Камилла Файзуллина

1 Задание 1 (2-2)

$$z = a \ln \sqrt{x^2 - y^2}$$

Предполагая, что ошибки переменных x и y независимы, получаем следующее [1]:

$$\sigma_0^2 = (z'_x)^2\sigma_x^2 + (z'_y)^2\sigma_y^2$$

По принципу равных влияний:

$$(z'_x)^2\sigma_x^2 = (z'_y)^2\sigma_y^2$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} \sigma_0^2 = (z'_x)^2\sigma_x^2 + (z'_y)^2\sigma_y^2 \\ (z'_x)^2\sigma_x^2 = (z'_y)^2\sigma_y^2 \end{cases}$$

В общем виде решение:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma_0^2}{2}(z'_x)^2$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_0^2}{2}(z'_y)^2$$

В нашей задаче:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma_0^2}{2}(\frac{2ax}{x^2 - y^2})^2$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_0^2}{2}(-\frac{2ay}{x^2 - y^2})^2$$

$$\sigma_x^2 = \frac{2a^2x^2}{(x^2 - y^2)^2}\sigma_0^2$$

$$\sigma_y^2 = \frac{2a^2y^2}{(x^2 - y^2)^2}\sigma_0^2$$

Найдем область допустимых значений для дисперсий переменных x и y:

$$(z'_x)^2\sigma_x^2 + (z'_y)^2\sigma_y^2 \le \sigma_0^2$$

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_0^2/(z'_x)^2} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_0^2/(z'_x)^2} \leq 1$$

Таким образом область допустимых значений для стандартных отклонений σ_x и σ_y будет лежать внутри эллипса с полуосями:

$$a = \frac{\sigma_0}{|z'_x|}, b = \frac{\sigma_0}{|z'_y|}$$

$$a = \frac{\sigma_0}{|\frac{2ax}{x^2-y^2}|}, b = \frac{\sigma_0}{|-\frac{2ay}{x^2-y^2}|}$$

2 Задание 2 (2)

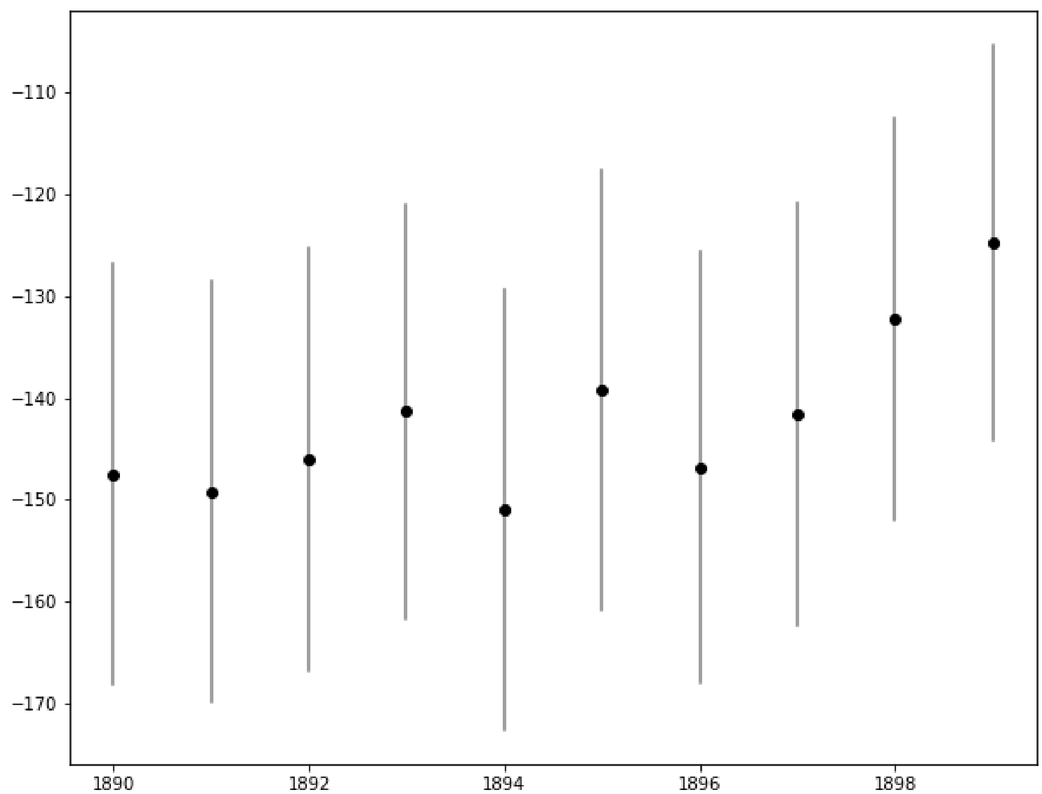

Рис. 1: Данные уровня по годам

Код для получения графика:

Найдем среднее значения по годам $\bar{Y}$ без учета весов:

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = -141.95$$

Найдем среднее значения $\bar{Y}$ с учетом весов. Вес i-ого измерения пропорционален $\frac{1}{\sigma_i^2}$ (То есть обратно пропорционален значению i-ой диспресии).

$$\bar{Y} = \frac{1}{Z}\sum_{i=1}^{n} y_i \frac{1}{\sigma_i^2} \approx -141.535915576$$

где Z - сумма по $\frac{1}{\sigma_i^2}$ (нормировочный коэффициент).

