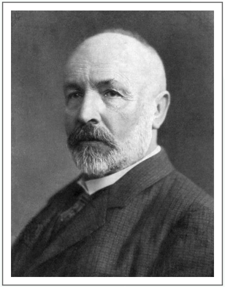
Matematika

1. előadás | Halmazok, relációk. Descartes-szorzat.

Dr. Veres Antal

Magyar Agrár- és Élettudományi Egyetem
Matematika és Természettudományi Alapok Intézet

MAGYAR AGRÁR- ÉS
ÉLETTUDOMÁNYI EGYETEM



Georg Cantor
(1845–1918)

- német matematikus,
- a halmazelmélet megalapítója,
- halmazok számossága.

Axióma. Halmaz fogalma. Halmaz elemének lenni.

- Dolgok összessége. Bármely dologról eldönthető, hogy az hozzátartozik-e a halmazhoz, vagy sem.
- Ha az a dolog hozzátarozik az A halmazhoz, akkor azt mondjuk, hogy a eleme az A halmaznak, jelölése: $a \in A$.

A korlátlan halmazképzés. Legyen P egy tulajdonság, ekkor létezik a P tulajdonságú dolgok halmaza:

$$\{x \mid P(x)\}.$$

Russel-féle antióma (1905). Nevezzük az A halmazt tartalmazkodónak, ha $A \in A$. Legyen H a nem tartalmazkodó halmazok halmaza, azaz

$$H := \{A \mid A \notin A\}.$$

Ha $H \in H$, akkor $H \notin H$.
Ha $H \notin H$, akkor $H \in H$.

Ellentmondás. $\lightning$

Halmazképzés kiválasztás alapján. Legyen A halmaz, $P(x)$ egy olyan tulajdonság, amely A minden elemére eldönthető, hogy teljesül-e. Ekkor az A halmaz P tulajdonságú elemeinek összessége is halmaz:

$$\{x \in A \mid P(x)\} \quad \text{vagy} \quad \{x \in A \,:\, P(x)\}.$$

Megjegyzés.

1. Az összes halmazok halmaza ekkor nem létezik.
2. Nem létezik olyan A halmaz, amelyre $A \in A$.

Definíció. Két halmazt egyenlőnek tekintünk, ha ugyanazok az elemei. Jelölése: $A = B$.

Definíció. Azt a halmazt, amelyiknek nincs eleme üres halmaznak nevezzük. Jele: $\emptyset := \{\}$.

Definíció. Ha az A halmaz minden eleme a B halmaznak is eleme, akkor azt mondjuk, hogy az A halmaz részhalmaza a B halmaznak. Jelölés: $A \subset B$.

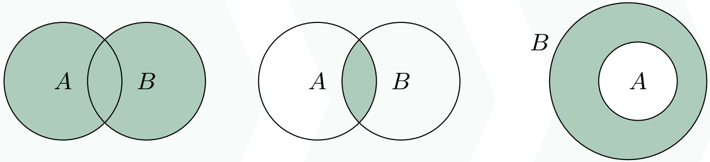
Definíció. Legyen $A \subset B$. Ha $\exists b \in B : b \notin A$, akkor azt mondjuk, hogy A valódi részhalmaza a B halmaznak. Jelölés: $A \subsetneq B$.

Állítás. Ha $A \subset B$ és $B \subset A$, akkor $A = B$.

Bizonyítás. Tfh. $A \neq B$. Ekkor létezik olyan $a \in A$, hogy $a \notin B$, de $A \subset B$. $\lightning$ ∎

Definíció. Legyen A, B halmaz. Ekkor bármely x dologra

1. $x \in A \cup B$ pontosan akkor, ha $x \in A$ vagy $x \in B$,
2. $x \in A \cap B$ pontosan akkor, ha $x \in A$ és $x \in B$,
3. $x \in B \setminus A$ pontosan akkor, ha $x \in B$ és $x \notin A$.



Definíció. Legyen U egy (univerzális) halmaz, $A \subset U$. Ekkor az $U \setminus A$ halmazt az A halmaz U halmazra vonatkozó komplementerének nevezzük. Jele: $\mathcal{C}_U A$.

Megjegyzés. Amennyiben az univerzális halmaz egyértelmű, akkor az A halmaz komplementerére használhatjuk az $\overline{A}$ jelölést.

Példa. Végezzük el az alábbi halmazelméleti műveleteket:

$$(\{2,3,7,11\} \cup \{2,3,9\}) \cap \{3,5\}.$$

Tétel. Az unió és metszet kommutatív, asszociatív és disztributív műveletek, azaz tetszőleges $A, B, C \subset U$ halmazok esetén

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{és} \quad A \cap B = B \cap A,$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \text{és} \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{és}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

illetve

$$A \cup \overline{A} = U, \quad A \cap \overline{A} = \emptyset \quad \text{és} \quad \overline{\overline{A}} = A.$$

Tétel (de Morgan-azonosságok). Bármely $A, B \subset U$ halmaz esetén

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Definíció. Az A halmaz összes részhalmazából álló halmazt az A hatványhalmazának nevezzük. Jele: $\mathcal{P}(A)$.

