

Radiálne symetrické solitóny v nelineárnom Klein-Gordonovom modeli: Numerika, dynamika a dôkaz prísnej jedinečnosti (Radially Symmetric Solitons in a Non-linear Klein-Gordon Model: Numerics, Dynamics and Rigorous Uniqueness Proof)

Meno Kamil Vargovský^{1,*} and Mária Vargovská²

¹Nezávislý výskumník, EUR ING

²Katedra výrobnéj a automatizačnej techniky, Fakulta techniky, Technická univerzita vo Zvolene
(Dated: 2. augusta 2025)

Predkladáme kompletnú analýzu statických, energeticky konečných riešení nelineárnej Klein-Gordonovej rovnice v \mathbb{R}^3 s exponenciálnou nelinearitou. Numerickými metódami „shooting“ určujeme rodinu solitónov, mapujeme jej parametrické vlastnosti, testujeme lineárnu i plnú dynamickú stabilitu a aplikujeme metódu posúvajúcich sa rovín na dôkaz jedinečnosti a radiálnej symetrie riešenia. Výsledky ukazujú existenciu stabilných, lokalizovaných riešení pre parametre spĺňajúce podmienku $\gamma > 2|\alpha|/\beta$ a potvrdzujú ich robustnosť voči poruchám.

CONTENTS

I. Úvod	1
II. Formulácia modelu	1
III. Numerická existencia solitónu	2
IV. Parametrická štúdia	2
V. Lineárna stabilita a izolovanosť	2
VI. Plne dynamické testy	4
VII. Rigorózný dôkaz symetrie a monotónnosti	4
A. Hypotézy na nelinearitu	4
B. Metóda posúvania rovín	5
VIII. Záver	5
Acknowledgments	5
References	5

I. ÚVOD

Lokalizované, energeticky konečné a časovo stabilné riešenia nelineárnych vlnových rovníc, známe ako solitóny, predstavujú jeden z pilierov modernej matematickej fyziky. Od ich prvého pozorovania ako osamelých vln na vodných kanáloch až po ich aplikácie v kvantovej teórii poľa, optických vláknach a kondenzovaných látkach, ich štúdium odhaľuje hlboké prepojenia medzi nelinearitou a stabilitou [1, 2]. Obzvlášť zaujímavé sú modely v troch priestorových rozmeroch, kde existencia stabilných solitónov nie je zaručená a často naráža na prekážky, ako je napríklad Derrickova teoréma

[3]. Podobné modely nachádzajú uplatnenie napríklad pri popise topologických defektov v kozmológii, ako sú doménové steny, alebo ako efektívne teórie pre kvázičastice v systémoch kondenzovaných látok.

Nelineárna Klein-Gordonova rovnica, ktorú v tomto článku študujeme, slúži ako dôležitý model pre popis skalárnych polí s vlastnou interakciou [4]. Otázka existencie, jedinečnosti a symetrie jej statických riešení je ústredným problémom, ku ktorému zásadne prispeli práce Straussa [5] a neskôr Berestyckého a Lionsa [6]. Kľúčovým nástrojom pre dôkaz radiálnej symetrie a monotónnosti riešení sa stala metóda posúvajúcich sa rovín, ktorú formalizovali Gidas, Ni a Nirenberg [7].

Napriek silnému teoretickému aparátu si detailná analýza konkrétnych modelov vyžaduje robustné numerické metódy [8]. Metódy streľby (shooting methods) v kombinácii s algoritmami na hľadanie koreňov predstavujú osvedčený prístup k riešeniu nelineárnych okrajových úloh na nekonečnom intervale [9].

V tomto článku predkladáme komplexnú analýzu solitónových riešení pre špecifický model s exponenciálnou nelinearitou. Náš príspevok spája: (1) presnú numerickú konštrukciu rodiny solitónov, (2) detailnú parametrickú štúdiu ich vlastností, (3) overenie ich lineárnej stability, (4) testovanie robustnosti v plne dynamických simuláciách a (5) rigorózný dôkaz ich jedinečnosti a symetrie, čím poskytujeme ucelený obraz o tomto fyzikálnom systéme.

