ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова

Домашняя работа по дисциплине
«Численно-аналитические методы»
Вариант 1

Работу выполнила:
Файзуллина Камилла
Группа: БПМ162

Вариант 1.

1 Задание 1

Краевая задача Дирихле:

$$\begin{cases} -\frac{d^2}{dx^2}u(x) + r(x)u(x) = f(x), u(0) = 0, u(1) = 0 \\ r(x) = 1, f(x) = sin(\pi x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{d^2}{dx^2}u(x) + u(x) = sin(\pi x) \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$

Задачу решаем методом Фурье.

$$u(x) \in D^{2,0}[0;1]$$

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + 1$$

$$Au = -\frac{d^2}{dx^2}u = -\frac{d^2}{dx^2}u(x) + u(x)$$

Задача поиска собственных чисел:

$$Au = \lambda u$$

Базис:

$$e_m^s(x) = sin(m\pi x)$$

Ищем собственные числа:

$$m^2\pi^2 sin(m\pi x) + sin(m\pi x) = \lambda_m sin(m\pi x)$$

Собственные числа:

$$\lambda_m = m^2\pi^2 + 1$$

Разложение $u(x)$ по базису в $D^{2,0}[0;1]$

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m sin(m\pi x), m = 1, 2, 3...$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m m^2\pi^2 sin(m\pi x) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m sin(m\pi x) = sin(\pi x)$$

Разложим функцию $f(x) = sin(\pi x)$:

$$sin(\pi x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m sin(m\pi x), m = 1, 2, 3...$$

$$f_m(x) = \begin{cases} 0, m \neq 1 \\ 1, m = 1 \end{cases}$$

Подставляем все полученное в уравнение:

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m m^2 \pi^2 sin(m\pi x) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m sin(m\pi x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m sin(m\pi x)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} [b_m m^2 \pi^2 sin(m\pi x) + b_m sin(m\pi x) - f_m sin(m\pi x)] = 0$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (b_m m^2 \pi^2 + b_m - f_m) sin(m\pi x) = 0$$

$$b_m m^2 \pi^2 + b_m - f_m = 0$$

$$b_m = \frac{f_m}{1 + m^2 \pi^2}$$

$$b_m(x) = \begin{cases} 0, m \neq 1 \\ \frac{1}{1+\pi^2}, m = 1 \end{cases}$$

$$u(x) = \frac{1}{1 + \pi^2} sin(\pi x)$$

Проверка:

$$-\frac{d^2}{dx^2} u(x) = \frac{\pi^2}{1 + \pi^2} sin(\pi x)$$

$$\frac{\pi^2}{1 + \pi^2} sin(\pi x) + \frac{1}{1 + \pi^2} sin(\pi x) = \frac{\pi^2 + 1}{1 + \pi^2} sin(\pi x) = sin(\pi x)$$

