TABLA MÉTODO SIMPLEX PARA SOLUCIONAR PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL
PROFESOR ISAAC ZÚÑIGA SILGADO

Forma original del modelo

Maximizar $Z = 3X_1 + 5X_2$

Sujeta a:

$$
\begin{array}{rcrcl}
X_1 & & & \leq & 4 \\
 & & 2X_2 & \leq & 12 \\
3X_1 & + & 2X_2 & \leq & 18 \\
\end{array}
$$

$$X_1\ ,\ X_2 \ \geq\ 0$$

Texto

Forma aumentada del modelo

Maximizar $Z = 3X_1 + 5X_2$

Sujeta a:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
X_1 & & & + & X_3 & & & & & = & 4 \\
 & & 2X_2 & & & + & X_4 & & & = & 12 \\
3X_1 & + & 2X_2 & & & & & + & X_5 & = & 18 \\
\end{array}
$$

$$X_j \ \geq\ 0, \text{ para } j = 1, 2, 3, 4, 5$$

Variables Estructurales: Son aquellas con las que se planteó originalmente el problema de PL.

Variables Básicas: Son las Variables Estructurales que aparecen en la tabla simplex final que definen la solución óptima.

Variables No Básicas: Son las Variables Estructurales que no aparecen en la tabla simplex final que no forman parte de la solución óptima.

FO de Maximización y Restricciones del tipo Menor o Igual a

Pasos 1: Plantear FORMA ORIGINAL DEL MODELO

Pasos 2: Sustituir FORMA ORIGINAL DEL MODELO por la FORMA AUMENTADA DEL MODELO <incluir variables de holgura>

El coeficiente $\mathbf{C_j}$ de una variable de holgura en la función objetivo es de cero. Estas variables se utilizan para obtener una solución básica factible inicial.

Pasos 3: Aplicar Método Simplex en FORMA TABULAR. Realice las siguientes iteraciones:

0. **Iteración Cero**. Solución básica factible inicial.
1. **Iteración (k)**. k=1, 2, 3,…, n; n es el número de veces que se procesan las **variables que entran y salen** de la solución básica, hasta que se llega a la **solución óptima**. El propósito en cada iteración es MEJORAR LA SOLUCIÓN BÁSICA DE LA ITERACIÓN ANTERIOR.

Cálculo de la variable básica entrante:

Se selecciona la variable no básica con el coeficiente negativo que tiene mayor valor absoluto en el renglón cero (0). Está variable determina la **columna pivote**.

Renglón Cero: $\mathbf{Z - \sum C_j X_j = 0}$

Cálculo de la variable básica que sale:

Se divide los coeficientes $\mathbf{b_i}$ entre los coeficientes $\mathbf{a_{ij}}$ > 0; j es la columna pivote. Sale la variable básica del renglón con coeficiente $\mathbf{b_i/a_{ij}}$ con el menor cociente. A este renglón se le denomina **renglón pivote**.

Construcción una NUEVA TABLA SIMPLE en cada iteración k:

Se divide el renglón pivote entre el coeficiente $\mathbf{a_{ij}}$; i es el renglón pivote y j la columna pivote. Luego se lleva a cero (0) todos los coeficientes $\mathbf{a_{ij}}$ de la columna pivote por encima y por debajo del $\mathbf{a_{ij}}$ (observe que es igual a 1) pivote.

Prueba de optimalidad: la solución básica factible es óptima sí y solo sí todos los coeficientes en el renglón cero ($\mathbf{Z_j - C_j \geq 0}$) son no negativos; para todos los valores de j.

Tabla Simplex completa para el problema planteado anteriormente

Iteración (k)	Variable Básica	Ec. núm	Coeficientes de						Lado Derecho
			Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	Z	(0)	1	-3	-5	0	0	0	0
	X_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	X_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	X_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	(0)	1	-3	0	0	5/2	0	30
	X_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	X_2	(2)	0	0	1	0	1/2	0	6
	X_5	(3)	0	3	0	0	-1	1	6
2	Z	(0)	1	0	0	0	3/2	1	36
	X_3	(1)	0	0	0	1	1/3	-1/3	2
	X_2	(2)	0	0	1	0	1/2	0	6
	X_1	(3)	0	1	0	0	-1/3	1/3	2

Ec. Núm: renglón.

