Raport - testowanie hipotez statystycznych

Kamila Grząka

20 czerwca 2023

1 Zadanie 1

Badanie polega na przetestowaniu hipotezy zerowej $H_0 : \mu = 1.5$ na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ przeciwko hipotezom alternatywnym:

- H_1: $\mu \neq 1.5$
- H_1: $\mu > 1.5$
- H_1: $\mu < 1.5$

Dane pochodzą z populacji o rozkładzie normalnym $(\mu, 0.2)$. W celu uzyskania oczekiwanych rezultatów przeprowadza się proces wyznaczania wartości testowej Z, identyfikacji i zaznaczania obszarów krytycznych, a także obliczania wartości p.
W tym zadaniu korzystamy ze wzoru na statystykę testową pod warunkiem, że znamy σ rozkładu testowanych zmiennych:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$$

gdzie:

- $\bar{X}$ - średnia próby
- μ_0 - wartość hipotezy zerowej
- σ - odchylenie standardowe próby
- n - liczność próby

Dla wykorzystywanych danych $Z = -7.041450899607091$. Do policzenia obszarów krytycznych korzystamy ze wzorów:

$$\begin{aligned} \mu \neq \mu_0 \quad & C_1 = \{x : x \notin (-z_{1-\frac{\alpha}{2}}, z_{1-\frac{\alpha}{2}})\} \\ \mu > \mu_0 \quad & C_2 = \{x : x \geqslant z_{1-\alpha}\} \\ \mu < \mu_0 \quad & C_3 = \{x : x \leqslant -z_{1-\alpha}\} \end{aligned}$$

gdzie z_α to kwantyle rzędu α z rozkładu normalnego $\mathcal{N}(0, 1)$.

Zatem:

$$\begin{aligned} \mu \neq \mu_0 \quad & C_1 = (-\infty, -1.959963984540054] \cup [1.959963984540054, \infty) \\ \mu > \mu_0 \quad & C_2 = [1.6448536269514722, \infty) \\ \mu < \mu_0 \quad & C_3 = (-\infty, -1.6448536269514722] \end{aligned}$$

Powtarzamy te czynności dla $\alpha \in \{0.01, 0.1\}$ Obszary krytyczne dla $\alpha = 0.01$:

$$\begin{aligned} \mu \neq \mu_0 \quad & C_1 = (-\infty, -2.5758293035489004] \cup [2.5758293035489004, \infty) \\ \mu > \mu_0 \quad & C_2 = [2.3263478740408408, \infty) \\ \mu < \mu_0 \quad & C_3 = (-\infty, -2.3263478740408408] \end{aligned}$$

Obszary krytyczne dla $\alpha = 0.1$:

$$\begin{aligned} \mu \neq \mu_0 \quad & C_1 = (-\infty, -1.6448536269514722] \cup [1.6448536269514722, \infty) \\ \mu > \mu_0 \quad & C_2 = [1.2815515655446004, \infty) \\ \mu < \mu_0 \quad & C_3 = (-\infty, -1.2815515655446004] \end{aligned}$$

Aby wyznaczyć p-wartości, korzystamy ze wzorów (są one niezależne od α):

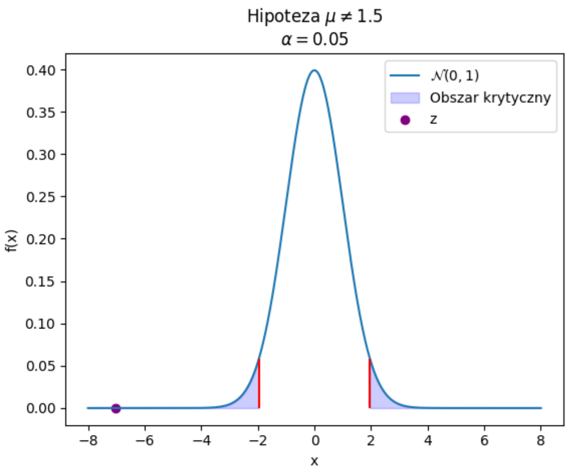
$$\begin{aligned}
\mu \neq \mu_0 &\quad p\text{-wartość} = 2P(Z > |z|)\\
\mu > \mu_0 &\quad p\text{-wartość} = P(Z > z)\\
\mu < \mu_0 &\quad p\text{-wartość} = P(Z < z)
\end{aligned}$$

Dla wykorzystywanych danych:

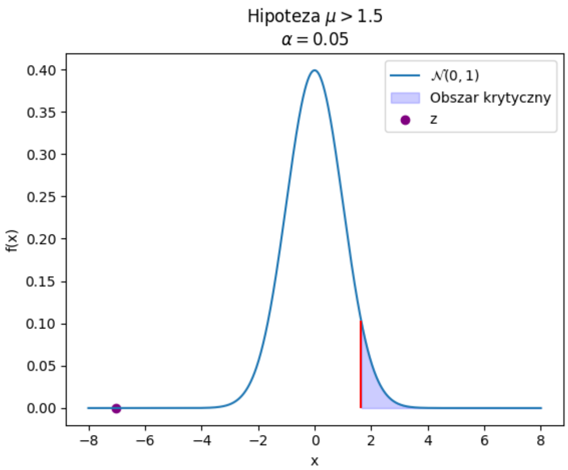
$$\begin{aligned}
\mu \neq \mu_0 &\quad p\text{-wartość} = 1.9024781749976682 \cdot 10^{-12}\\
\mu > \mu_0 &\quad p\text{-wartość} = 0.9999999999990488\\
\mu < \mu_0 &\quad p\text{-wartość} = 9.51241291241344 \cdot 10^{-13}
\end{aligned}$$

Poniżej przedstawiamy wykresy obszarów krytycznych dla poszczególnych hipotez i wartości α.

