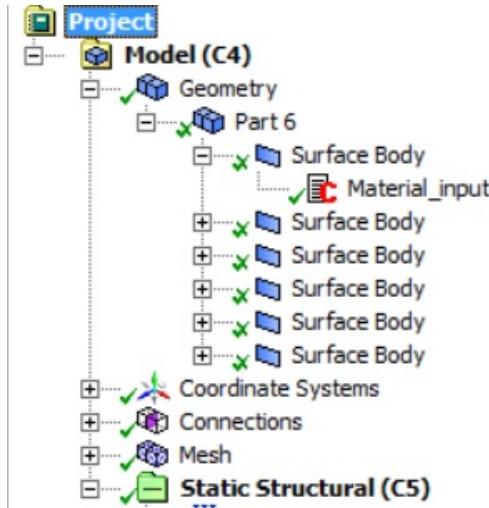
$$\frac{\partial^2 F}{\partial \sigma_m \partial \sigma_e} = \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma_e \partial \sigma_m} = -\frac{18(k-1)^2 (\sigma_e)_{n+1} (\sigma_m)_{n+1}}{\left[\sqrt{9(k-1)^2 ((\sigma_m)_{n+1})^2 + 4k ((\sigma_e)_{n+1})^2} \right]^3} , \tag{E.2.46}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 \sigma_m} = \frac{18(k-1)^2 ((\sigma_e)_{n+1})^2}{\left[\sqrt{9(k-1)^2 ((\sigma_m)_{n+1})^2 + 4k ((\sigma_e)_{n+1})^2} \right]^3} , \tag{E.2.47}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 \sigma_e} = \frac{18(k-1)^2 \left((\sigma_m)_{n+1} \right)^2}{\left[\sqrt{9(k-1)^2 \left((\sigma_m)_{n+1} \right)^2 + 4k \left((\sigma_e)_{n+1} \right)^2} \right]^3}. \quad (E.2.48)$$

E.3 Wprowadzanie danych materiałowych

Dane materiałowe wykorzystywane przez procedurę USERMAT wprowadza się przy pomocy skryptu APDL (Rys. E.1).



Rysunek E.1: Lokalizacja skryptu APDL służącego do wprowadzenia danych materiałowych.

Przykładowe dane materiałowe dla trzech temperatur $20, 175, 500[^{\circ}C]$, użyte podczas weryfikacji hipotezy Burzyńskiego zostały zaprezentowane w skrypcie poniżej:

```

MPDELE,ALL,matid
TBDELE,ALL,matid

TB,USER,matid,1,114 ! na koncu ilosc ogolna punktow

TBDATA,1, 9,3,0
! ilosc punktow temperaturowych dla zakresu sprezystego (min 2);
! ilosc punktow temperaturowych dla zakresu plastycznego (min 2);
! czy interpolowac dane: 0 nie, 1 tak
TBDATA,4, 20,500,600! temperatury dla zakresu elastycznego
TBDATA,7, 700,650,750! temperatury dla zakresu elastycznego
TBDATA,10, 1000,1080,1100! temperatury dla zakresu elastycznego
TBDATA,13, 20,850,900,! temperatury dla zakresu plastycznego
TBDATA,16, 11,11,11,! ilosc punktow plastycznosci dla kolejnych temperatur

! DANE DLA ZAKRESU SPREZYSTEGO

TBDATA,19, 20,

```

TBDDATA,20, 196200, 0.3, ! modul Younga, wspolczynniki Poissona
TBDDATA,22, 500,
TBDDATA,23, 169713, 0.3,

TBDDATA,25, 600,
TBDDATA,26, 163337, 0.3,

TBDDATA,28, 700,
TBDDATA,29, 159413, 0.3,

TBDDATA,31, 800,
TBDDATA,32, 148131, 0.3,

TBDDATA,34, 900,
TBDDATA,35, 125078, 0.3,

TBDDATA,37, 1000,
TBDDATA,38, 118211, 0.3,

TBDDATA,40, 1080,
TBDDATA,41, 111834, 0.3,

TBDDATA,43, 1100,
TBDDATA,44, 100062, 0.3,

! DANE DLA ZAKRESU PLASTYCZNEGO

TBDDATA,46, 20,
TBDDATA,47,0.000000 ,893.0,
TBDDATA,49,0.004160 ,972.0,
TBDDATA,51,0.008324 ,995.0,
TBDDATA,53,0.012486 ,1009.0,
TBDDATA,55,0.016684 ,1019.0,
TBDDATA,57,0.020810 ,1027.0,
TBDDATA,59,0.024972 ,1034.0,
TBDDATA,61,0.029134 ,1040.0,
TBDDATA,63,0.033296 ,1045.0,
TBDDATA,65,0.037458 ,1049.0,
TBDDATA,67,0.041620 ,1053.0,

