Matematika

3. előadás | Függvények tulajdonságai. Sorozatok határértéke. A rendőrelv. Határérték és műveletek.

Dr. Veres Antal

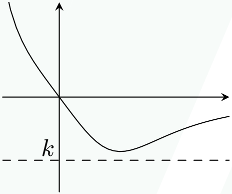
Magyar Agrár- és Élettudományi Egyetem
Matematika és Természettudományi Alapok Intézet

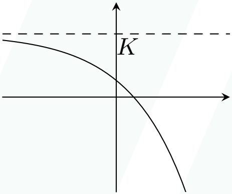
MAGYAR AGRÁR- ÉS ÉLETTUDOMÁNYI EGYETEM

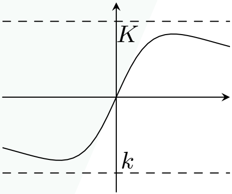
Definíció. Az f függvény alulról korlátos, ha van olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy bármely $x \in D_f$ esetén $k \leq f(x)$. Ekkor a k számot f egy alsó korlátjának nevezzük.

Definíció. Az f függvény felülről korlátos, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy bármely $x \in D_f$ esetén $f(x) \leq K$. Ekkor a K számot f egy felső korlátjának nevezzük.

Definíció. Az f függvény korlátos, ha alulról és felülről is korlátos.

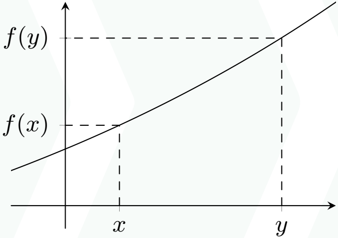






Definíció. Az f függvény (szigorúan) monoton nő, ha tetszőleges $x, y \in D_f$, $x < y$ esetén

$$f(x) \leq f(y) \quad \big(f(x) < f(y)\big).$$

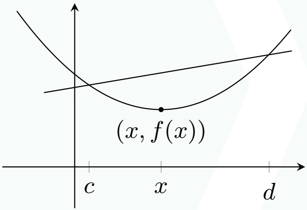


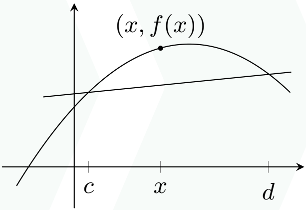
Definíció. Az f függvény (szigorúan) monoton csökken, ha tetszőleges $x, y \in D_f$, $x < y$ esetén

$$f(x) \geq f(y) \quad \big(f(x) > f(y)\big).$$

3/16. KONVEXITÁS

Definíció. Az f függvény konvex (konkáv) az $]a; b[\subset D_f$ intervallumon, ha bármely $c, d \in\,]a; b[$ és bármely $x \in\,]c; d[$ esetén az f grafikonjának $(x, f(x))$ pontja a $(c, f(c))$ és $(d, f(d))$ pontokat összekötő szakasz alatt (felett) vagy a húron van.





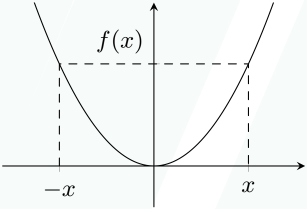
Megjegyzés. Az f függvény grafikonja a $(c, f(c))$ és $(d, f(d))$ pontokat összekötő szakasz alatt vagy a húron halad, ha $\forall t \in [0; 1]$ esetén

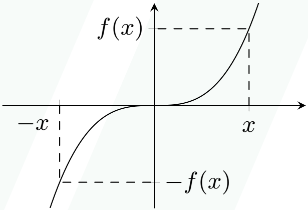
$$f(tc + (1-t)d) \leq tf(c) + (1-b)f(d).$$

Definíció. Az f függvényt periodikusnak nevezzük, ha létezik olyan $t \in \mathbb{R}$, hogy bármely $x \in D_f$ esetén $(x+t) \in D_f$ és $f(x+t) = f(x)$.

Definíció. Legyen f függvény, és tegyük fel, hogy $x \in D_f$ esetén $(-x) \in D_f$. Ekkor az f függvényt

1. párosnak nevezzük, ha $f(-x) = f(x)$,
2. páratlannak nevezzük, ha $f(-x) = -f(x)$.