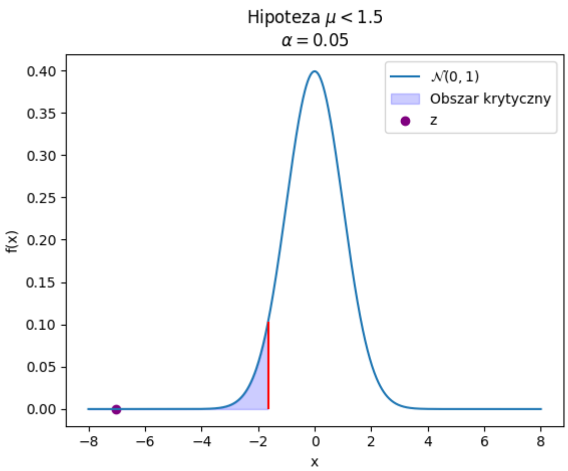
- dla $\alpha = 0.05$



(a) Wykres obszaru krytycznego $\mu \neq \mu_0, \alpha = 0.05$



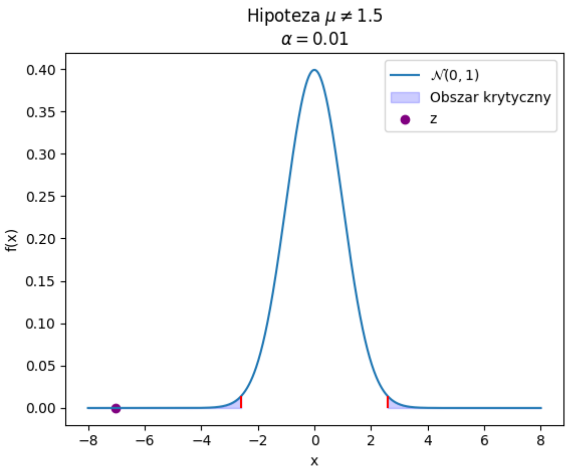
(b) Wykres obszaru krytycznego $\mu > \mu_0, \alpha = 0.05$



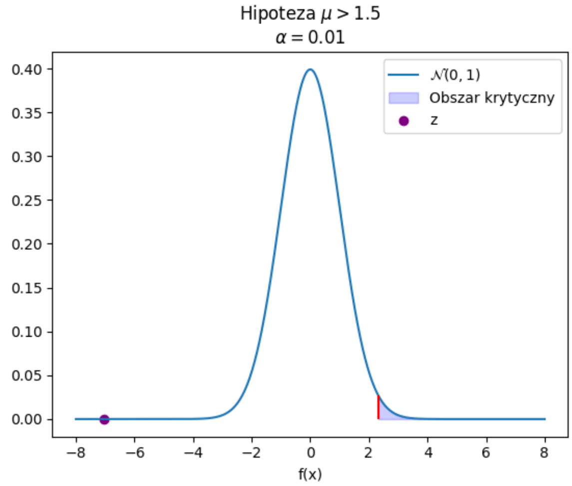
(c) Wykres obszaru krytycznego $\mu < \mu_0, \alpha = 0.05$

Rysunek 1: Wykresy dla poszczególnych hipotez dla $\alpha = 0.05$

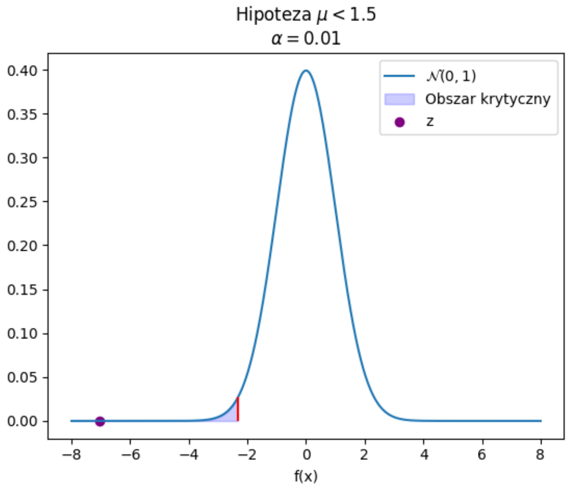
- dla $\alpha = 0.01$



(a) Wykres obszaru krytycznego $\mu \neq \mu_0, \alpha = 0.01$



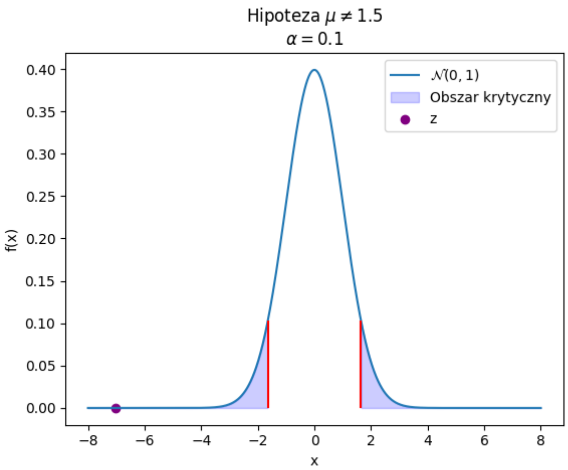
(b) Wykres obszaru krytycznego $\mu > \mu_0, \alpha = 0.01$