TBDDATA,69, 650,
TBDDATA,70, 0.000000 ,834.0000,
TBDDATA,72, 0.000995 ,855.3605,
TBDDATA,74, 0.001990 ,857.5147,

```
TB DATA,76, 0.002985 ,858.7777,  
TB DATA,78, 0.003980 ,859.6751,  
TB DATA,80, 0.004975 ,860.3719,  
TB DATA,82, 0.005970 ,860.9416,  
TB DATA,84, 0.006965 ,861.4236,  
TB DATA,86, 0.007960 ,861.8413,  
TB DATA,88, 0.008955 ,862.2100,  
TB DATA,90, 0.009950 ,862.5399,
```

```
TB DATA,92, 750,  
TB DATA,93, 0.00000 ,510.0000,  
TB DATA,95, 0.00198 ,580.3851,  
TB DATA,97, 0.00396 ,586.4499,  
TB DATA,99, 0.00594 ,590.0272,  
TB DATA,101, 0.00792 ,592.5785,  
TB DATA,103, 0.00990 ,594.5652,  
TB DATA,105, 0.01188 ,596.1933,  
TB DATA,107, 0.01386 ,597.5733,  
TB DATA,109, 0.01584 ,598.7714,  
TB DATA,111, 0.01782 ,599.8301,  
TB DATA,113, 0.01980 ,600.7788,
```

```
TB,STATE,matid, ,8
```

```
mptemp,1, 100, 200, 300, 400, 500, ! define data 4 temperatures ...  
mptemp,6, 600, 700, 800, 900, 1000, ! define data 4 temperatures ...  
! temperatury tylko dla pierwszego partu z ciala  
  
MP,REFT,matid,20  
mpdata, ALPX, matid,1, 1.1E-05, 1.14E-05, 1.22E-05, 1.29E-05, 1.34E-05,  
mpdata, ALPX, matid,6, 1.38E-05, 1.42E-05, 1.47E-05, 1.52E-05, 1.59E-05,
```

E.4 Procedura USERMAT

Poniżej przedstawiono procedurę USERMAT napisaną w języku FORTRAN dla współczynnika asymetrii niezależnego od odkształceń plastycznych.

```
subroutine usermat(
& matId, elemId,kDomIntPt, kLayer, kSectPt,
& ldstep,isubst,keycut,
& nDirect,nShear,ncomp,nStatev,nProp,
& Time,dTime,Temp,dTemp,
& stress,ustatev,dsdePl,sedEl,sedPl,epseq,
& Strain,dStrain, epsPl, prop, coords,
& var0, defGrad_t, defGrad,
& tsstif, epsZZ, cutFactor,
& var1, var2, var3, var4, var5,
& var6, var7)
*****
C
C      Author: Kamil Banas
C      Supervisor: Janusz Badur
C      Institute of Fluid Flow Machinery POLISH ACADEMY OF SCIENCE
C
CCC
C
C      The following demonstrates a USERMAT subroutine for
C      a plasticity model of 3D solid elements
C
*****
#include "impcom.inc"
C
      INTEGER
& matId, elemId,
& kDomIntPt, kLayer, kSectPt,
& ldstep,isubst,keycut,
& nDirect,nShear,ncomp,nStatev,nProp
      DOUBLE PRECISION
& Time,      dTime,      Temp,      dTemp,
& sedEl,     sedPl,     epseq,    epsZZ,    cutFactor
      DOUBLE PRECISION
& stress  (ncomp ), ustatev (nStatev),
& dsdePl (ncomp,ncomp),
& Strain (ncomp ), dStrain (ncomp ),
& epsPl  (ncomp ), prop     (nProp ),
& coords  (3),
& defGrad (3,3),   defGrad_t(3,3),
& tsstif  (2)
C
```

```

***** User defined part *****
c
c --- parameters
c
      INTEGER          mcomp, NEWTON
      DOUBLE PRECISION HALF, THIRD, ONE, TWO, SMALL, ONEHALF,
&                      ZERO, TWO THIRD, ONEDM02, ONEDM05, sqTiny,
& TOL, k, THREE, FOUR, SIX
      PARAMETER        (ZERO      = 0.d0,
&                   HALF      = 0.5d0,
&                   THIRD     = 1.d0/3.d0,
&                   ONE       = 1.d0,
&                   TWO       = 2.d0,
&                   THREE     = 3.d0,
&                   FOUR      = 4.d0,
&                   SIX       = 6.d0,
&                   SMALL     = 1.d-08,
&                   sqTiny    = 1.d-20,
&                   ONEDM02   = 1.d-02,
&                   ONEDM05   = 1.d-05,
&                   ONEHALF   = 1.5d0,
&                   TWO THIRD = 2.0d0/3.0d0,
&                   mcomp     = 6,
&                   TOL       = 1.001d0,
& NEWTON      = 50,
&                   k         = 1.13d0
& )
c
c --- local variables
c
      EXTERNAL          vzero, vmove, get_ElmData
      DOUBLE PRECISION sigElp(mcomp), dsdeEl(mcomp,mcomp), G(mcomp),
&                      sigDev(mcomp), JM (mcomp,mcomp), dfds(mcomp),
&                      sigi (mcomp), strainEl(mcomp),
&                      depsPL(mcomp)

      DOUBLE PRECISION var0, var1, var2, var3, var4, var5,
&                  var6, var7

      DATA G/1.0D0,1.0D0,1.0D0,0.0D0,0.0D0,0.0D0/
c
      INTEGER          i, j, size, interp
      DOUBLE PRECISION pEl, qEl,      pleq_t, sigy_t , sigy,
&                  dpleq, pleq,
&                  young, posn,    sigy0,    dsigdep,
&                  elast1,elast2,
&                  twoG,  threeG,  one0v3G, qEl0v3G, three0v2qEl,

