Zestaw 1

Zadanie 1.

Podaj zdanie odwrotne i przeciwstawne (kontrapozycję) dla każdego z następujących zdań:

a) $p \Rightarrow (q \wedge r)$.

b) Jeśli $x + y = 1$, to $x^2 + y^2 \geq 1$.

c) Jeśli $2 + 2 = 4$, to $3 + 3 = 8$.

Zadanie 2.

Weźmy zdanie „jeśli $x > 0$, to $x^2 > 0$". Zakładamy, że $x \in \mathbb{R}$.

a) Podaj zdanie odwrotne i przeciwstawne do tego zdania.

b) Które z następujących zdań są prawdziwe: zdanie pierwotne, odwrotne do niego czy przeciwstawne.

Zadanie 3.

Weźmy następujące zdania:

$$\begin{array}{cccc} p \Rightarrow q & \sim p \Rightarrow \sim p & q \Rightarrow p & \sim q \Rightarrow \sim p \\ q \wedge \sim q & \sim p \vee q & \sim q \vee p & p \wedge \sim q \end{array}$$

a) Które zdanie jest zdaniem odwrotnym do zdania $p \Rightarrow q$?

b) Które zdanie jest zdaniem przeciwstawnym do zdania $p \Rightarrow q$?

c) Które zdania są logicznie równoważne ze zdaniem $p \Rightarrow q$?

Zadanie 4.

Określ wartości logiczne następujących zdań złożonych:

a) Jeśli $2 + 2 = 4$, to $2 + 4 = 8$.

b) Jeśli $2 + 2 = 5$, to $2 + 4 = 8$.

c) Jeśli $2 + 2 = 4$, to $2 + 4 = 6$.

d) Jeśli $2 + 2 = 5$, to $2 + 4 = 6$.

e) Jeśli świat jest płaski, to Juliusz Cezar był pierwszym prezydentem Stanów Zjednoczonych.

f) Jeśli świat jest płaski, to George Washington był pierwszym prezydentem Stanów Zjednoczonych.

g) Jeśli George Washington był pierwszym prezydentem Stanów Zjednoczonych, to świat jest płaski.

h) Jeśli George Washington był pierwszym prezydentem Stanów Zjednoczonych, to $2 + 2 = 4$.

Zadanie 5.

W których z poniższych zdań spójnik lub oznacza alternatywę niewykluczającą?

a) Do wyboru zupa luba sałatka.

b) Aby wstąpić na uniwersytet, kandydat musi zaliczyć roczny kurs fizyki lub chemii w szkole średniej.

c) Publikuj lub giń.

d) Znajomość Fortranu lub Pascala pożądana.

e) Praca zostanie zakończona w czwartek lub piątek.

f) Zniżka dla osób poniżej 20 lat lub powyżej 60 lat.

g) Łowienie ryb lub polowanie jest zabronione.

h) Szkoła nie będzie otwarta w lipcu lub sierpniu.

Zadanie 6.

Alternatywa wykluczająca lub spójnik $\oplus$ (informatycy używają oznaczenia XOR) jest zdefiniowany za pomocą matrycy:

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

a) Pokaż, że $p \oplus q$ ma te same wartości logiczne co $\sim (p \Leftrightarrow q)$.

b) Zbuduj matrycę logiczną dla zdania $p \oplus p$.

c) Zbuduj matrycę logiczną dla zdania $(p \oplus q) \oplus r$.

d) Zbuduj matrycę logiczną dla zdania $(p \oplus q) \oplus p$.

Zadanie 7.

Napisz zdanie złożone, które jest prawdziwe wtedy, gdy dokładnie jedno z trzech zdań p, q i r jest prawdziwe.

Zadanie 8.

Napisz zdanie złożone, które jest prawdziwe wtedy, gdy dokładnie dwa z trzech zdań p, q i r jest prawdziwe.

Zadanie 9.

Udowodnij następujące równoważności lub wykaż, że są one nieprawdziwe:

a) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$

b) $[p \oplus (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \oplus q) \Rightarrow (p \oplus r)]$

c) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$

d) $[(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r] \Leftrightarrow [p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)]$

e) $(p \oplus q) \oplus r \Leftrightarrow p \oplus (q \oplus r)$

Zadanie 10.