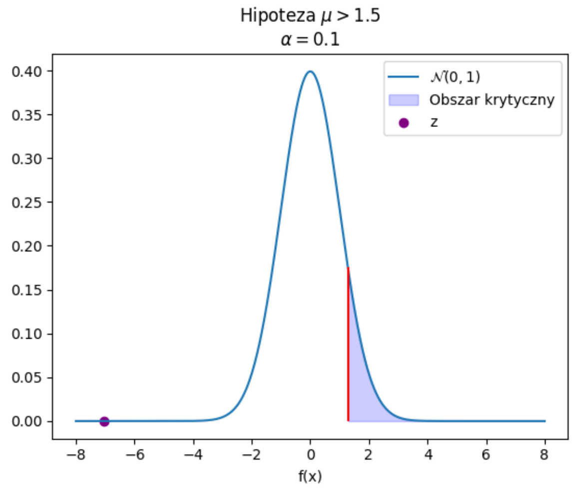
(c) Wykres obszaru krytycznego $\mu < \mu_0, \alpha = 0.01$

Rysunek 2: Wykresy dla poszczególnych hipotez dla $\alpha = 0.01$

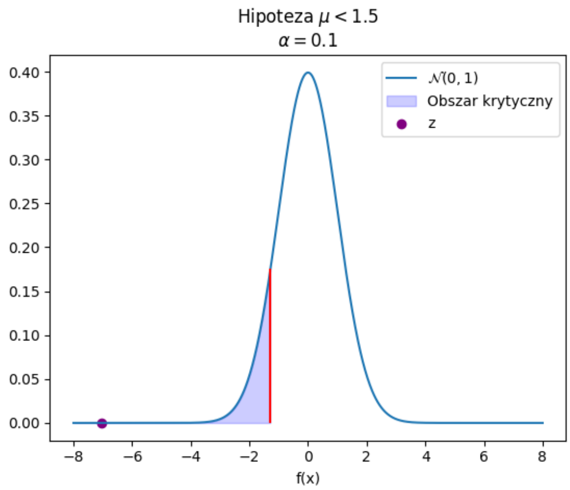
- dla $\alpha = 0.1$



(a) Wykres obszaru krytycznego $\mu \neq \mu_0, \alpha = 0.1$



(b) Wykres obszaru krytycznego $\mu > \mu_0, \alpha = 0.1$



(c) Wykres obszaru krytycznego $\mu < \mu_0, \alpha = 0.1$

Rysunek 3: Wykresy dla poszczególnych hipotez dla $\alpha = 0.1$

1.1 Wnioski

Jak możemy odczytać z powyższych wykresów dla $\alpha = 0.05$ hipoteza zerowa $H_0 : \mu_0 = 1.5$ zostanie zaakceptowana dla $\mu > \mu_0$. W reszcie przypadków odrzucamy H_0 i akceptujemy hipotezy alternatywne. Dla $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.1$ również tylko dla $\mu > \mu_0$ zostaje zaakceptowana hipoteza zerowa. Im większa alpha tym większę stają się obszary krytyczne.

2 Zadanie 2

Badanie polega na przetestowaniu hipotezy zerowej $H_0 : \sigma^2 = 1.5$ na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ przeciwko hipotezom alternatywnym:

- H_1: $\sigma^2 \neq 1.5$
- H_1: $\sigma^2 > 1.5$
- H_1: $\sigma^2 < 1.5$

Dane pochodzą z populacji o rozkładzie normalnym ($\mu = 0.2, \sigma^2$). W celu uzyskania oczekiwanych rezultatów przeprowadza się proces wyznaczania wartości testowej χ^2, identyfikacji i zaznaczania obszarów krytycznych, a także obliczania wartości p. W tym zadaniu korzystamy ze wzoru na statystykę testową:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

gdzie:

- S^2 - wariancja z danych
- σ_0^2 - wartość hipotezy zerowej
- n - liczność próby

Dla wykorzystywanych danych $\chi^2 = 1110.968448901507$. Do policzenia obszarów krytycznych korzystamy ze wzorów:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad & C_1 = \{\chi^2 : \chi^2 \notin (\chi^2_{\alpha/2,n-1}, \chi^2_{1-\alpha/2,n-1})\} \\
\sigma^2 > \sigma_0^2 \quad & C_2 = \{\chi^2 : \chi^2 \geqslant \chi^2_{1-\alpha,n-1}\} \\
\sigma^2 < \sigma_0^2 \quad & C_3 = \{\chi^2 : \chi^2 \leqslant \chi^2_{\alpha,n-1}\}
\end{aligned}$$

gdzie $\chi^2_{\alpha,n-1}$ to kwantyle rzędu α z rozkładu χ^2 z $n-1$ stopniami swobody.

Zatem dla $\alpha = 0.05$ obszary krytyczne wynoszą:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad & C_1 = (-\infty, 913.3009983021134] \cup [1088.4870677259353, \infty) \\
\sigma^2 > \sigma_0^2 \quad & C_2 = [1073.6426506574246, \infty) \\
\sigma^2 < \sigma_0^2 \quad & C_3 = (-\infty, 926.6311609204329]
\end{aligned}$$

Dla $\alpha = 0.01$ obszary krytyczne wynoszą odowiednio:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad & C_1 = (-\infty, 887.6211352175186] \cup [1117.890452678641, \infty) \\
\sigma^2 > \sigma_0^2 \quad & C_2 = [1105.9169575045823, \infty) \\
\sigma^2 < \sigma_0^2 \quad & C_3 = (-\infty, 897.9644826908501]
\end{aligned}$$

Dla $\alpha = 0.1$ obszary krytyczne wynoszą odowiednio:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad & C_1 = (-\infty, 926.6311609204329] \cup [1073.6426506574246, \infty) \\
\sigma^2 > \sigma_0^2 \quad & C_2 = [1056.6952292962342, \infty) \\
\sigma^2 < \sigma_0^2 \quad & C_3 = (-\infty, 942.1612343926897]
\end{aligned}$$

