



باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

روش‌های ریاضی در مهندسی - ۲۵۸۷۲ گروه ۲ - پاییز ۱۴۰۲-۰۳

استاد درس: دکتر امیری

تمرین سری اول

موعد تحویل: ۲۵ مهرماه - ساعت ۲۳:۵۹

ابهامات و مشکلات خود در مورد این تمرین را می‌توانید با دستیاران طراح، آقایان بلوری و امانی مطرح کنید.

@Ali_reza_361 ، @aminbolouri

۱ دترمینان ماتریس Hessenberg (۱۰ نمره)

ماتریس Hessenberg یک ماتریس مثلثی به همراه یک قطر اضافه است. برای نمونه سه ماتریس آن به صورت زیر است:

$$H_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

رابطه برای دترمینان H_n پیدا کنید و مقدار دترمینان H_{10} را از این رابطه بدست آورید.

۲ ماتریس متعامد یکه (۱۵ نمره)

فرض کنید $Q^T = Q^{-1}$ برقرار باشد. ($Q^T Q = I$)

الف) نشان دهید که ستون‌های q_1, \dots, q_n یکه هستند. ($\|q_i\|^2 = 1$)

ب) نشان دهید هر دو ستون ماتریس Q متعامدند. ($q_i^T q_j = 0$)

ج) نشان دهید ماتریس Q طول را حفظ می‌کند. ($\|Qx\| = \|x\|$)

د) نشان دهید ماتریس $P = q_i q_i^T$ خود توان است. ($P = P^2$)

ه) نشان دهید P ماتریسی منفرد است.

۳ اثبات چند رابطه (۲۰ نمره)

الف) ماتریس P یک ماتریس جایگشت است. می‌دانیم که اگر P از سمت چپ در ماتریس دلخواهی مثل A ضرب کنیم تعدادی از سطرهای آن را جابه‌جا می‌کند. حال ثابت کنید که اگر آن را از سمت راست در ماتریس A ضرب کنیم، به همان صورت ستون‌های A را جابه‌جا می‌کند.

ب) ماتریس A وارون پذیر است. ماتریس B از جابه‌جایی دو ستون اول ماتریس A تشکیل شده است. آیا ماتریس B وارون پذیر است؟ در صورت وجود B^{-1} را بر حسب A^{-1} بدست آورید.

ج) اگر $C = AB$ و ماتریس C وارون پذیر باشد، ثابت کنید که ماتریس‌های A ، B نیز وارون پذیر است.

۴ بازهم اثبات! (۲۰ نمره)

فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})$ است، حال گزاره‌های زیر را اثبات کنید.

الف) اگر A وارون پذیر باشد و برای ماتریس $B \in M_n(\mathbb{R})$ داشته باشیم $AB = 0$ ، آنگاه $B = 0$.

ب) اگر A وارون پذیر نباشد، ماتریس ناصفر $B \in M_n(\mathbb{R})$ وجود دارد که $AB = 0$.

ج) اگر برای هر $X \in M_n(\mathbb{R})$ مجموع درایه‌های روی قطر اصلی AX صفر باشد نشان دهید $A = 0$.

۵ ماتریس دوقطری (۱۵ نمره)

به ماتریسی که در آن فقط درایه‌های قطر اصلی و یکی از قطرهای سمت راست یا سمت چپ قطراصلی غیرصفر باشند، ماتریس

دوقطری (Bidiagonal) می‌گویند، مثلاً ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

یک ماتریس دوقطری است.

حال وارون ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

را به روش معمولی به دست بیاورید، سپس سعی کنید با توجه به ارتباطات درایه‌های A و A^{-1} معکوس ماتریس

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

را به دست بیاورید.

(راهنمایی: برای بدست آوردن وارون B ابتدا ماتریس B را بصورت حاصل ضرب یک ماتریس قطری در ماتریس دیگری بنویسید و معکوس آن ماتریس را حساب کنید.)

۶ مکمل شور (۱۰ نمره)

ماتریس مربعی بلوکی M را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, A \in \mathbb{R}^{p \times p}, B \in \mathbb{R}^{p \times q}, C \in \mathbb{R}^{q \times p}, D \in \mathbb{R}^{q \times q} \rightarrow M \in \mathbb{R}^{(p+q) \times (p+q)}$$

مکمل شور M متناظر با ماتریس D را با نماد M/D نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$M/D = A - BD^{-1}C$$

فرض ما در این سوال این هست که D و M/D هر دو معکوس پذیر هستند، حال نشان دهید M معکوس پذیر است.

۷ ماتریس مربعی (۱۰ نمره)

فرض کنید $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ ماتریس‌های مربعی با ابعاد مستقل و دلخواه هستند و

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & * & \dots & * \\ 0 & A_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_m \end{bmatrix}$$

است به گونه‌ای مقادیر دلخواه حقیقی بالای بلوک‌های A_i هستند، حال ثابت کنید

$$\det(A) = \det(A_1)\det(A_2)\dots\det(A_m)$$

۸ وارون ماتریس بلوکی (سوال امتیازی: ۱۵ نمره)

ماتریس $(n+1) \times (n+1)$ زیر را در نظر بگیرید، به طوری که a یک بردار n تایی باشد.

$$A = \begin{bmatrix} I & a \\ a^T & 0 \end{bmatrix}$$

الف) به ازای چه مقادیری از a ماتریس A وارون پذیر است؟ پاسخ خود را توجیه کنید.

ب) با توجه به شرایطی که در بخش قبل یافتید، عبارتی برای وارون ماتریس A بیابید.