



باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

روش‌های ریاضی در مهندسی - ۲۵۸۷۲ گروه ۲ - پاییز ۱۴۰۲-۰۳

استاد درس: دکتر امیری

تمرین سری چهارم

موعد تحویل: ۵ آذر ماه - ساعت ۲۳:۵۹

ابهامات و مشکلات خود در مورد این تمرین را می‌توانید با دستیاران طراح، آقایان گرامی و ولایی مطرح کنید.

@Ardalan\_Gerami @amirrezavelae

## ۱ نگاشت و تعامد (۴۵ نمره)

الف) اگر ماتریس  $P$  یک ماتریس نگاشت به فضای ستونی ماتریس  $A_{m \times n}$  (ستون‌های ماتریس  $A$  مستقل هستند) باشد؛ ثابت کنید:

$$P = P^2 = P^T$$

ب) بردار  $b$  و ماتریس نگاشت  $P$  که ترکیبی از بردارهای  $a_1, a_2, \dots, a_n$  است را در فضای  $\mathbf{R}^m$  در نظر بگیرید؛ همچنین  $a_1, a_2, \dots, a_n$  مستقل خطی هستند. در چه شرایطی می‌توان گفت که ماتریس  $P$  نگاشتی از  $b$  روی زیرفضایی از  $a_1, a_2, \dots, a_n$  است.

پ) ابتدا نگاشت بردار  $b = (3, 4, 4)$  را در راستای خط  $a = (2, 1, 1)$  و سپس نگاشت آن را به صفحه‌ای که شامل  $a$  و  $a^* = (1, 0, 0)$  است بدست آورید. همچنین ثابت کنید که بردار خطای  $e = b - p$  بر بردار  $a$  و همچنین بردار خطای  $e^* = b - p$  بر بردارهای  $a$  و  $a^*$  عمود است. باز هم چنین برداری را پیدا کنید که نگاشت آن روی صفحه شامل  $a$  و  $a^*$  برداری صفر است.

ت) فرض کنید ماتریس نگاشت  $P$  هر بردار در فضای برداری  $\mathbb{R}^3$  را به خطی گذرا از مبدا و نقطه  $a = [3, 4, 5]$  نگاشت دهد. (بردار  $a$  بردار ستونی است) ماتریس نگاشت  $P$ ، فضای پوچی ماتریس نگاشت  $P$  و فضای سطری  $P^T$  را بدست آورید.

ث) اگر ماتریس  $A_{7 \times 5}$  و  $B_{5 \times 6}$  در عبارت  $AB = 0$  صدق کنند؛ ثابت کنید

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq 5$$

## ۲ تجزیه QR (۲۵ نمره)

الف) تجزیه QR ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ب) با استفاده از فرایند گرام-اشمیت، فاصله نقطه  $z = (0, 0, 1, 0)$  تا صفحه  $\pi$  را به دست آورید. این صفحه با بردارهای  $v_1 = (1, -1, 1, -1)$  و  $v_2 = (0, 2, 2, 0)$  موازی است و از نقطه  $x_0 = (1, 0, 0, 0)$  می‌گذرد.

پ) اگر  $u$  برداری یک‌باشد آنگاه ماتریس  $Q$  را ماتریس بازتاب (reflection) می‌نامیم؛ اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$Q = I - 2uu^T$$

حال ثابت کنید که

اولاً ماتریس بازتاب متقارن است.

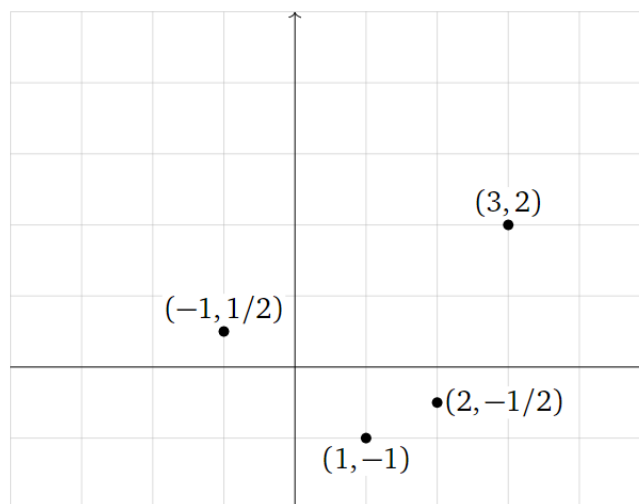
ثانیاً دوبار بازتاب یک شی از آینه، خود شی را نمایان می‌کند. (:

## ۳ تقریب حداقل مربعات (۳۰ نمره)

الف) دستگاه معادلات  $Ax = b$  را با  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  و  $b \in \mathbb{R}^m$  در نظر بگیرید. نشان دهید که  $x_2$  پاسخ حداقل مربعات این دستگاه است اگر و تنها اگر به صورت بخشی از جواب گسترش یافته زیر باشد:

$$\begin{bmatrix} I_{m \times m} & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

ب) معادله بهترین نمودار سهمی که داده‌های زیر را تقریب می‌زند با استفاده از روش تقریب حداقل مربعات بدست آورید.



پ) دو نقطه  $P = (x, x, x)$  و  $Q = (y, 3y, -1)$  دو خط متنافر در فضا هستند.  $x$  و  $y$  را چنان انتخاب کنید که فاصله اقلیدسی بین این دو خط کمینه شود. این مسئله را با دو راه حل مشتق‌گیری و پاسخ تقریب حداقل مربعات به دست آورید.

## ۴ به پایان نیامد این تمرین ۴! هنوز ۲۰ نمره امتیازی مونده

فرض کنید ماتریس  $A_{m \times n}$  یک ماتریس با رنک کامل ستونی و همچنین  $m > n$  است. حال با در نظر گرفتن تجزیه QR ماتریس  $A$ :

الف) نشان دهید ماتریس  $P_0 = I - QQ^T$  ماتریس نگاشت به فضای پوچی  $A^T$  است.  
 ب) نشان دهید که برای هر بردار  $X$  داریم

$$\|Ax - b\|_2^2 = \|A(x - x_0)\|_2^2 + \|Ax_0 - b\|_2^2$$

به طوری که  $x_0$  جواب حداقل مربعات معادله  $Ax = b$  است.

پ) نشان دهید که حداقل مقدار برای نرم دوم باقیمانده زمانی به دست می‌آید که  $x$  برابر با حل حداقل مربعات باشد و این مقدار حداقل برابر با  $\|P_0 b\|_2$  باشد.