Aby wyznaczyć p-wartości, korzystam ze wzorów:

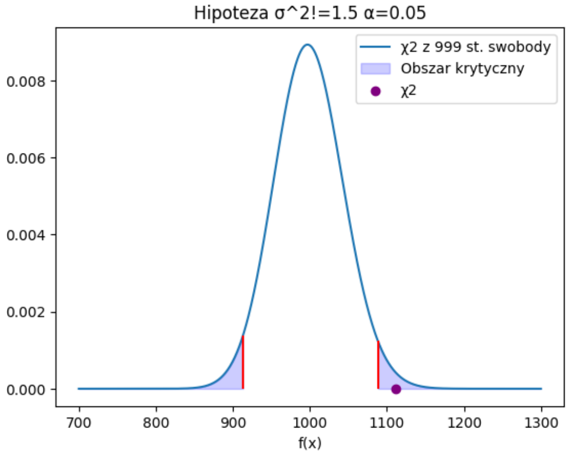
$$\begin{aligned}
\sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad & \text{p-wartość} = 1 - \left|1 - 2P(X \notin \chi^2)\right| = 2\min\{P(X \notin \chi^2), P(X \in \chi^2)\} \\
\sigma^2 > \sigma_0^2 \quad & \text{p-wartość} = P(X \in \chi^2) \\
\sigma^2 < \sigma_0^2 \quad & \text{p-wartość} = P(X \notin \chi^2)
\end{aligned}$$

Dla wykorzystywanych danych:

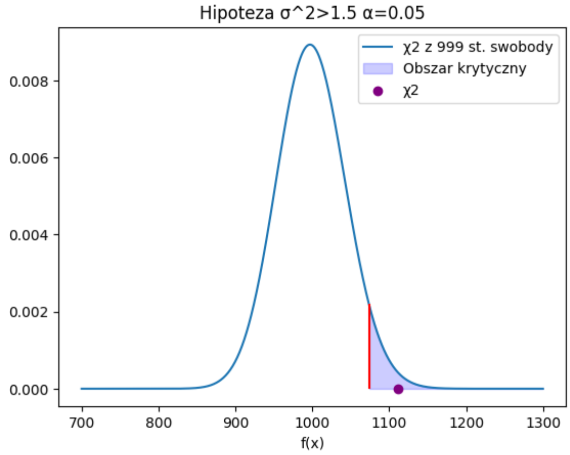
$$\begin{aligned}
\sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad & \text{p-wartość} = 0.015023252487834649 \\
\sigma^2 > \sigma_0^2 \quad & \text{p-wartość} = 0.007511626243917324 \\
\sigma^2 < \sigma_0^2 \quad & \text{p-wartość} = 0.9924883737560827
\end{aligned}$$

Poniżej przedstawiamy wykresy obszarów krytycznych dla poszczególnych hipotez i wartości α.

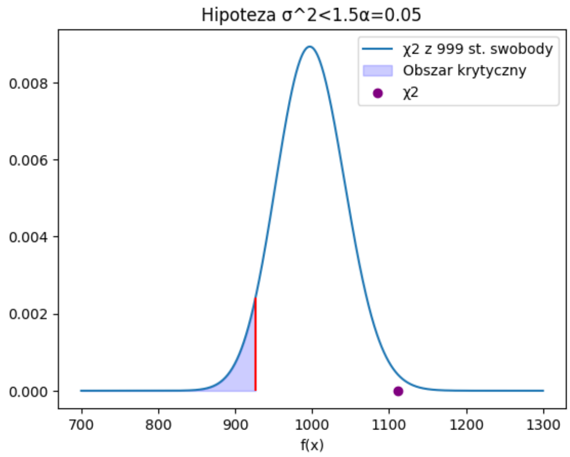
- dla $\alpha = 0.05$



(a) Wykres obszaru krytycznego $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ dla $\alpha = 0.05$



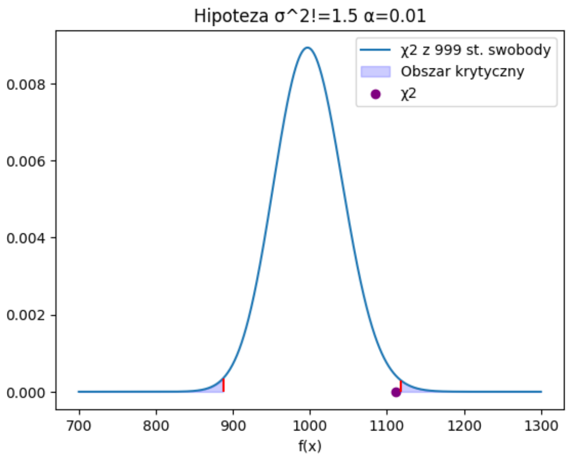
(b) Wykres obszaru krytycznego $\sigma^2 > \sigma_0^2$ dla $\alpha = 0.05$



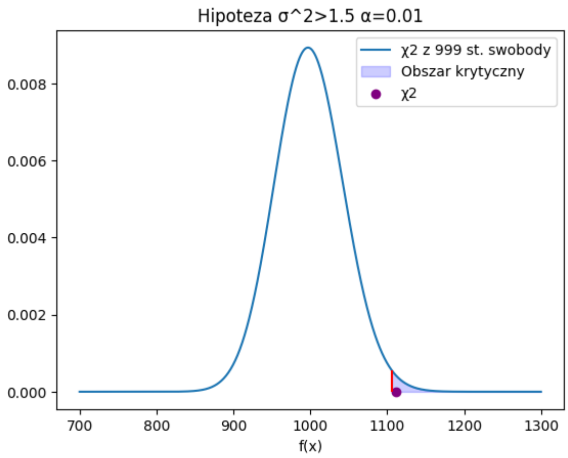
(c) Wykres obszaru krytycznego $\sigma^2 < \sigma_0^2$ dla $\alpha = 0.05$

