

## 1 Задание 1

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} - 4 \frac{dy}{dt} = 3t^2 + 2t + 1 \\ y(0) = 0, \frac{dy}{dt}|_0 = 0 \end{cases}$$

$$D = \frac{dy}{dt}$$

По Методу Лобатто:

$$(D^2 - 4D)y = 3t^2 + 2t + 1$$

$$(D - 4E)Dy = 3t^2 + 2t + 1$$

$$\begin{cases} z = Dy \\ (D - 4E)z = 3t^2 + 2t + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = z(t) \\ \frac{dz}{dt} - 4z(t) = 3t^2 + 2t + 1 \end{cases}$$

Разберемся с начальными условиями:

$$z(0) = \frac{dy}{dt}|_0 = 0$$

$$z(t) = e^{-4t}z(0) + \int_0^t (3s^2 + 2s + 1)e^{4t-4s}ds$$

$$z(t) = e^{4t} \int_0^t (3s^2 e^{-4s} + 2s e^{-4s} + e^{-4s})ds$$

$$z(t) = e^{4t} \left( \left( -\frac{1}{32} e^{-4s} (24s^2 + 28s + 15) \right) \Big|_0^t \right)$$

$$z(t) = \frac{1}{32} (-24t^2 - 28t - 15) + \frac{15}{32} e^{4t}$$

$$z(t) = \frac{1}{32} (-24t^2 - 28t - 15) + \frac{15}{32} e^{4t}$$

$$y(t) = \int_0^t z(s)ds + y(0)$$

$$y(t) = \int_0^t \left( \frac{1}{32}(-24s^2 - 28s - 15) + \frac{15}{32}e^{4s} \right) ds$$

$$y(t) = \frac{1}{128}(-32t^3 - 56t^2 - 60t + 15e^{4t}) + C_1$$

Из начальных условий

$$\frac{15}{128} + C_1 = 0$$

$$C_1 = -\frac{15}{128}$$

Ответ:

$$y(t) = \frac{1}{128}(-32t^3 - 56t^2 - 60t + 15e^{4t} - 15)$$

Проверка:

$$y''(t) = \frac{15 * 4 * 4}{128}e^{4t} - \frac{32 * 3 * 2}{128}t - \frac{56 * 2}{128}$$

$$y'(t) = -\frac{32 * 3}{128}t^2 - \frac{56 * 2}{128}t - \frac{60}{128} + \frac{15 * 4}{128}e^{4t}$$

$$\begin{aligned} y''(t) - 4y'(t) &= \frac{15 * 4 * 4}{128}e^{4t} - \frac{32 * 3 * 2}{128}t - \frac{56 * 2}{128} - \frac{4 * 15 * 4}{128}e^{4t} + \frac{4 * 32 * 3}{128}t^2 + \\ &+ \frac{4 * 56 * 2}{128}t + \frac{4 * 60}{128} = -1.5t - \frac{112}{128} + 3t^2 + 3.5t + \frac{240}{128} = 3t^2 + 2t + 1 \end{aligned}$$

$$3t^2 + 2t + 1 = 3t^2 + 2t + 1$$

$$y(0) = \frac{1}{128}(15 - 15) = 0, y'(0) = 0$$

## 2 Задание 2

Решить методом Эйлера:

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} - 8\frac{dy}{dt} + 16y(t) = e^{4t} \\ y(0) = 0, \frac{dy}{dt}|_0 = 1 \end{cases}$$

Будем искать решение в следующем виде:

$$y(t) = y_{\text{однор}}(t) + y_{\text{неоднор}}(t)$$

Ищем однородную часть:

$$y(t)_{\text{однор}} \sim e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 4$$

$$y(t)_{\text{однор}} = C_1 e^{4t} + C_2 e^{4t} t$$

$$y(t)_{\text{однор}} = e^{4t} t$$

У нас в решении уже есть компонента  $e^{4t}$ .

$$y(t)_{\text{неоднор}} = A e^{4t} t^2$$

$$\frac{d^2 A e^{4t} t^2}{dt^2} - 8 \frac{d A e^{4t} t^2}{dt} + 16 A e^{4t} t^2 = e^{4t}$$

$$16 A e^{4t} t^2 - 32 A e^{4t} t^2 + 16 A e^{4t} t - 16 A e^{4t} t + 2 A e^{4t} = e^{4t}$$

$$2A = 1 \Rightarrow A = 0.5$$

$$y(t)_{\text{неоднор}} = 0.5 e^{4t} t^2$$

$$y(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{4t} t + 0.5 e^{4t} t^2$$

$$y'(t) = 4C_1 e^{4t} + C_2 e^{4t} + 4C_2 e^{4t} t + e^{4t} t + 2e^{4t} t^2$$

Из начальных условий:

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ 4C_1 + C_2 = 1 \end{cases}$$

$$C_1 = 0, C_2 = 1$$

$$y(t) = e^{4t} t + \frac{1}{2} e^{4t} t^2$$

Ответ:

$$y(t) = e^{4t} t + \frac{1}{2} e^{4t} t^2$$

Проверка:

$$\frac{dy}{dt} = e^{4t} + 5e^{4t} t + 2e^{4t} t^2$$

$$\begin{aligned}
4e^{4t} + 20e^{4t}t + 5e^{4t} + 4e^{4t}t + 8e^{4t}t^2 - 8e^{4t} - 40e^{4t}t - 16e^{4t}t^2 + 16e^{4t}t + 8e^{4t}t^2 = \\
= (8e^{4t}t^2 - 16e^{4t}t^2 + 8e^{4t}t^2) + (20e^{4t}t + 4e^{4t}t - 40e^{4t}t + 16e^{4t}t) + \\
+ (4e^{4t} + 5e^{4t} - 8e^{4t}) = e^{4t}
\end{aligned}$$

$$e^{4t} = e^{4t}$$

$$y(0)e^{4*0}0 + \frac{1}{2}e^{4*0}0^2 = 0$$

$$y'(0) = e^{4*0} = 1$$

### 3 Задание 3

Решить методом Лагранжа:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{3}{t}y(t) = t, y(0) = 0$$

Решаем однородное:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{t}y(t)$$

$$\frac{dy}{y(t)} = -\frac{3}{t}dt$$

$$\ln y = -3\ln t + C, C = \text{const}$$

$$y = \frac{C_1}{t^3}, C_1 = \text{const}$$

Будем искать решение в следующем виде:

$$y(t) = \frac{C_1(t)}{t^3}$$

$$y'(t) = \frac{C_1'(t)}{t^3} - 3\frac{C_1(t)}{t^4}$$

$$\frac{C_1'(t)}{t^3} - 3\frac{C_1(t)}{t^4} + 3\frac{C_1(t)}{t^4} = t$$

$$\frac{C_1'(t)}{t^3} = t$$

$$C_1'(t) = t^4$$

Общее решение:

$$C_1(t) = \int_0^t s^4 ds + C_1(0) = \frac{s^5}{5} \Big|_0^t + C_1(0) = \frac{t^5}{5} + C_1(0)$$

$$C_1(0) = C_2 = \text{const}$$

$$y(t) = \frac{t^2}{5} + \frac{C_2}{t^3}$$

Ответ:

$$y(t) = \frac{t^2}{5} + \frac{C_2}{t^3}$$

Ответ с учетом начальных условий:

$$y(t) = \frac{t^2}{5}$$

Проверка:

$$\frac{2t}{5} - \frac{3C_2}{t^4} + \frac{3t}{5} + \frac{3C_2}{t^4} = t$$

$$t = t$$

С начальными условиями:

$$y(t) = \frac{t^2}{5}$$

$$y(0) = 0$$