$$u(0) = \frac{1}{1 + \pi^2} sin(\pi * 0) = 0$$

$$u(1) = \frac{1}{1 + \pi^2} sin(\pi) = 0$$

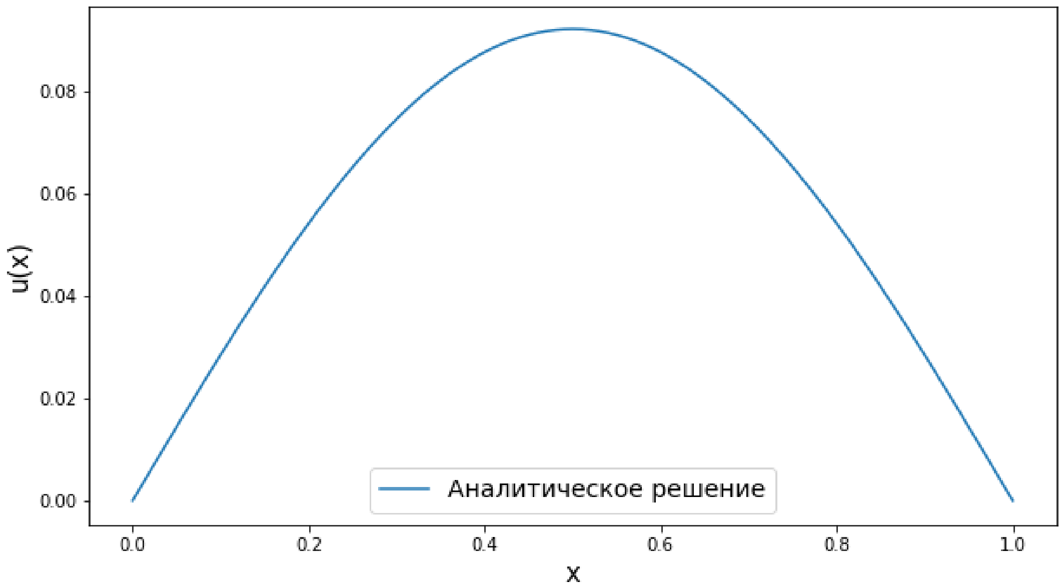

Рис. 1: График полученного аналитического решения решения

Ответ: $u(x) = \frac{1}{1+\pi^2} sin(\pi x)$

Программный код на Python для получения графика функции:

```
import numpy as np # для получения точек x
import matplotlib.pyplot as plt
x = np.linspace(0, 1, 201) # беру 201 точку на отрезке, включая концы
u = np.sin(np.pi*x)/(1+np.pi**2) # нахожу значения функции в точках
plt.figure(figsize=(10,5.5))
plt.xlabel("x fontsize=15)
plt.ylabel("u(x) fontsize=15)
plt.plot(x, u, label = "Аналитическое решение")
plt.legend(loc='best',fontsize=14)
```

2 Задание 2

$$\begin{cases} -\frac{d^2}{dx^2}u(x) + u(x) = sin(\pi x) \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$

Равномерная сетка с шагом h.

Поделим отрезок [0;1] на N отрезков. $Nh = 1$. Номера узлов от 0 до N. $h = \frac{1}{6}$

Заменим вторую производную разностным соотношением:

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) \approx \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

Пусть u_i - значение функции u(x) в i-ом узле, f_i - значение функции f(x) в i-ом узле.

$$\begin{cases} -\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2} + u_i = f_i \\ u_0 = 0, u_N = 0 \end{cases}$$

Значения $u_0 = u_N = 0$ известны из начальных условий.

Для каждого внутрннего узла i=1..N-1 составляется уравнение. В итоге получим систему алгебраических линейных уравнений из N-1 уравнений для N-1 неизвестной. Эти неизвестные - это значения u_i. Матрица системы - трехдиагональная. Условие матричного доминирования будет выполняться. Можно использовать метод факторизации матрицы для решения этой системы. Мы рассмотрим такой путь решения для N=6.

$$u_0 = u_6 = 0, x_i = \frac{i}{6}$$

Составим уравнения для внутренних узлов:

$$\begin{cases} -\frac{u_2-2u_1}{h^2} + u_1 = f_1 \\ -\frac{u_3-2u_2+u_1}{h^2} + u_2 = f_2 \\ -\frac{u_4-2u_3+u_2}{h^2} + u_3 = f_3 \\ -\frac{u_5-2u_4+u_3}{h^2} + u_4 = f_4 \\ -\frac{0-2u_5+u_4}{h^2} + u_5 = f_5 \end{cases}$$

Данную систему можно переписать в векторно-матричной форме в следующем виде:

$$A\vec{u} = \vec{f}$$

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2+h^2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2+h^2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2+h^2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2+h^2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2+h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix}$$

Как видно, полученная матрица - трехдиагональная. Условие матричного доминирования выплняется: $|2+h^2| > |-1| + |-1|$. Можно применять метод прогонки для решения системы.

Подставим известные значения $\vec{f}$:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} sin(\frac{\pi}{6}) \\ sin(\frac{2\pi}{6}) \\ sin(\frac{3\pi}{6}) \\ sin(\frac{4\pi}{6}) \\ sin(\frac{5\pi}{6}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2+h^2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2+h^2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2+h^2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2+h^2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2+h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3 Задание 3

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2+h^2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2+h^2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2+h^2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2+h^2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2+h^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}$$

Матрица A невырождена, поэтому можно применить LU-разложение матрицы.

$$A = \frac{1}{h^2} LU$$

L - нижняя-треугольная матрица, U - верхняя треугольная, унимодальная матрица.