FO de Maximización y Restricciones tipo Mayor que o igual a

Pasos 1: Plantear FORMA ORIGINAL DEL MODELO

Pasos 2: Sustituir FORMA ORIGINAL DEL MODELO por la FORMA AUMENTADA DEL MODELO <incluir variables de holgura, excedente y artificial>

> Aparece una variable excedente por cada restricción del tipo ≥. Luego por cada variable excedente se debe definir una variable artificial para poder iniciar el método simplex.
>
> El coeficiente C_j de una variable artificial en la función objetivo es de –M; donde M es un número muy grande.
>
> La variable artificial es un artificio matemático, no tiene nada que ver con el problema; simplemente sirve para elaborar la tabla, y de esa manera, obtener una solución básica factible inicial.

Pasos 3: Aplicar Método Simplex en FORMA TABULAR. Realice las iteraciones necesarias hasta llegar a la solución óptima.

Restricciones de Igualdad

Simplemente se añade una variable artificial para crear una solución básica factible inicial. El método simplex se ejecuta exactamente igual al procedimiento anterior.

Eliminación de valores negativos en los lados derechos de las Restricciones

Simplemente se multiplican estas restricciones por -1. Luego se añaden las variables de holguras, de excedente y artificiales requeridas para crear una solución básica factible inicial. Por último, el método simplex se ejecuta exactamente igual a los procedimientos anteriores.

FO de Minimización

Existen dos (2) formas en las que se puede utilizar el método simplex para resolver un problema de minimización:

> Forma No 1. Se modifica la regla que se utiliza para introducir una variable base. La solución básica factible es óptima sí y solo sí todos los coeficientes en el renglón cero ($Z - \sum C_j X_j \leq 0$) son no positivos.
>
> Forma No 2. Cualquier problema de minimización se puede convertir en otro equivalente de maximización multiplicando la FO por -1.

CASOS ESPECIALES

1. **No factibilidad (No existe región factible)**

   No existe solución para el problema de PL que satisfaga todas las restricciones, incluyendo las de no negatividad.

   Se reconoce porque una o más variables artificiales permanecen en la solución final con un valor positivo. En caso de problemas que tienen sólo restricciones del tipo ≤ y no tienen lados derechos negativos, siempre habrá una solución factible.

2. **No acotamiento (El valor de la solución se hace infinitamente grande)**

   El valor de la solución se hace infinitamente grande (o pequeño) sin violar ninguna restricción. Este tipo de problemas no se presenta en la práctica. Por lo general, general se debe buscar un error en el planteamiento del problema.

   Para problemas de maximización, se reconoce porque todas las a_{ij} son menores que o iguales a cero en la columna j, y el método simplex indique que la variable X_j es la que se debe introducir en la solución.

3. **Soluciones óptimas en alternativas (problema de PL con 2 o más soluciones óptimas)**

   La recta de la FO es paralela a una de las rectas de las restricciones del problema.

   Se reconoce porque una o más de las variables no básicas de la tabla simplex final tienen valores iguales a cero en el renglón cero.

4. Degeneración (o degradación)

Un programa lineal es degenerado sí una o más de las variables básicas tienen valor cero.

Para problemas de maximización, se reconoce porque se presenta empate para el cociente b_i/a_{ij} mínimo. Entonces se recomienda simplemente elegir como renglón pivote el renglón de la parte superior.

Cuando se presenta degeneración en alguna iteración anterior a la solución óptima, en teoría es posible que el método simplex caiga en un ciclo; es decir, es posible que el procedimiento alterne entre el mismo conjunto de soluciones básicas factibles no óptimas y que nunca llegue a la solución óptima.

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD Y DUALIDAD
PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

El **análisis de sensibilidad** es el estudio de la forma en que varía la solución óptima y su valor en un problema de PL, cuando se hacen cambios en los diversos coeficientes del problema.

En la tabla simplex final se utiliza información para calcular…

- los precios sombra y/o los precios duales,
- los márgenes o intervalos de los coeficientes de la función objetivo y
- los márgenes para los valores de los lados derechos.

Tomemos el siguiente ejemplo:

Ahora aprenderemos una manera más práctica de hacer un análisis de sensibilidad en un modelo de programación lineal, utilizando el *Método Simplex*.