Matka bedąca z zawodu logikiem, powiedziała swojemu synowi: „jeśli nie dokończysz kolacji, nie będziesz mógł oglądać dłużej telewizji dziś wieczorem". Syn zjadł kolację, ale wtedy został natychmiast wysłany do łóżka. Przydyskutuj tą sytuację.

Zadanie 11.

Rozważ zadanie: „beton nie zwiąże się, jeśli go nie polejesz wodą".

a) Zbuduj zdanie przeciwstawne.

b) Zbuduj zdanie odwrotne.

c) Zbuduj zdanie odwrotne do zdania przeciwstawnego.

d) Które ze zdań: zdanie oryginalne, odwrotne czy odwrotne do zdania przeciwstawnego jest prawdziwe?

Zadanie 12.

Metodą zerojedynkową wykaż, że prawem rachunku zdań jest wyrażenie:

a) $\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$ prawo podwójnego przeczenia,

b) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ prawo przemienności koniunkcji,

c) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ prawo przemienności alternatywy,

d) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ prawo zaprzeczenia koniunkcji (prawo de Morgana),

e) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ prawo zaprzeczenia alternatywy (prawo de Morgana),

f) $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$ prawo zaprzeczenia implikacji,

g) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ prawo transpozycji.

Zadanie 13.

Oceń wartość logiczną zdania i utwórz zaprzeczenie tego zdania:

a) $\left(\sin 20^\circ = \frac{1}{2}\right) \Rightarrow (\sin 60^\circ < 0)$

b) $(2 \leq 3) \vee \left(\cos 15^\circ = \sqrt{2}\right)$

c) $\sim \left(\operatorname{tg}\, 30^\circ = \sqrt{3}\right)$

d) $\left(\frac{4}{11} > \frac{7}{8}\right) \wedge (\cos 10 < 0)$

e) $\left(\operatorname{tg}\, 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \wedge (2 \geq 2)$

f) $(2\pi = 6,28) \Rightarrow (\pi^2 > 9,9)$

g) $(\cos 0^\circ = 0) \Rightarrow [(\sin 30^\circ = 1) \vee (2 > \sin 10^\circ)]$

h) $\left[(\pi = 2) \wedge \sqrt{4^2 + 3^2} = 7\right] \Rightarrow (2^7 > 10^3)$

Zadanie 14.

Oceń wartość logiczną zdania:

a) $\left[(\sin 30^\circ + \sin 60^\circ \neq 1) \wedge \left(\left(\sqrt{2}\right)^2 \geq 2\right)\right] \Rightarrow \left[(\sin 30^\circ + \sin 60^\circ = 1) \vee \left(\left(\sqrt{2}\right)^2 < 2\right)\right]$

b) $\{[(2 > 3) \Rightarrow (\pi = 2)] \wedge [(\pi = 2) \Rightarrow (\sin 50^\circ > \cos 50^\circ)]\} \Rightarrow [(2 > 3) \Rightarrow (\sin 50^\circ > \cos 50^\circ)]$

c) $\sim \left[(2 > 3) \Rightarrow \left(\sin 30^\circ = \frac{1}{2}\right)\right] \Leftrightarrow \left[(2 > 3) \wedge \left(\sin 30^\circ \neq \frac{1}{2}\right)\right]$

Zadanie 15.

Używając symboli rachunku zdań i symboli arytmetyki (np. $<$, $\leq$, $\neq$) zapisz twierdzenia:

a) jeżeli $a \cdot b = 0$, to co najmniej jedna z liczb a i b jest równa zero.

b) Jeżeli iloczyn liczb jest ujemny, to jedna z liczb jest dodatnia, a druga ujemna.

c) Jeżeli liczba n jest podzielna przez 6, to jest podzielna przez 3.

d) Liczba n jest podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 2 i przez 3.

Zadanie 16.

Podane formy zdaniowe jednej i dwu zmiennych poprzedź kwantyfikatorami tak, aby otrzymać zdania prawdziwe.

a) $(x+y)^2 = x^2 + y^2$

b) $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

c) $x^2 + 8x + 2 = 0$

d) $x^2 - 4 < 0$

e) $x^2 - y^2 = x - y$

f) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

g) $x^2 + y^2 \leq 0$

Zadanie 17.

