Zestaw 4

Zadanie 1.

Dla następujących relacji w zbiorze $X = \{0, 1, 2, 3\}$ określ, które z własności (Z), (PZ), (S), (AS) i (P) spełniają te relacje:

a) $(m, n) \in R_1$, jeśli $m + n = 3$,

b) $(m, n) \in R_2$, jeśli $m - n$ jest liczbą parzystą,

c) $(m, n) \in R_3$, jeśli $m \leq n$,

d) $(m, n) \in R_4$, jeśli $m + n \leq 4$,

e) $(m, n) \in R_5$, jeśli $max\{m, n\} = 3$.

Zadanie 2.

Niech $X = \{0, 1, 2\}$. Każde z poniższych stwierdzeń określa relację R w zbiorze X w ten sposób, że $(m, n) \in R$, jeśli to stwierdzenie jest prawdziwe dla m i n. Zapisz każdą relację jako zbiór par uporządkowanych.

a) $m \leq n$

b) $m < n$

c) $m = n$

d) $mn = 0$

e) $mn = m$

f) $m + n \in X$

g) $m^2 + n^2 = 2$

h) $m^2 + n^2 = 3$

i) $m = max\{n, 1\}$

Zadanie 3. Określ, które z własności (Z), (PZ), (S), (AS) i (P) spełniają relacje w zadaniu poprzednim.

Zadanie 4.

W zbiorze N określone są następujące relacje dwuargumentowe:

a) Zapisz relację dwuargumentową R_1 określoną wzorem $m + n = 5$ jako zbiór par uporządkowanych.

b) Zrób to samo dla relacji R_2 określonej wzorem $max\{m, n\} = 2$.

c) Relacja dwuargumentowa R_3 określona wzorem $min\{m, n\} = 2$ zawiera nieskończenie wiele par uporządkowanych. Wypisz pięć z nich.

Zadanie 5.

Dla każdej relacji z zadania 4 określ, które z własności (Z), (PZ), (S), (AS), i (P) spełnia ta relacja.

Zadanie 6.

Weźmy relację R w zbiorze $\mathbb{Z}$ określoną w następujący sposób: $(m, n) \in R$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m^3 - n^3 \equiv 0 \pmod 5$. Które z własności (Z), (PZ), (S), (AS) i (P) ma ta relacja?

Zadanie 7.

a) Weźmy relację pustą $\emptyset$ na niepustym zbiorze S. Które z własności (Z), (PZ), (S), (AS) i (P) spełnia ta relacja?

b) Powtórz ćwiczenie a) dla relacji uniwersalnej $U = S \times S$ w zbiorze S.

Zadanie 8.

Podaj przykład relacji, która jest:

a) antysymetryczna i przechodnia, ale nie jest zwrotna,

b) symetryczna, ale nie jest zwrotna ani przechodnia.

Zadanie 9.

Niech R_1 i R_2 będą relacjami dwuargumentowymi w zbiorze S.

a) Pokaż, że relacja $R_1 \cap R_2$ jest zwrotna, jeśli R_1 i R_2 są zwrotne.

b) Pokaż, że relacja $R_1 \cap R_2$ jest symetryczna, jeśli R_1 i R_2 są symetryczne.

c) Pokaż, że relacja $R_1 \cap R_2$ jest przechodnia, jeśli R_1 i R_2 są przechodnie.

Zadanie 10.

Niech R_1 i R_2 będą relacjami dwuargumentowymi w zbiorze S.

a) Czy jeśli relacje R_1 i R_2 są zwrotne, to relacja $R_1 \cup R_2$ musi być zwrotna?

b) Czy jeśli relacje R_1 i R_2 są symetryczne, to relacja $R_1 \cup R_2$ musi być symetryczna?

c) Czy jeśli relacje R_1 i R_2 są przechodnie, to czy relacja $R_1 \cup R_2$ musi być przechodnia?

Zadanie 11.

Czy są to relacje częściowego porządku? Jeśli tak to narysuj diagramy Hassego.

a) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ gdzie $(m, n) \in R$ oznacza, że m jest większe od n.

b) $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ gdzie$(m, n) \in R$ oznacza że $m|n$ czyli, że m jest dzielnikiem (tzn. dzieli) n.

c) Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru $\{3, 7, 5\}$ z relacją $\subseteq$.

