ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

**Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова**

**Домашняя работа по дисциплине**
**«Моделирование систем и процессов»**

Работу выполнили:
Макарова Анастасия
Файзуллина Камилла

# 1 Задача 1

## 1.1 Привести уравнения системы к безразмерному и отмасштабированному виду спомощью указанных ниже замен и проводить исследования для полученнойсистемы

**1. Модель взаимодействия для популяций хищник-жертва с численностями $M(t)$ (хищник) и $N(t)$ (жертва) и с внутривидовым самоограничением их численностей по логистическому типу:**

$$\frac{dM}{dt} = a_1 M(-1 + b_1 N - \frac{M}{k_1}),$$
$$\frac{dN}{dt} = a_2 N(1 - b_2 M - \frac{N}{k_2}),$$

**где $a_i$ $b_i, k_i > 0$.**

$$\text{для 1-ой модели}: \; t = 10 \cdot \widetilde{t};$$
$$a_j = 10^{-1} \cdot \widetilde{a}_j;$$
$$M = M(0) \cdot \widetilde{M}, \quad N = N(0) \cdot \widetilde{N};$$
$$b_1 = \widetilde{b}_1 / N(0), \quad b_2 = \widetilde{b}_2 / M(0);$$
$$b_1 = \widetilde{b}_1 / N(0), \quad b_2 = \widetilde{b}_2 / M(0).$$
$$k_1 = M(0) \cdot \widetilde{k_1}, \quad k_2 = N(0) \cdot \widetilde{k_2}.$$

$$\begin{cases} \mathrm{d}\,\widetilde{M}/d\widetilde{t} = \widetilde{a_1}\widetilde{M}(-1 + \widetilde{b_1}\widetilde{N} - \frac{\widetilde{M}}{\widetilde{k_1}}) \\ \mathrm{d}\,\widetilde{N}/d\widetilde{t} = \widetilde{a_2}\widetilde{N}(-1 - \widetilde{b_2}\widetilde{M} - \frac{\widetilde{N}}{\widetilde{k_2}}) \end{cases}$$

$$\widetilde{b_1} = b_1 N(0) = 1 * 10^{-4} * 2 * 10^4 = 2$$

$$\widetilde{b_2} = b_2 M(0) = 2 * 10^{-4} * 2 * 10^4 = 4$$

$$\widetilde{a_1} = 10 a_1 = 10 * 1 * 10^{-1} = 1$$

$$\widetilde{a_2} = 10 a_1 = 10 * 2 * 10^{-1} = 2$$

$$\widetilde{k_1} = \frac{k_1}{M(0)} = \frac{10^4}{2 * 10^4} = 0.5$$

$$\widetilde{k_2} = \frac{k_2}{N(0)} = \frac{10^4}{2 * 10^4} = 0.5$$

Итоговая система:

$$\begin{cases} \mathrm{d}\,\widetilde{M}/d\widetilde{t} = \widetilde{M}(-1 + 2\widetilde{N} - 2\widetilde{M}) \\ \mathrm{d}\,\widetilde{N}/d\widetilde{t} = 2\widetilde{N}(1 - 4\widetilde{M} - 2\widetilde{N}) \end{cases}$$

### 1.2 Найти точки покоя, исследовать аналитически их устойчивость по первому приближению и дать интепретацию полученных результатов

Для поиска точек покоя решим следующую систему:

$$\begin{cases} \mathrm{d}\widetilde{M}/d\widetilde{t} = 0 \\ \mathrm{d}\widetilde{N}/d\widetilde{t} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widetilde{M}(-1 + 2\widetilde{N} - 2\widetilde{M}) = 0 \\ 2\ \widetilde{N}(1 - 4\widetilde{M} - 2\widetilde{N}) = 0 \end{cases}$$

