Zestaw 6

Przykład 1. Permutacje.
Wiemy już, ile jest n-elementowych permutacji, ale policzmy je jeszcze raz, stosując równanie rekurencyjne.

Przykład 2. Proste na płaszczyźnie.
Na ile spójnych obszarów dzieli płaszczyznę n prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie?

Przykład 3. Wieża Hanoi.
Zadanie to wiąże się ze starohinduską legendą głoszącą, że w świątyni Benares, przy stworzeniu świata, Brahma postawił trzy diamentowe paliki i nanizał na jeden z nich sześćdziesiąt cztery krążki z czystego złota. Krążki te były różnej średnicy i nanizane od największego na spodzie do najmniejszego na górze. Kapłani mieli za zadanie nieustannie przenosić je na trzeci palik (korzystając pomocniczo z drugiego), biorąc za każdym razem tylko jeden krążek i nigdy nie kładąc większego krążka na mniejszy. Według legendy, gdy kapłani zakończą swoją pracę, nastąpi koniec świata. (Na skutek nieścisłości przekazów, do problemu tego przylgnęła błędna nazwa „Wieży Hanoi").

Zadanie polega na obliczeniu, ile zajmie im to czasu, zakładając, że jeden ruch trwa jedną sekundę i że robią to optymalnie, to znaczy w najszybszy możliwy sposób.

Przykład 4. Podzbiory bez sąsiadów.
Ile podzbiorów zbioru $[n] = \{1, 2, ..., n\}$, wliczając zbiór pusty, nie zawiera sąsiednich liczb?

Przykład 5. Systemy różnych reprezentantów.
Systemem różnych reprezentantów rodziny zbiorów $B_1, ..., B_n$ nazywamy ciąg $b_1, ...b_n$ różnych elementów taki, że $b_i \in B_i$, $i = 1, ..., n$. Ile systemów różnych reprezentantów ma rodzina zbiorów $B_1 = \{1, 2\}$, $B_i = \{i-1, i, i+1\}$, $i = 2, ..., n-1$, $B_n = \{n-1, n\}$, $n \geq 3$?

Zadanie 1.

Na ile sposobów można podzielić zbiór $[n] = \{1, 2, ..., n\}$ na dwa niepuste zbiory?

Zadanie 2.

Udowodnić, że:

$$\sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

gdzie (F_n) jest ciągiem Fibonacciego.

Zadanie 3.

Udowodnić następującą tożsamość:

$$\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1}$$

Zadanie 4.

Na ile sposobów można wypełnić prostokąt:

1) o wymiarach 2 na $2n$ kostkami domino o wymiarach 2 na 1.

2) o wymiarach 3 na $2n$ tymi samymi kostkami?

Zadanie 5.

Na ile sposobów można wciągnąć na n-metrowy maszt flagi trzech kolorów, jeśli flagi czerwone mają szerokość dwóch metrów, a pozostałe jednego metra?

Zadanie 6.

Ile jest uporządkowanych trójek (A_1, A_2, A_3) takich, że $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = [n]$?

Zadanie 7.

Wyznaczyć liczbę a_n ciągów binarnych długości n, w których żadne dwa zera nie występują obok siebie.

Zadanie 8.

Niech a_n będzie liczbą ternarnych ciągów (tzn. ciągów złożonych z cyfr 0, 1, 2) długości n, w których:

1) żadne dwie jedynki nie stoją obok siebie,

2) żadne dwie jedynki ani żadne dwie dwójki nie stoją obok siebie.

Zadanie 9.

Znaleźć równanie rekurencyjne dla liczby n-elementowych ciągów ternarnych, w których:

1) liczba zer jest parzysta,

2) liczba zer i liczba jedynek są parzyste.

Zadanie 10.

Pewna cząsteczka porusza się w kierunku poziomym i w każdej sekundzie pokonuje odległość równą podwojonej odległości pokonanej w sekundzie poprzedzającej. Niech a_n oznacza pozycję cząsteczki po n sekundach. Określić a_n, wiedząc, że $a_0 = 3$ oraz $a_3 = 10$.

Zadanie 11.

Oprocentowanie wkładów w banku wynosi 8% w skali rocznej. Co się bardziej opłaca: przez n lat wpłacać po 100USD na koniec każdego raku, czy wpłacać na początku 1000USD?

Zadanie 12.

Znaleźć liczbę obszarów, na jakie dzieli płaszczyznę n prostych, z których k jest równoległych, a pozostałe przcinają wszystkie proste (żadne trzy proste nie przechodzą przez jeden punkt).