Zadanie 12.

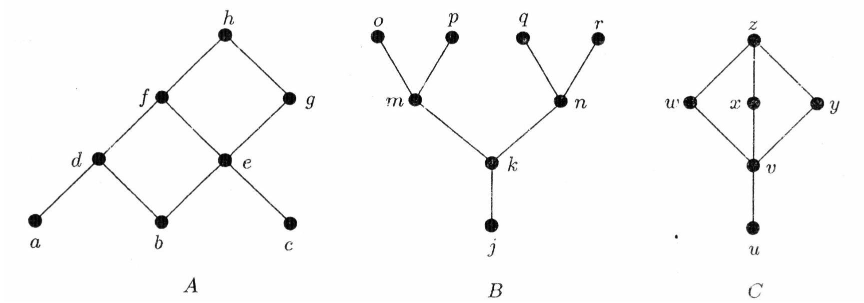
a) Podaj przykłady dwóch zbiorów częściowo uporządkowanych wziętych bądź z codziennego życia, bądź z innych wykładów

b) Czy zbiory z twoich przykładów mają elementy maksymalne lub minimalne? Jeśli tak, to jakie?

c) Jak wyglądają relacje odwrotne do częściowych porządków z twoich przykładów?

Zadanie 13.

Poniższy rysunek przedstawia diagramy Hassego trzech zbiorów częściowo uporządkowanych.



a) Jakie elementy maksymalne mają te zbiory?

b) W których spośród tych zbiorów istnieją elementy minimalne?

c) Które spośród tych zbiorów mają elementy najmniejsze?

d) Które elementy nakrywaję element e?

Zadanie 14.

a) Wykaż, że jeśli $\preceq$ jest częściowym porządkiem w zbiorze S, to jest nim również relacja $\succeq$ odwrotna do $\preceq$.

b) Wykaż, że jeśli $\prec$ jest quasi-porządkiem w zbiorze S, to relacja zdefiniowana w następujący sposób:

$$x \preceq y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x \prec y \text{ lub } x = y$$

jest częściowym porządkiem w zbiorze S.

Zadanie 15.

Niech $\sum$ będzie pewnym alfabetem. Dla $\omega_1, \omega_2 \in \sum^*$ powiemy, że $\omega_1 \preceq \omega_2$, jeśli w $\sum^*$ istnieją słowa ω i ω' takie, że $\omega_2 = \omega\omega_1\omega'$. Czy $\preceq$ jest częściowym porządkiem w zbiorze $\sum^*$? Uzasadnij swoją odpowiedź.

Zadanie 16.

Tabelka przedstawiona poniżej została częściowo wypełniona. Podane są w niej wartości działań $x \vee y$ dla niektórych elementów x i y pewnego zbioru $(L, \preceq)$. Na przykład $b \vee c = d$.

a) Wypełnij pozostałą część tabelki.

b) Wskaż, element największy i element najmniejszy w L?

c) Wskaż, że $f \preceq c \preceq d \preceq e$.

d) Narysuj diagram Hassego dla L.

$\vee$	a	b	c	d	e	f
a		e	a	e	e	a
b			d	d	e	b
c				d	e	c
d					e	d
e						e
f						

Zadanie 17.

Określmy relacje $<$, $\leq$ oraz $\preceq$ w zbiorze $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wszystkich punktów płaszczyzny w nastepujący sposób:

$$(x, y) < (z, \omega), \quad \text{jeśli} \quad x^2 + y^2 < z^2 + \omega^2;$$

$$(x, y) \leq (z, \omega), \quad \text{jeśli} \quad (x, y) < (z, \omega) \quad \text{lub} \quad (x, y) = (z, \omega);$$

$$(x, y) \preceq (z, \omega), \quad \text{jeśli} \quad x^2 + y^2 \leq z^2 + \omega^2.$$

a) Które z tych relacji są częściowymi porządkami? Odpowiedź uzasadnij.

b) Które z nich są quasi-porządkami? Odpowiedź uzasadnij.

c) Wyznacz graficznie zbiór $\{(x, y) : \ (x, y) \leq (3, 4)\}$.

d) Wyznacz graficznie zbiór $\{(x, y) : \ (x, y) \preceq (3, 4)\}$.