



باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

روش‌های ریاضی در مهندسی - ۲۵۸۷۲ - گروه ۲ - پاییز ۱۴۰۲-۰۳

استاد درس: دکتر امیری

تمرین سری هفتم

موعد تحویل: ۱۳ دی ماه - ساعت ۲۳:۵۹

ابهامات و سوالات خود در مورد این تمرین را می‌توانید با دستیاران، آقایان قاسمی و عابدی مطرح کنید.

@MPA۲۰۰۲ , @EhsanGh۲۰۰۱

۱ تبدیل خطی یک به یک (۱۰ نمره)

ماتریس‌های متناظر با دو تبدیل خطی T_1 و T_2 را مشاهده می‌کنید. کدام یک از آنها بیانگر تبدیل خطی یک به یک است؟ چرا؟

(الف)

$$T_1 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, T_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

(ب)

$$T_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, T_2 = \begin{bmatrix} 8 & 12 & -16 & 20 \\ 4 & -4 & 16 & 24 \\ 25 & 17 & -12 & 40 \\ 12 & 0 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

۲ ماتریس تبدیل (۲۰ نمره)

برای تبدیل‌های معرفی شده در هر قسمت ماتریس تبدیل مناسب را بیابید.

(الف)

$$T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ 3y \\ 4x + 5y \end{bmatrix}$$

(ب) دوران راستگرد حول بردار $\mathbf{V}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ در پایه استاندارد \mathbb{R}^3 به اندازه ۴۵ درجه.

۳ وارون تبدیل خطی (۱۵ نمره)

تبدیل خطی T از فضای برداری U به فضای برداری V یک به یک و پوشا است. می‌دانیم که هر نگاشت یک به یک و پوشا وارون‌پذیر است. بنابراین نگاشت T^{-1} از V به U موجود است به طوری که

$$T^{-1}T = I_U, \quad TT^{-1} = I_V$$

ثابت کنید T^{-1} یک تبدیل خطی است.

۴ چند اثبات کوتاه (۲۵ نمره)

الف) اثبات کنید برای هر تبدیل خطی

$$T(0) = 0$$

ب) با فرض $v = (v_1, v_2)$ ، اثبات کنید کدامیک از تبدیل‌های زیر خطی و کدام غیرخطی است.

$$T(v) = (v_2, v_1) \bullet$$

$$T(v) = (v_1, v_1) \bullet$$

$$T(v) = (0, v_1) \bullet$$

$$T(v) = v_1 \cdot v_2 \bullet$$

$$T(v) = v_1 - v_2 \bullet$$

$$T(v) = 5 \bullet$$

۵ تبدیل‌های مشتق‌گیر و انتگرال‌گیر (۲۵ نمره)

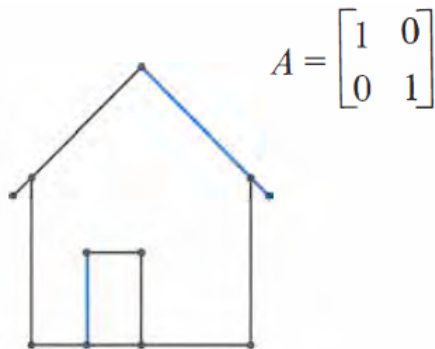
۱. پایه‌های ورودی $v = (1, x, x^2, x^3)$ است. برای ماتریس مشتق‌گیر ابتدا پایه‌های خروجی را یافته و سپس ماتریس مشتق‌گیر را بیابید و آن را A بنامید. (ماتریس سه در چهار است)

۲. با پایه‌های ورودی $1, x, x^2$ ماتریس انتگرال‌گیر بسازید و آن را B بنامید. (ماتریس ۴ در سه است)

۳. کدام یک از دو تبدیل AB, BA تبدیل همانی نیست؟ چرا؟

۶ تبدیل خطی بر روی شکل (۲۰ نمره)

ماتریس T یک خانه به شکل زیر است.



H ماتریس توصیف‌کننده این نقاط است.

$$H = \begin{bmatrix} -6 & -7 \\ -6 & 2 \\ -7 & 1 \\ 0 & 8 \\ 7 & 1 \\ 6 & 2 \\ 6 & -7 \\ -3 & -7 \\ -3 & -2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -7 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}^T$$

الف) تصویر خانه را تحت تبدیل های خطی زیر رسم کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet$$

ب) شرایط ماتریس تبدیل برای آنکه خانه بدون تغییر شکل بچرخد، چیست؟
 پ) شرایط ماتریس تبدیل برای آنکه اندازه ماتریس در همه جهات دوبرابر شود، چیست؟