```

```

&           fratio,  con1,     con2, dperr(3),
cccccccccccc own variable
&           S_m, S_e, S_mtr, S_etr, S_B_eq,
&           dF_dSe, dF_dSm, d2F_dSm_dSe, d2F_d2Sm, d2F_d2Se,
&           ddeltaEpl_eq_ddelta_Ep, ddeltaEpl_eq_ddelta_Eq,
&           A11, A12, A21, A22, b1, b2,
&           deltaEp, deltaEq, d_deltaEp, d_deltaEq,
&           b_1, b_2,
&           BULK, mi, H, pierw, temp2,
&           Temp_end

      DOUBLE PRECISION Actual_Temp_plastic_curve (nProp)
cccccccccccccccccccccccc
      DOUBLE PRECISION d0, d1, d2, d3, d4, C_11, C_12, C_21, C_22,
&           A_11, A_12, A_21, A_22, B_11, B_12, B_21, B_22,
&           delta_C

      DOUBLE PRECISION NN(6)
*****
*****cccccccccccccccc
*****cccccccccccc
*****cccccccccccc
keycut    = 0
cutFactor = 0.d0
H   = ZERO
pleq_t   = ustatev(1)
pleq     = pleq_t
c *** get Young's modulus and Poisson's ratio, initial yield stress and others
interp = prop(3)
Temp_end = dTemp + Temp

call material_properties( nProp, prop, Temp_end,
&                           young, posn)
c *** calculate the plastic slope

call Plastic_Curve( Temp_end, nProp, prop,
&                           Actual_Temp_plastic_curve, size)
ccc
sigy0 = Actual_Temp_plastic_curve(2)

call HARD_SLOPE(nProp, Actual_Temp_plastic_curve, size, pleq, interp,
&                           H, sigy)
cc
twoG     = young / (ONE+posn)
threeG   = ONEHALF * twoG
mi = young/(TWO*(1.0D0+posn))
BULK = young / (THREE*(ONE-TWO*posn))

```

```

c *** plastic strain tensor
call vmove(ustatev(2), epsPl(1), ncomp)

elast1=young*posn/((1.0D0+posn)*(1.0D0-TW0*posn))
elast2=HALF*twoG
c *** define tsstif(1) since it is used for calculation of hourglass stiffness
tsstif(1) = elast2
c
c *** calculate elastic stiffness matrix (3d)
c
dsdeEl(1,1)=(elast1+TW0*elast2)*G(1)*G(1)
dsdeEl(1,2)=elast1*G(1)*G(2)+elast2*TW0*G(4)*G(4)
dsdeEl(1,3)=elast1*G(1)*G(3)+elast2*TW0*G(5)*G(5)
dsdeEl(1,4)=elast1*G(1)*G(4)+elast2*TW0*G(1)*G(4)
dsdeEl(1,5)=elast1*G(1)*G(5)+elast2*TW0*G(1)*G(5)
dsdeEl(1,6)=elast1*G(1)*G(6)+elast2*TW0*G(4)*G(5)
dsdeEl(2,2)=(elast1+TW0*elast2)*G(2)*G(2)
dsdeEl(2,3)=elast1*G(2)*G(3)+elast2*TW0*G(6)*G(6)
dsdeEl(2,4)=elast1*G(2)*G(4)+elast2*TW0*G(1)*G(4)
dsdeEl(2,5)=elast1*G(2)*G(5)+elast2*TW0*G(1)*G(5)
dsdeEl(2,6)=elast1*G(2)*G(6)+elast2*TW0*G(2)*G(6)
dsdeEl(3,3)=(elast1+TW0*elast2)*G(3)*G(3)
dsdeEl(3,4)=elast1*G(3)*G(4)+elast2*TW0*G(5)*G(6)
dsdeEl(3,5)=elast1*G(3)*G(5)+elast2*TW0*G(5)*G(3)
dsdeEl(3,6)=elast1*G(3)*G(6)+elast2*TW0*G(6)*G(3)
dsdeEl(4,4)=elast1*G(4)*G(4)+elast2*(G(1)*G(2)+G(4)*G(4))
dsdeEl(4,5)=elast1*G(4)*G(5)+elast2*(G(1)*G(6)+G(5)*G(4))
dsdeEl(4,6)=elast1*G(4)*G(6)+elast2*(G(4)*G(6)+G(5)*G(2))
dsdeEl(5,5)=elast1*G(5)*G(5)+elast2*(G(1)*G(3)+G(5)*G(5))
dsdeEl(5,6)=elast1*G(5)*G(6)+elast2*(G(4)*G(3)+G(5)*G(6))
dsdeEl(6,6)=elast1*G(6)*G(6)+elast2*(G(2)*G(3)+G(6)*G(6))
do i=1,ncomp-1
    do j=i+1,ncomp
        dsdeEl(j,i)=dsdeEl(i,j)
    end do
end do
c
c *** get initial stress
call vzero(sigI(1),ncomp)
i = ncomp
call get_ElmData ('ISIG', elemId,kDomIntPt, i, sigI)
c
c *** calculate the trial stress and
c     copy elastic moduli dsdeEl to material Jacobian matrix
do i=1,ncomp
    strainEl(i) = Strain(i) + dStrain(i) - epsPl(i)
end do