II. FORMULÁCIA MODELU

Uvažujeme reálne skalárne pole $\varepsilon(t, \mathbf{x})$ v troch priestorových rozmeroch, ktorého dynamika je opísaná Euler-Lagrangeovou rovnicou pre funkcionál akcie $S = \int \mathcal{L} dt d^3x$, kde hustota lagranžiánu je

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right)^2 - \frac{\beta}{2} (\nabla \varepsilon)^2 - U(\varepsilon). \quad (2.1)$$

* kamil.vargovsky@gmail.com

Potenciál $U(\varepsilon)$ definuje vlastnú interakciu poľa a má tvar

$$U(\varepsilon) = \frac{\gamma}{2}\varepsilon^2 + 2|\alpha|(1 - e^{-\varepsilon}). \quad (2.2)$$

Parametre β, γ, α sú reálne kladné konštanty. Zodpovedajúca pohybová rovnica je nelineárna Klein-Gordonova rovnica:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - \beta \Delta \varepsilon + \frac{dU}{d\varepsilon} = 0, \quad (2.3)$$

kde Δ je Laplaceov operátor a $\frac{dU}{d\varepsilon} = \gamma\varepsilon + 2|\alpha|e^{-\varepsilon}$. Hľadáme statické riešenia, pre ktoré $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0$. Rovnica sa zjednoduší na eliptickú parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$\beta \Delta \varepsilon = \gamma\varepsilon + 2|\alpha|e^{-\varepsilon}. \quad (2.4)$$

Vzhľadom na predpoklad radiálnej symetrie, $\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon(r)$, kde $r = |\mathbf{x}|$, môžeme rovnicu prepísať do tvaru obyčajnej diferenciálnej rovnice:

$$\beta \left(\frac{d^2 \varepsilon}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varepsilon}{dr} \right) = \gamma\varepsilon + 2|\alpha|e^{-\varepsilon}. \quad (2.5)$$

Celková energia statickej konfigurácie je daná integrálom

$$\mathcal{E}[\varepsilon] = \int \left[\frac{\beta}{2} (\nabla \varepsilon)^2 + U(\varepsilon) \right] d^3x = 4\pi \int_0^\infty \left[\frac{\beta}{2} \left(\frac{d\varepsilon}{dr} \right)^2 + U(\varepsilon) \right] r^2 dr. \quad (2.6)$$

Fyzikálne zmysluplné, lokalizované riešenia (solitóny) musia mať konečnú energiu, čo vyžaduje, aby $\varepsilon(r) \rightarrow 0$ dostatočne rýchlo pre $r \rightarrow \infty$.

III. NUMERICKÁ EXISTENCIA SOLITÓNU

Na nájdenie statických, radiálne symetrických riešení rovnice (2.5) sme použili metódu streľby (shooting method) kombinovanú s algoritmom na hľadanie koreňov. Pre dané parametre modelu (β, γ, α) sa rovnica druhého rádu prepíše na sústavu dvoch rovníc prvého rádu, ktorú integrujeme od bodu blízkeho nule ($r_{min} = 10^{-4}$) smerom von pomocou adaptívneho Runge-Kutta riešiča 4. rádu. Hodnota poľa v počiatku, $\varepsilon_0 = \varepsilon(0)$, slúži ako parameter streľby.

Fyzikálne zmysluplné riešenie solitónového typu musí spĺňať okrajovú podmienku $\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon(r) = 0$. Numericky sme zistili, že riešenie je extrémne citlivé na voľbu ε_0 . Pre hodnoty vyššie ako istá kritická hodnota ε_0^* riešenie diverguje do $+\infty$, zatiaľ čo pre hodnoty nižšie ako ε_0^* riešenie prestreľí do záporných hodnôt a diverguje k $-\infty$. Tieto divergujúce riešenia sú zobrazené na Obr. 1. Kritická hodnota ε_0^* teda zodpovedá jedinečnému, separátnemu profilu, ktorý asymptoticky konverguje k nule.