Tomemos el siguiente modelo:

$$Máx\ Z = 3x_1 + 4x_2 + \frac{3}{2}x_3$$

$$\begin{array}{ll} s/a & x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ & x_1 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0\ ;\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

Cuya tabla simplex final es:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
x_2	1/2	1	0	1/2	0	5
x_3	1	0	1	-1	1	0
Z	1/2	0	0	1/2	3/2	20

Coeficientes de la FO

- Depende de si la variable es básica o no.
- La solución básica factible seguirá siendo óptima.
- $Z_j - C_j \geq 0$; para todos los valores de j.

Análisis de sensibilidad para coeficientes de variables no básicas

Este es el análisis más sencillo ya que si la variable es no básica, entonces tiene un coeficiente distinto de cero en el renglón cero (0) de la tabla simplex final, este coeficiente es el máximo valor que el coeficiente de la función objetivo de dicha variable puede aumentar manteniendo la solución óptima.

Procedimiento:
a) Se lee de la tabla simplex final, el término que pertenece a la columna de la variable no básica en el renglón cero (0) y se le resta una variable cualquiera **Δ**
b) Se plantea la condición de optimalidad; es decir, que este nuevo término debe ser positivo (mayor que cero) para que la solución siga siendo óptima
c) Se resuelve la desigualdad
d) Se suma a ambos lados de la desigualdad el coeficiente de la función objetivo que acompaña a la variable y este resultado es el intervalo de sensibilidad del coeficiente.

Análisis de sensibilidad para la variable no básica x_1:

a) $\frac{1}{2} - \Delta$

b) $\frac{1}{2} - \Delta \geq 0$

c) $\Delta \leq \frac{1}{2}$

d) El coeficiente de la variable x_1 en el problema es: 3 por tanto:

Sustituimos $3 + \Delta = C_1$

$$3 + \Delta \leq 3 + \frac{1}{2}$$

$$C_1 \leq \frac{7}{2}$$

e) Entonces el intervalo es el siguiente: $-\infty \leq C_1 \leq \frac{7}{2}$

Análisis de sensibilidad para coeficientes de variables básicas

Cuando las variables son básicas, el procedimiento para el análisis de sensibilidad varía un poco, pero conserva su lógica.

Procedimiento:
a) Se reemplaza el cero en el renglón cero (0) de la columna de la variable por el negativo de la variable **Δ** (-**Δ**)

b) Ahora la tabla ya no es óptima, pues existe un elemento negativo en el renglón cero (0), por tanto normaliza la columna de la variable, es decir se debe generar un cero en la posición donde esta **-Δ**

c) Se plantea la condición de optimalidad; es decir, que todos los términos de el renglón cero (0) de la tabla simplex deben ser positivos (mayor que cero) para que la solución siga siendo óptima

d) Se resuelven las desigualdades individualmente y se interceptan los conjuntos soluciones

e) Se suma a todos los lados de la desigualdad el coeficiente de la función objetivo que acompaña a la variable y este resultado es el intervalo de sensibilidad del coeficiente.

Análisis para la variable básica x_2:

a)

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
x_2	1/2	1	0	1/2	0	5
x_3	1	0	1	-1	1	0
Z	1/2	$-\Delta$	0	1/2	3/2	20

b) Para optimizar la tabla de nuevo se efectuará la siguiente operación $f_3 + \Delta * f_1 \rightarrow f_3$
Obteniendo el siguiente resultado:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
x_2	1/2	1	0	1/2	0	5
x_3	1	0	1	-1	1	0
Z	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Delta$	0	0	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Delta$	3/2	$20+5\Delta$

c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Delta \geq 0$ $\qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Delta \geq 0$ $\qquad \frac{3}{2} \geq 0$ $\qquad$ **El valor de Z no nos interesa**

d) $\Delta \geq -1$ $\qquad \Delta \geq -1$ $\qquad$ Siempre es verdadera

Se interceptan los conjuntos soluciones para dar el siguiente resultado: $\Delta \geq -1$

e) El coeficiente de la variable x_2 en el problema es: 4 por tanto:

Sustituimos $4+\Delta = C_2$

$$4+\Delta \geq 4-1$$

$$C_2 \geq 3$$

f) Entonces el intervalo es el siguiente: $3 \leq C_2 \leq \infty$

Análisis para la variable básica x_3:

a)