Które z podanych zdań jest prawdziwe?

a) $\bigwedge_{x\in R} \bigwedge_{y\in R} x + y = 0$

b) $\bigwedge_{x\in R} \bigvee_{y\in R} x + y = 0$

c) $\bigwedge_{y\in R} \bigwedge_{x\in R} x + y = 0$

d) $\bigvee_{x\in R} \bigvee_{y\in R} x + y = 0$

e) $\bigvee_{y\in R} \bigwedge_{x\in R} x + y = 0$

f) $\bigvee_{y\in R} \bigvee_{x\in R} x + y = 0$

Zadanie 18.

Które z podanych wyrażeń jest zdaniem?

a) $\bigvee_{x \in R} \bigvee_{y \in R} x^2 + y^2 = 2$

b) $\bigwedge_{x \in R} \bigwedge_{y \in R} x^2 + y^2 + 2xy = (x+y)^2$

c) $\bigvee_{x \in R} x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

d) $\bigvee_{x \in R} \bigwedge_{z \in R} xz = 0$

e) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

f) $\bigwedge_{z \in R} \bigvee_{x \in R} xz = 0$

g) $\bigvee_{x \in R} \bigwedge_{y \in R} xy = 1$

h) $\bigwedge_{x \in R} [(x + y > 0) \vee (x^2 + y^2 > 0)]$

Zadanie 19.

Zapisz za pomocą symboli kwantyfikatorów, symboli rachunku zdań i symboli arytmetyki następujące zdania:

a) Jeżeli liczba a jest różna od zera, to jest dodatnia lub ujemna.

b) Różnica dwu liczb jest równa zero, wtedy i tylko wtedy, gdy liczby są równe.

c) Dla każdej liczby rzeczywistej istnieje liczba od niej większa.

d) Nie istnieje największa liczba naturalna.

e) 0 jest najmniejszą liczbą naturalną.

Zadanie 20.

Utwórz zaprzeczenia zdań i zapisz zaprzeczenia tych zdań tak, aby nie użyć symbolu negacji.

a) $\bigvee_{x\in R} [(x^2 = 4) \wedge (x = 2)]$

b) $\bigwedge_{x\in R} \sqrt{x^2} = x$

c) $\bigvee_{x\in R} (x+1)^2 \neq x+1$

d) $\bigwedge_{x\in R} \sqrt{x^2} = |x|$

e) $\bigwedge_{\alpha\in R} \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

f) $\bigwedge_{x\in R} \bigvee_{y\in R} x^2 + y^2 > 4$

g) $\bigvee_{x\in R} \bigvee_{y\in R} x + y = 3$

h) $\bigvee_{x\in R} \bigwedge_{y\in R} [(x < y) \Rightarrow (x^2 > y^2)]$

i) $\bigwedge_{x\in R} \bigvee_{y\in R} [(x + y = 0) \vee (x > y)]$

Zadanie 21.

Niech p, q, r będą następującymi zdaniami:

$$p = \text{„pada deszcz”}$$

$$q = \text{„słońce świeci”}$$

$$r = \text{„na niebie są chmury”}$$

Zapisz następujące zdania za pomocą symboliki logicznej, używając p, q, r i spójników logicznych:

a) Pada deszcz i świeci słońce.

b) Jeśli pada deszcz, to na niebie są chmury.

c) Jeśli nie pada deszcz, to nie świeci słońce i na niebie są chmury.

d) Słońce świeci wtedy i tylko wtedy, gdy nie pada deszcz.

e) Jeśli nie ma chmur na niebie, to świeci słońce.

Zadanie 22.

Niech p, q, r będą takie jak w zadaniu powyżej. Przetłumacz następujące zdania na język polski:

a) $(p \wedge q) \Rightarrow r$

b) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$

c) $\sim p \Leftrightarrow (q \vee r)$

d) $\sim (p \Leftrightarrow (q \vee r))$

e) $\sim (p \vee q) \wedge r$

Zadanie 23.