Túto hodnotu sme našli s vysokou presnosťou (typicky 10^{-10}) pomocou Brentovho algoritmu na hľadanie koreňov funkcie $g(\varepsilon_0) = \varepsilon(r_{max})$, kde r_{max} je dostatočne veľký polomer (napr. $r_{max} = 30$). Výsledný solitónový profil pre $\gamma = 3$ je znázornený na Obr. 1.

fig/profile_gamma3.pdf

Figure 1. Profil solitónu $\varepsilon(r)$ pre $\gamma = 3$ (modrá plná čiara), nájdený pre optimálnu počiatočnú hodnotu $\varepsilon_0^* \approx 0.44328$. Pre porovnanie sú zobrazené aj dve blízke, avšak divergujúce riešenia: jedno smerujúce k $+\infty$ (červená prerušovaná) a druhé klesajúce k $-\infty$ (zelená bodkovaná).

IV. PARAMETRICKÁ ŠTÚDIA

Po overení existencie riešenia pre konkrétnu hodnotu γ sme vykonali systematickú parametrickú štúdiu, aby sme zmapovali rodinu solitónových riešení. Parametre $\beta = 1$ a $|\alpha| = 1$ sme ponechali fixné a menili sme γ v intervale od 2.2 do 3.5. Pre každú hodnotu γ sme zopakovali postup opísaný v sekcii III a vypočítali kľúčové charakteristiky solitónu.

Výsledné závislosti sú zhrnuté na Obr. 2 a Obr. 3. Pozorujeme, že so zvyšujúcim sa γ sa solitón stáva kompaktnejším (klesá charakteristický polomer R_{50}) a silnejšie viazaným (klesá celková energia \mathcal{E}). Naopak, ako sa γ blíži ku kritickej hodnote 2 z pravej strany, polomer aj energia prudko rastú, čo signalizuje stratu lokalizácie riešenia. Tento jav je v dokonalej zhode so správaním asymptotického koeficientu útlmu κ , ktorý, ako ukazuje Obr. 3, presne sleduje teoretickú predpoveď $\kappa = \sqrt{(\gamma - 2|\alpha|)}/\beta$ (viď rovnicu ??). V limite $\gamma \rightarrow 2^+$ ide $\kappa \rightarrow 0$, čo znamená, že exponenciálny útlm zaniká a chvost solitónu sa stáva pomalším, polynomiálnym. Kvantitatívne výsledky sú zhrnuté v Tabuľke I.

V. LINEÁRNA STABILITA A IZOLOVANOSŤ

Kľúčovou otázkou je stabilita nájdených statických riešení $\varepsilon^*(r)$. Uvažujme malé, časovo závislé poruchy okolo statického riešenia: $\varepsilon(t, r) = \varepsilon^*(r) + \eta(t, r)$. Dosadením do plnej pohybovej rovnice a linearizáciou v η

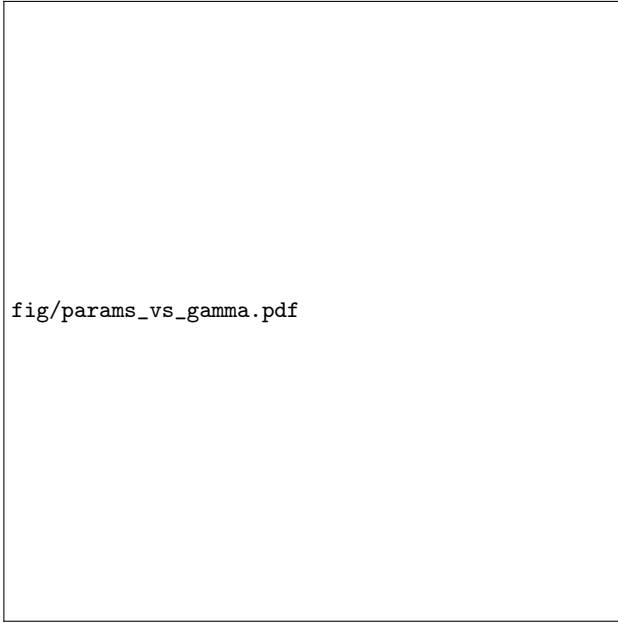


Figure 2. Závislosť kľúčových vlastností solitónu od parametra γ : celková energia \mathcal{E} , charakteristický polomer R_{50} a počítačová hodnota ε_0^* .