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
x_2	1/2	1	0	1/2	0	5
x_3	1	0	1	-1	1	0
Z	1/2	0	$-\Delta$	1/2	3/2	20

b) Para optimizar la tabla de nuevo se efectuará la siguiente operación $f_3 + \Delta * f_2 \rightarrow f_3$
Obteniendo el siguiente resultado:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
x_2	1/2	1	0	1/2	0	5
x_3	1	0	1	-1	1	0
Z	$\frac{1}{2}+\Delta$	0	0	$\frac{1}{2}-\Delta$	$\frac{3}{2}+\Delta$	20

c) $\frac{1}{2}+\Delta \geq 0$ $\qquad$ $\frac{1}{2}-\Delta \geq 0$ $\qquad$ $\frac{3}{2}+\Delta \geq 0$

d) $\Delta \geq -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\Delta \leq \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\Delta \geq -\frac{3}{2}$

Se interceptan los conjuntos soluciones para dar el siguiente resultado: $-\frac{1}{2} \leq \Delta \leq \frac{1}{2}$

e) El coeficiente de la variable x_3 en el problema es: $\frac{3}{2}$ por tanto:

Sustituimos $\frac{3}{2}+\Delta = C_3$ $\qquad$ $\frac{3}{2}-\frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}+\Delta \leq \frac{3}{2}+\frac{1}{2}$

$1 \leq C_3 \leq 2$

g) Entonces el intervalo es el siguiente: $1 \leq C_3 \leq 2$

Análisis de sensibilidad para términos independientes de las restricciones

Ahora nos corresponde analizar la sensibilidad a cambios de los términos independientes de las restricciones, pero primero recordemos que las restricciones de un problema de programación lineal representan las limitantes de recursos que tiene una empresa.

La primera pregunta que podríamos hacernos antes de averiguar ¿cuántos recursos más puedo contratar para seguir con mi óptimo? (análisis de sensibilidad de los términos independientes) es ¿cuánto es lo más que estoy dispuesto a pagar por una unidad de recurso extra?

La respuesta a esta pregunta es el **Precio Sombra**, este es el máximo incremento en el precio normal de un recurso que estamos dispuestos a pagar sin que nuestras ganancias disminuyan. Este es un dato que se puede leer directamente de la tabla simplex final en la última fila de la columna de la variable de holgura asociada a la restricción o recurso que queremos investigar.

Por ejemplo:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
x_2	1/2	1	0	1/2	0	5
x_3	1	0	1	-1	1	0
Z	1/2	0	0	1/2	3/2	20

El precio sombra para la restricción uno se lee en la última fila de la columna de la variable de holgura de dicha restricción (s_1) y su valor es: $\frac{1}{2}$, lo cual significa que si actualmente pago \$3 por cada unidad del recurso de la restricción uno, el mayor precio que estoy dispuesto a pagar (sin que mis ganancias disminuyan) es \$3 $+\frac{1}{2}$ =\$3.5 por unidad de recurso.

De igual manera, el precio sombra para la restricción dos se lee en la última fila de la columna de la variable de holgura de dicha restricción (s_2) y su valor es: $\frac{3}{2}$, lo cual significa que si actualmente pago \$3 por cada unidad del recurso de la restricción dos, el mayor precio que

Ahora que ya sabemos ¿cuánto pagar? Concentrémonos en decidir ¿cuánto comprar?

Procedimiento:

a) La sensibilidad del término independiente de una restricción se analizara con la columna de la variable de holgura asociada a dicha restricción; entonces, se realiza una operación entre columnas, de la siguiente manera: A la última columna de la tabla simplex final se le suma la columna de la variable de holgura de la restricción que analizamos multiplicada por la variable **Δ**.

$$C_{final} + \Delta * C_{holgura}$$

b) Recordemos que por las restricciones de no negatividad los valores en la última columna de la tabla simplex deben ser siempre positivos (mayores que cero); por tanto el resultado anterior debe cumplir las restricciones de no negatividad.

$C_{final} + \Delta * C_{holgura} \geq 0$,cada término de este resultado debe cumplir esta condición, **la última fila no se toma en cuenta.**

c) Se plantean las desigualdades de cada término y se resuelven individualmente.
d) Se interceptan los conjuntos solución de las desigualdades
e) Se le suma a todos los lados de la desigualdad el término independiente de la restricción que se analiza, dando como resultado el intervalo de sensibilidad de dicho término.

