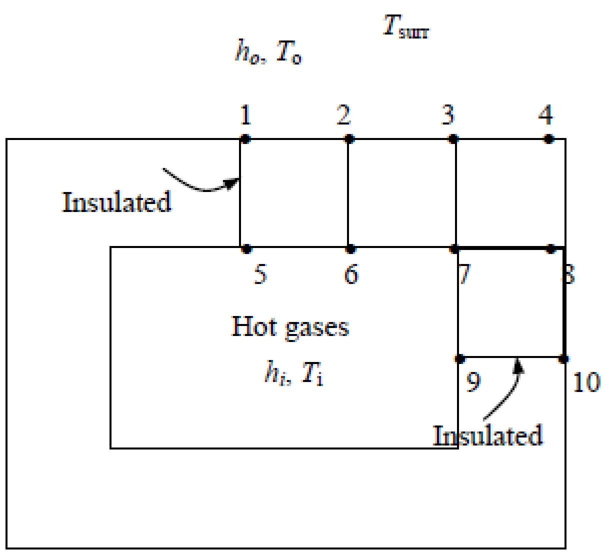
Wyznaczyć dwuwymiarowy rozkład ciepła w przekroju poprzecznym komina o przekroju kwadratowym za pomocą metody różnic skończonych.
Założenia
1 Przyjmuje się, że wymiana ciepła jest stała i dwuwymiarowa, ponieważ wysokość komina jest duża w stosunku do jego przekroju poprzecznego, a zatem przewodzenie ciepła przez komin w kierunku osiowym jest pomijalne.
2 W kominie brak wewnętrznych źródeł ciepła.
3 Przewodność cieplna jest stała.
Dane
$l$ = 0.1 m (wysokość i szerokość objętości skończonej), $k$ = 1.4 W/m·°C, $h$i = 75 W/m$^2$·°C, $T$i =280°C, $h$o = 18 W/m$^2$·°C, $T_0$ =15°C, $T_{surr}$ =250 K, ε = 0.9, and σ = 5.67×10-8 W/m$^2$.K$^4$.

Heat transfer through a square chimney is considered. The nodal temperatures are to be determined with the finite difference method.

***Assumptions***

**1** Heat transfer is given to be steady and two-dimensional since the height of the chimney is large relative to its cross-section, and thus heat conduction through the chimney in the axial direction is negligible.
**2** There is no heat generation in the chimney.
**3** Thermal conductivity is constant.

***Properties*** $l$ = 0.1 m, $k$ = 1.4 W/m·°C, $h$i = 75 W/m$^2$·°C, $T$i =280°C, $h$o = 18 W/m$^2$·°C, $T_0$ =15°C, $T_{surr}$ =250 K, ε = 0.9, and σ = 5.67×10-8 W/m$^2$.K$^4$.



Pełne równania:

- Węzeł 1

$$\frac{h_0 l}{2} \cdot (T_0 - T_1) + \frac{k}{2} \cdot (T_2 - T_1) + \frac{k}{2} \cdot (T_5 - T_1) + \frac{\epsilon \sigma l}{2} \cdot (T_{surr}^4 - T_1^4) = 0$$

- Węzeł 2

$$h_0 l \cdot (T_0 - T_2) + \frac{k}{2} \cdot (T_1 - T_2) + \frac{k}{2} \cdot (T_3 - T_2) + k \cdot (T_6 - T_2) + \epsilon \sigma l \cdot (T_{surr}^4 - T_2^4) = 0$$

- Węzeł 3

$$h_0 l \cdot (T_0 - T_3) + \frac{k}{2} \cdot (T_2 - T_3) + \frac{k}{2} \cdot (T_4 - T_3) + k \cdot (T_7 - T_3) + \epsilon \sigma l \cdot (T_{surr}^4 - T_3^4) = 0$$

- Węzeł 4

$$h_0 l \cdot (T_0 - T_4) + \frac{k}{2} \cdot (T_3 - T_4) + \frac{k}{2} \cdot (T_8 - T_4) + \epsilon \sigma l \cdot (T_{surr}^4 - T_4^4) = 0$$

- Węzeł 5

$$\frac{h_i l}{2} \cdot (T_i - T_5) + \frac{k}{2} \cdot (T_6 - T_5) + \frac{k}{2} \cdot (T_1 - T_5) = 0$$

- Węzeł 6

$$h_i l \cdot (T_i - T_6) + \frac{k}{2} \cdot (T_5 - T_6) + \frac{k}{2} \cdot (T_7 - T_6) + k \cdot (T_2 - T_6) = 0$$

- Węzeł 7

$$h_i l \cdot (T_i - T_7) + \frac{k}{2} \cdot (T_6 - T_7) + \frac{k}{2} \cdot (T_9 - T_7) + k \cdot (T_3 - T_7) + k \cdot (T_8 - T_7) = 0$$