```

```

call vzero(sigElp, 6)
do i=1,ncomp
    do j=1,ncomp
        dsdePl(j,i) = dsdeEl(j,i)
        sigElp(i) = sigElp(i)+dsdeEl(j,i)*strainEl(j)
    end do
    sigElp(i) = sigElp(i) + sigi(i)
end do

c *** hydrostatic pressure stress
S_mtr = THIRD * (sigElp(1) + sigElp(2) + sigElp(3))
c *** compute the deviatoric stress tensor
sigDev(1) = sigElp(1) - S_mtr
sigDev(2) = sigElp(2) - S_mtr
sigDev(3) = sigElp(3) - S_mtr
sigDev(4) = sigElp(4)
sigDev(5) = sigElp(5)
sigDev(6) = sigElp(6)
c *** compute von-mises stress trial stress
S_etr =
& sigDev(1) * sigDev(1)+sigDev(2) * sigDev(2)+
& sigDev(3) * sigDev(3)+
& TWO*(sigDev(4) * sigDev(4)+ sigDev(5) * sigDev(5)+
& sigDev(6) * sigDev(6))
S_etr = sqrt( ONEHALF * S_etr)
c ***** compute Burzynski trial stress
S_B_eq = (HALF/k)* (3.0*(k-1.0)*S_mtr +
& sqrt( 9.0*((k-1.0)**2.0)*(S_mtr**2.0) +4.0*k*(S_etr**2.0) ))
c *****
fratio = S_B_eq / sigy - ONE

c *** check for yielding
IF (sigy .LE. ZERO.or.fratio .LE. -SMALL) GO TO 500
c
sigy_t = sigy
three0v2qEl = ONEHALF / S_etr
c *** compute derivative of the yield function
DO i=1, ncomp
    dfds(i) = three0v2qEl * sigDev(i)
END DO
one0v3G  = ONE / threeG
qEl0v3G  = S_etr * one0v3G
c
c
S_e = S_etr
S_m = S_mtr

```

```

deltaEq = 0
deltaEp = 0

c *** Newton-Raphson procedure for return mapping iteration
DO i = 1,NEWTON
c
d_deltaEp = ZERO
d_deltaEq = ZERO

pierw = sqrt(9.0D0*((k-1.0D0)**TWO)*(S_m**2.0D0) + 4.0D0*k*(S_e**2))

dF_dSe = TWO*S_e/pierw
dF_dSm = ONEHALF*((k-1.0D0)/k) *(1.0D0 + 3.0D0*(k-1.0D0)*S_m/pierw)

temp2 = 18.0D0*((k-1.0D0)**TWO)/(pierw**THREE)
d2F_dSmdSe = -S_e*S_m*temp2
d2F_d2Sm = (S_e**TWO)*temp2
d2F_d2Se = (S_m**TWO)*temp2

ddeltaEpl_eq_ddelta_Ep = S_m / sigy
ddeltaEpl_eq_ddelta_Eq = S_e / sigy

A11 = dF_dSe + deltaEp * (- BULK * d2F_dSmdSe) +
& deltaEq * ( BULK * d2F_d2Sm)
A12 = -dF_dSm + deltaEp * (- threeG * d2F_d2Se) +
& deltaEq * ( threeG * d2F_dSmdSe)
A21 = - BULK * dF_dSm - H * ddeltaEpl_eq_ddelta_Ep
A22 = - threeG * dF_dSe - H * ddeltaEpl_eq_ddelta_Eq

b1 = - deltaEp * dF_dSe + deltaEq * dF_dSm
b2 = -(HALF/k)*
&(THREE*(k-1.0D0)*S_m + sqrt( 9.0D0*((k-1.0D0)**2.0D0)*(S_m**2.0D0)
& + 4.0D0*k*(S_e**2.0D0) )) + sigy

d_deltaEp = ( b1*A22 - b2*A12 ) / ( A11*A22 - A21*A12 )
d_deltaEq = ( A11*b2 - A21*b1 ) / ( A11*A22 - A21*A12 )

deltaEp = deltaEp + d_deltaEp
deltaEq = deltaEq + d_deltaEq

S_m = S_mtr - BULK * deltaEp
S_e = S_etr - threeG * deltaEq

dpleq =(S_m*deltaEp + S_e*deltaEq ) / sigy

c *** Avoid negative equivalent plastic strain

```

```

dpleq = max (dpleq, sqTiny)
pleq = pleq_t + dpleq

call HARD_SLOPE(nProp, Actual_Temp_plastic_curve,size,pleq,interp,
&                                     H, sigy)

c *** Check Convergence
b_2 = -(HALF/k)*
&(THREE*(k-1.0D0)*S_m + sqrt( 9.0D0*((k-1.0D0)**2.0D0)*(S_m**2.0D0)
&                               + 4.0D0*k*(S_e**2.0D0) ) ) + sigy
b_1 = - deltaEp * dF_dSe + deltaEq * dF_dSm
c *** Check Convergence
IF ( (abs(b_2) .LT. 0.00000001 ).AND.
& (abs(b_1) .LT. 0.00000001 )) GO TO 100
END DO

c
c *** Uncovergence, set keycut to 1 for bisect/cut
keycut = 1
GO TO 990
100 CONTINUE
c
c *** update stresses
con1 = twoG * dpleq
DO i = 1 , nDirect
    stress(i) = S_m + S_e*sigDev(i)/S_etr
END DO

DO i = nDirect + 1 , ncomp
    stress(i) = S_e*sigDev(i)/S_etr
END DO

c
c *** update plastic strains
DO i = 1 , nDirect
    epsPl(i) = epsPl(i) + THIRD * deltaEp +
&                           deltaEq*ONEHALF*sigDev(i)/S_etr
END DO
DO i = nDirect + 1 , ncomp
    epsPl(i) = epsPl(i) + TWO*deltaEq*ONEHALF*sigDev(i)/S_etr
END DO

c ****
c *** Update state variables
ustatev(1) = pleq
epseq      = pleq
do i=1,ncomp
    ustatev(i+1) = epsPl(i)