Análisis para el término independiente de la restricción uno (b_1):

a) La variable de holgura asociada a la primera restricción es s_1; entonces , efectuamos:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} + \Delta \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+\frac{1}{2}\Delta \\ 0-\Delta \\ 20+\frac{1}{2}\Delta \end{bmatrix}$$

b) $\begin{bmatrix} 5+\frac{1}{2}\Delta \\ -\Delta \\ 20+\frac{1}{2}\Delta \end{bmatrix} \geq 0$

c) $5+\frac{1}{2}\Delta \geq 0$ $\qquad$ $-\Delta \geq 0$ $\qquad$ **La última fila no se toma en cuenta**

$5+\frac{1}{2}\Delta \geq 0$ $\qquad$ $-\Delta \geq 0$

$\frac{1}{2}\Delta \geq -5$ $\qquad$ $\Delta \leq 0$

$\Delta \geq -10$

d) Se interceptan los conjuntos soluciones para dar el siguiente resultado: $-10 \leq \Delta \leq 0$

e) El término independiente de la primera restricción b_1 en el problema es: 10 por tanto:

Sustituimos $10+\Delta = b_1$ $\qquad$ $-10+10 \leq 10+\Delta \leq 10+0$

$0 \leq b_1 \leq 10$

f) Entonces el intervalo es el siguiente: $0 \leq b_1 \leq 10$

Análisis para el término independiente de la restricción dos (b_2):

a) La variable de holgura asociada a la primera restricción es s_2 ; entonces , efectuamos:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} + \Delta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+0 \\ 0+\Delta \\ 20+\frac{3}{2}\Delta \end{bmatrix}$$

b) $\begin{bmatrix} 5 \\ \Delta \\ 20+\frac{3}{2}\Delta \end{bmatrix} \geq 0$

c) $5 \geq 0$ $\quad$ $\Delta \geq 0$ $\quad$ **<u>La última fila no se toma en cuenta</u>**

Siempre es verdadera $\quad$ $\Delta \geq 0$

d) Se interceptan los conjuntos soluciones para dar el siguiente resultado: $\Delta \geq 0$

e) El término independiente de la primera restricción b_2 en el problema es: 10 por tanto:

Sustituimos $\quad 10+\Delta = b_2 \quad$ $$-10+0 \leq 10+\Delta \leq 10+\infty$$ $$10 \leq b_2 \leq \infty$$

f) Entonces el intervalo es el siguiente: $\quad 10 \leq b_2 \leq \infty$

PROBLEMAS DE FLUJO DE REDES
<Problemas de transporte, asignación y transbordo>

Los problemas de transporte, asignación y transbordo pertenecen a una clase especial de problemas de programación lineal. Estos problemas pueden ser resueltos por el método simplex, pero existe un algoritmo simplificado especial para resolverlos.

EL PROBLEMA DE TRANSPORTE

Formulación General

Un problema de transporte queda definido por la siguiente información:
1. Un conjunto de m puntos de oferta. Cada punto de oferta i tiene asociado una oferta S_i
2. Un conjunto de n puntos de demanda. Cada punto de demanda j tiene asociada una demanda D_j
3. Cada unidad enviada desde un punto de oferta i a un punto de demanda j tiene un costo unitario de transporte C_{ij}

Consideremos:

X_{ij} = número de unidades enviadas desde el punto de oferta i al punto de demanda j

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} c_{ij} x_{ij}$$

st

$$\begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{j=n} x_{ij} & \leq & s_i & (i = 1 \ldots m) & \text{(Restricciones de oferta)} \\ \sum_{i=1}^{i=m} x_{ij} & \geq & d_j & (j = 1 \ldots n) & \text{(Restricciones de demanda)} \\ x_{ij} & \geq & 0 & (i = 1 \ldots m;\ j = 1 \ldots n) & \text{(Restricciones de signo)} \end{array}$$

Si se satisface:

$$\sum_{i=1}^{i=m} s_i = \sum_{j=1}^{j=n} d_j$$

Se dice que **el problema está balanceado**. En el caso del ejemplo anterior, se verifica que tanto la suma de ofertas como las de las demandas es igual a 125. En el caso de un problema de transporte balanceado todas las restricciones estarían al límite, por lo tanto la formulación queda:

