1 Задание 1

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} = 3t^2 + 2t + 1 \\ y(0) = 0, \frac{dy}{dt}|_0 = 0 \end{cases}$$

$D = \frac{dy}{dt}$

По Методу Лобатто:

$$(D^2 - 4D)y = 3t^2 + 2t + 1$$

$$(D - 4E)Dy = 3t^2 + 2t + 1$$

$$\begin{cases} z = Dy \\ (D - 4E)z = 3t^2 + 2t + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = z(t) \\ \frac{dz}{dt} - 4z(t) = 3t^2 + 2t + 1 \end{cases}$$

Разберемся с начальными условиями:

$$z(0) = \frac{dy}{dt}|_0 = 0$$

$$\frac{dz}{dt}|_0 = 1$$

$$z(t) = e^{-4t}y(0) + \int_0^t (3s^2 + 2s + 1)e^{4t-4s}ds$$

$$z(t) = e^{4t}\int_0^t (3s^2e^{-4s} + 2se^{-4s} + e^{-4s})ds$$

$$z(t) = e^{4t}(((-\frac{1}{32}e^{-4s}(24s^2 + 28s + 15))|_0^t)$$

$$z(t) = \frac{1}{32}(-24t^2 - 28t - 15) + \frac{15}{32}e^{4t}$$

$$z(t) = \frac{1}{32}(-24t^2 - 28t - 15) + \frac{15}{32}e^{4t}$$

$$y(t) = \int z(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{128}(-32t^3 - 56t^2 - 60t + 15e^{4t}) + C_1$$

Из начальных условий $C_1 = -\frac{15}{128}$

Ответ:

$$y(t) = \frac{1}{128}(-32t^3 - 56t^2 - 60t + 15e^{4t} - 15)$$

Проверка:

$$(\frac{1}{128}(-15+15e^(4t)-60t-56t^2-32t^3))'' - (\frac{1}{128}(-15+15e^(4t)-60t-56t^2-32t^3))'$$
$$= \frac{1}{8}(-7+15e^(4t)-12t) + \frac{1}{32}(15-15e^(4t)+28t+24t^2) = 3t^2+2t+1$$

$$3t^2+2t+1 = 3t^2+2t+1$$

$$y(0) = 15 - 15 = 0, y'(0) = 0$$

2 Задание 2

Решить методом Эйлера:

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} - 8\frac{dy}{dt} + 16y(t) = 4^{4t} \\ y(0) = 0, \frac{dy}{dt}|_0 = 1 \end{cases}$$

Будем искать решенние в следующем виде:

$$y(t) = y_{\text{однор}}(t) + y_{\text{неоднор}}(t)$$

Ищем однородную часть:

$$y(t)_{\text{однор}} \sim e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 4$$

$$y(t)_{\text{однор}} = C_1e^{4t} + C_2e^{4t}t$$

Из начальных условий:

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ 4C_1 + C_2 = 1 \end{cases}$$

$$C_1 = 0, C_2 = 1$$

$$y(t)_{\text{однор}} = e^{4t}t$$

У нас в решении уже есть компонента e^{4t}.

$$y(t)_{\text{неоднор}} = Ae^{4t}t^2$$

$$\frac{d^2Ae^{4t}t^2}{dt^2} - 8\frac{dAe^{4t}t^2}{dt} + 16Ae^{4t}t^2 = e^{4t}$$

$$16Ae^{4t}t^2 - 32Ae^{4t}t^2 + 16Ae^{4t}t - 16Ae^{4t}t + 2Ae^{4t} = e^{4t}$$

$$2A = 1 \Rightarrow A = 0.5$$

$$y(t) = e^{4t}t + \frac{1}{2}e^{4t}t^2$$

Ответ:

$$y(t) = e^{4t}t + \frac{1}{2}e^{4t}t^2$$

Проверка:

$$\frac{dy}{dt} = e^{4t} + 5e^{4t}t + 2e^{4t}t^2$$

$$4e^{4t}+20e^{4t}t+5e^{4t}+4e^{4t}t+8e^{4t}t^2-8e^{4t}-40e^{4t}t-16e^{4t}t^2+16e^{4t}t+8e^{4t}t^2 =$$
$$= (8e^{4t}t^2 - 16e^{4t}t^2 + 8e^{4t}t^2) + (20e^{4t}t + 4e^{4t}t - 40e^{4t}t + 16e^{4t}t) +$$
$$+ (4e^{4t} + 5e^{4t} - 8e^{4t}) = e^{4t}$$

$$e^{4t} = e^{4t}$$

$$y(0)e^{4*0}0 + \frac{1}{2}e^{4*0}0^2 = 0$$

$$y'(0) = e^{4*0} = 1$$

3 Задание 3

Решить методом Лагранжа:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{3}{t}y(t) = t, y(0) = 0$$

Решаем однородное:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{t}y(t)$$

$$\frac{dy}{y(t)} = -\frac{3}{t}dt$$

$$lny = -3lnt + C, C = const$$

$$y = \frac{C_1}{t^3}, C_1 = const$$

Будем искать решение в следующем виде:

$$y(t) = \frac{C_1(t)}{t^3}$$

$$y'(t) = \frac{C_1'(t)}{t^3} - 3\frac{C_1(t)}{t^4}$$

$$\frac{C_1'(t)}{t^3} - 3\frac{C_1(t)}{t^4} + 3\frac{C_1(t)}{t^4} = t$$

$$\frac{C_1'(t)}{t^3} = t$$

$$C_1'(t) = t^4$$

$$C_1(t) = \int_0^t s^4 ds + C_1(0) = \frac{s^5}{5}|_0^t + 0 = \frac{t^5}{5}$$

$$y(t) = \frac{t^2}{5}$$

Ответ с учетом начальных условий:

$$y(t) = \frac{t^2}{5}$$

Общее решение:

$$C_1(t) = \int_0^t s^4 ds + C_1(0) = \frac{s^5}{5}|_0^t + C_1(0) = \frac{t^5}{5} + C_1(0)$$

$C_1(0) = C_2 = const$

$$y(t) = \frac{t^2}{5} + \frac{C_2}{t^3}$$

Проверка:

$$\frac{2t}{5} - \frac{3C_2}{t^4} + \frac{3t}{5} + \frac{3C_2}{t^4} = t$$
$$t = t$$

С начальными условиями:

$$y(t) = \frac{t^2}{5}$$
$$y(0) = 0$$