Тогда решаемая система будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{1}{h^2} LU\vec{u} = \vec{f}$$

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \alpha_5 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = a_{1,1}$$

$$\alpha_1\beta_1 = a_{1,2}, \beta_1 = \frac{a_{1,2}}{\alpha_1}$$

$$-\beta_1 + \alpha_2 = a_{2,2}, \alpha_2 = a_{2,2} + \beta_1$$

$$\beta_2\alpha_2 = a_{2,3}, \beta_2 = \frac{a_{2,3}}{\alpha_2}$$

$$\alpha_n\beta_n = a_{n,n+1}, \beta_n = \frac{a_{n,n+1}}{\alpha_n}$$

$$\alpha_{n+1} - \beta_n = a_{n,n}, \alpha_{n+1} = a_{n,n} + \beta_n$$

$$\begin{cases} L\vec{y} = h^2\vec{f} \\ U\vec{u} = \vec{y} \end{cases}$$

Сначала ищем $\vec{y}$, потом находим $\vec{u}$.

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \alpha_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 y_1 = h^2 f_1, y_1 = h^2\frac{f_1}{\alpha_1}$$

$$-y_{n-1} + \alpha_n y_n = f_n, y_n = \frac{h^2 f_n + y_{n-1}}{\alpha_n}$$

Так как y_1 можно найти сразу, все остальные y_i можно также последовательно найти.

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}$$

$$u_5 = y_5$$

$$u_4 + \beta_4 u_5 = y_4$$

$$u_n = y_n - \beta_n u_{n+1}$$

Так как мы легко можем найти u_5, остальные u_i мы также находим друг за другом.

Полученное решение для N=6 изображено на Рисунке 2.