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} c_{ij} x_{ij}$$

st

$$\begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{j=n} x_{ij} & = & s_i & (i = 1 \ldots m) & \text{(Restricciones de oferta)} \\ \sum_{i=1}^{i=m} x_{ij} & = & d_j & (j = 1 \ldots n) & \text{(Restricciones de demanda)} \\ x_{ij} & \geq & 0 & (i = 1 \ldots m;\ j = 1 \ldots n) & \text{(Restricciones de signo)} \end{array}$$

Problemas de Transporte no Balanceados

Si la oferta total supera a la demanda total, se puede balancear el problema de transporte incorporando un punto de demanda artificial o dummy que tenga como demanda el excedente de oferta del problema. Como las asignaciones al punto artificial no son reales, se le asigna un costo unitario de cero. En general, el costo unitario no necesariamente debe ser igual a cero, basta con que tenga igual valor a todos los puntos de oferta disponibles de forma de no generar preferencias. Por simplicidad, se prefiere emplear cero.

Ejemplo de Formulación: Construyamos el modelo de programación lineal para el siguiente problema.

Una empresa energética dispone de tres plantas de generación para satisfacer la demanda eléctrica de cuatro ciudades. Las plantas 1, 2 y 3 pueden satisfacer 35, 50 y 40 millones de [kWh] respectivamente. El valor máximo de consumo ocurre a las 2 PM y es de 45, 20, 30 y 30 millones de [kWh] en las ciudades 1, 2, 3 y 4 respectivamente. El costo de enviar 1 [kWh] depende de la distancia que deba recorrer la energía. La siguiente tabla muestra los costos de envío unitario desde cada planta a cada ciudad. Formule un modelo de programación lineal que permita minimizar los costos de satisfacción de la demanda máxima en todas las ciudades.

	Hacia				
Desde	*Ciudad 1*	*Ciudad 2*	*Ciudad 3*	*Ciudad 4*	*Oferta (Millones kWh)*
Planta 1	8	6	10	9	35
Planta 2	9	12	13	7	50
Planta 3	14	9	16	5	40
Demanda (Millones kWh)	45	20	30	30	

En primer lugar debemos definir las variables de decisión necesarias para representar las posibles decisiones que puede tomar la empresa energética. En este caso, corresponde a la cantidad de energía que se debe enviar desde cada planta a cada ciudad, luego para i = 1… 3 y j = 1… 4:

$$x_{ij} = \text{número de millones de [kWh] producidos en la planta } i \text{ enviadas a ciudad } j$$

En términos de éstas variables, el costo total de entregar energía a todas las ciudades es:

$$\begin{array}{ll} 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{14} & \text{(Costo de enviar energía desde la Planta 1)} \\ +9x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 7x_{24} & \text{(Costo de enviar energía desde la Planta 2)} \\ +14x_{31} + 9x_{32} + 16x_{33} + 5x_{34} & \text{(Costo de enviar energía desde la Planta 3)} \end{array}$$

El problema tiene dos tipos de restricciones. En primer lugar, la energía total suministrada por cada planta no puede exceder su capacidad. En este caso se habla de restricciones de oferta o suministro.

Como existen tres puntos de oferta o suministro, existen tres restricciones:

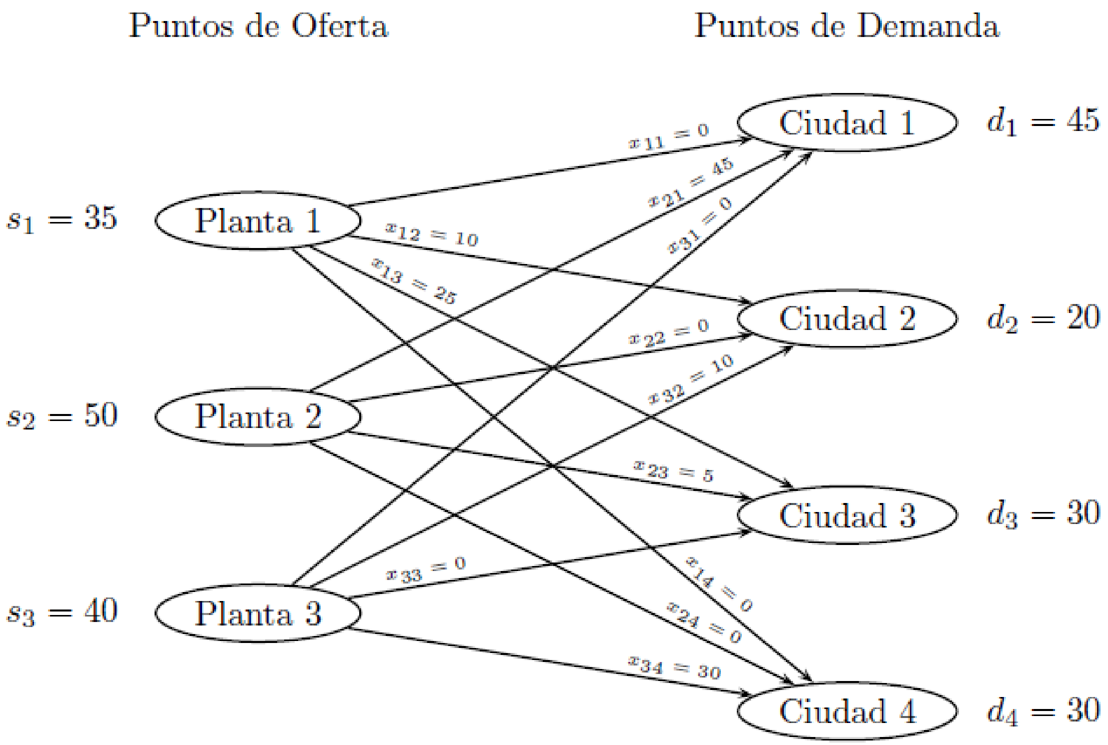
$$\begin{array}{lcll} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} & \leq & 35 & \text{(Restricción de oferta de la Planta 1)} \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} & \leq & 50 & \text{(Restricción de oferta de la Planta 2)} \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} & \leq & 40 & \text{(Restricción de oferta de la Planta 3)} \end{array}$$

En segundo lugar, se deben plantear las restricciones que permitan asegurar que se satisfaga la demanda en las cuatro ciudades. Así, las restricciones de demanda para cada punto de demanda quedan:

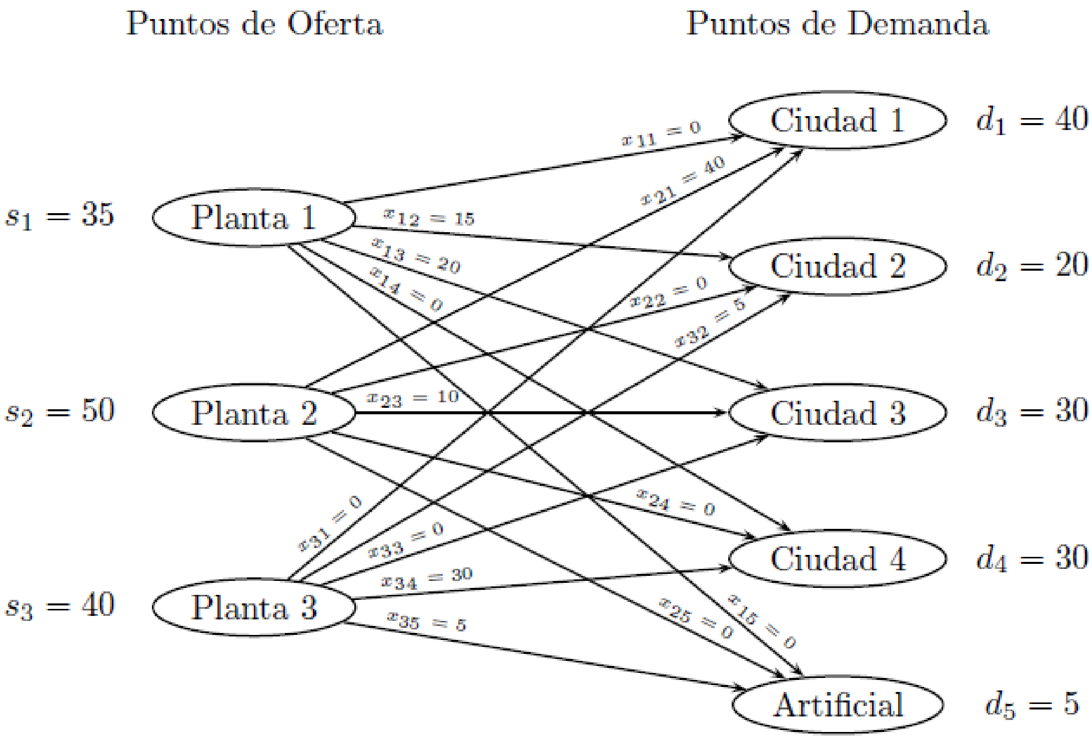
$$\begin{array}{lcll} x_{11}+x_{21}+x_{31} & \geq & 45 & \text{(Restricción de demanda de la Ciudad 1)} \\ x_{12}+x_{22}+x_{32} & \geq & 20 & \text{(Restricción de demanda de la Ciudad 2)} \\ x_{13}+x_{23}+x_{33} & \geq & 30 & \text{(Restricción de demanda de la Ciudad 3)} \\ x_{14}+x_{24}+x_{34} & \geq & 30 & \text{(Restricción de demanda de la Ciudad 4)} \end{array}$$