В результате полчим следующие пары решений $(M_0, N_0)$:

$$(0; 0), (-0.5; 0), (0; 0.5)$$

Для исследования устойчивости этих точек покоя рассмотрим решения в следующем виде:

$$\widetilde{M} = M_0 + m$$

$$\widetilde{N} = N_0 + n$$

Система примет вид:

$$\begin{cases} \mathrm{dm}\ /\ \mathrm{d}\widetilde{t} = (M_0 + m)(-1 + 2(N_0 + n) - 2(M_0 + m)) \\ \mathrm{dn}\ /\ \mathrm{d}\widetilde{t} = 2(N_0 + n)(1 - 4(M_0 + m) - 2(N_0 + n)) \end{cases}$$

Пренебрегая в в правых частях слагаемыми второго порядка малости и оставляя линейные слагаемые получим линеаризованную систему:

$$\begin{cases} \mathrm{dm}/\ \mathrm{d}\widetilde{t} = 2nM_0 - m + 2mN_0 - 4mM_0 \\ \mathrm{dn}\ /\ \mathrm{d}\widetilde{t} = -8mN_0 - 8M_0n - 8nN_0 + 2n \end{cases}$$

Для точки покоя (0; 0) — вымирание — система примет вид:

$$\begin{cases} \mathrm{dm}\ /\ \mathrm{d}\widetilde{t} = -m \\ \mathrm{dn}\ /\ \mathrm{d}\widetilde{t} = 2n \end{cases}$$

Матрица коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Характеристической уравнение:

$$(-1 - \lambda)(2 - \lambda) = 0$$

Решения:

$$\lambda_1 = -1;\ \lambda_2 = 2$$

Корни характеристического уравнения разных знаков $\implies$ точка покоя линеаризованной системы — седло, неустойчивая стационарная точка.
Точка вымирания обоих видов (0, 0) является нестационарной. Из этого следует, что в рамках данной модели достигнуть состояние вымирания достаточно сложно.

Для точки покоя (-0.5; 0) система примет вид:

$$\begin{cases} \mathrm{dm} \ / \ \mathrm{d}\widetilde{t} = -n + m \\ \mathrm{dn} \ / \ \mathrm{d}\widetilde{t} = 6n \end{cases}$$

Матрица коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Характеристической уравнение:

$$(1 - \lambda)(6 - \lambda) = 0$$

Решения:

$$\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 6$$

Оба значения вещественные и положительные $\implies$ данная точка покоя - неустойчивый узел. Эта точка покая - вымирание жертв, которые необходимы для поддержания численности хищников.

Для точки покоя (0; 0.5) система примет вид:

$$\begin{cases} \mathrm{dm} \ / \ \mathrm{d}\widetilde{t} = 0 \\ \mathrm{dn} \ / \ \mathrm{d}\widetilde{t} = -4m - 2n \end{cases}$$

Матрица коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Характеристической уравнение:

$$-\lambda(-2 - \lambda) = 0$$

Решения:

$$\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = -2$$

Один из характеристических корней равен нулю. Система имеет своими состояниями равновесия все точки прямой: $n = -2m$. Так как второй корень характеристического уравнения отрицателен, остальные интегральные кривые представляют собой семейство параллельных прямых, по которым изображающие точки либо приближаются к состоянию равновесия. В этом случае координаты состояния равновесия зависят от начального значения переменных.

### 1.3 Записать общее решение линеаризованной системы вблизи каждой из точекпокоя; построить фазовые портреты в малых окрестностях каждой из точек покоя

Точка покоя (0; 0). Линеаризованная система:

$$\begin{cases} \mathrm{dm}/\mathrm{d}\widetilde{t} = -m \\ \mathrm{dn}/\mathrm{d}\widetilde{t} = 2n \end{cases}$$