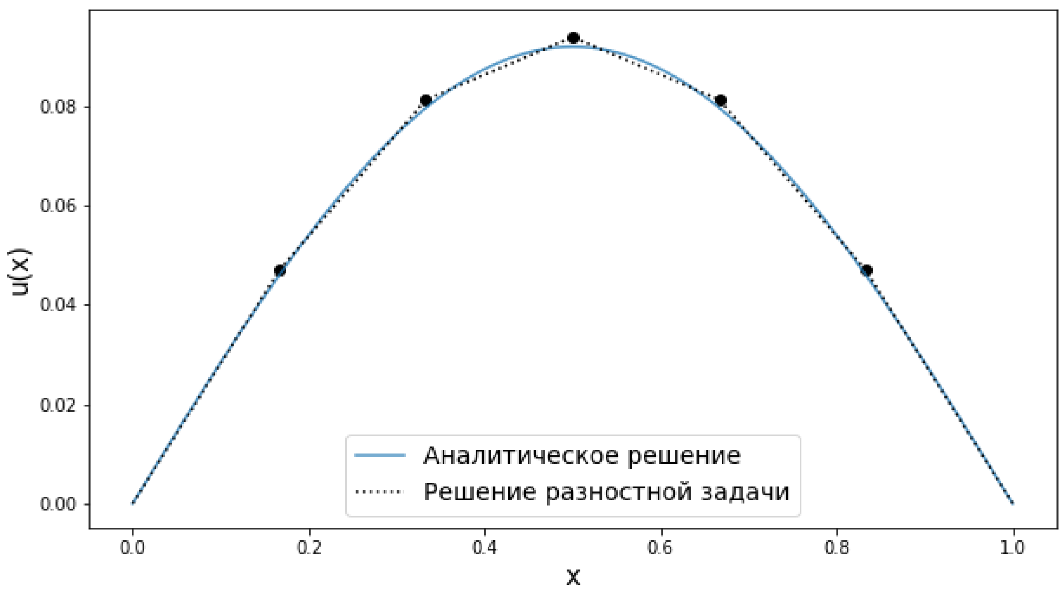

Рис. 2: График полученного решения

Программный код функции на Python для получения решения разностной задачи, N - параметр:

```
def solve(N):
    ind = np.arange(1, N) #
    f_i = np.sin(ind*np.pi/N) #                              f_i
    A = np.zeros((N-1,N-1))
    h=1/N
    A[0,0] = 2 + h*h
    A[-1,-1] =  2 + h*h
    A[0,1] = -1
    A[-1,-2] = -1
    for i in range(1,N-2):
        A[i, i-1] = -1
        A[i, i+1] = -1
        A[i, i] =  2 + h*h
    L =  np.zeros((N-1,N-1))
    U =  np.zeros((N-1,N-1))
```

```
    L[0, 0 ] =A[0,0]
    f_i= h*h*f_i
    for i in range(N-1):
        U[i][i] = 1
    for i in range(N-2):
        L[i+1][i] = -1
    for i in range(0, N-2):
        U[i][i+1] =A[i,i+1]/L[i][i]
        L[i+1][i+1] = U[i][i+1] + A[i][i]
    y = np.zeros(N-1)
    u_solution = np.zeros(N-1)
    y[0] = f_i[0]/L[0][0]
    for i in range(1, N-1):
        y[i] = (f_i[i] + y[i-1]) / L[i][i]
    u_solution[-1] = y[-1]
    for i in range(N-3, -1, -1):
        u_solution[i] = y[i] - U[i][i+1] *u_solution[i+1]
    u_solution = np.array([0] + u_solution + [0])
    x_all =np.zeros(N+1)
    x_all[1:-1] = ind/N
    u_all = np.zeros(N+1)
    u_all[1:-1] = u_solution
    x_all[-1] = 1
    norm_diff_solution = np.max(np.abs(np.sin(np.pi*x)/(1+np.pi**2)
    print(norm_diff_solution)
    return x_all, u_all, norm_diff_solution
```

Как видно из рисунка 2, N=6 дает не очень точные результаты. Полученная точность:

$$r = |u(x_i) - u_i|_\infty \approx 0.001930816779728 6169$$

Будем увеличивать точность, чтобы $r < 10^{-6}$ Будем использовать следующий критерий: $|r_{N+1} - r_N| < 10^{-6}$, где r_N - полученная ошибка при данном N.

```
N = 6
x_coors, u_coors, r0 = solve(N)
N = N +10
x_coors1, u_coors1, r1 = solve(N)
```

```
while(np.abs(r1-r0)> 1e-6):
    r0 = r1
    N= N+10
    x_coors1, u_coors1, r1 = solve(N+10)

print(N)
print(r1)
```

Число N увеличивалось каждый раз на 10 для уменьшения величины ошибки, начиная с предыдущего N = 6. Получились следующие результаты:

$$N = 116, r = 4.32773947732501e - 06$$

На рисунке 3 изображены полученные результаты.

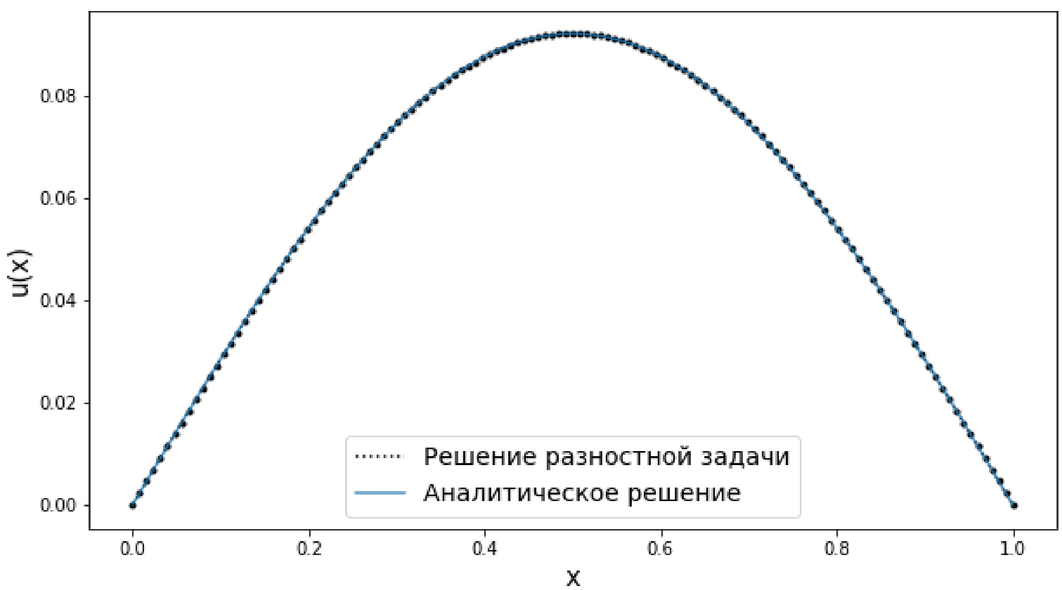

Рис. 3: График полученного решения при N = 116