Matematika

2. előadás | Rendezett halmazok. A valós számok halmaza. Függvények.

Dr. Veres Antal

Magyar Agrár- és Élettudományi Egyetem
Matematika és Természettudományi Alapok Intézet

MAGYAR AGRÁR- ÉS ÉLETTUDOMÁNYI EGYETEM

Definíció. Legyen A halmaz. A $\varrho \subset A \times A$ relációt ekvivalencia-relációnak nevezzük, ha

1. $\forall a \in A$ esetén $(a, a) \in \varrho$,
2. ha $(a, b) \in \varrho$, akkor $(b, a) \in \varrho$,
3. ha $(a, b), (b, c) \in \varrho$, akkor $(a, c) \in \varrho$.

Példa.

1. Osztálytársnak lenni egy iskolában,
2. hasonló háromszögnek lenni a síkon,
3. $\varrho \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $(a, b) \in \varrho$, ha $3 \mid b - a$.

Megjegyzés. Legyen $\varrho \subset A \times A$ ekvivalenciareláció. Ekkor $a \in A$ esetén az

$$[a] := \{x \in A \mid (a, x) \in \varrho\}$$

halmazt az a elemhez tartozó ekvivalencia-osztálynak nevezzük.

Definíció. Legyen A halmaz. A $\varrho \subset A \times A$ relációt rendezésnek nevezzük, ha

1. bármely $a \in \varrho$ esetén $(a, a) \in \varrho$,
2. $(a, b) \in \varrho$ és $(b, a) \in \varrho$, akkor $a = b$,
3. $(a, b), (b, c) \in \varrho$, akkor $(a, c) \in \varrho$.

Példa. Példák rendezésre:

1. a racionális számok halmazán a $\leq$ reláció,
2. adott halmaz hatványhalmazán a $\subset$ reláció,
3. az egész számok halmazán a $|$ (oszthatóság) reláció.

Definíció. Az A halmazt rendezett halmaznak nevezzük, ha megadható rajta rendezés.

Definíció. Legyen A rendezett halmaz. Ha van olyan $a \in A$, hogy bármely $x \in A$ esetén $x \leq a$, akkor a-t A maximális elemének nevezzük, jelölése $a = \max A$.

Definíció. Legyen A rendezett halmaz. Ha van olyan $a \in A$, hogy bármely $x \in A$ esetén $a \leq x$, akkor a-t A minimális elemének nevezzük, jelölése $a = \min A$.

Definíció. Legyen A rendezett halmaz, $E \subset A$. Ha van olyan $\alpha \in A$, hogy bármely $x \in E$ esetén

1. $x \leq \alpha$, akkor a-t E egy felső korlátjának nevezzük;
2. $\alpha \leq x$, akkor a-t E egy alsó korlátjának nevezzük.

Definíció. Legyen A rendezett halmaz, $E \subset A$. Ha van olyan $\gamma \in A$, hogy

1. γ az E halmaz felső korlátja,
2. bármely $s < \gamma$ esetén s nem felső korlátja E-nek,

akkor γ-t E legkisebb felső korlátjának (felső határának) nevezzük. Jelölése: $\gamma = \sup E$.

Példa. Legyen $A := \{0, 1, 2, 3\}$. Ekkor

$$\max A = 3, \quad \min A = 0, \quad \inf A = 3.$$

Példa. Legyen $B := \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$. Ekkor

$$\max B = 1, \quad \text{minimuma nem létezik}, \quad \inf B = 0.$$

Emlékeztető. Nem létezik olyan p racionális szám, amelyre $p^2 = 2$.

Megjegyzés. Legyen

$$A := \left\{ q \in \mathbb{Q} \,\middle|\, q^2 < 2, q \geq 0 \right\}$$

és

$$B := \left\{ q \in \mathbb{Q} \,\middle|\, q^2 > 2 \right\}.$$

Ekkor

- a B halmaz minden eleme felső korlátja az A halmaznak,
- a B halmaznak nincs legkisebb eleme, így
- az A halmaznak nincs felső határa.

Éppen ez a felső határ hiányzik a racionális számokból.

Definíció. Legyen A rendezett halmaz. Az A halmazt felsőhatár tulajdonságúnak nevezzük, ha bármely nemüres, felülről korlátos részhalmazának létezik legkisebb felső korlátja.

Tétel. Létezik olyan felsőhatár tulajdonságú, rendezett halmaz, amely tartalmazza a racionális számok halmazát.