Które z następujących wyrażeń są zdaniami? Podaj wartości logiczne tych zdań.

a) $x^2 = x \forall x \in \mathbb{R}$

b) $x^2 = x$ dla pewnego $x \in \mathbb{R}$

c) $x^2 = x$

d) $x^2 = x$ dla dokładnie jednego $x \in \mathbb{R}$

e) $xy = xz$ implementuje $y = z$

f) $xy = xz$ implementuje $y = z \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

Zadanie 24.

Podaj zdania odwrotne i przeciwstawne (kontrapozycję) do następujących zdań:

a) $q \Rightarrow r$

b) Jeśli jestem bystry, to jestem bogaty

c) Jeśli $x^2 = x$, to $x = 0$ lub $x = 1$

d) Jeśli $2 + 2 = 4$, to $2 + 4 = 8$

Zadanie 25.

Pokaż, że $(m, n) = (4, -4)$ jest kontrprzykładem poniższego stwierdzenia. Podaj inny kontrprzykład.

„Jeśli m, n są niezerowymi liczbami całkowitymi,
które są nawzajem podzielne przez siebie, to $m = n$"

Zadanie 26.

a) Pokaż, że $x = -1$ jest kontrprzykładem na $(x + 1)^2 \geq x^2 \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Znajdź inny kontrprzykład.

c) Czy liczba ujemna może być kontrprzykładem? Wyjaśnij to.

Zadanie 27.

Znajdź kontrprzykłady na następujące stwierdzenia:

a) $2^n - 1$ jest liczbą pierwszą dla każdego $n > 2$

b) $2^n + 3^n$ jest liczbą pierwszą $\forall n \in \mathbb{N}$

c) $2^n + n$ jest liczbą pierwszą dla każdej nieparzystej liczby dodatniej n.

Zadanie 28.

Nawet jeśli zazwyczaj używamy sformułowań „implikuje" czy „jeśli ..., to", aby opisać implikację, to często w praktyce pojawiają się inne słowa czy sformułowania, tak jak w poniższym przykładzie. Niech p, q, r będą zdaniami:

$$p = \text{„znacznik jest ustawiony"}$$

$$q = \text{„}1{=}0\text{"}$$

$$r = \text{„podprogram } S \text{ zakończył działanie"}$$

Zapisz każde z poniższych zdań za pomocą symboliki logicznej, używając liter p, q, r i spójników logicznych.

a) Jeśli znacznik jest ustawiony, to $l = 0$.

b) Podprogram S zakończył działanie, jeśli znacznik jest ustawiony.

c) Znacznik jest ustawiony, jeśli podprogram S nie zakończył działania.

d) Kiedykolwiek $l = 0$, znacznik jest ustawiony.

e) Podprogram S zakończył działanie tylko wtedy, gdy $l = 0$.

f) Podprogram S zakończył działanie tylko wtedy, gdy $l = 0$ lub znacznik jest ustawiony. Zwróć uwagę na dwuznaczność: są dwa różne rozwiązania, każde mające swoją wartość logiczną. Czy pomogłoby użycie znaków przestankowych?

Zadanie 29.

Weźmy następujące zdania:

$$r = \text{„NIEPARZYSTA(N)=T"}$$

$$m = \text{„wyniki są wyświetlane na ekranie"}$$

$$p = \text{„wyniki są drukowane na drukarce"}$$

Zapisz następujące zdania tak, jak w poprzednim zadaniu.

a) Wyniki są wyświetlane na ekranie, jeśli NIEPARZYSTA(N)=T.

b) Wyniki są drukowane na drukarce, gdy tylko NIEPARZYSTA(N)=T nie jest prawdą.

c) NIEPARZYSTA(N)=T tylko wtedy, gdy wyniki są wyświetlane na ekranie.

d) Wyniki są wyświetlane na ekranie, jeśli wyniki są drukowane na drukarce.

e) NIEPARZYSTA(N)=T lub wyniki są wyświetlane na ekranie, jeśli wyniki są drukowane na drukarce.

Zadanie 30.

Każde z następujących zdań wyraża implikację. Przepisz każde z nich na nowo w postaci „jeśli p, to q".

a) Dotknij tych ciastek, jeśli chcesz je zjeść.

b) Dotknij tych ciastek, a będziesz żałował.

c) Zrobię to, jeśli ty to zrobisz.

d) Pójdę sobie, chyba, że przestaniesz.