Zestaw 5

1. Definiujemy rekurencyjnie $s_0 = 1$ i $s_{n+1} = 2/s_n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

a) Wypisz kilka pierwszych wyrazów tego ciągu.

b) Jaki jest zbiór wartości ciągu s?

2. Definiujemy rekurencyjnie $SEQ(0) = 0$ i $SEQ(n+1) = 1/[1+SEQ(n)]$ dla $n \in \mathbb{N}$. Oblicz $SEQ(n)$ dla $n = 1, 2, 3, 4$ oraz 6.

3. Weźmy ciąg $SEQ : (1, 3, 9, 27, 81, ...)$.

a) Podaj wzór na n-ty wyraz ciągu $SEQ(n)$, gdzie $SEQ(0) = 1$.

b) Podaj definicję rekurencyjną ciągu SEQ.

4. a) Podaj definicję rekurencyjną ciągu $(2, 2^2(2^2)^2, ((2^2)^2)^2, ...)$, tzn. ciągu (2,4,16,256,...).

b) Podaj definicję rekurencyjną ciągu $(2, 2^2, 2^{(2^2)}, 2^{\left(2^{(2^2)}\right)}, ...)$, tzn. ciągu (2,4,16,65536,...).

5. Czy następująca definicja jest definicją rekurencyjną ciągu SEQ? Odpowiedź uzasadnij.

$$SEQ(0) = 1, SEQ(n+1) = SEQ(n)/(100 - n).$$

6. Oblicz:

a) $SEQ(9)$, gdzie $SEQ(0) = 1$, $SEQ(n+1) = (n+1)/SEQ(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$.

b) $FIB(11)$, gdzie $FIB(0) = FIB(1) = 1, FIB(n) = FIB(n-1) + FIB(n-2)$ dla $n \geq 2$.

7. Niech $\sum = \{a, b, c\}$ i niech s_n oznacza liczbę słów długości n, które nie mają kolejnych liter a.

a) Oblicz s_0, s_1 i s_2.

b) Znajdź wzór rekurencyjny na s_n.

c) Oblicz s_3 i s_4.

8. Niech $\sum = \{a, b\}$ i niech s_n oznacza liczbę słów długości n, nie zawierających ciągu ab.

a) Oblicz s_0, s_1, s_2 i s_3.

b) Znajdź wzór na s_n i udowodnij, że jest on poprawny.

9. Niech $\sum = \{a, b\}$ i niech t_n oznacza liczbę słów długości n, w których jest parzysta liczba liter a.

a) Oblicz t_0, t_1, t_2 i t_3.

b) Znajdź wzór na t_n i udowodnij, że jest on poprawny.

c) Czy twój wzór na t_n jest prawdziwy dla $n = 0$?

10. Weźmy ciąg SEQ określiny w następujący sposób: $SEQ(0) = 1, SEQ(1) = 0, SEQ(n) = SEQ(n-2)$ dla $n \geq 2$.

a) Wypisz kilka pierwszych wyrazów tego ciągu.

b) Jaki jest zbiór wartości tego ciągu?

11. Definiujemy rekurencyjnie ciąg za pomocą wzorów $a_0 = a_1 = 1$ oraz $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ dla $n \geq 2$.

a) Oblicz rekurencyjnie a_6.

b) Udowodnij, że wszystkie wyrazy ciągu a_n są nieparzyste.

12. Definiujemy rekurencyjnie ciąg za pomocą wzorów $b_0 = b_1 = 1$ oraz $b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2}$ dla $n \geq 2$.

a) Oblicz b_5 metodą iteracyjną.

b) Wyjaśnij, dlaczego wszystkie wyrazy b_n są nieparzyste. *Wskazówka:* rozważ pierwszy wyraz parzysty.

13. Definiujemy rekurencyjnie ciąg wzorami $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2$ oraz $a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3}$ dla $n \geq 3$.

a) Wypisz kilka pierwszych wyrazów tego ciągu, aż pojawi się pewna prawidłowość.

b) Jaki jest wzór wartości tego ciągu?

14. Weźmy ciąg FOO określony wzorami $FOO(0) = 1, FOO(1) = 1$ oraz $FOO(n) = \frac{10 \cdot FOO(n-1)+100}{FOO(n-2)}$ dla $n \geq 2$.

a) Jaki jest zbiór wartości ciągu FOO?

b) Powtórz ćwiczenie a) dla ciągu GOO określonego wzorami $GOO(0) = 1, GOO(1) = 2$ oraz $GOO(n) = \frac{10 \cdot GOO(n-1)+100}{GOO(n-2)}$ dla $n \geq 2$.

1 Twierdzenie

Rozważmy zależność rekurencyjną postaci:

- $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2}$

1. Gdy $b = 0(s_n = as_{n-1})$, to dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$:
   - $s_n = a^n s_0$
2. Gdy $a = 0(s_n = bs_{n-2})$, to dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$:
   - $s_{2n} = b^n s_0$ (wyrazy parzyste),
   - $s_{2n+1} = b^n s_1$ (wyrazy nieparzyste).
3. Gdy $a \neq 0 \wedge b \neq 0$, to należy rozwiązać ze względu na r równanie charakterystyczne postaci:
   - $r^2 - ar - b = 0$

   a) Jeśli równanie charakterystyczne ma dwa różne pierwiastki $r_1 \neq r_2$, to
      - $s_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$

      Stałe c_1 i c_2 można wyznaczyć podstawiając odpowiednio $n = 0$ i s_0 oraz $n = 1$ i s_1 do powyższego równania otrzymując układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi.

   b) Jeśli równanie charakterystycznie ma tylko jeden pierwiastek podwójny r_0, to
      - $s_n = c_1 r_0^n + c_2 \cdot n \cdot r_0^n$

      Stałe c_1 i c_2 wyznaczamy tak jak w podpunkcie a).