Rysunek 4: Wykresy dla poszczególnych hipotez dla $\alpha = 0.05$

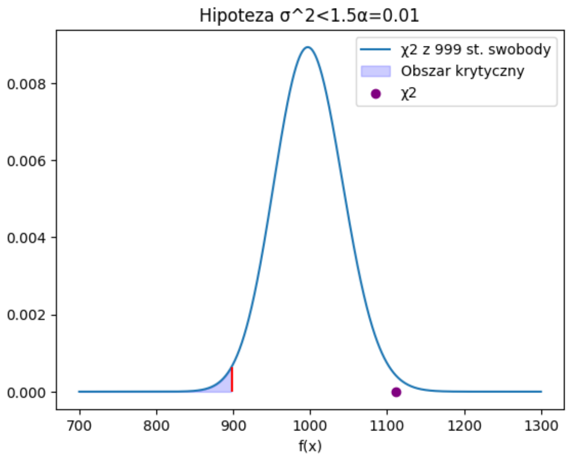
- dla $\alpha = 0.01$



(a) Wykres obszaru krytycznego $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ dla $\alpha = 0.01$



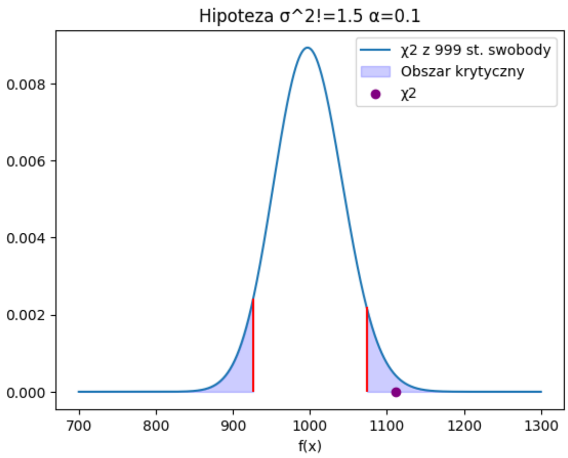
(b) Wykres obszaru krytycznego $\sigma^2 > \sigma_0^2$ dla $\alpha = 0.01$



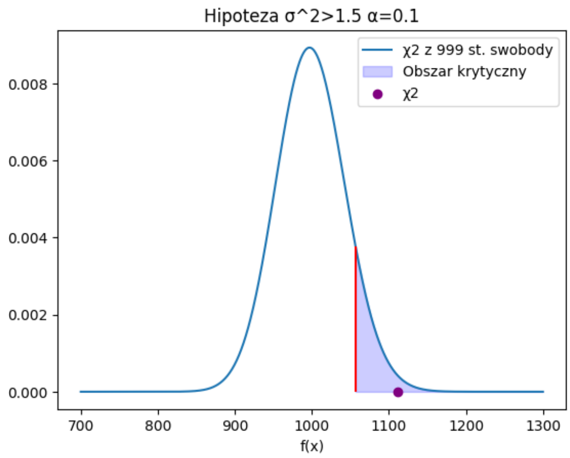
(c) Wykres obszaru krytycznego $\sigma^2 < \sigma_0^2$ dla $\alpha = 0.01$

Rysunek 5: Wykresy dla poszczególnych hipotez dla $\alpha = 0.01$

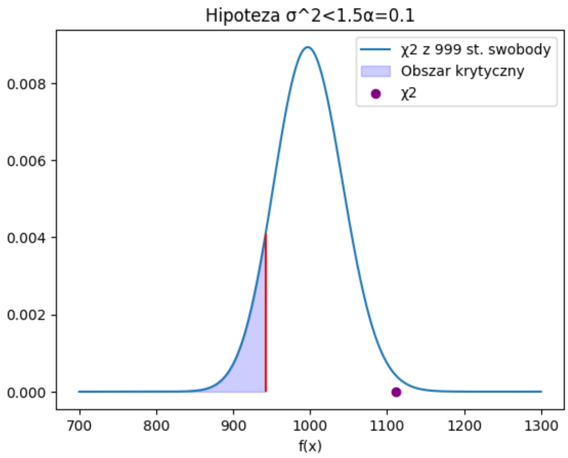
- dla $\alpha = 0.1$



(a) Wykres obszaru krytycznego $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ dla $\alpha = 0.1$



(b) Wykres obszaru krytycznego $\sigma^2 > \sigma_0^2$ dla $\alpha = 0.1$



(c) Wykres obszaru krytycznego $\sigma^2 < \sigma_0^2$ dla $\alpha = 0.1$

Rysunek 6: Wykresy dla poszczególnych hipotez dla $\alpha = 0.1$

2.1 Wnioski

Jak możemy odczytać z powyższych wykresów dla $\alpha = 0.05$ hipoteza zerowa $H_0 : \sigma_0^2 = 1.5$ zostanie zaakceptowana dla $\sigma^2 < \sigma_0^2$. W reszcie przypadków odrzucamy H_0 i akceptujemy hipotezy alternatywne. Dzieje się tak również dla $\alpha = 0.1$. Natomiast dla $\alpha = 0.01$ obszary krytyczne zmniejszają się w porównaniu do poprzednich α i hipoteza zerowa zostanie zaakceptowana dla $\sigma^2 < \sigma_0^2$ oraz $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

3 Zadanie 3

W tym zadaniu symulacyjnie wyznaczamy błędy I i II rodzaju oraz moc testu. Błąd I rodzaju polega na odrzuceniu hipotezy zerowej, która w rzeczywistości jest prawdziwa. Wartość teoretyczna tego błędu równa jest poziomowi istotności α. Natomiastem błędem II rodzaju jest nieodrzucenie hipotezy zerowej, gdy w rzeczywistości jest ona fałszywa. To sytuacja, w której błędnie nie odrzucamy hipotezy zerowej i tym samym nie przyjmujemy hipotezy alternatywnej. Błąd drugiego rodzaju jest bezpośrednio związany z mocą testu, która wynosi $1 -$ błąd II rodzaju.

