



باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

روش‌های ریاضی در مهندسی - ۲۵۸۷۲ گروه ۲ - پاییز ۱۴۰۲-۰۳

استاد درس: دکتر امیری

تمرین سری سوم

موعد تحویل: ۲۲ آبان‌ماه - ساعت ۲۳:۵۹

ابهامات و مشکلات خود در مورد این تمرین را می‌توانید با دستیاران طراح، آقایان تسلیمی و افصحی مطرح کنید.

@Hmnafs ، @MoTa80

۱ فضای برداری، پایه و بعد (۳۵ نمره)

مجموعه چندجمله‌ای‌های درجه n با ضرایب حقیقی را با $\mathbb{P}_n[x]$ نمایش می‌دهیم.

۱. نشان دهید \mathbb{P}_n تحت عمل جمع چندجمله‌ای‌ها و ضرب اسکالر در چندجمله‌ای یک فضای برداری است.

۲. نشان دهید که مجموعه‌های A و B دو پایه برای \mathbb{P}_n هستند:

$$A = \{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$$

$$B = \{1, (x-a), (x-a)^2, \dots, (x-a)^n\}, a \in \mathbb{R}$$

۳. در صورتی که نمایش یک چندجمله‌ای در پایه استاندارد A به صورت $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ باشد، نمایش آن را در پایه B بیابید.

۴. اگر \mathcal{W}_1 و \mathcal{W}_2 را به ترتیب برابر \mathbb{P}_2 و \mathbb{P}_3 در نظر بگیریم، آیا $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ و $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ فضای برداری هستند؟ در صورت مثبت بودن جواب، بعد آن‌ها را بیابید.

۵. مجموعه چندجمله‌ای‌های دو متغیره از درجه n را با $\mathbb{P}_n[x_1, x_2]$ نشان می‌دهیم که خود یک فضای برداری است. بعد فضای فوق را محاسبه کنید و یک پایه برای آن ارائه دهید.

۶. قسمت قبل را برای چند جمله‌ای‌های چند متغیره $\mathbb{P}_n[x_1, x_2, \dots, x_m]$ تکرار کنید.

۲ تغییر پایه (۱۵ نمره)

در این تمرین قصد داریم نمایش یک بردار در پایه‌های مختلف و ارتباط آن‌ها با هم را بررسی کنیم.

۱. نشان دهید مجموعه‌های

$$\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

و

$$\beta = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$$

دو پایه برای \mathbb{R}^3 هستند.

۲. اکنون می‌توانیم هر بردار دلخواه u را بر اساس این دو پایه نمایش دهیم. نشان دهید اگر نمایش بردار u بر مبنای α و β به ترتیب برابر با u_α و u_β باشد، ماتریس $S_{\alpha \rightarrow \beta}$ ای وجود دارد به طوری که:

$$S_{\alpha \rightarrow \beta} = [\alpha_{1\beta} \ \alpha_{2\beta} \ \alpha_{3\beta}] \quad \text{و} \quad u_\beta = S_{\alpha \rightarrow \beta} u_\alpha$$

۳. اگر $u_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ باشد، u_β را بدست آورید.

۳ چهار زیرفضای اساسی (۲۰ نمره)

ماتریس زیر را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۱. رتبه ماتریس و ابعاد چهار زیرفضای اساسی آن را بدست آورید.

۲. برای هر چهار زیرفضای اساسی ماتریس، یک پایه مناسب ارائه دهید.

۳. با بررسی تعامد پایه‌ها، نشان دهید که فضای سطری بر فضای پوچی و فضای ستونی بر فضای پوچی چپ عمود هستند.

۴ پاسخ کامل دستگاه معادلات غیر مربعی (۲۵ نمره)

ماتریس زیر را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

۱. ماتریس پایین مثلثی L و بالا مثلثی U را به گونه ای پیدا کنید که $A = LU$.

۲. فرم سطری پلکانی کاهش یافته ماتریس A (R) را بیابید.

۳. پایه ای برای فضای پوچی A بیابید.

۴. اگر بردار b مجموع ستون های ماتریس A باشند، پاسخ کامل دستگاه $Ax = b$ را بیابید.

۵ ماتریس با رتبه کامل سطری (۱۵ نمره)

می دانیم که $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ بوده و تنها پاسخ ویژه دستگاه $Ax = 0$ به صورت

$$s = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

است. به سوالات زیر پاسخ دهید.

۱. رتبه ماتریس A را بدست آورید و فضای پوچی و ستونی آن را توصیف کنید.

۲. تحت چه شرایطی $Ax = b$ جواب خواهد داشت.

۳. فرم سطری پلکانی کاهش یافته متناظر با A را پیدا کنید.

۶. تعداد جواب دستگاه معادلات (۱۰ نمره)

ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ با رnk r را در نظر بگیرید. همه رابطه‌هایی که بین r, m, n برقرار است را برای هر یک از حالت‌های زیر برای دستگاه معادلات $Ax = b$ مشخص کنید.

۱. معادله برای بعضی از b ها جواب ندارد.

۲. بی نهایت جواب برای هر b دارد.

۳. دقیقاً یک جواب برای بعضی از b ها دارد و برای بقیه b ها جواب ندارد.

۴. دقیقاً یک جواب برای هر b دارد.