1. Podaj wzór jawny na s_n, gdzie $s_0 = 3$ oraz $s_n = -2s_{n-1}$ dla $n \geq 1$

2. a) Podaj wzór jawny na $s_n = 4s_{n-2}$, gdzie $s_0 = s_1 = 1$.

b) Powtórz ćwiczenie a) dla $s_0 = 1$ i $s_1 = 2$.

3. Udowodnij, że jeśli $s_n = as_{n-1}$ dla $n \geq 1$ i $a \neq 0$, to $s_n = a^n \cdot s_0$ dla $n \in \mathbb{N}$.

4. Sprawdź, że ciąg dany wzorem $s_n = 2^{n+1} + (-1)^n$ spełnia warunki: $s_0 = s_1 = 3$ oraz $s_{n-1} + 2s_{n-2}$ dla $n \geq 2$.

5. Sprawdź, że ciąg s_n dany wzorem $s_n = 3^n - 2 \cdot n \cdot 3^n$ spełnia warunki: $s_0 = 1, s_1 = -3$ oraz $s_n = 6s_{n-1} - 9s_{n-2}$ dla $n \geq 2$.

6. Skożystaj z wzoru $FIB(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$ i sprawdź za pomocą kalkulatora, że $FIB(5) = 8$.

7. Podaj wzór jawny na s_n, gdzie $s_0 = 3, s_1 = 6$ i $s_n = s_{n-1} + 2s_{n-2}$ dla $n \geq 2$.

8. Powtórz ćwiczenie 7 dla $s_0 = 3$ i $s_1 = -3$.

9. Weźmy ciąg s_n, gdzie $s_0 = 2, s_1 = 1$ oraz $s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$ dla $n \geq 2$.

a) Oblicz s_n dla $n = 2, 3, 4, 5$ oraz 6.

b) Podaj wzór jawny na s_n.

10. W każdym z następujących przypadków podaj wzór jawny na s_n:

a) $s_0 = 2, s_1 = -1$ oraz $s_n = -s_{n-1} + 6s_{n-2}$ dla $n \geq 2$.

b) $s_0 = 2$ oraz $s_n = 5 \cdot s_{n-1}$ dla $n \geq 1$.

c) $s_0 = 1, s_1 = 8$ oraz $s_n = 4s_{n-1} - 4s_{n-2}$ dla $n \geq 2$.

d) $s_0 = c, s_1 = d$ oraz $s_n = 5s_{n-1} - 6s_{n-2}$ dla $n \geq 2$. Liczby c i d są pewnymi stałymi.

e) $s_0 = 1, s_1 = 4$ oraz $s_n = s_{n-2}$ dla $n \geq 2$.

f) $s_0 = 1, s_1 = 2$ oraz $s_n = 3 \cdot s_{n-2}$ dla $n \geq 2$.

g) $s_0 = 1, s_1 = -3$ oraz $s_n = -2s_{n-1} + 3s_{n-2}$ dla $n \geq 2$.

h) $s_0 = 1, s_1 = 2$ oraz $s_n = -2s_{n-1} + 3s_{n-2}$ dla $n \geq 2$.

12. Przypomnijmy, że jeśli $s_n = bs_{n-2}$ dla $n \geq 2$ to $s_{2n} = b^n s_0$ oraz $s_{2n+1} = b^n s_1$ dla $n \in \mathbb{N}$. Pokaż, że twierdzenie 1 jest prawdziwe dla $a = 0$ i $b > 0$ oraz spróbuj pogodzić ten fakt z poprzednim zadaniem. To znaczy, określ r_1, r_2, c_1 i c_2 za pomocą b, s_0 i s_1.

13. W każdym z następujących przypadków podaj wzór jawny na s_{2^m}:

a) $s_{2n} = 2s_n + 3, s_1 = 1$.

b) $s_{2n} = 2s_n, s_1 = 3$.

c) $s_{2n} = 2s_n + 5n, s_1 = 0$.

d) $S_{2n} = 2s_n + 3 + 5n, s_1 = 2$.

e) $s_{2n} = 2s_n - 7, s_1 = 1$.

f) $s_{2n} = 2s_n - 7, s_1 = 5$.

g) $s_{2n} = 2s_n - n, s_1 = 3$.

h) $s_{2n} = 2s_n + 5 - 7n, s_1 = 0$.

2 Twierdzenie

Rozważmy zależność rekurencyjną postaci:

- $s_{2n} = 2 \cdot s_n + f(n)$ dla $n \in \mathbb{N}^+$

Wtedy dla $m \in \mathbb{N}$:

- $s_{2^m} = 2^m \cdot \left[s_1 + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1} \frac{f(2^i)}{2^i}\right]$.

W szczególności jeśli

- $s_{2^m} = 2 \cdot s_n + A + B \cdot n$

dla pewnych stałych A i B, to

- $s_{2^m} = 2^m \cdot s_1 + (2^m - 1) \cdot A + \frac{B}{2} \cdot 2^m \cdot m$.

Zatem, jeśli $n = 2^m$, to w tym przypadku mamy:

- $s_n = ns_1 + (n-1)A + \frac{B}{2} \cdot n \cdot \log_2 n$.