```

```

    end do
c *** Update plastic work
    sedPl = sedPl + HALF * (sigy_t+sigy)*dpleq
c
c *** Material Jcobian matrix
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
ccccccc
pierw = sqrt(9.0D0*((k-1.0D0)**TWO)*(S_m**2.0D0) + 4.0D0*k*(S_e**2))

dF_dSe = TWO*S_e/pierw
dF_dSm = ONEHALF*((k-1.0D0)/k) *(1.0D0 + 3.0D0*(k-1.0D0)*S_m/pierw)

temp2 = 18.0D0*((k-1.0D0)**TWO)/(pierw**THREE)
d2F_dSmdSe = -S_e*S_m*temp2
d2F_d2Sm = (S_e**TWO)*temp2
d2F_d2Se = (S_m**TWO)*temp2
cccccccc

A_11 = dF_dSe
A_12 = -dF_dSm
A_21 = -H * (S_m / sigy)
A_22 = -H * S_e / sigy

B_11 = -THIRD*deltaEp*d2F_dSm*dSe + THIRD*deltaEq*d2F_d2Sm
B_12 = - deltaEp*d2F_d2Se + deltaEq*d2F_dSm*dSe
B_21 = THIRD*(-dF_dSm + H* ( deltaEp / sigy) )
B_22 = -(dF_dSe -H* (deltaEq / sigy) )

delta_C = (A_11 + 3*BULK*B_11)*(A_22 + 3*mi*B_22) -
& (A_12 + 3*mi*B_11)*(A_21 + 3*BULK*B_21)
C_11 = ((A_22 + THREE*mi*B_22) *B_11 -
& (A_12 + THREE*mi*B_12)*B_21)/delta_C
C_21 = ((A_11 + THREE*BULK*B_11)*B_21 -
& (A_21 + THREE*BULK*B_21)*B_11)/delta_C
C_12 = ((A_22 + THREE*mi*B_22) *B_12 -
& (A_12 + THREE*mi*B_12)*B_22)/delta_C
C_22 = ((A_11 + THREE*BULK*B_11)*B_22 -
& (A_21 + THREE*BULK*B_21)*B_12)/delta_C

d0 = twoG*S_e/S_etR
d1 = BULK - THIRD*twoG*S_e/S_etR - THREE*(BULK**2)*C_11
d2 = FOUR*(mi**2)*deltaEq/S_etR - FOUR*(mi**2)*C_22
d3 = -twoG*BULK*C_12
d4 = -SIX*mi*BULK*C_21

```

```

do i=1,6
    NN(i) = ONEHALF* (sigDev(i)/S_etra )
end do
ccccc dodaje d2
do i=1,6
    do j=1,6
        if( (i.ge.4) .or. (j.ge.4) ) then
            dsdePl(i,j) = HALF *d2* NN(i)*NN(j)
            GOTO 200
        end if

        dsdePl(i,j) = d2* NN(i)*NN(j)

200 continue
    end do
end do
ccccc dodaje d0 i d1 dla 1 cwiartki
do i=1,3
    do j=1,3
        dsdePl(i,j) = dsdePl(i,j) + d1
    end do

        dsdePl(i,i) = dsdePl(i,i) + d0
    end do
ccccc dodaje d0 dla 4 cwiartki
do i=4,6
    dsdePl(i,i) = dsdePl(i,i) + HALF*d0
end do
ccccc dodaje d3 do gornej polowki
do i=1,3
    do j=1,6

        if(j .ge. 4) then
            dsdePl(i,j) = dsdePl(i,j) + HALF*d3* NN(j)
            GOTO 300
        end if

        dsdePl(i,j) = dsdePl(i,j) + d3*NN(j)
300 continue

    end do
end do

ccccc dodaje d4 do lewej polowki

```



```

DOUBLE PRECISION prop (nProp), Actual_Temp_plastic_curve(nProp)

DOUBLE PRECISION Temp,
& T1, T2,
& sigT1, sigT2, sig, temporaryA_sig,
& max_eps_pl, max_eps_pl_01, max_eps_pl_02,
& d_eps_pl

size = 0
cccccccccccc
cccccccccccc jezeli jeden punkt plastyczosc
IF (prop(2) . eq. 1) THEN
    Point_Temp = 3 + prop(1) + 2*prop(2) + 3*prop(1) + 1
    size = 2*prop(3 + prop(1) + prop(2) + 1)

    do j=1,size
        Actual_Temp_plastic_curve(j) = prop(Point_Temp + j)
    end do
    GOTO 10
END IF
ccccccccccccccc
ccccccccccccccc

c "size" podaje ilosc punktow plastyczosci dla aktualnej krzywej, tzn. (eps_pl + sigma)
licznik = 0
c "licznik" zlicza liczbe punktow plastyczosci dla poprzedniego kroku "i"
DO i=1, ( prop(2)-1 )
c "i" petla po temperaturach dla zakresu plastycznego

    IF ( Temp.le.prop(3 + prop(1) + 1) ) THEN
c jezeli Temp jest mniejsza lub rowna od pierwszego punktu temperatutowego
        Point_Temp = 3 + prop(1) + 2*prop(2) + 3*prop(1) + 1
        size = 2*prop(3 + prop(1) + prop(2) + 1)

        do j=1,size
            Actual_Temp_plastic_curve(j) = prop(Point_Temp + j)
        end do

        GOTO 10

    ELSE IF (Temp .eq. prop(3 + prop(1) + i) ) THEN
c jezeli Temp jest rowna danemu punktowi temperatutowemu
        Point_Temp = 3 + prop(1) + 2*prop(2) +
&                         3*prop(1) + (i-1) + licznik + 1
        size = 2*prop(3 + prop(1) + prop(2) + i)