Общее решение линеаризованной системы:

$$m(\widetilde{t}) = c_1 e^{-t}$$

$$n(\widetilde{t}) = c_2 e^{2t}$$

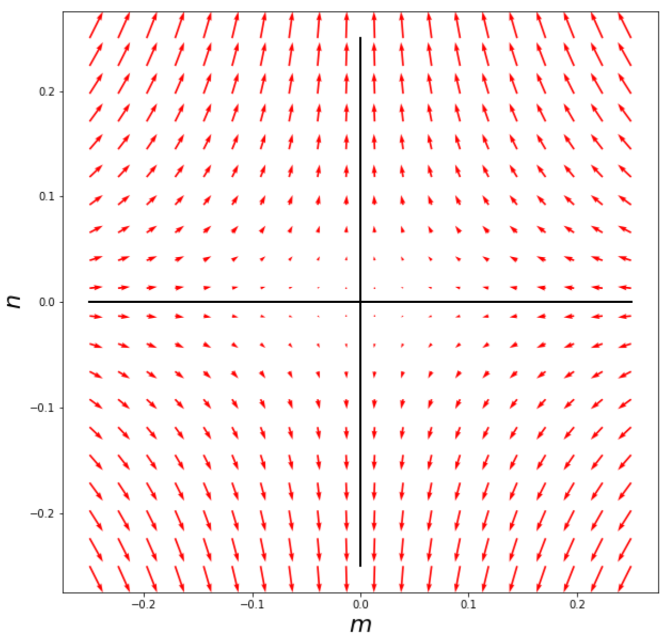


Рис. 1: Фазовый портрет вблизи точки (0, 0) - седло

Точка покоя (-0.5; 0). Линеаризованная система:

$$\begin{cases} \mathrm{dm}\ /\ \mathrm{d}\widetilde{t} = -n + m \\ \mathrm{dn}\ /\ \mathrm{d}\widetilde{t} = 6n \end{cases}$$

Общее решение линеаризованной системы:

$$m(\widetilde{t}) = c_1 e^t - \frac{1}{5} c_2 e^t (e^{5t} - 1)$$

$$n(\widetilde{t}) = c_2 e^{6t}$$

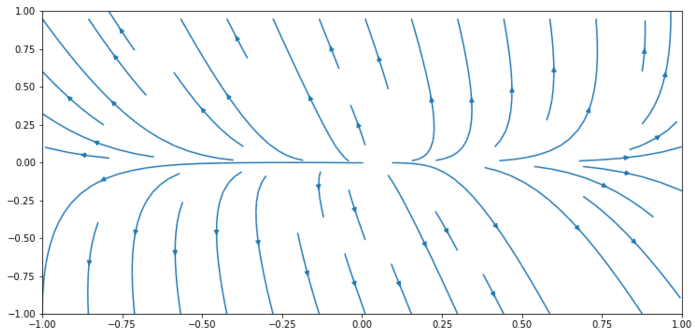


Рис. 2: Фазовый портрет вблизи точки (-0.5, 0 - неустойчивый узел

Точка покоя (0; 0.5) . Линеаризованная система:

$$\begin{cases} \mathrm{dm} \ / \ \mathrm{d}\widetilde{t} = 0 \\ \mathrm{dn} \ / \ \mathrm{d}\widetilde{t} = -4m - 2n \end{cases}$$

Общее решение линеаризованной системы:

$$m(\widetilde{t}) = c_1$$

$$n(\widetilde{t}) = c_2 e^{-2t} - 2c_1 e^{-2t}(e^{2t} - 1)$$

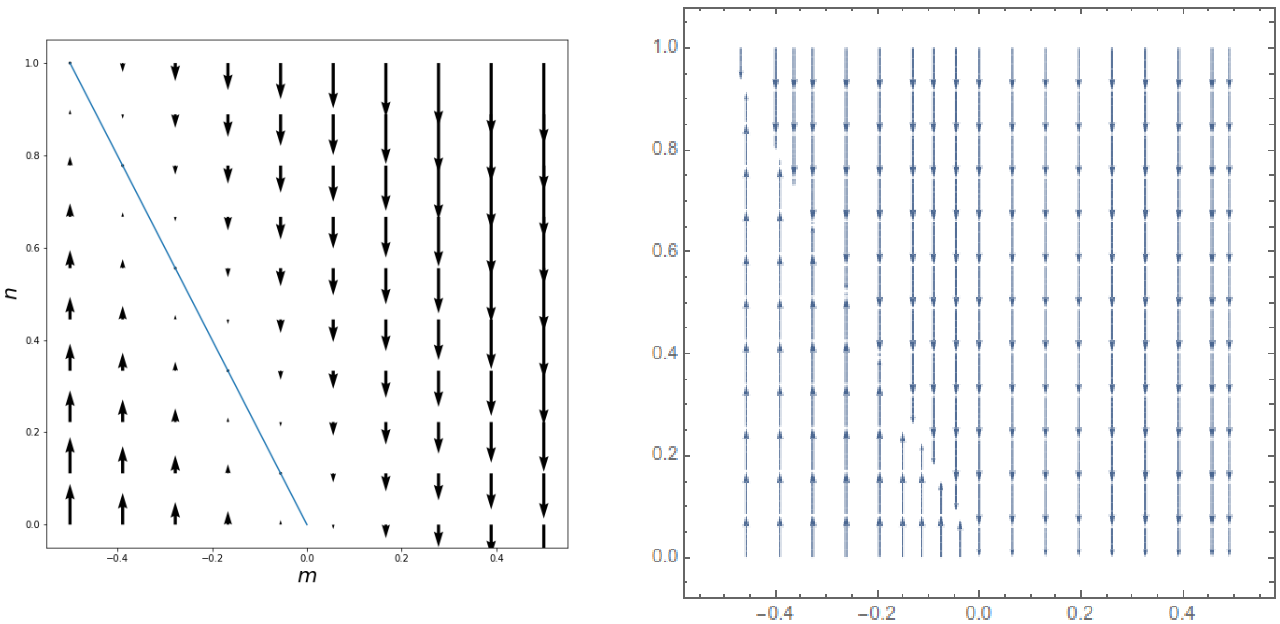


Рис. 3: Фазовый портрет вблизи точки (0, 0.5)

### 1.4 Решить численно задачу Коши с заданными в каждом варианте начальными условиями,построить графики зависимостей N(t), M(t) до времен порядка 4-5 и соответствующую траекторию на фазовой плоскости

Ранее полученная система:

$$\begin{cases} \mathrm{d}\ \widetilde{M}/d\widetilde{t} = \widetilde{M}(-1 + 2\widetilde{N} - 2\widetilde{M}) \\ \mathrm{d}\ \widetilde{N}/d\widetilde{t} = 2\widetilde{N}(1 - 4\widetilde{M} - 2\widetilde{N}) \end{cases}$$

Задача Коши с заданными начальными условиями:

$$\begin{cases} \mathrm{d}\ \widetilde{M}/d\widetilde{t} = \widetilde{M}(-1 + 2\widetilde{N} - 2\widetilde{M}) \\ \mathrm{d}\ \widetilde{N}/d\widetilde{t} = 2\widetilde{N}(1 - 4\widetilde{M} - 2\widetilde{N}) \\ \widetilde{N}(0) = 1 \\ \widetilde{M}(0) = 1 \end{cases}$$

Будем решать Задачу Коши численно с постоянным шагом $\Delta t$ в методе Эйлера:

$$\frac{\widetilde{M_{t+1}} - \widetilde{M_t}}{\Delta t} = \widetilde{M_t}(-1 + 2\widetilde{N_t} - 2\widetilde{M_t})$$

$$\frac{\widetilde{N_{t+1}} - \widetilde{N_t}}{\Delta t} = 2\widetilde{N_t}(1 - 4\widetilde{M_t} - 2\widetilde{N_t})$$

Получаем следующии итерации для реализации метода:

$$\widetilde{M}_{t+1} = \widetilde{M}_t + \Delta t(\widetilde{M}_t(-1 + 2\widetilde{N}_t - 2\widetilde{M}_t))$$

$$\widetilde{N}_{t+1} = \widetilde{N}_t + \Delta t(2\widetilde{N}_t(1 - 4\widetilde{M}_t - 2\widetilde{N}_t))$$

