باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

روش‌های ریاضی در مهندسی - ۲۵۸۷۲ گروه ۲ - پاییز ۰۳-۱۴۰۲

استاد درس: دکتر امیری

تمرین سری هشتم

موعد تحویل: -

ابهامات و سوالات خود در مورد این تمرین را می توانید با دستیاران، آقایان استادی و خطیب مطرح کنید.

@Mbnkh۱۰ , @mmlofv

---

۱ دستگرمی!(۱۰ نمره)

۱.۱

پاسخ مسئله حداقل مربعات $Ax = b$ را پیدا کنید به طوری که :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۲.۱

با استفاده از یک راه حل حداقل مربعات، سهمی ای را پیدا کنید که بهترین تقریب نقاط داده را دارد.(برای واضح تر شدن مسئله، از صفحه مختصات استفاده کنید)

$$\{(-1, \frac{1}{2}), (1, -1), (2, -\frac{1}{2}), (3, 2)\}$$

۲ حداقل مربعات وزن دار(۲۰ نمره)

میدانیم در حداقل مربعات هدف کمینه کردن تابع زیر است:

$$||Ax - b||^2 = \sum_{i=1}^{m} (\tilde{a}_i^T x - b_i)^2$$

که در آن $\tilde{a}_i^T$ سطرهای A هستند. حال ما میخواهیم در مسئله حداقل مربعات وزنی، تابع هدف زیر را کمینه کنیم:

$$\sum_{i=1}^{m} w_i (\tilde{a}_i^T x - b_i)^2$$

در اینجا w_i ها وزن های مثبت فرض شده هستند. این وزن ها به ما این امکان را می دهند که وزن های مختلفی را به اجزای مختلف بردار باقیمانده نسبت دهیم.در اینجا تابع هدف حداقل مربعات وزنی بیان شده به شکل $||Ax - b||^2{}_w$ بیان میشود.

۱.۲

نشان دهید که حداقل مربعات وزن دار میتواند به شکل $||D(Ax - b)||^2$ برای یک فرم مورب D باشد. در این صورت میتوانیم مسئله حداقل مربعات استاندارد را با کمینه کردن $||Bx - d||^2$ نمایش دهیم به طوری که $B = DA$ و $d = Db$.

۲.۲

نشان دهید که وقتی A دارای ستون های مستقل خطی باشد، ماتریس B نیز دارای ستون های مستقل خطی است.

۳.۲

جواب تقریبی حداقل مربعات به صورت $\hat{\mathbf{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}$ است. یک فرمول مشابه برای حل مسئله حداقل مربعات وزنی ارائه دهید. ممکن است به ماتریس $W = diag(w)$ در حل مسئله تان نیاز داشته باشید.

۳ فرم دیگر مسئله حداقل مربعات(۱۰ نمره)

در این سوال میخواهیم نرم مربعی به اضافه یک تابع افاین را کمینه کنیم:

$$\text{minimize} \quad ||Ax-b||^2 + c^Tx + d$$

$$b \in \mathbb{R}^m \, , \, A \in \mathbb{R}^{m\times n} \, , \, c \in \mathbb{R}^n \, , \, d \in \mathbb{R}$$

می‌دانیم ستون های A مستقل خطی هستند.نشان دهید که تابع هدف مسئله بالا میتواند به شکل

$$||Ax-b||^2 + c^Tx + d = ||Ax-b+f||^2 + g,$$

برای $f \in \mathbb{R}^m$ و ثابت g بیان شود. از این نتیجه میشود که ما میتوانیم مسئله حداقل مربعات را با کمینه کردن

$$||Ax-(b-f)||$$

با پاسخ $\hat{\mathbf{x}} = A^\dagger(b-f)$ بدست آوریم.

۴ مسئله حداقل فاصله(۱۰نمره)

نوع دیگری از مسائل حداقل نرم مسئله حداقل فاصله است که بصورت زیر بیان می‌شود.

$$\text{minimize} \quad ||\mathbf{x}-\mathbf{a}||^2$$

$$\text{subject to} \quad ||C\mathbf{x} = \mathbf{d}||$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \, , \, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \, , \, C \in \mathbb{R}^{m\times n} \, , \, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^p$$

نشان دهید پاسخ مسئله بالا برابر است با:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} - C^\dagger(C\mathbf{a} - \mathbf{d})$$

در این مسئله فرض میکنیم که سطرهای C مستقل خطی هستند.