```

```

do j=1,size
    Actual_Temp_plastic_curve(j) = prop(Point_Temp + j)
end do

GOTO 10

ELSE IF ( (Temp .gt. prop(3 + prop(1) + i) ) .and.
&           (Temp .lt. prop(3 + prop(1) + i +1) )      ) THEN
c jezeli Temp jest w przedziale
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
    Point_Temp1 = 3 + prop(1) + 2*prop(2) +
&               3*prop(1) + (i-1) + licznik + 1
    size_01 = 2*prop(3 + prop(1) + prop(2) + i )

    Point_Temp2 = Point_Temp1 + size_01 + 1
    size_02 = 2*prop(3 + prop(1) + prop(2) + i + 1)

    call interpolate(nProp, prop, Temp, Point_Temp1,
&                   Point_Temp2, size_01, size_02,
&                   Actual_Temp_plastic_curve, size)

c
GOTO 10
ELSE IF ( ( i .eq. (prop(2) - 1) ) .and.
&           (Temp .eq. prop(3 + prop(1)+ i + 1) ) ) THEN
c jezeli Temp jest rowna ostatniemu punktowi temperaturowemu

    size_i = 2*prop(3 + prop(1) + prop(2) + i )
    Point_Temp = 3 + prop(1) + 2*prop(2) +
&               3*prop(1) + i + licznik + size_i + 1

    size = 2*prop(3 + prop(1) + prop(2) + i +1 )

    do j=1,size
        Actual_Temp_plastic_curve(j) = prop(Point_Temp + j)
    end do

GOTO 10

ELSE IF ( ( i .eq. (prop(2)-1) ) .and.
&           ( Temp .gt. prop(3+prop(1)+i+1) )      ) THEN
c jezeli Temp jest poza danymi temperaturowmi

    if (prop(3) .eq. 0) then

        size_i = 2*prop(3 + prop(1) + prop(2) + i )

```

```

      Point_Temp = 3 + prop(1) + 2*prop(2) +
      &           3*prop(1) + i + licznik + size_i + 1

      size = 2*prop(3 + prop(1) + prop(2) + i +1)

      do j=1,size
         Actual_Temp_plastic_curve(j) =prop(Point_Temp + j)
      end do

      GOTO 10
      else if (prop(3) .eq. 1) then
cccccccccccccccccc
      Point_Temp1 = 3 + prop(1) + 2*prop(2) +
      &           3*prop(1) + (i-1) + licznik + 1
      size_01 = 2*prop(3 + prop(1) + prop(2) + i )

      Point_Temp2 = Point_Temp1 + size_01 + 1
      size_02 = 2*prop(3 + prop(1) + prop(2) + i + 1)

      call interpolate(nProp, prop, Temp, Point_Temp1,
      &                  Point_Temp2, size_01, size_02,
      &                  Actual_Temp_plastic_curve, size)

      GOTO 10
      end if
END IF

      licznik = licznik + ( 2*prop(3+ prop(1) +prop(2) + i) )
c licznik zlicza liczbe punktow plastycznosci dla poprzedniego kroku "i"
      END DO

10    CONTINUE
c
c
      return
      end
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
      subroutine HARD_SLOPE(nProp, Actual_Temp_plastic_curve, size,pleq,
      &                      interp,      H, sigy)

      INTEGER      nProp, size, interp,
      &              Points_number, i

      DOUBLE PRECISION   Actual_Temp_plastic_curve (nProp)

```

```

      DOUBLE PRECISION  pleq, H,
&                      pleq0, pleq1, delta_p eq,
&                      syield0, syield1, delta_syield, sigy
c
      H = 0.00

      Points_number = size/2
      DO i=1, Points_number - 1
          pleq1 = Actual_Temp_plastic_curve(i*2 + 1)
c pleq1 -> wskazuje odksztalcenia plastyczne prawej strony aktualnego przedzialu
          IF (pleq.le.p eq1) THEN
c pleq0 -> wskazuje odksztalcenia plastyczne lewej strony aktualnego przedzialu
          pleq0 = Actual_Temp_plastic_curve(i*2 - 1)
          delta_p eq = pleq1 - pleq0

          syield0 = Actual_Temp_plastic_curve(i*2)
          syield1 = Actual_Temp_plastic_curve(i*2 + 2)
          delta_syield = syield1 - syield0
          H = delta_syield/delta_p eq
          sigy = syield0 + H*(pleq - pleq0)
          GOTO 10

      ELSE IF (i .eq. Points_number - 1) THEN
          if (interp .eq. 0) then
              H = 0.0
              syield1 = Actual_Temp_plastic_curve(i*2 + 2)
              sigy = syield1
              GOTO 10
          else if (interp .eq. 1) then
              pleq0 = Actual_Temp_plastic_curve(i*2 - 1)
              delta_p eq = pleq1 - pleq0

              syield0 = Actual_Temp_plastic_curve(i*2)
              syield1 = Actual_Temp_plastic_curve(i*2 + 2)
              delta_syield = syield1 - syield0
              H = delta_syield/delta_p eq
              sigy = syield1 + H*(pleq - pleq1)
              GOTO 10
          end if
      END IF
      END DO

10   CONTINUE
c
      return
      end