Сначала построим приближение в виде прямой $y = mx + c$ с помощью методы наименьших квадратов без использования весов. Используем формулы следующие формулы для оценивания параметров m и c [2]:

$$c = \frac{\sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i x_i}{\Delta}$$

$$m = \frac{N \sum_i y_i x_i - \sum_i y_i \sum_i x_i}{\Delta}$$

$$\Delta = N \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2$$

N - число измерений. Оценка ошибки при поиске параметров:

$$\alpha_c = \alpha_{CU}\sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{\Delta}}$$

$$\alpha_m = \alpha_{CU}\sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

$$\alpha_{CU} = \sqrt{\frac{1}{N-2}\sum_i (y_i - mx_i - c)}$$

По нашим данным:

$$m \approx 2.06969697$$

$$c \approx -4062.9909091$$

$$\alpha_c \approx 1171.8571641$$

$$\alpha_m \approx 0.06810086$$

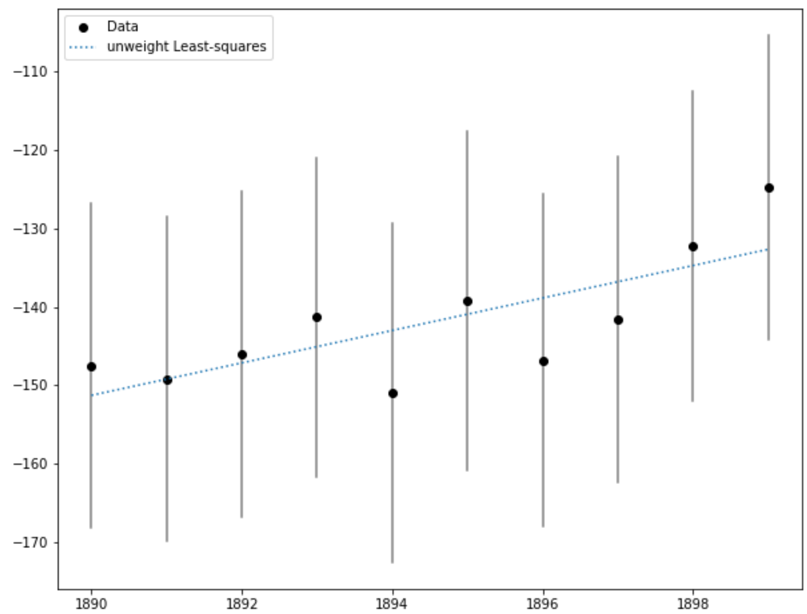

Рис. 2: Результаты использование невзвешенного метода наименьших квадратов

По Рисунку 3 видно, что остаточные разности не представляют собой какую-либо структуру. Модуль среднего значения остаточных разностей достаточно близок к нулю:

$$R = 1.80477854883065\,44e - 13$$

Построим теперь прямую $y = mx + c$ с помощью взвешенного метода наименьших квадратов. Будем использовать для i-ого измерение вес $w_i = \sigma^{-2}$

Используем формулы следующие формулы для оценивания параметров m и c [2]:

$$c = \frac{\sum_i w_i x_i^2 \sum_i w_i y_i - \sum_i w_i x_i \sum_i w_i y_i x_i}{\sum_i w_i \sum_i w_i x_i^2 - (\sum_i x_i w_i)^2}$$

$$m = \frac{\sum_i w_i \sum_i w_i y_i x_i - \sum_i w_i y_i \sum_i w_i x_i}{\sum_i w_i \sum_i w_i x_i^2 - (\sum_i x_i w_i)^2}$$

Оценка ошибки при поиске параметров:

$$\alpha_c = \sqrt{\frac{\sum_i w_i x_i^2}{\sum_i w_i \sum_i w_i x_i^2 - (\sum_i x_i w_i)^2}}$$

$$\alpha_m = \sqrt{\frac{\sum_i w_i}{\sum_i w_i \sum_i w_i x_i^2 - (\sum_i x_i w_i)^2}}$$