۵ تابع W Lambert (۱۵ نمره)

تابع W Lambert با $R \to [0, \inf]$ به صورت $W(u) = x$ تعریف میشود؛ به صورتی که $xe^x = u$ و x یک عدد مثبت است. هیچ فرمول تحلیلی برای این تابع وجود ندارد و باید بصورت عددی محاسبه شود. در این مسئله با فرض داشتن u به کمک الگوریتم Levenberg-Marquardt باید $f(x)^2$ را کمینه کنید درحالی که $f(x) = xe^x - u$ است.

۱.۵

فرمول آپدیت x را بنویسید.

۲.۵

به صورت تقریبی تابع $W(u)$ را برحسب u ترسیم کنید.

۶ یک فرم رایج برای باقیمانده (۱۵ نمره)

در بسیاری از مسائل حداقل مربعات غیرخطی تابع باقیمانده به این صورت است:

$$f_i(x) = \Phi_i(a_i^T x - b_i), \quad i = 1, ..., m$$

که a_i یک بردار nتایی است، b_i یک اسکالر و $\Phi_i : R \to R$. در این حالت تابع هدف حداقل مربعات غیرخطی به این فرم است:

$$||f(x)||^2 = \sum_{i=1}^{m} (\Phi_i(a_i^T x - b_i))^2$$

ما یک ماتریس $m \times n$ به نام A تعریف میکنیم که سطرهای $a_1^T, ..., a_m^T$ را داشته باشد. همچنین یک بردار b mتایی تعریف میکنیم. نشان دهید که ماتریس مشتق یعنی $Df(x)$ به این فرم است:

$$Df(x) = diag(d)A, \quad d_i = \Phi_i'(r_i)$$

که $i = 1, ..., m$ و $r = Ax - b$.

۷ بهینه سازی سبد سهام با ریسک کاهشی(۱۰ نمره)

در بهینه سازی استاندارد سبد سهام ما یک بردار وزن w برای بدست آوردن بازده میانگین هدف و حداقل کردن مشتق نسبت به مقدار بازده هدف انتخاب میکنیم. این منجر به مسئله حداقل مربعات خطی مقید میشود. یک نقد این فرمولاسیون این است که آن با سبدی که از هدف ما فراتر میرود مانند سبدی که از هدف ما کمتر است رفتار میکند. برای حل این مشکل، محققان downside risk را تعریف کرده اند که تنها به سبد با مقدار کمتر از هدف ما ρ^{tar} حساس است.

$$D = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (max\{\rho^{tar} - r_t, 0\})^2$$

مقدار $max\{\rho^{tar} - r_t, 0\}$ مقداری است که بازده در بازه t از هدف کمتر میشود.

۱.۷

مسئله بهینه سازی پورتفولیو را با استفاده از ریسک نزولی به جای ریسک معمول به عنوان یک مسئله حداقل مربعات غیرخطی مقید فرموله کنید. توضیح دهید توابع هدف و شرط چه هستند.

۲.۷

میتوان از الگوریتم Levenberg-Marquardt برای حل تقریبی مسئله استفاده کرد. یک عبارت برای $Df(x^{(k)})$ بیابید. مشتق پذیر نبودن تابع در بعضی نقاط را نادیده بگیرید.

۸ حداقل مربعات بولی(۱۰ نمره)

حداقل مربعات بولی یک حالت خاص از حداقل مربعات غیرخطی مقید است:

$$\text{minimize} \quad ||Ax - b||^2$$

$$x_i^2 = 1, \quad i = 1, ..., n$$

که A یک ماتریس $m \times n$، x یک بردار nتایی و b یک بردار mتایی مشخص است. جزئیات الگوریتم Levenberg-Marquardt را برای این مسئله خاص بدست آورید.