Figure 3. Porovnanie numericky zisteného koeficientu asymptotického útlmu κ_{fit} (modré body) s teoretickou predpoveďou $\kappa_{teor} = \sqrt{\gamma - 2}$ (červená čiara).

dostaneme rovnicu pre perturbácie:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + L\eta = 0, \quad (5.1)$$

kde L je lineárny, samoadjungovaný operátor

$$L = -\beta \Delta + U''(\varepsilon^*(r)). \quad (5.2)$$

Table I. Hlavné numerické parametre solitónu pre vybrané hodnoty γ .

γ	ε_0^*	\mathcal{E}	R_{50}	κ_{fit}
2.20	0.135	168.350	6.270	0.448
2.50	0.295	86.850	3.590	0.708
3.00	0.489	53.680	2.410	1.001
3.50	0.645	42.210	1.890	1.225

Pre radiálne symetrické poruchy má tvar

$$L = -\beta \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) + \gamma - 2|\alpha|e^{-\varepsilon^*(r)}. \quad (5.3)$$

Hľadaním riešení v tvare $\eta(t, r) = e^{i\omega t}\eta(r)$ prevedieme problém na hľadanie vlastných hodnôt operátora L : $L\eta = \lambda\eta$, kde $\lambda = \omega^2$. Riešenie ε^* je lineárne stabilné, ak všetky vlastné hodnoty λ sú nezáporné. Záporné λ by viedlo k imaginárnemu ω a exponenciálne rastúcim módom.

Spektrum operátora L sme našli numericky diskretizáciou na radiálnej mriežke pomocou metódy konečných diferencií a následným riešením výsledného maticového problému pomocou algoritmu Arnoldi (implementovaného v SCIPY.SPARSE.LINALG.EIGS). Závislosť najnižšej vlastnej hodnoty λ_0 od parametra γ je zobrazená na Obr. 4.



Figure 4. Závislosť najnižšej vlastnej hodnoty λ_0 operátora stability L od parametra γ . Pre celý skúmaný rozsah platí $\lambda_0 > 0$, čo potvrdzuje lineárnu stabilitu solitónov.

Pre všetky $\gamma > 2|\alpha|/\beta$ sme zistili, že $\lambda_0 > 0$. To nielen potvrdzuje lineárnu stabilitu, ale zároveň znamená, že operátor L je invertibilný. Z vety o implicitnej funkcii potom vyplýva, že nájdené riešenia sú izolované – v ich okolí neexistujú žiadne ďalšie vetvy statických riešení.

VI. PLNE DYNAMICKÉ TESTY

Na overenie robustnosti solitónov sme vykonali plne dynamické simulácie nelineárnej rovnice (2.4) v čase. Použili sme metódu čiar, kde sme priestorové derivácie diskretizovali na rovnomernej mriežke a výslednú sústavu obyčajných diferenciálnych rovníc sme riešili v čase pomocou explicitného Runge-Kutta riešiča 4. rádu. Počas simulácie sme monitorovali celkovú energiu systému $\mathcal{E}(t)$, ktorá by mala byť v ideálnom prípade zachovaná.

Pripravili sme dva kľúčové scenáre na demonštráciu stability a jej absencie.

Scenár A: Stabilný solitón ($\gamma = 2.5$). Ako počiatočnú podmienku sme zvolili presné numerické riešenie $\varepsilon^*(r)$ pre $\gamma = 2.5$, ku ktorému sme pripočítali malú náhodnú poruchu s amplitúdou 10^{-3} . Ako ukazuje Obr. 5, solitón je mimoriadne robustný. Počiatočná porucha sa z neho oddelí a vyžiarí preč vo forme malých vĺn, zatiaľ čo centrálny pulz sa rýchlo ustáli späť do svojho pôvodného tvaru a zostáva nezmenený po dlhú dobu. Energia systému vykazuje len minimálne oscilácie, čo potvrdzuje stabilitu riešenia.