Megjegyzés. A páros függvények szimmetrikusak az y tengelyre, a páratlanok pedig az origóra.

Augustin-Louis Cauchy
(1789–1857)

- francia matematikus,
- határérték precíz definiálása,
- számelmélettől komplex függvénytanon át a mechanikáig közel 800 cikk.

Definíció. Az olyan a függvényt, amelynek értelmezési tartománya a természetes számok halmaza, sorozatnak nevezzük, azaz

$$D_a = \mathbb{N}, \quad n \mapsto a(n) =: a_n.$$

Az a_n értéket a sorozat n-edik tagjának nevezzük. A sorozat jelölése: (a_n), $\{a_n\}$.

Definíció. Az (a_n) sorozatot

1. felülről korlátosnak nevezzük, ha létezik olyan K szám, hogy $a_n \leq K, \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
2. alulról korlátosnak nevezzük, ha létezik olyan k szám, hogy $k \leq a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Megjegyzés. Az (a_n) sorozat korlátos, ha alulról és felülről is korlátos.

Definíció. Az (a_n) sorozat monoton növő (csökkenő) valamely n indexétől kezdve, ha bármely $k \in \mathbb{N}$, $k > n$ esetén

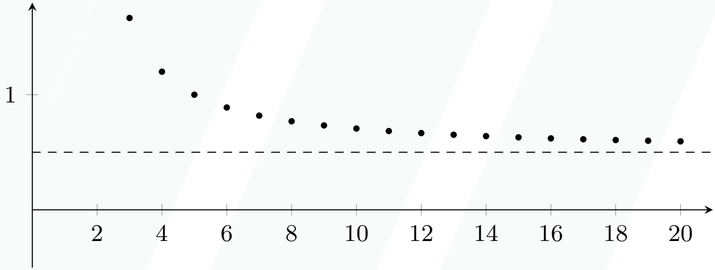
$$a_n \leq a_{n+1} \quad (a_n \geq a_{n+1}).$$

Példa. Tekintsük az

$$a_n := \frac{n+2}{2n-3}$$

sorozatot. A sorozat tagjai

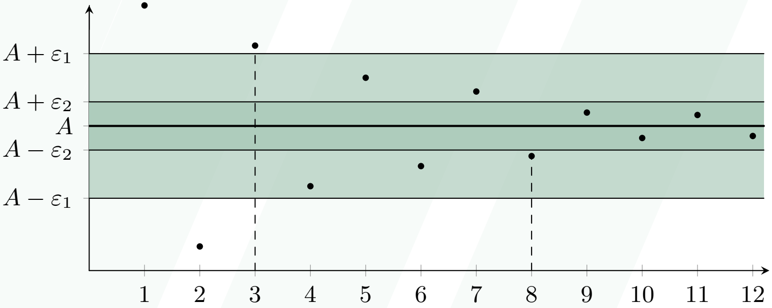
n	1	1000	10 000	100 000
a_n (közelítőleg)	-4	0,502253	0,500225	0,500002



Definíció. Az (a_n) sorozat határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $N(\varepsilon) > 0$ küszöbindex, hogy bármely $n > N(\varepsilon)$ esetén

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

Jelölése: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A, \quad$ vagy $\quad a_n \to A \ (n \to \infty)$.



Példa. Igazoljuk definíció szerint, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2}.$$

Adjunk meg küszöbindexet az $\varepsilon := 0{,}01$ értékhez.
Általánosan, alkalmazva a definíciót az

$$\left| \frac{n+1}{2n-1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon,$$

paraméteres abszolútértékes egyenlőtlenséget kell megoldani. Közös nevezőre hozással, és átrendezéssel

$$\frac{3+2\varepsilon}{4\varepsilon} < n$$

adódik, így a küszöbindex

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{3+2\varepsilon}{4\varepsilon} \right].$$

Definíció. Az (a_n) sorozatot konvergensnek nevezzük, ha létezik $A \in \mathbb{R}$, hogy A a sorozat határértéke. A nem konvergens sorozatot divergensnek nevezzük.

Állítás. A határérték egyértelmű, azaz konvergens sorozatnak pontosan egy határértéke van.