Megjegyzés. Konstruktív bizonyítás.

Definíció. A tételben szereplő halmazt a valós számok halmazának nevezzük, jele: $\mathbb{R}$.

Tétel. Legyen $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Ha $x > 0$, akkor létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre
$$nx > y.$$
2. Ha $x < y$, akkor létezik olyan $p \in \mathbb{Q}$, amelyre
$$x < p < y.$$

Megjegyzés. A Tétel első állítását archimédeszi-tulajdonságnak nevezzük. A második része pedig a racionális számok sűrű elhelyezkedéséről szól valós számok között.

Definíció. A valós számok kiterjesztett rendszere az $\mathbb{R}$ halmazból és a $+\infty$ és $-\infty$ szimbólumokból áll. Az eredeti rendezését megtartva, legyen minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$-\infty < x < \infty.$$

Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ekkor a

$$(a;b) =]a;b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

halmazokat nyílt intervallumoknak, a

$$[a;b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

halmazokat pedig zárt intervallumoknak nevezzük.

Megjegyzés. Vegyes végpontú intervallumok is definiálhatóak. A végtelen szimbólum is felhasználható:

$$[a;\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}.$$

Definíció. A $p \in \mathbb{R}$ pont δ (> 0)-sugarú környezetén a $]p-\delta, p+\delta[$ intervallumot érjük. Jelölése

$$K_\delta(p) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x-p| < \delta\}.$$

Definíció. Legyen $E \subset \mathbb{R}$, a p pontot az E halmaz belső pontjának nevezzük, ha van olyan $K(p)$ környezete, hogy $K(p) \subset E$.

Definíció. Legyen $E \subset \mathbb{R}$, a p pontot az E halmaz torlódási pontjának nevezzük, ha p bármely környezete tartalmaz olyan $q \in E$ pontot, amelyre $q \neq p$.

Definíció. Az f relációt függvénynek nevezzük, ha bármely (x, y), $(x, z) \in f$ esetén $y = z$.

Példa. Az

1. $\{(1,2),(1,3),(2,3),(3,5)\}$ reláció nem függvény,
2. $\{(1,2),(4,3),(2,3),(3,5)\}$ reláció függvény.

Definíció. Legyen f függyvény $x \in D_f$. Ekkor az (egyetlen) y elemet, amelyre $(x, y) \in f$, az f függvény x elemen vett helyettesítési értékének nevezzük. Jelölése: $f(x)$.

Definíció. Az f függvényt valósnak nevezzük, ha $R_f \subset \mathbb{R}$, valós-valósnak, ha $D_f, R_f \subset \mathbb{R}$.

Függvények megadási módjai.

1. Szöveges formában: az f függvény álljon az összes olyan rendezett párból, amelynek első komponense nemnegatív valós szám, második pedig az első négyzetgyöke.
2. Relációknál megismert alakban:
$$f := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in \mathbb{R}_0^+, y = \sqrt{x}\right\}.$$
3. Hozzárendeléses módon:
$$f : x \in \mathbb{R}_0^+,\ x \mapsto \sqrt{x}.$$
4. Helyettesítési érték megadásával:
$$x \in \mathbb{R}_0^+,\ f(x) := \sqrt{x}.$$

Megjegyzés. Ha $D_f = \mathbb{R}$, akkor a függvény megadásánál az értelmezési tartomány felírásától eltekintünk.

Definíció. Legyen A és B nemüres halmaz, $f \subset A \times B$. Ekkor az f függvényt az A halmazból a B halmazba képező függvénynek nevezzük.

Definíció. Legyen A és B nemüres halmaz, $f \subset A \times B$. Ha $A = D_f$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az A halmazt a B halmazba képez.Jelölése: $f : A \to B$.