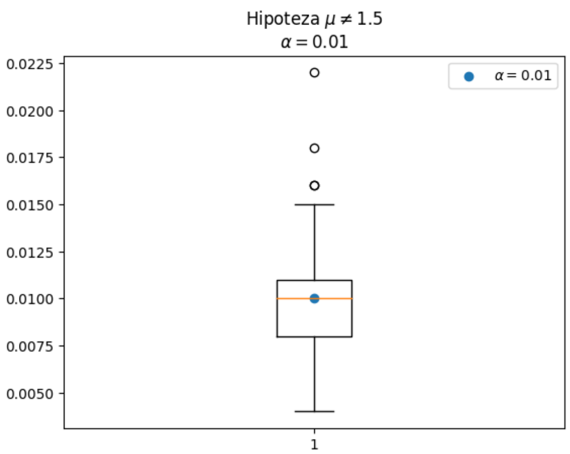
3.1 Błąd I rodzaju

Aby otrzymać błąd I rodzaju, generujemy prostą próbę losową z rozkładu normalnego o parametrach zgodnych z H_0 i sprawdzamy ile razy odrzucamy hipotezę zerową. Wyniki postanowiłyśmy przedstawić na wykresach pudełkowych dla $\alpha \in \{0.01, 0.05, 0.1\}$.

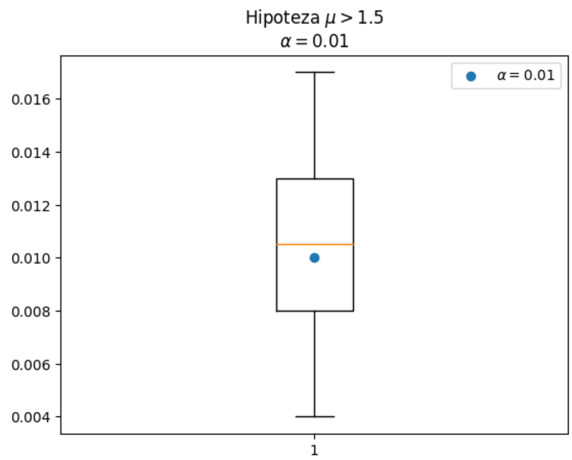
- dla $\alpha = 0.01$

Obszary krytyczne wynoszą odowiednio:

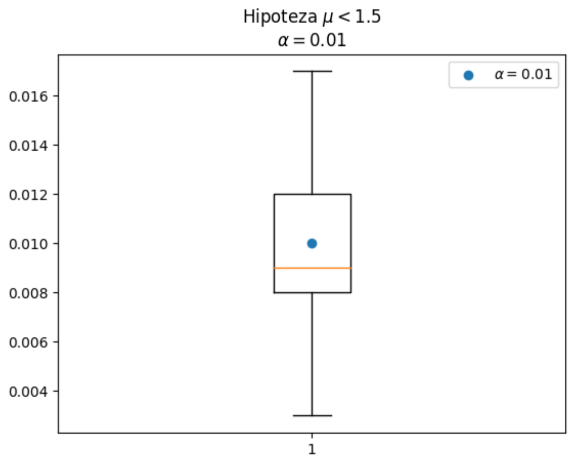
$$\begin{aligned}
\mu \neq \mu_0 \quad & C_1 = (-\infty, -2.5758293035489004] \cup [2.5758293035489004, \infty) \\
\mu > \mu_0 \quad & C_2 = [2.3263478740408408, \infty) \\
\mu < \mu_0 \quad & C_3 = (-\infty, -2.3263478740408408]
\end{aligned}$$



(a) $\mu \neq \mu_0, \quad \alpha = 0.01$



(b) $\mu > \mu_0, \quad \alpha = 0.01$

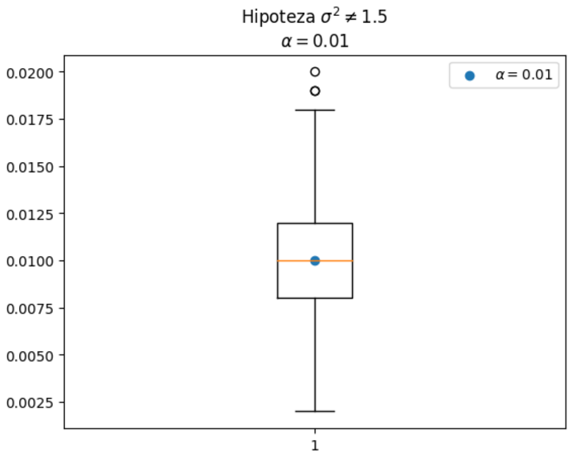


(c) $\mu < \mu_0, \quad \alpha = 0.01$

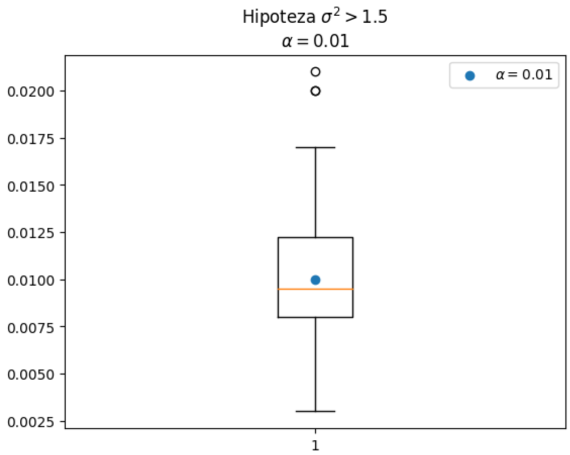
Rysunek 7: Wykresy pudełkowe dla hipotez z zadania 1. dla $\alpha = 0.01$