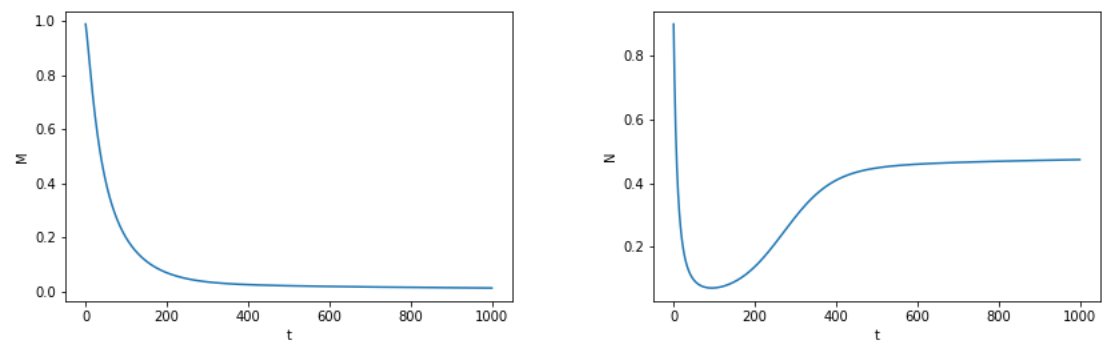


Рис. 4: Графики M(t) и N(t) соответственно на 1000 шагов

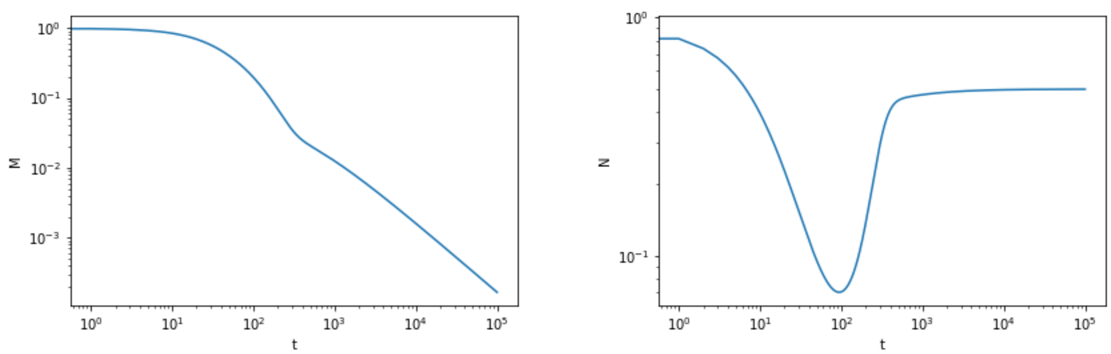


Рис. 5: Графики M(t) и N(t) соответственно на 100000 шагов в loglog Масштабе

В результате эволюции системы с заданными начальными условями численность хищников уменьшалась, в итоге они вымерли. Так как хищники вымерли, популяция жертв начала увеличиваться и устремилась к постоянному значению. Причина ограниченного роста популяции жертв - учет межвидовой конкуренции.