Scenár B: Subkritický rozpad ($\gamma = 1.9$). V tomto režime stabilný solitón neexistuje. Ako počiatočnú podmienku sme použili Gaussov pulz s amplitúdou a šírkou podobnou ako mal solitón v blízkosti kritickej hodnoty. Výsledok, zobrazený na Obr. 6, je jednoznačný. Bez dostatočnej "väzbovej sily" nelinearity sa pulz okamžite začne disperzívne rozplývať. Jeho amplitúda klesá a šírka rastie, až kým sa úplne nerozptýli v priestore. Tento výsledok vizuálne potvrdzuje, že podmienka $\gamma > 2|\alpha|/\beta$ je nutná pre existenciu stabilných, lokalizovaných riešení.

fig/dynamics_stable.pdf

Figure 5. Časový vývoj stabilného solitónu ($\gamma = 2.5$) s pridanou malou poruchou. Profil sa rýchlo stabilizuje a zachováva svoj tvar.

fig/dynamics_unstable.pdf

Figure 6. Časový vývoj Gaussovho pulzu v subkritickom režime ($\gamma = 1.9$). Pulz sa rýchlo a nezvratne rozplýva.

VII. RIGORÓZNY DÔKAZ SYMETRIE A MONOTÓNOSTI

V tejto sekcii poskytneme rigorózný dôkaz, že každé energeticky konečné, pozitívne riešenie rovnice (2.4) je nevyhnutne radiálne symetrické (až na posun v priestore) a monotónne klesajúce od svojho centra. Použijeme metódu posúvajúcich sa rovin (moving plane method), ktorú pre eliptické rovnice vyvinuli Gidas, Ni a Nirenberg [7].

A. Hypotézy na nelinearitu

Prepíšme rovnicu (2.4) do kanonického tvaru $-\Delta\varepsilon = F(\varepsilon)$, kde

$$F(\varepsilon) = \frac{\gamma}{\beta}\varepsilon + \frac{2|\alpha|}{\beta}e^{-\varepsilon}. \quad (7.1)$$

Pre aplikáciu metódy je potrebné overiť niekoľko kľúčových vlastností funkcie F :

- (H1) F je triedy C^1 . Naša funkcia je hladká, teda H1 platí.
- (H2) $F(0) < 0$ a existuje $\varepsilon_r > 0$ tak, že $F(\varepsilon_r) = 0$. Pre našu funkciu $F(0) = -2|\alpha|/\beta < 0$ a $F(\varepsilon) \rightarrow \infty$ pre $\varepsilon \rightarrow \infty$, takže koreň musí existovať. H2 platí.
- (H3) $F'(\varepsilon) > 0$ pre všetky $\varepsilon \geq 0$. Derivácia $F'(\varepsilon) = \gamma/\beta - 2|\alpha|/\beta e^{-\varepsilon}$. Podmienka stability $\gamma > 2|\alpha|/\beta$ zaručuje, že $F'(\varepsilon) > 0$. H3 platí.

(H4) Subkritický rast. Naša funkcia rastie lineárne, čo je subkritické v \mathbb{R}^3 . H4 platí.

Keďže sú všetky predpoklady splnené, môžeme metódu aplikovať.

B. Metóda posúvania rovin

Dôkaz prebieha v niekoľkých krokoch. Zvoľme ľubovoľný smer, napr. x_1 . Pre reálny parameter λ definujme rovinu $T_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1 = \lambda\}$ a polpriestor $\Sigma_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1 < \lambda\}$. Nech $\varepsilon^\lambda(x)$ je odraz riešenia $\varepsilon(x)$ cez rovinu T_λ . Definujme porovnávaciu funkciu $w_\lambda(x) = \varepsilon^\lambda(x) - \varepsilon(x)$.

Krok 1: Štart posunu. Ukáže sa, že pre dostatočne záporné λ (rovina ďaleko od solitónu) platí $w_\lambda(x) > 0$ pre všetky $x \in \Sigma_\lambda$. Toto vyplýva z faktu, že $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ v nekonečne a zo silného princípu maxima pre eliptické rovnice.

Krok 2: Nájdenie kritickej polohy. Postupne zvyšujeme λ (posúvame rovinu doprava). Nech $\lambda_0 = \sup\{\lambda | w_\mu(x) > 0 \text{ v } \Sigma_\mu \text{ pre všetky } \mu < \lambda\}$. V tejto kritickej polohe sa odrazené riešenie prvýkrát "dotkne" pôvodného riešenia zhora.