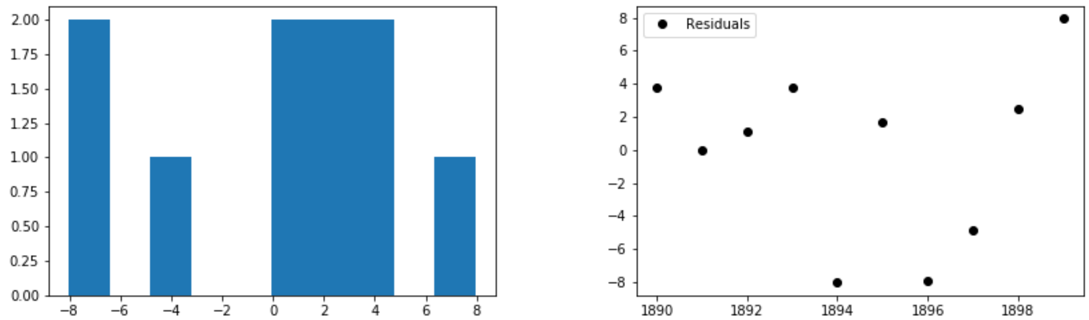

Рис. 3: Остатки

По нашим данным:

$$m \approx 2.13576894596$$

$$c \approx -4187.927202$$

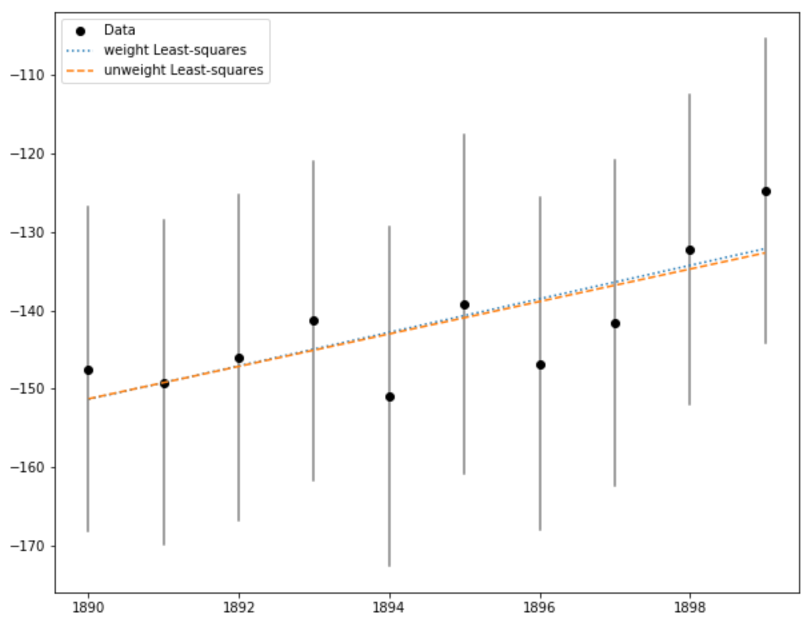

Рис. 4: Результаты использование взвешенного метода наименьших квадратов

Будем использовать нормализацию при подсчете остатков:

$$R_i = \frac{y_i - mx_i - c}{\sigma_i}$$

По Рисунку 5 видно, что остаточные разности не представляют собой какую-либо структуру. Модуль среднего значения остаточных разностей достаточно близок к

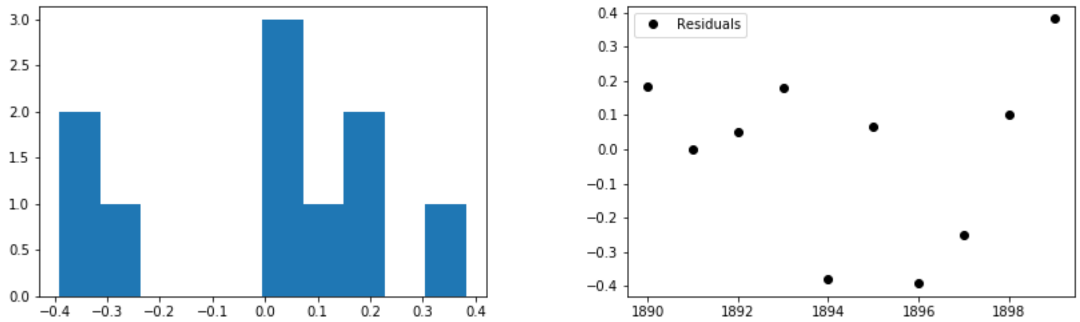

Рис. 5: Остатки

нулю:

$$R_w \approx -0.00578$$

Оценка модели:

$$\chi^2 = \sum_i \left(\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i}\right)^2 \approx 0.05900706$$

Список литературы

[1] **Введение в Математическую Обработку Наблюдений** Пантелеев В.Л.

[2] **Measurements and their Uncertainties: A practical guide to modern error analysis** Ifan Hughes, Thomas Hase