



باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

روش‌های ریاضی در مهندسی - ۲۵۸۷۲ گروه ۲ - پاییز ۱۴۰۲-۰۳

استاد درس: دکتر امیری

تمرین سری ششم

موعد تحویل: ۳۰ آذر ماه - ساعت ۲۳:۵۹

ابهامات و سوالات خود در مورد این تمرین را می‌توانید با دستیاران، آقای خیام و خانم حریقی مطرح کنید.

@radinkhayyam , @SN_HAR

۱ تجزیه SVD (۱۰ نمره)

تجزیه SVD ماتریس A را یافته و سپس با استفاده از آن، پایه‌های یکا متعامد برای چهار زیرفضای $C(A)$ ، $N(A)$ ، $C(A^T)$ و $N(A^T)$ ارائه دهید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

۲ بازهم SVD (۳۵ نمره)

فرض کنید که تجزیه مقادیر تکین ماتریس A به شکل زیر می‌باشد:

$$A = \underbrace{\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ x & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_U \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & y \end{bmatrix}}_{V^T}$$

الف) مقادیر x و y را بدست آورید.

ب) موارد زیر را از روی این تجزیه بدست آورید:

- رنک ماتریس A
- مقادیر ویژه AA^T و $A^T A$
- یک بردار ویژه ناصفر AA^T

پ) ماتریس A را به صورت جمع دو ماتریس با رنک ۱ بنویسید.

ت) بدون محاسبه مستقیم ماتریس A بردار $A \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

ث) v یک بردار ناصفر در فضای R^2 می‌باشد. ما کسیم عبارت $\frac{\|Av\|}{\|v\|}$ چقدر است و به ازای چه بردار v حاصل می‌شود؟

ج) ماتریس A^\dagger که شبه معکوس ماتریس A هست را محاسبه کنید.

چ) از ماتریس A^\dagger که در قسمت قبل محاسبه کردید استفاده کنید تا یک پاسخ کمترین مربعات برای $Av = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ پیدا کنید.

۳ تجزیه HQ (۱۵ نمره)

A را می‌توان به صورت $A = HQ$ تجزیه کرد که در آن H ماتریسی متقارن و مثبت معین و Q ماتریسی متعامد است.

۱. تجزیه $A = U\Sigma V^T$ را در نظر گرفته و Q را به صورت $Q = UV^T$ اختیار کنید. حال H را به گونه‌ای بیابید که رابطه $U\Sigma V^T = HQ$ برقرار باشد. استدلال کنید که چرا H بدست آمده مثبت معین و متقارن است.

۲. ماتریس 2×2 زیر را در نظر بگیرید. تجزیه‌های $A = U\Sigma V^T$ و $A = HQ$ را برای این ماتریس بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

۴ یکتا نبودن SVD (۱۰ نمره)

یک ماتریس می‌تواند SVD های متفاوتی داشته باشد. فرض کنید ماتریس A یک ماتریس $n \times n$ با مقادیر تکین

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_n$$

که همه σ_i ها متفاوت و ناصفر هستند می‌باشد. توضیح بدهید که چرا همه SVD های $A = U\Sigma V^T$ می‌توانند از روی یکدیگر بدست بیایند به وسیله ضرب کردن بعضی ستون‌های U در منفی یک و همزمان ضرب کردن همان ستون‌های V در منفی یک.

۵ چند اثبات (۲۰ نمره)

۱. با کمک تجزیه SVD نشان دهید که ماتریس مربعی A متقارن است اگر و تنها اگر $A^T A = A A^T$.

۲. برای ماتریس مربعی معکوس پذیر A داریم:

$$A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$$

مقادیر تکین A^{-1} را بدست آورده و نشان دهید:

$$\sigma_{\max}(A)\sigma_{\max}(A^{-1}) \geq 1$$

۶ تجزیه QR و SVD (۱۰ نمره)

فرض کنید که $A = QR$ به صورتی که Q یک ماتریس متعامد می‌باشد. در این صورت تجزیه مقادیر تکین A تقریباً مشابه با تجزیه مقادیر تکین R می‌باشد. کدام یک از سه ماتریس U, Σ, V به دلیل Q تغییر می‌کند؟ دلیل خود را بنویسید.

۷ بهترین تقریب رتبه k (امتیازی: ۲۰ نمره)

ماتریس A_k را بهترین تقریب رتبه k ماتریس A از لحاظ نرم دو و فروبینیوس می‌نامند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T$$

در واقع سطرهای ماتریس A_k تصویر سطرهای ماتریس A بر زیر فضای V_k که توسط k بردار تکین اول A تشکیل شده است می‌باشند. با توجه به این اطلاعات به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

الف) درستی عبارت زیر را نشان دهید:

$$\|A - A_k\|_2^2 = \sigma_{k+1}^2$$

ب) در این قسمت می‌خواهیم ثابت کنیم که این ماتریس بهترین تقریب رتبه k ماتریس A می‌باشد. بدین منظور فرض کنید که A یک ماتریس $n \times d$ می‌باشد، سپس نشان دهید که برای هر ماتریس دلخواه B که رتبه آن حداکثر k می‌باشد عبارت زیر صحیح است:

$$\|A - A_k\|_2 \leq \|A - B\|_2$$