Obszary krytyczne wynoszą odowiednio:

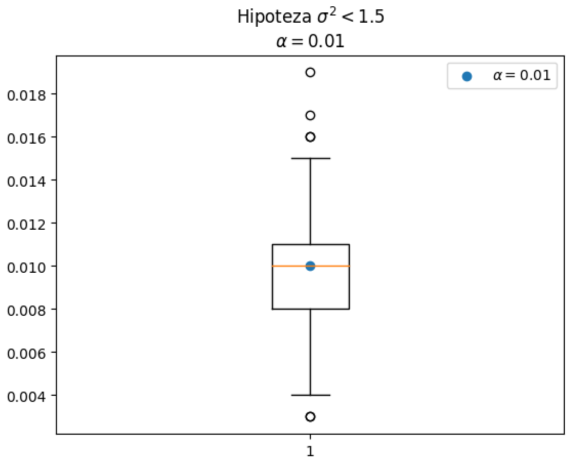
$$\begin{aligned}
&\sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad C_1 = (-\infty, 887.6211352175186] \cup [1117.890452678641, \infty) \\
&\sigma^2 > \sigma_0^2 \quad C_2 = [1105.9169575045823, \infty) \\
&\sigma^2 < \sigma_0^2 \quad C_3 = (-\infty, 897.9644826908501]
\end{aligned}$$



(a) $\sigma^2 \neq \sigma_0^2, \quad \alpha = 0.01$



(b) $\sigma^2 > \sigma_0^2, \quad \alpha = 0.01$



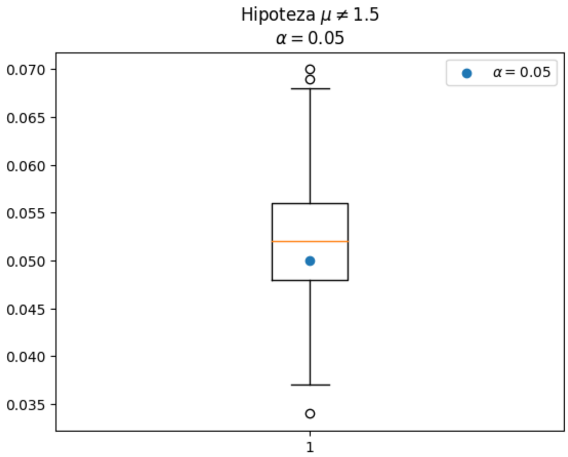
(c) $\sigma^2 < \sigma_0^2, \quad \alpha = 0.01$

Rysunek 8: Wykresy pudełkowe dla hipotez z zadania 2. dla $\alpha = 0.01$

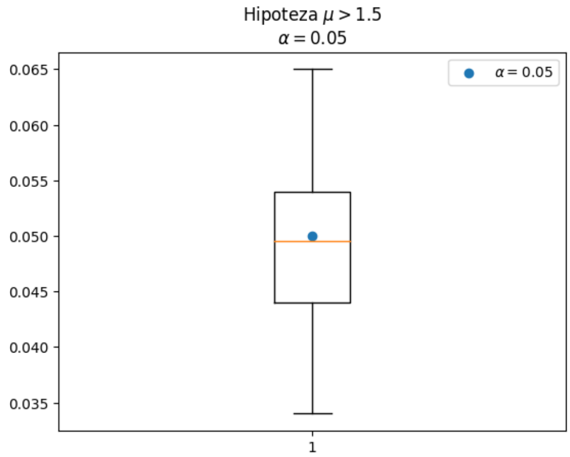
- dla $\alpha = 0.05$

Obszary krytyczne wynoszą odowiednio:

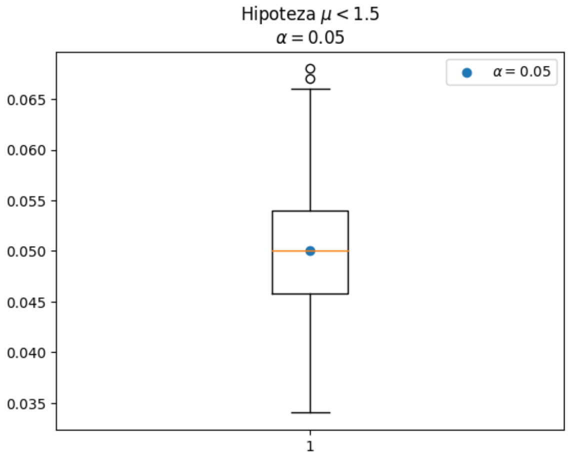
$$\begin{aligned} \mu \neq \mu_0 \quad & C_1 = (-\infty, -1.959963984540054] \cup [1.959963984540054, \infty) \\ \mu > \mu_0 \quad & C_2 = [1.6448536269514722, \infty) \\ \mu < \mu_0 \quad & C_3 = (-\infty, -1.6448536269514722] \end{aligned}$$