Evidentemente, cada x_{ij} debe ser no negativo, por lo tanto se agregan las restricciones $x_{ij} \geq 0$ donde $i = 1 \ldots 3$ y $j = 1 \ldots 4$. Más adelante demostraremos que la solución de este problema es $z = 1020$, $x_{12} = 10$, $x_{13} = 25$, $x_{21} = 45$, $x_{23} = 5$, $x_{32} = 10$ y $x_{34} = 30$. El resto de las variables vale cero.

Por otro lado, es posible construir una representación gráfica del problema:



Para ilustrar el balanceo de un problema no balanceado, supongamos en el ejemplo anterior que la demanda de la ciudad 1 disminuye a 40 [kWh]. La siguiente figura ilustra la incorporación del punto de demanda artificial y entrega la solución respectiva:


Puntos de Oferta
Puntos de Demanda
$s_1 = 35$
$s_2 = 50$
$s_3 = 40$
Planta 1
Planta 2
Planta 3
Ciudad 1
Ciudad 2
Ciudad 3
Ciudad 4
Artificial
$d_1 = 40$
$d_2 = 20$
$d_3 = 30$
$d_4 = 30$
$d_5 = 5$
$x_{11} = 0$
$x_{12} = 15$
$x_{13} = 20$
$x_{14} = 0$
$x_{15} = 0$
$x_{21} = 40$
$x_{22} = 0$
$x_{23} = 10$
$x_{24} = 0$
$x_{25} = 0$
$x_{31} = 0$
$x_{32} = 5$
$x_{33} = 0$
$x_{34} = 30$
$x_{35} = 5$

EL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN

El problema de asignación tiene que ver con la asignación de tareas a empleados, de territorios a vendedores, de contratos a postores o de trabajos a plantas. Al aplicar el método de transporte y el método de asignación la gerencia está buscando una ruta de distribución o una asignación que optimizará algún objetivo; éste puede ser la minimización del costo total, la maximización de las utilidades o la minimización del tiempo total involucrado.

Al igual que el método de transporte el método de asignación es computacionalmente más eficiente que el método simplex para una clase especial de problemas. El método de asignación también conocido como la Técnica de flood o el método Húngaro de asignación. Hay básicamente tres pasos en este método.

Formulación General

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} c_{ij} x_{ij}$$

st

$$\begin{array}{llll} \sum_{j=1}^{j=n} x_{ij} & \leq & s_i & (i = 1 \ldots m) & \text{(Restricciones de oferta)} \\ \sum_{i=1}^{i=m} x_{ij} & \geq & d_j & (j = 1 \ldots n) & \text{(Restricciones de demanda)} \\ x_{ij} & \geq & 0 & (i = 1 \ldots m;\ j = 1 \ldots n) & \text{(Restricciones de signo)} \end{array}$$

Si se satisface:

$$\sum_{i=1}^{i=m} s_i = \sum_{j=1}^{j=n} d_j$$

Restricciones (adaptación) al problema de transporte:

Restricciones de oferta	**Restricciones de demanda**
a la oferta generalmente se le denomina Agentes	a la demanda generalmente se le denomina Tareas
$S_i = 1$	En esta restricción $d_j = 1$; y el signo ≥ se cambia por =