```



```

        mi = prop(Point_Temp + 2)
        GOTO 10

    ELSE IF ( (Temp .gt. prop(3+i) ) .and.
              &                               (Temp .lt. prop(3+i+1)) ) THEN
c jezeli Temp jest w przedziale
        Point_Temp1 = 3 + prop(1) + 2*prop(2) + 3*(i-1) + 1
        Point_Temp2 = 3 + prop(1) + 2*prop(2) + 3*i + 1

        T1 = prop(Point_temp1)
        E1 = prop(Point_temp1 + 1)
        mi1 = prop(Point_temp1 + 2)

        T2 = prop(Point_temp2)
        E2 = prop(Point_temp2 + 1)
        mi2 = prop(Point_temp2 + 2)

        temporaryA_E = (E1 - E2)/(T1 - T2)
        temporaryA_mi = (mi1 - mi2)/(T1 - T2)

        E = Temp*temporaryA_E + E1 - temporaryA_E*T1
        mi = Temp*temporaryA_mi + mi1 - temporaryA_mi*T1
        GOTO 10

    ELSE IF ( ( i .eq. (prop(1) - 1) ) .and.
              &                               (Temp .eq. prop(3 + i + 1) ) ) THEN
c jezeli Temp jest rowna ostatniemu punktowi temperaturowemu
        Point_Temp = 3 + prop(1) + 2*prop(2) + 3*i + 1

        E = prop(Point_Temp + 1)
        mi = prop(Point_Temp + 2)
        GOTO 10

    ELSE IF ( (Temp .gt. prop(3 + i + 1) ) .and.
              &                               ( i .eq. (prop(1) - 1) ) ) THEN
c jezeli Temp jest poza danymi temperaturowymi
if (prop(3) .eq. 0) then

        Point_Temp = 3 + prop(1) + 2*prop(2) + 3*i + 1
        E = prop(Point_Temp + 1)
        mi = prop(Point_Temp + 2)
GOTO 10

else if (prop(3) .eq. 1) then
        Point_Temp1 = 3 + prop(1) + 2*prop(2) + 3*(i-1) + 1
        Point_Temp2 = 3 + prop(1) + 2*prop(2) + 3*(i) + 1

```

```

        T1 = prop(Point_temp1)
        E1 = prop(Point_temp1 + 1)
        mi1 = prop(Point_temp1 + 2)

        T2 = prop(Point_temp2)
        E2 = prop(Point_temp2 + 1)
        mi2 = prop(Point_temp2 + 2)

        temporaryA_E = (E1 - E2)/(T1 - T2)
        temporaryA_mi = (mi1 - mi2)/(T1 - T2)

        E = Temp*temporaryA_E + E1 - temporaryA_E*T1
        mi = Temp*temporaryA_mi + mi1 - temporaryA_mi*T1
        GOTO 10

end if

END IF

END DO

10  CONTINUE

      return
      end
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
      subroutine interpolate(nProp, prop, Temp, Point_Temp1,
      &                           Point_Temp2, size_01, size_02,
      &                           Atpc, size)

      INTEGER      nProp,i, j, interp,
      &             size, size_01, size_02,
      &             Point_Temp, Point_Temp1, Point_Temp2,
      &             licznik, start_T2

      DOUBLE PRECISION   prop (nProp), Atpc(nProp)

      DOUBLE PRECISION   Temp, T1, T2,
      &             max_eps_pl, max_eps_pl_01, max_eps_pl_02,
      &             d_eps_pl, pleqT, pleqT1, pleqT2,
      &             sigT1, sigT2, temporaryA_sig, sig

```

```

interp = prop(3)

T1 = prop(Point_Temp1)
T2 = prop(Point_Temp2)

max_eps_pl_01 = prop(Point_Temp1 + size_01 -1)
max_eps_pl_02 = prop(Point_Temp2 + size_02 -1)

c dane dla pierwszego punktu
Atpc(1) = 0.0

sigT1 = prop(Point_Temp1 + 2)
sigT2 = prop(Point_Temp2 + 2)

temporaryA_sig = (sigT1 - sigT2)/(T1 - T2)
sig = temporaryA_sig*Temp + sigT1 - temporaryA_sig*T1

Atpc(2) = sig
size = 1
licznik = 1

IF (max_eps_pl_01 .ge. max_eps_pl_02) THEN
    start_T2 = 3
    do i=3,(size_01-1),2
c i petla po pierwszej krzywej, dla temperatury T1
    pleqT1 = prop(Point_Temp1 + i)
    do j=start_T2,(size_02-1),2
c j petla po drugiej krzywej, dla temperatury T2
    pleqT2 = prop(Point_Temp2 + j)
    if (pleqT2 .le. pleqT1) then
        size = size + 2
        Atpc(size) = pleqT2
        start_T2 = start_T2 + 2
        licznik = licznik + 1
    GOTO 20
    else if (pleqT1 .lt. pleqT2) then
        size = size + 2
        Atpc(size) = pleqT1
    GOTO 30
c wychodzi z petli po 1 kroku
    end if

20          CONTINUE
end do