Definíció. Legyen f tetszőleges függvény. Ekkor bármely $c \in \mathbb{R}$ esetén a cf függvény

$$D_{cf} := D_f, \quad (cf)(x) := c \cdot f(x), \quad \forall x \in D_{cf}.$$

Definíció. Legyen f és g függvény, amelyre $D_f \cap D_g \neq \emptyset$. Ekkor az $f+g$ összegfüggvény

$$D_{f+g} := D_f \cap D_g, \quad (f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad \forall x \in D_{f+g}.$$

Definíció. Legyen f és g függvény, amelyre $D_f \cap D_g \neq \emptyset$. Ekkor az fg szorzatfüggvény

$$D_{fg} := D_f \cap D_g, \quad (fg)(x) := f(x) \cdot g(x), \quad \forall x \in D_{fg}.$$

Definíció. Bármely f függvény esetén az $1/f$ függvény

$$D_{1/f} := \{x \in D_f \mid f(x) \neq 0\},$$

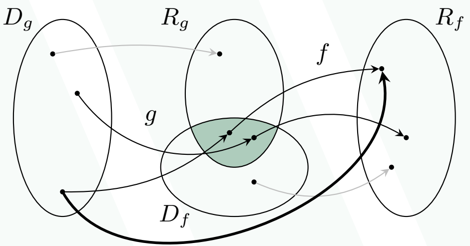
$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) := \frac{1}{f(x)}, \quad \forall x \in D_{1/f}.$$

Feladat. Legyen

$$D_f := \mathbb{R}_0^+, f(x) := \sqrt{x} \quad \text{és} \quad g(x) := 3x - 2.$$

Adjuk meg az $5f$, $f+g$, fg és $\frac{f}{g}$ függvényeket.

Megjegyzés. Két függvény hányadosa az előbbi függvényműveletek alapján reciprok-képzés és szorzás formájában is megkapható, azonban egyben is értelmezhető.



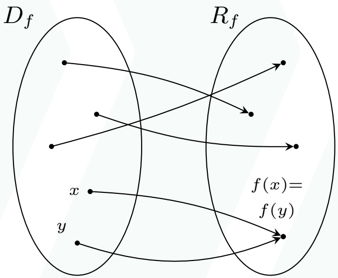
Definíció. Legyenek f és g olyan függvények, amelyekre $R_g \cap D_f \neq \emptyset$. Ekkor az $f \circ g$ összetett függvény értelmezési tartománya $D_{f\circ g} := \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$, és

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)), \quad \forall x \in D_{f\circ g}.$$

Megjegyzés. Az f függvényt az $f \circ g$ összetett függvény külső függvényének, g-t pedig belső függvényének nevezzük.

Definíció. Legyen A és B nemüres halmaz. Az $f : A \to B$ függvényt kölcsönösen egyértelműnek (bijektívnek) nevezzük, ha

1. $B = R_f$,
2. bármely $x, y \in D_f$ esetén az $f(x) = f(y)$ egyenlőségből következik, hogy $x = y$.



Feladat. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 5x + 3$. Igazoljuk, hogy f bijektív.

Definíció. Az f függvény invertálható, ha az inverze is függvény. Jelölése: f^{-1}.

Megjegyzés. Legyen f invertálható függvény. Ekkor

$$D_{f^{-1}} = R_f \quad \text{és} \quad R_{f^{-1}} = D_f.$$

Tétel. Az f függvény akkor és csak akkor invertálható, ha kölcsönösen egyértelmű.

Feladat. Adjuk meg az $f(x) := 5x + 3$ és $g(x) := x^3 - x^2 + 1$ függvények inverzét.

Definíció. Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén a

$$D_f := \mathbb{R}, \; f(x) := x^n$$

függvényt hatványfüggvénynek nevezzük.

Megjegyzés. Egyéb $r \in \mathbb{Q}$ kitevőkre a hatványfüggvények az inverzfüggvény képzéssel, illetve a műveleti szabályok felhasználásával előállíthatóak.

Megjegyzés. Az $f(x) := x^2$ függvénynek nem létezik az inverze. Azonban a $[0, \infty]$ halmazra való leszűkítésének van, nevezetesen a négyzetgyökfüggvény.

Példa. Bármely $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+ \setminus \mathbb{N}$ esetén a megfelelő hatványfüggvények inverzének, reciprokának megadása, majd azok szorzása alapján

$$D_f := \mathbb{R}_0^+, \; f(x) := x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{p}.$$

18/24. AZ ABSZOLÚTÉRTÉK-FÜGGVÉNY

Definíció. Azt a függvényt, amelynek az értelmezési tartománya a valós számok halmaza, és bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$x \mapsto |x| := \begin{cases} x, & \text{ha } x \leq 0, \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

abszolútérték-függvénynek nevezzük. Jelölése: abs.

Definíció. Azt a függvényt, amelynek értelmezési tartománya a valós számok halmaza, és bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$x \mapsto [x] := y, \ y \in \mathbb{Z}, \ y \leq x < y + 1,$$

egészrész függvénynek nevezzük. Jelölése: ent.