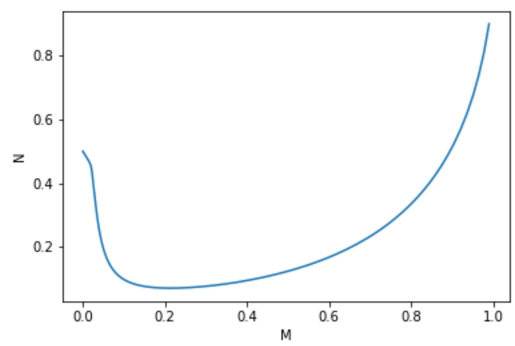


Рис. 6: Соответствующая траектория на фазовой плоскости

### 1.5 Построить векторное поле соответствующей системы

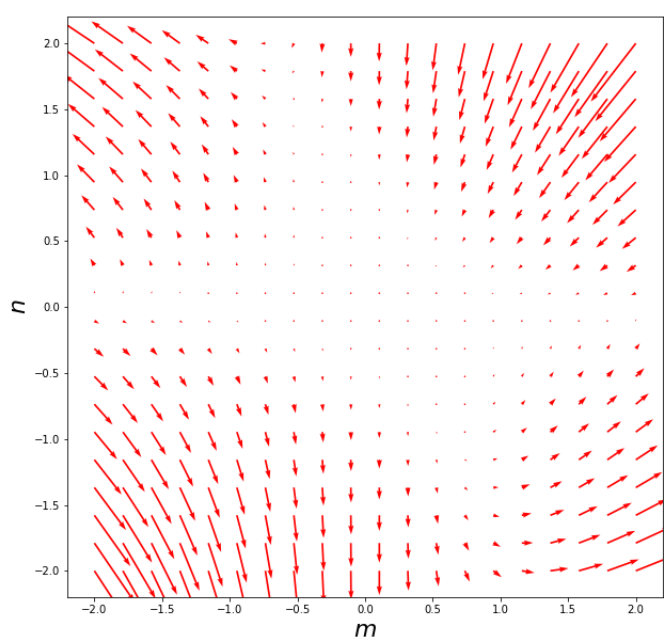


Рис. 7: Векторное поле системы

### 1.6 Фазовый портрет системы

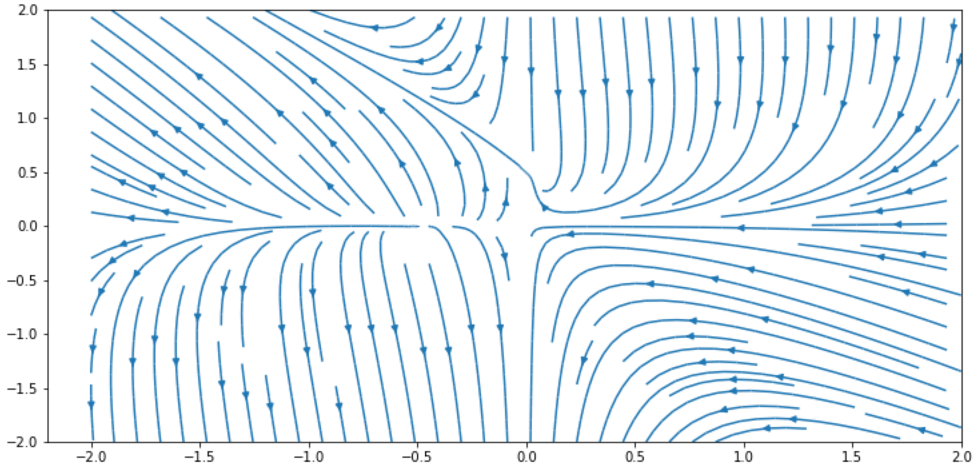


Рис. 8: Фазовый портрет системы

Фазовый портрет системы согласуется с ранее полученныи фазовыми портретами вблизи точек покоя. В большинстве случаев иинформацию о типе поведения в окрестности стационарного состояния можно получить, исследуя не исходную, а упрощенную линеаризованную систему, как это делалось в предыдущих пунктах задания.

## 2 Задача 2

$$\frac{d}{dt}X = AX$$
$$X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$$
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -2 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

### 2.1 Метод из курса "Дифференциальные уравнения"

Будем искать нетривиальные решения однородной системы в виде $\bar{X}(t) = e^{\lambda t}\bar{V}$. где $\bar{V}$ - собственный вектор, $\lambda$ - собственное значение. Найдем собственные значения и собственные вектора линейного преобразования A:

$$A\bar{V} = \lambda\bar{V} \implies A\bar{V} - \lambda\bar{V} = 0 \implies (A - \lambda I)\bar{V} = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$det(A - \lambda I) = 0$$

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -3 \\ -2 & 5-\lambda & 6 \\ 1 & -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 3)^2 = 0$$

Получаем $\lambda = 3$. Алгебраическая кратность $k = 3$. Найдем геометрическую кратность s.

$$s = n - rank(A - \lambda I) = n - rank(A - 3I)$$
$$rank(A - 3I) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = 1 \implies s = 2$$