- Węzeł 8

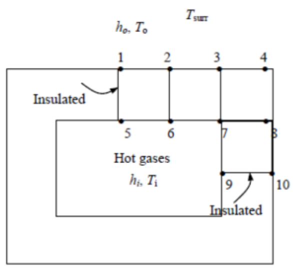
$$h_0 l \cdot (T_0 - T_8) + \frac{k}{2} \cdot (T_4 - T_8) + \frac{k}{2} \cdot (T_{10} - T_8) + k \cdot (T_7 - T_8) + \epsilon \sigma l \cdot (T_{surr}^4 - T_8^4) = 0$$

- Węzeł 9

$$\frac{h_i l}{2} \cdot (T_i - T_9) + \frac{k}{2} \cdot (T_7 - T_9) + \frac{k}{2} \cdot (T_{10} - T_9) = 0$$

- Węzeł 10

$$\frac{h_0 l}{2} \cdot (T_0 - T_{10}) + \frac{k}{2} \cdot (T_8 - T_{10}) + \frac{k}{2} \cdot (T_9 - T_{10}) + \frac{\epsilon \sigma l}{2} \cdot (T_{surr}^4 - T_{10}^4) = 0$$



Zakładam, że promieniowanie można zaniedbać:

- Węzeł 1

$$\frac{h_0 l}{2} \cdot (T_0 - T_1) + \frac{k}{2} \cdot (T_2 - T_1) + \frac{k}{2} \cdot (T_5 - T_1) = 0$$

$$T_1 \cdot (-h_0 l - 2k) + T_2 \cdot k + T_5 \cdot k = -h_0 l \cdot T_0$$

- Węzeł 2

$$h_0 l \cdot (T_0 - T_2) + \frac{k}{2} \cdot (T_1 - T_2) + \frac{k}{2} \cdot (T_3 - T_2) + k \cdot (T_6 - T_2) = 0$$

$$T_1 \cdot \frac{k}{2} + T_2(-h_0 l - 2k) + T_3\left(\frac{k}{2}\right) + T_6 \cdot k = -h_0 l \cdot T_0$$

- Węzeł 3

$$h_0 l \cdot (T_0 - T_3) + \frac{k}{2} \cdot (T_2 - T_3) + \frac{k}{2} \cdot (T_4 - T_3) + k \cdot (T_7 - T_3) = 0$$

$$T_2\left(\frac{k}{2}\right) + T_3(-h_0 l - 2k) + T_4\left(\frac{k}{2}\right) + T_7(k) = -h_0 l \cdot T_0$$

- Węzeł 4

$$h_0 l \cdot (T_0 - T_4) + \frac{k}{2} \cdot (T_3 - T_4) + \frac{k}{2} \cdot (T_8 - T_4) = 0$$

$$T_3\left(\frac{k}{2}\right) + T_4(-h_0 l - k) + T_8\left(\frac{k}{2}\right) = -h_0 l \cdot T_0$$

- Węzeł 5

$$\frac{h_i l}{2} \cdot (T_i - T_5) + \frac{k}{2} \cdot (T_6 - T_5) + \frac{k}{2} \cdot (T_1 - T_5) = 0$$

$$T_1\left(\frac{k}{2}\right) + T_5\left(-\frac{h_i l}{2} - k\right) + T_6\left(\frac{k}{2}\right) = -\frac{h_i l}{2} T_i$$

- Węzeł 6

$$h_i l \cdot (T_i - T_6) + \frac{k}{2} \cdot (T_5 - T_6) + \frac{k}{2} \cdot (T_7 - T_6) + k \cdot (T_2 - T_6) = 0$$

$$T_2(k) + T_5\left(\frac{k}{2}\right) + T_6(-h_i l - 2k) + T_7\left(\frac{k}{2}\right) = -h_i l \cdot T_i$$

- Węzeł 7

$$h_i l \cdot (T_i - T_7) + \frac{k}{2} \cdot (T_6 - T_7) + \frac{k}{2} \cdot (T_9 - T_7) + k \cdot (T_3 - T_7) + k \cdot (T_8 - T_7) = 0$$

$$T_3(k) + T_6\left(\frac{k}{2}\right) + T_7(-h_i l - 3k) + T_8(k) + T_9\left(\frac{k}{2}\right) = -h_i l \cdot T_i$$

- Węzeł 8

$$h_0 l \cdot (T_0 - T_8) + \frac{k}{2} \cdot (T_4 - T_8) + \frac{k}{2} \cdot (T_{10} - T_8) + k \cdot (T_7 - T_8) = 0$$

$$T_4\left(\frac{k}{2}\right) + T_7(k) + T_8(-h_0 l - 2k) + T_{10}\left(\frac{k}{2}\right) = -h_0 l \cdot T_0$$

