



باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

روش‌های ریاضی در مهندسی - ۲۵۸۷۲ - گروه ۲ - پاییز ۱۴۰۲-۰۳

استاد درس: دکتر امیری

تمرین سری دوم

موعد تحویل: ۵ آبان ماه - ساعت ۲۳:۵۹

ابهامات و سوالات خود در مورد این تمرین را می‌توانید با دستیاران، آقایان شفیعی زادگان و حاج سید تقیا مطرح کنید.

@MhShafieizadegan , @Amir\_taghia

## ۱ روش حذف گاوس (۱۵ نمره)

فرض کنید می‌خواهیم معادله  $Ax = b$  را برای بیش از یک مقدار  $b$  حل کنیم. برای مثال فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

و می‌خواهیم هر دو معادله  $Ax_1 = b_1$  و  $Ax_2 = b_2$  را به ازای مقادیر زیر حل کنیم.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الف

توضیح دهید چرا حل  $Ax_1 = b_1$  و  $Ax_2 = b_2$  معادل است با حل  $AX = B$  به گونه‌ای که  $X$  ماتریس مجهولات است. ماتریس  $B$  را مشخص کنید و ارتباط ماتریس  $X$  را با  $x_1$  و  $x_2$  بیان کنید.

ب

دستگاه  $AX = B$  را با استفاده از روش حذفی گاوس حل کنید. (مراحل الگوریتم حذف به صورت ماتریسی نیز بیان شود)

## ۲ روش حذف گاوس-جردن (۱۵ نمره)

با استفاده از روش حذف گاوس-جردن، ضرایب چندجمله‌ای  $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  را به گونه‌ای تعیین کنید که شرایط ذکر شده برقرار باشد.

$$p(1) = 1, \quad p'(1) = 5, \quad p(-1) = 3, \quad p'(-1) = 1$$

**۳ کاربرد تجزیه LU در حل دستگاه (۲۰ نمره)**

فرض کنید ماتریس  $A$  حاصل ضرب سه ماتریس به صورت زیر باشد :

$$A = BCD = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

دستگاه زیر را حل کنید.

$$Ax = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 32 \\ 2 \end{bmatrix}$$

**۴ حل دستگاه معادلات (۲۰ نمره)**

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید :

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ -2x + \lambda y - z = 0 \\ -3x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

**الف**

به ازای چه مقداری از  $\lambda$ ، در الگوریتم حذف گاوس، نیاز به جابه جایی سطر دوم و سطر سوم است؟ به ازای مقدار به دست آمده، دستگاه را حل کنید.

**ب**

به ازای چه مقداری از  $\lambda$ ، ماتریس حاصل، تکین (singular) است؟

**۵ وارون ماتریس (۱۵ نمره)**

ماتریس های زیر را در نظر بگیرید :

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اگر  $A = UB^{-1}L$  دومین ستون از ماتریس  $A^{-1}$  را بیابید.

## ۶ پیچیدگی محاسباتی (۱۵ نمره)

پیچیدگی محاسباتی روش حذفی گاوس برای حل دستگاه  $Ax = b$  که  $A$  ماتریسی  $n \times n$  است را محاسبه کنید.

الف

تعداد عملیات های ضرب، جمع و تقسیم برای رسیدن به فرم بالا مثلی را بیابید.

ب

تعداد عملیات های ضرب، جمع و تقسیم برای فرایند جایگزینی پسرو را بیابید.

ج

تعداد کل عملیات ها و حجم محاسبات را بیابید.

## ۷ ماتریس های بلوکی (امتیازی : ۱۵ نمره)

دستگاه معادلات بلوکی زیر را در نظر بگیرید :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

با استفاده از روش حذف گاوس جردن، دستگاه را حل کنید و رابطه ای برای معکوس ماتریس بلوکی  $F = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  به دست آورید.

## ۸ تجزیه LU برای ماتریس های Tridiagonal (امتیازی : ۱۵ نمره)

در تمرین قبل با ماتریس های Bidiagonal آشنا شدید. در این تمرین ماتریس های Tridiagonal و تجزیه LU آن ها را بررسی می کنیم. ماتریس های Tridiagonal، ماتریس هایی هستند که تنها درایه های روی قطر اصلی و قطر های بالا و پایین آن غیر صفر هستند.

الف

برای ماتریس زیر تجزیه LU را به دست آورید. سعی کنید فرم بسته ای برای رابطه بین درایه های ماتریس های L و U یا درایه های ماتریس اصلی بنویسید.

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & b_5 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & b_6 & c_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_7 & b_7 \end{bmatrix}$$

ب

در حل دستگاه  $Ax = b$  در صورتی که ماتریس ضرایب Tridiagonal باشد، می توان با استفاده از گونه ای از حذف گاوسی به نام الگوریتم توماس یا الگوریتم ماتریس Tridiagonal (TDMA) به طور مؤثر دستگاه را حل کرد. با جست و جو در اینترنت این الگوریتم به طور کامل با ذکر یک مثال ساده توضیح دهید.