Найдем собственные вектора. $\bar{V} = (x_1, x_2, x_3)^T$

$$x_1 - x_2 - 3x_3 = 0$$

$$\bar{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{V}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Для базиса необходимо найти еще один присоединенный вектор. Жорданова матрица:

$$J_A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Первая клетка $J_3$ (размерности 2) имеет один собственный вектор $\bar{V}_1$ и один присоединенный $\bar{V}_3$. Он находится из соотношения $(A - \lambda I)\bar{V}_3 = \bar{V}_1$ Второй собственный вектор $\bar{V}_2$ связан со второй жордановой клеткой. Найдем присоединенный вектор для получения базиса.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Не удается найти присоединенный вектор к данным собственным векторам через данные соотношения $\implies$ нужно искать их линейную комбинацию (суперпозицию).

$$\bar{V}_1' = \alpha \bar{V}_1 + \beta \bar{V}_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 3\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{v}_1 - v_2 - 3v_3 = \alpha + 3\beta \\ \text{-2v}_1 + 2_v 2 + 6v_3 = \alpha \\ \text{v}_1 - v_2 - 3v_3 = \beta \end{cases}$$

$$\alpha + 3\beta = \beta \implies \alpha = -2\beta$$

Пусть $\beta = 1, \alpha = -2$. Тогда

$$\bar{V}_1' = \begin{pmatrix} -2 + 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\bar{V}_1'$ - суперпозиция к двум собственным векторам $\bar{V}_1$ и $\bar{V}_2$. Ищем присоединенный к суперпозиции $\bar{V}_1'$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{v}_1 - v_2 - 3v_3 = 1$ Пусть $v_2 = 0, v_3 = 0, v_1 = 1$. Присоединенный вектор $\bar{V}_3$:

$$\bar{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Общее решение системы записывается в следующем виде:

$$X(t) = C_1 e^{\lambda t} \bar{V}_1' + C_2 e^{\lambda t}(t\bar{V}_1' + \bar{V}_3) + C_3 e^{\lambda t} \bar{V}_2$$

$$X(t) = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t}(t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

### 2.2 Метод матричной экспоненты

Будем использовать ранее найденные вектора:

$$\bar{V}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{V}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, J_A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Матричная экспонента вычисляется по следующей формуле:

$$e^A = Ce^{J_A}C^{-1}$$

где C - матрица, составленная из собственных вектором в соответствующем жордановой матрице порядке.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{J_A} = \begin{pmatrix} e^{J_1} & 0 \\ 0 & e^{J_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{J_1} & 0 \\ 0 & e^{3} \end{pmatrix}$$

$$e^{J_1} = e^{(\lambda I + N_2)} = e^{\lambda} I e^{N_2} = e^3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{J_A} = e^3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{tJ_A} = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$e^{tJ_A} = Ce^{J_A}C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{tJ_A} = e^{3t} \begin{pmatrix} t+1 & -t & -3t \\ -2t & 1+2t & 6t \\ t & -t & 1-3t \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} t+1 & -t & -3t \\ -2t & 1+2t & 6t \\ t & -t & 1-3t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} +$$

$$+ \int_0^t e^{3(t-r)} \begin{pmatrix} t-r+1 & -t+r & -3t+3r \\ -2t+2r & 1+2t-2r & 6t-6r \\ t-r & -t+r & 1-3t+3r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \\ f_3(r) \end{pmatrix} dr$$

Подходящее решение:

$$X(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} t+1 \\ -2t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathrm{dx}_1/dt = 4x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \mathrm{dx}_2/dt = -2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ \mathrm{dx}_3/dt = x_1 - x_2 \end{cases}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{e^{3t}(t+1)}{dt} = 3e^{3t}t + 4e^{3t}$$

$$4x_1 - x_2 - 3x_3 = (4(t+1) + 2t - 3t)e^{3t} = 3e^{3t}t + 4e^{3t}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{-2te^{3t}}{dt} = -2e^{3t} - 6e^{3t}t$$
$$-2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = (-2t - 2 - 10t + 6t)e^{3t} = -2e^{3t} - 6e^{3t}t$$

$$\frac{dx_3}{dt} = e^{3t} + 3te^{3t}$$
$$x_1 - x_2 = (t + 1 + 2t)e^{3t} = e^{3t} + 3te^{3t}$$