- Węzeł 9

$$\frac{h_i l}{2} \cdot (T_i - T_9) + \frac{k}{2} \cdot (T_7 - T_9) + \frac{k}{2} \cdot (T_{10} - T_9) = 0$$

$$T_7\left(\frac{k}{2}\right) + T_9\left(-\frac{h_i l}{2} - k\right) + T_{10}\left(\frac{k}{2}\right) = -\frac{h_i l}{2} \cdot T_i$$

- Węzeł 10

$$\frac{h_0 l}{2} \cdot (T_0 - T_{10}) + \frac{k}{2} \cdot (T_8 - T_{10}) + \frac{k}{2} \cdot (T_9 - T_{10}) = 0$$

$$T_8\left(\frac{k}{2}\right) + T_9\left(\frac{k}{2}\right) + T_{10}\left(-\frac{h_0 l}{2} - k\right) = -\frac{h_0 l}{2} \cdot T_0$$

Obliczenia numeryczne przeprowadzono w języku Python (za pomocą modułu numpy):

# finite_difference_method

May 19, 2022

[2]:
```
import numpy as np
```

Dane:

[3]:
```
l = 0.1 # wysokość i szerokość objętości skończonej, m
k = 1.4 # W/m/K
hi = 75 # W/m2/K
Ti = 280+273.15 # K
h0 = 18 # W/m2/K
T0 = 15+273.15 # K
Tsurr = 250 # K
epsi = 0.9
sigma = 5.67*10**(-8) # W/m2/K4
```

[7]:
```
A = np.array([[-h0*l-2*k, k, 0, 0, k, 0, 0, 0, 0, 0],
              [k/2, -h0*l-2*k, k/2, 0, 0, k, 0, 0, 0, 0],
              [0, k/2, -h0*l-2*k, k/2, 0, 0, k, 0, 0, 0],
              [0, 0, k/2, -h0*l-k, 0, 0, 0, k/2, 0, 0],
              [k/2, 0, 0, 0, -hi*l/2-k, k/2, 0, 0, 0, 0],
              [0, k, 0, 0, k/2, -hi*l-2*k, k/2, 0, 0, 0],
              [0, 0, k, 0, 0, k/2, -hi*l-3*k, k, k/2, 0],
              [0, 0, 0, k/2, 0, 0, k, -h0*l-2*k, 0, k/2],
              [0, 0, 0, 0, 0, 0, k/2, 0, -hi*l/2-k, k/2],
              [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, k/2, k/2, -h0*l/2-k]])
```

[8]:
```
print(A)
```

```
[[ -4.6    1.4    0.     0.     1.4    0.     0.     0.     0.     0.  ]
 [  0.7   -4.6    0.7    0.     0.     1.4    0.     0.     0.     0.  ]
 [  0.     0.7   -4.6    0.7    0.     0.     1.4    0.     0.     0.  ]
 [  0.     0.     0.7   -3.2    0.     0.     0.     0.7    0.     0.  ]
 [  0.7    0.     0.     0.    -5.15   0.7    0.     0.     0.     0.  ]
 [  0.     1.4    0.     0.     0.7  -10.3    0.7    0.     0.     0.  ]
 [  0.     0.     1.4    0.     0.     0.7  -11.7    1.4    0.7    0.  ]
 [  0.     0.     0.     0.7    0.     0.     1.4   -4.6    0.     0.7 ]
 [  0.     0.     0.     0.     0.     0.     0.7    0.    -5.15   0.7 ]
 [  0.     0.     0.     0.     0.     0.     0.     0.7    0.7   -2.3 ]]
```

[9]:
```
B = np.array([
    [-h0*l*T0],
    [-h0*l*T0],
    [-h0*l*T0],
    [-h0*l*T0],
    [-hi*l*Ti/2],
    [-hi*l*Ti],
    [-hi*l*Ti],
    [-h0*l*T0],
    [-hi*l*Ti/2],
    [-h0*l*T0/2]
])
```

[10]:
```
print(B)
```

```
[[ -518.67  ]
 [ -518.67  ]
 [ -518.67  ]
 [ -518.67  ]
 [-2074.3125]
 [-4148.625 ]
 [-4148.625 ]
 [ -518.67  ]
 [-2074.3125]
 [ -259.335 ]]
```

[11]:
```
T_distribution = np.dot(
    np.linalg.inv(A),B
)
```

[13]:
```
print("Rozkład temperatur, K")
print(T_distribution)
```

```
Rozkład temperatur, K
[[391.93808002]
 [389.75793671]
 [376.18535407]
 [326.56278598]
 [527.56004049]
 [526.09293215]
 [507.39865916]
 [375.71595327]
 [524.30347057]
 [386.67330291]]
```

[ ]: