

باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق



روش‌های ریاضی در مهندسی - ۲۵۸۷۲ - گروه ۲ - پاییز ۱۴۰۲-۰۳

استاد درس: دکتر امیری

تمرین سری پنجم

موعد تحویل: ۱۵ آذر ماه - ساعت ۲۳:۵۹

ابهامات و مشکلات خود در مورد این تمرین را می‌توانید با دستیاران طراح، خانم حریقی و خانم ملکی مطرح کنید.

@SN\_HAR @Rosebaekfany

## ۱ مقدار ویژه و بردار ویژه

ماتریس  $A$  یک ماتریس مربعی  $3 \times 3$  با مقادیر ویژه  $\lambda = 1, -1, 2$  و بردار ویژه‌های  $x_1, x_2, x_3$  است.

(الف) مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس  $(A^2 - 3A + 4I)^{-1}$  را بیابید.

(ب) برای مقادیر بزرگ  $n$ ،  $A^n x$  به چه مقداری میل می‌کند و چه شرطی باید روی  $x$  برقرار باشد؟

## ۲ ماتریس مارکوف

ماتریس‌های مارکوف کاربردهای فراوانی در پردازش سیگنال و تئوری اطلاعات دارند. ساختار این ماتریس‌ها به گونه‌ای است که مجموع عناصر هر سطر آن ۱ گردد (یک توزیع احتمال گسسته).

(الف) نشان دهید که برای تمامی ماتریس‌های مارکوف  $M$ ، بردار ویژه  $o = [1, 1, \dots, 1]$  با مقدار ویژه ۱ برای  $M^T$  وجود دارد.

(ب) اگر  $x_k$  بردار ویژه ماتریس  $M$  برای مقادیر ویژه جز ۱ باشد نشان دهید  $o^T x_k = 0$  برقرار خواهد بود.

(پ) اگر  $x$  را به صورت دلخواه با پایه بردارهای ویژه گسترش دهیم به صورتی که  $x = c_1 x_1 + \dots + c_m x_m$  و  $x_m$  بردار ویژه حالت پایدار  $\lambda = 1$  و مقادیر ویژه هیچ یک از باقی بردارهای ویژه ۱ نباشد، با استفاده از  $o^T x_k$  رابطه‌ای برای  $c_m$  بدست آورید.

(ت) اگر تمامی بردارهای ویژه اندازه‌ای کمتر از یک داشته باشند، با میل کردن  $n$  به سمت بی‌نهایت،  $M^n x$  به چه مقداری میل می‌کند (برحسب  $o$ ،  $x$  و  $x_m$  بیان کنید).

## ۳ نابرابری رایلی

اگر ماتریس  $A \in M_n$  یک ماتریس متقارن باشد، آنگاه برای هر بردار ناصفر  $x \in \mathbb{R}^n$  نشان دهید که این رابطه (برای اعداد تماماً حقیقی زیر) برقرار است:

$$\lambda_{\min} \leq \frac{x^T A x}{\|x\|^2} \leq \lambda_{\max}$$

که در آن  $\lambda_{\min}$  و  $\lambda_{\max}$  به ترتیب کوچکترین و بزرگترین مقدار ویژه ماتریس  $A$  است. این نابرابری، رابطه‌ای بسیار کاربردی در بهینه سازی است.

## ۴ ماتریس‌های متشابه

اگر ماتریس‌های  $A, B \in M_n$  متشابه باشند، درستی گزاره‌های زیر را نشان دهید.

(الف)  $tr(A) = tr(B)$

(ب)  $det(A) = det(B)$

پ)  $A^2$  و  $B^2$  نیز متشابه هستند.  
 ت) اگر  $A$  قطری شدنی باشد،  $B$  نیز قطری شدنی است.

### ۵ ماتریس‌های مثبت نیمه معین

ماتریس‌های مثبت نیمه معین  $A, B \in M_n$  را در نظر بگیرید. نشان دهید:  
 الف) مقادیر ویژه  $AB$  و  $BA$  نامنفی هستند.  
 ب)  $AB$  مثبت نیمه معین است اگر و تنها اگر  $AB = BA$  برقرار باشد.  
 پ)  $0 \leq A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}}$  (امتیازی)

### ۶ قطری شدنی بودن ماتریس‌ها (امتیازی)

ماتریس‌های  $A, B \in M_n$  را که  $AB = BA$  برقرار است، در نظر بگیرید.  
 الف) نشان دهید اگر ماتریس  $A$ ،  $n$  مقدار ویژه متمایز داشته باشد، آنگاه هر کدام از ماتریس‌های  $A$ ،  $B$  و  $BA$  قطری شدنی هستند.  
 ب) نشان دهید اگر  $A$  و  $B$  قطری شدنی باشند، ماتریس معکوس پذیر  $X$  وجود خواهد داشت به گونه ای که هر دو ماتریس  $D_1 = X^{-1}AX$  و  $D_2 = X^{-1}BX$  قطری باشند. در این حالت  $A$  و  $B$  را قطری شدنی همزمان می نامیم. به عبارتی می توانیم هر دو ماتریس را به صورت همزمان و در یک پایه مشترک قطری کنیم. آیا عکس این رابطه نیز برقرار است؟ (یعنی اگر  $A$  و  $B$  همزمان قطری شدنی باشند، می توان گفت  $AB = BA$ )؟