Definíció. Az (a_n) sorozat határértéke végtelen, ha bármely $K > 0$ esetén létezik olyan $N(K) > 0$, hogy bármely $n > N(K)$ esetén

$$a_n > K.$$

Jelölése: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, vagy $a_n \to \infty \ (n \to \infty)$.

Megjegyzés. Azon divergens sorozatokra, amelyeknek a határértéke nem végtelen, gyakran használjuk a valódi divergens kifejezést.

Tétel. Konvergens sorozat korlátos.

Bizonyítás. Mivel (a_n) konvergens, így létezik $a \in \mathbb{R}$, amelyre $a_n \to a$.
Legyen $\varepsilon := 1$. Ekkor a definíció szerint létezik olyan $N(1) \in \mathbb{N}$, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$, $n > N(1)$ esetén

$$|a_n - a| < 1,$$

azaz $a - 1 < a_n < a + 1$. ■

Megjegyzés. A tétel megfordítás nem igaz, hiszen az

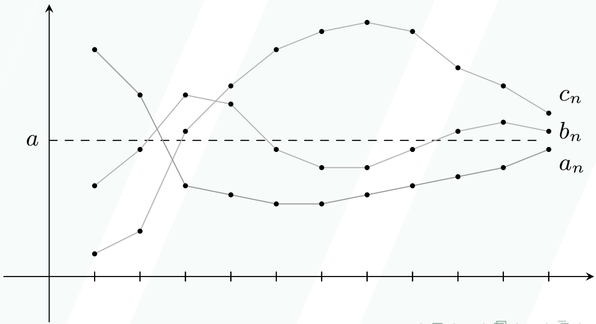
$$a_n := (-1)^n$$

sorozat korlátos, de nem konvergens.

Tétel (A rendőrelv). Legyen (a_n), (b_n), (c_n) tetszőleges sorozat, amelyre $a_n \to a$ és $c_n \to a$, és tegyük fel, hogy létezik olyan n_0 index, hogy bármely $n > n_0$ esetén

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Ekkor $b_n \to a$.



Tétel. Legyen (a_n), (b_n) tetszőleges sorozatok, amelyekre $a_n \to a$ és $b_n \to b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor

1. $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = ca$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$,
4. ha $a_n \neq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, és $a \neq 0$, akkor
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a},$$
5. ha $a_n \geq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, és $k \in \mathbb{N}$ $(k \neq 1)$, akkor
$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[k]{a_n}\right) = \sqrt[k]{a}.$$

Megjegyzés. Bizonyításoknál gyakran használjuk a konvergencia igazolásához az $N(\varepsilon)$ küszöbindex megkeresése helyett, hogy „megfelelően nagy indexekre az $|a_n - A|$ tetszőlegesen kicsi”.

Bizonyítás.

2. A határérték definícióját alkalmazva, elegendően nagy $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$$
$$\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

azaz $(a_n + b_n) \to (a + b)$

3. Mivel (a_n) konvergens, így korlátos. A határérték definícióját alkalmazva, elegendően nagy $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$|(a_n b_n) - (ab)| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab|$$
$$\leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|$$
$$\leq K\varepsilon + |b|\varepsilon = (K + |b|)\varepsilon,$$

azaz $(a_n b_n) \to (ab)$. ∎

Tétel. Legyen (a_n), (b_n), (c_n) tetszőleges sorozatok, amelyekre $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$ és $c_n \to c$, $c \in \mathbb{R}$. Ekkor

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + c_n) = \infty$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \infty$,
4. ha $c > 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} (c_n a_n) = \infty$,
5. ha $a_n \neq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0,$$
6. ha $c_n > 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén és $c = 0$, akkor
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n} = \infty.$$

Példa. Legyen $a_n := n$, $b_n := n^2$ és $c_n := 2n$. Mindhárom sorozat határértéke végtelen, ugyanakkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \lim_{n\to\infty} = \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n} = \lim_{n\to\infty} 2 = 2.$$

Megjegyzés. Könnyen megadhatóak olyan végtelenbe tartó sorozatok, amelyek különbségének határértéke tetszőlegesen adott értékhez konvergálnak.

Megjegyzés. A „kritikus" határértékek:

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \infty \cdot 0, \quad \infty - \infty, \quad 1^{\infty}.$$