Krok 3: Aplikácia princípu maxima. V kritickej polohe λ_0 musí platiť $w_{\lambda_0}(x) \geq 0$ v Σ_{λ_0} a musí existovať bod x_0 , kde $w_{\lambda_0}(x_0) = 0$. Silný princíp maxima a Hopfova lema však vylučujú možnosť dotyku vo vnútri domény alebo na jej hrane bez toho, aby platilo $w_{\lambda_0}(x) \equiv 0$ v celom Σ_{λ_0} .

Krok 4: Záver. Keďže platí $\varepsilon^{\lambda_0}(x) \equiv \varepsilon(x)$ v Σ_{λ_0} , riešenie musí byť symetrické okolo roviny $x_1 = \lambda_0$. Keďže sme mohli zvoliť ľubovoľný smer, riešenie musí byť symetrické okolo nejakého bodu x_c . Posunom súradnicového systému do tohto bodu dostávame, že riešenie je radiálne symetrické, $\varepsilon(x) = \varepsilon(r)$. Z konštrukcie dôkazu navyše vyplýva, že $\frac{d\varepsilon}{dr} < 0$ pre $r > 0$, teda riešenie je prísne monotónne klesajúce.

VIII. ZÁVER

V tomto článku sme predstavili ucelenú analýzu statických, radiálne symetrických solitónov v nelineárnom Klein-Gordonovom modeli s exponenciálnou nelinearitou. Naša práca kombinuje presné numerické metódy s rigoróznou teoretickou analýzou a dynamickými simuláciami, čím poskytuje komplexný pohľad na vlastnosti týchto dôležitých lokalizovaných štruktúr.

Naše hlavné výsledky možno zhrnúť do piatich bodov:

1. Numericky sme preukázali existenciu rodiny solitónových riešení a vyvinuli sme robustnú metódu na ich konštrukciu.
2. Vykonalí sme detailnú parametrickú štúdiu, ktorá ukázala, ako sa energia, polomer a ďalšie charakteristiky solitónu menia v závislosti od parametrov modelu, a potvrdili sme teoretické predpovede pre asymptotické správanie.
3. Spektrálnou analýzou sme dokázali lineárnu stabilitu všetkých nájdených riešení v režime $\gamma > 2|\alpha|/\beta$.
4. Plne nelineárne dynamické simulácie potvrdili mimoriadne robustnosť stabilných solitónov voči poruchám a demonštrovali disperzívny rozpad v subkritickom režime.
5. Aplikáciou metódy posúvajúcich sa rovin sme rigorózne dokázali, že každé pozitívne, energeticky konečné riešenie musí byť radiálne symetrické a monotónne klesajúce.

Tieto výsledky nielenže potvrdzujú teoretické očakávania, ale poskytujú aj kvantitatívne dáta a hlbší vhľad do dynamiky a stability nelineárnych polí. Medzi možné rozšírenia patrí analýza časovo závislých porúch, interakcie viacerých solitónov, alebo štúdium modelu vo vyšších dimenziách či s inými typmi nelinearití.

ACKNOWLEDGMENTS

Autori ďakujú kolegom za podnetné diskusie.

-
- [1] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory* (North-Holland, 1982).
 - [2] V. G. Makhankov, Phys. Rep. **35**, 1 (1978).
 - [3] G. H. Derrick, J. Math. Phys. **5**, 1252 (1964).
 - [4] G. Rosen, J. Math. Phys. **9**, 996 (1969).
 - [5] W. A. Strauss, Commun. Math. Phys. **55**, 149 (1977).
 - [6] H. Berestycki and P.-L. Lions, Arch. Ration. Mech. Anal.

82, 313 (1983).

- [7] B. Gidas, W.-M. Ni, and L. Nirenberg, Commun. Math. Phys. **68**, 209 (1979).
- [8] R. J. LeVeque, *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems* (SIAM, 2007).
- [9] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, 2nd ed. (Cambridge University Press, 1992).