Definíció. Azt a függvényt, amelynek értelmezési tartománya a valós számok halmaza, és bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$x \mapsto \{x\} := x - [x],$$

egészrész függvénynek nevezzük. Jelölése: frac.

Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Az $f : D \to \mathbb{R}$ függvényt kétváltozós függvénynek nevezzük.

Példa.

$$f(x, y) := x^2 + y^2 + xy.$$

Példa. R. Stone munkája alapján [1] Anglia sörkeresletét a

$$D(x_1, x_2, x_3, x_4) := 1{,}058 x_1^{0{,}136} x_2^{-0{,}727} x_3^{0{,}914} x_4^{0{,}816}$$

függvény írja le, ahol

- x_1 a fogyasztó jövedelme,
- x_2 a sör ára,
- x_3 egy, a többi jószágra vonatkozó árindex
- x_4 a sör alkoholtartalma.

---

[1] The Measurement of Consumers' Expenditure and Behaviour in the United Kingdom, 1920-1938

Definíció. Az $(m \times n)$ típusú (röviden $(m \times n)$-es) mátrixok halmazán az

$$\mathbf{A} : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R}, \quad (i, j) \mapsto a_{ij}$$

típusú, véges értelmezési tartományú, a valós számok halmazába képező függvényeket értjük.

Megjegyzés.

- A mátrix mennyiségek téglalap alakú elrendezése (táblázat formába).
- A mátrixot ( ) vagy [ ] zárójelek között adjuk meg.
- Az $(m \times n)$-es mátrixnak m sora és n oszlopa van.
- A mátrixban az i-edik sor j-edik eleme: $a_{ij} = (\mathbf{A})_{ij}$.
- Ha a mátrix típusát hangsúlyozni szeretnénk, akkor használjuk az $\mathbf{A}_{m \times n}$ jelölést.

Mátrixok megadása. A megjegyzés alapján a mátrixokat az alábbiak szerint adjuk meg:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definíció. A fenti jelölések mellett az A mátrix i-edik $(1 \leq i \leq m)$ sorvektorának a

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$$

mátrixokat nevezzük.

Megjegyzés. Az oszlopvektor fogalma hasonlóan értelmezhető.

Definíció. Legyen A és B tetszőleges halmazok. Ha megadható

$$f : A \to B$$

bijektív függvény, akkor azt mondjuk, hogy A és B számossága ugyanaz, jelölése: $A \sim B$. Az A halmaz számosságát $|A|$ jelöli.

Megjegyzés. A $\sim$ reláció ekvivalencia, azaz

1. $A \sim A$,
2. ha $A \sim B$, akkor $B \sim A$,
3. ha $A \sim B$ és $B \sim C$, akkor $A \sim C$.

Definíció. Legyen $\mathbb{N}_m = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz

1. véges, ha van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy $A \sim \mathbb{N}_m$, ekkor $|A| = m$,
2. megszámlálhatóan végtelen, ha $A \sim \mathbb{N}$, ekkor $|A| = \aleph_0$,

Megjegyzés. Megszámlálhatónak nevezzük, ha véges, vagy megszámlálhatóan végtelen.

Példa. A pozitív páros számok halmaza megszámlálhatóan végtelen:

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\quad f(n):=2n.$$

Tétel. A természetes és racionális számok számossága megegyezik, azaz $\mathbb{N}\sim\mathbb{Q}$.

$$\begin{array}{cccccc}
0 & & & & & \\
\frac{1}{1} & -\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & -\frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \cdots \\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & -\frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \cdots \\
\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \cdots \\
\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \cdots
\end{array}$$

Tétel. A valós számok halmaza nem megszámlálható.

Definíció. A valós számok számosságát kontinuum számosságnak nevezzük, jelölése $\mathfrak{c}$.

Tétel. Bármely véges A halmaz hatványhalmaza véges, és

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}.$$

Tétel. Legyen A tetszőleges halmaz, ekkor

$$|A| < |\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}.$$

Tétel. A természetes számok hatványhalmazának számossága megegyezik $\mathbb{R}$ számosságával ($\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$), azaz $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

Kontinuumhipotézis. Nincs olyan halmaz, amelynek számossága a valós számok számossága (kontinuum-számosság) és a természetes számok számossága (megszámlálhatóan végtelen) közé esne.