Megjegyzés.

1. Bármely A halmaz esetén $\emptyset \subset A$, így $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.
2. Nem létezik üres hatványhalmaz.

Megjegyzés. Az n elemű halmaznak 2^n darab részhalmaza van.

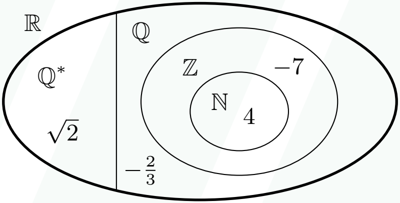
Számhalmazok.

A természetes, egész és racionális számok halmazát ismertnek tekintjük a rajtuk értelmezett műveletekkel. A

- a természetes számok halmazának jele: $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$,
- az egész halmazának jele: $\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$,
- a racionális számok halmazának jele:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{k}{n} \;\middle|\; k, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0,\ \text{l.n.k.o.}(k, n) = 1 \right\}.$$

Megjegyzés. Nem létezik olyan p racionális szám, amelyre $p^2 = 2$.



Definíció. Legyen a, b két objektum. A belőlük alkotott rendezett pár:

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Az a objektumot a rendezett pár első komponensének, a b objektumot a rendezett pár második komponensének nevezzük.

Megjegyzés. Számos egyéb megközelítés létezik a rendezett pár definiálására, például:

$$(a, b) := \{\{a, 1\}, \{b, 2\}\}.$$

Állítás. Az (a, b) és (c, d) rendezett pár pontosan akkor egyenlő, ha $a = c$ és $b = d$.

Definíció. A ϱ halmazt relációnak nevezzük, ha minden eleme rendezett pár.

Megjegyzés. A szakirodalomban elfogadott és gyakran használt jelölés az $(a, b) \in \varrho$ helyett az $a\,\varrho\,b$.
A reláció - mint kapcsolatot kifejező eszköz - szemléltetéseként gondoljunk arra, hogy

$$(\text{Piroska, Zoltán}) \in \heartsuit$$

jelölés helyett inkább használjuk azt, hogy

$$\begin{array}{c}\text{Piroska}\\ \heartsuit\\ \text{Zoltán}\end{array}$$

Definíció. Legyen ϱ reláció. Azon a elemek halmazát, amelyre $(a,b) \in \varrho$, a ϱ reláció értelmezési tartományának nevezzük. Jele: D_ϱ. Röviden:

$$D_\varrho := \{a \mid (a,b) \in \varrho\}.$$

Definíció. Legyen ϱ reláció. Azon b elemek halmazát, amelyre $(a,b) \in \varrho$, a ϱ reláció értékkészletének nevezzük. Jele: R_ϱ. Röviden:

$$R_\varrho := \{b \mid (a,b) \in \varrho\}.$$

Definíció. A ϱ reláció inverzén azt a ϱ^{-1} szimbólummal jelölt relációt értjük, amely azon (a,b) elemekből áll, amelyekre $(b,a) \in \varrho$, azaz

$$\varrho^{-1} := \{(a,b) \mid (b,a) \in \varrho\}.$$

Definíció. A τ relációt ϱ reláció leszűkítésének, ϑ relációt pedig bővítésének nevezzük, ha

$$\tau \subset \varrho \subset \vartheta.$$

Legyen $A \subset D_\varrho$.

Definíció. A ϱ reláció A halmazra való leszűkítése

$$\varrho_{|A} := \{(a, b) \in \varrho \mid a \in A\}.$$

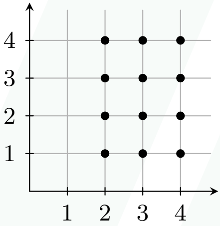
Feladat. Legyen $\rho := \{(1, 3), (-2, -5), (3, 3), (-4, 2), (1, 0), (3, -5)\}$. Adjuk meg

1. ρ értelmezési tartományát és értékkészletét,
2. a ρ^{-1} relációt,
3. ρ-nak egy kiterjesztését.

Definíció. Legyen A, B nem üreshalmaz. Az A és B halmaz Descartes-féle szorzatán azt a halmazt értjük, amely az összes olyan rendezett párból áll, amely első komponense A halmazból, második komponense B halmazból van, azaz

$$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Feladat. Ábrázoljuk a $\{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq n \leq 4\} \times \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 4\}$ Descartes-féle szorzatot.



Állítás. A ϱ halmaz pontosan akkor reláció, ha léteznek olyan A és B halmazok, amelyekre $\varrho \subset A \times B$.

Megjegyzés. A ϱ relációhoz mindig megadható olyan A és B halmaz, amelyre $\varrho \subset A \times B$. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a ϱ reláció az A és B halmazhoz kötötten adható meg.

Megjegyzés. A ϱ reláció legszűkebben mindig a D_ϱ és R_ϱ halmazokhoz kötötten adható meg, de általában $\varrho \neq D_\varrho \times R_\varrho$.