```

```

        if (licznik .eq. (size_02/2) ) then
            size = size + 2
            Atpc(size) = pleqT1
        end if

30      CONTINUE
end do

        size = size + 1
        GOTO 10
ELSE IF (max_eps_pl_01 .lt. max_eps_pl_02) THEN
cccccccccccccccccc
        start_T1 = 3
        do i=3,(size_02-1),2
c i petla po pierwszej krzywej, dla temperatury T2
            pleqT2 = prop(Point_Temp2 + i)
            do j=start_T1,(size_01-1),2
c j petla po drugiej krzywej, dla temperatury T1
                pleqT1 = prop(Point_Temp1 + j)
                if (pleqT1 .le. pleqT2) then
                    size = size + 2
                    Atpc(size) = pleqT1
                    start_T1 = start_T1 + 2
                    licznik = licznik + 1
                    GOTO 40
                else if (pleqT2 .lt. pleqT1) then
                    size = size + 2
                    Atpc(size) = pleqT2
                    GOTO 50
c wychodzi z petli po 1 kroku
                end if

40      CONTINUE
end do

        if (licznik .eq. (size_01/2) ) then
            size = size + 2
            Atpc(size) = pleqT2
        end if

50      CONTINUE
end do

        size = size + 1
cccccccccccccccccc
        GOTO 10

```



```

        sigT1 = prop(Point_Temp1 + m + 1)
        start_T1 = start_T1 + 2
        GOTO 20
    else
        pleqT1_0 = prop(Point_Temp1 + m-2)
        pleqT1_1 = prop(Point_Temp1 + m)

        sigT1_0 = prop(Point_Temp1 + m -2 + 1)
        sigT1_1 = prop(Point_Temp1 + m + 1)

        temporaryA_sigT1 =
&           (sigT1_0 - sigT1_1)/(pleqT1_0 - pleqT1_1)
        sigT1 = temporaryA_sigT1 * pleqT + sigT1_0 -
&           temporaryA_sigT1*pleqT1_0
        GOTO 20
    end if

ELSE IF (m . eq. (size_01-1) ) THEN
    if (interp .eq. 0) then

        sigT1 = prop(Point_Temp1 + size_01)
        GOTO 20
    else if (interp .eq. 1) then
        pleqT1_0 = prop(Point_Temp1 + m-2)
        pleqT1_1 = prop(Point_Temp1 + m)

        sigT1_0 = prop(Point_Temp1 + m -2 + 1)
        sigT1_1 = prop(Point_Temp1 + m + 1)

        temporaryA_sigT1 =
&           (sigT1_0 - sigT1_1)/(pleqT1_0 - pleqT1_1)
        sigT1 = temporaryA_sigT1 * pleqT + sigT1_0 -
&           temporaryA_sigT1*pleqT1_0
        GOTO 20
    end if
END IF
end do

```

20 CONTINUE

```

c znajduje sigT1 dla pierwszej temperatury
do m = start_T2,(size_02-1),2
IF ( pleqT .le. prop(Point_Temp2 + m) ) THEN

if (pleqT .eq. prop(Point_Temp2 + m)) then
    sigT2 = prop(Point_Temp2 + m + 1)
    start_T2 = start_T2 + 2

```

```

        GOTO 30
    else
        pleqT2_0 = prop(Point_Temp2 + m-2)
        pleqT2_1 = prop(Point_Temp2 + m)

        sigT2_0 = prop(Point_Temp2 + m -2 + 1)
        sigT2_1 = prop(Point_Temp2 + m + 1)

        temporaryA_sigT2 =
&           (sigT2_0 - sigT2_1)/(pleqT2_0 - pleqT2_1)
        sigT2 = temporaryA_sigT2 * pleqT + sigT2_0 -
&           temporaryA_sigT2*pleqT2_0
        GOTO 30
    end if

ELSE IF (m . eq. (size_02-1) ) THEN
    if (interp .eq. 0) then

        sigT2 = prop(Point_Temp2 + size_02)
        GOTO 30
    else if (interp .eq. 1) then
        pleqT2_0 = prop(Point_Temp2 + m-2)
        pleqT2_1 = prop(Point_Temp2 + m)

        sigT2_0 = prop(Point_Temp2 + m -2 + 1)
        sigT2_1 = prop(Point_Temp2 + m + 1)

        temporaryA_sigT2 =
&           (sigT2_0 - sigT2_1)/(pleqT2_0 - pleqT2_1)
        sigT2 = temporaryA_sigT2 * pleqT + sigT2_0 -
&           temporaryA_sigT2*pleqT2_0
        GOTO 30
    end if
END IF
end do

30      CONTINUE

temporaryA_sigT = (sigT1 - sigT2)/(T1 - T2)
c
sigT = temporaryA_sigT*Temp + sigT1 - temporaryA_sigT*T1
Atpc(i+1) = sigT

END DO

return
end

```

Dodatek F

Analiza thermal-FSI

F.1 Dane materiału ASTM 310

Moduł Younga oraz współczynnik rozszerzalności cieplnej w funkcji temperatury na podstawie [238] przedstawiono w Tabelach F.1, F.2.

ASTM 310 Young's modulus [MPa]																
Temp. [°C]	27	93	149	204	260	316	371	427	482	538	593	649	704	760	816	871
E [GPa]	200	194	190	185	181	176	172	167	163	159	154	150	146	141	131	132

Tabela F.1: Moduł Younga materiału ASTM 310 w funkcji temperatury.

ASTM 310 secant coefficients of thermal expansion					
Temp. range [°C]	0 -100	0 - 315	0 - 538	0 - 649	0 - 981
$\alpha \cdot 10^6$	15.9	16.2	17.0	17.5	19.1

Tabela F.2: Współczynnik rozszerzalności cieplnej materiału ASTM 310.