(a) $\mu \neq \mu_0, \quad \alpha = 0.05$



(b) $\mu > \mu_0, \quad \alpha = 0.05$

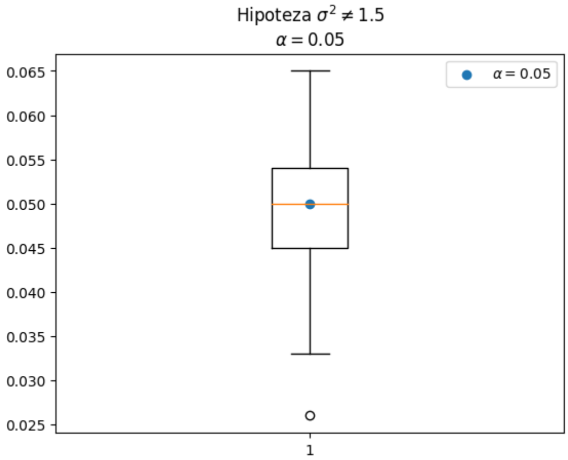


(c) $\mu < \mu_0, \quad \alpha = 0.05$

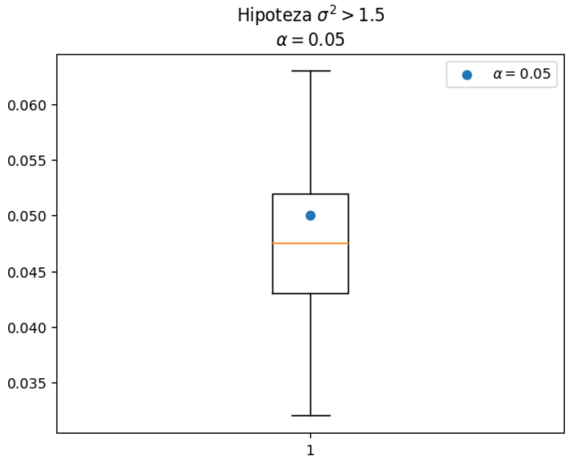
Rysunek 9: Wykresy pudełkowe dla hipotez z zadania 1. dla $\alpha = 0.05$

Obszary krytyczne wynoszą odowiednio:

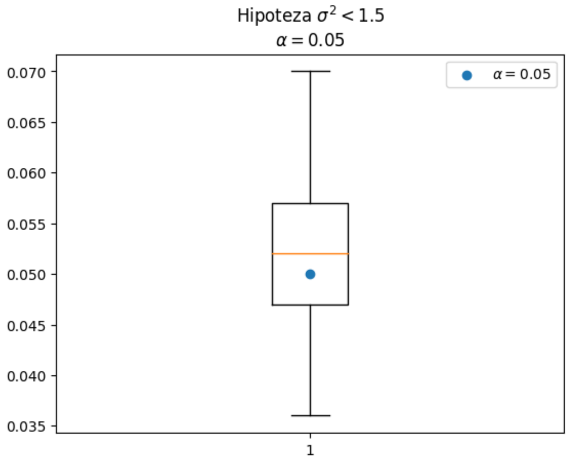
$$
\begin{aligned}
\sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad & C_1 = (-\infty, 913.3009983021134] \cup [1088.4870677259353, \infty) \\
\sigma^2 > \sigma_0^2 \quad & C_2 = [1073.6426506574246, \infty) \\
\sigma^2 < \sigma_0^2 \quad & C_3 = (-\infty, 926.6311609204329]
\end{aligned}
$$



(a) $\sigma^2 \neq \sigma_0^2, \quad \alpha = 0.05$



(b) $\sigma^2 > \sigma_0^2, \quad \alpha = 0.05$



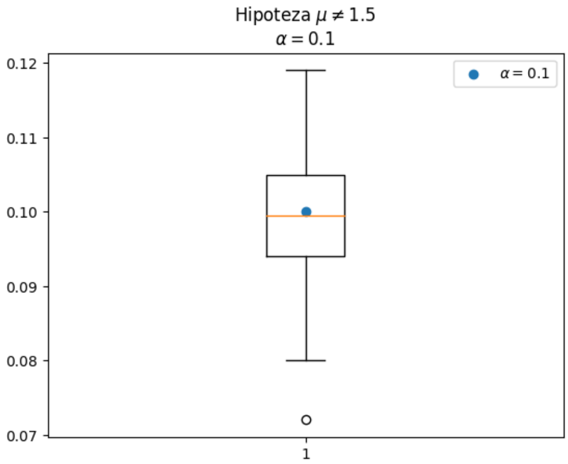
(c) $\sigma^2 < \sigma_0^2, \quad \alpha = 0.05$

Rysunek 10: Wykresy pudełkowe dla hipotez z zadania 2. dla $\alpha = 0.05$

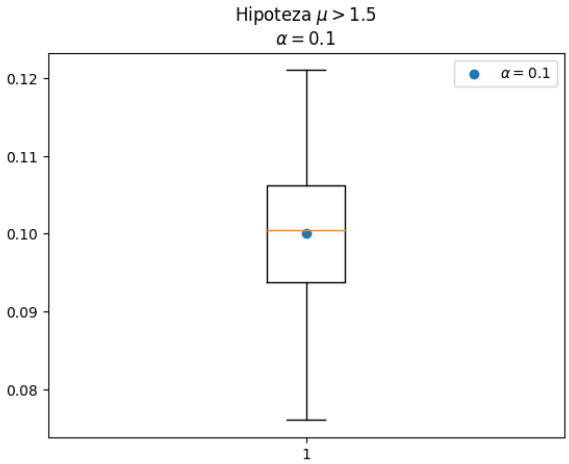
- dla $\alpha = 0.1$

Obszary krytyczne wynoszą odowiednio:

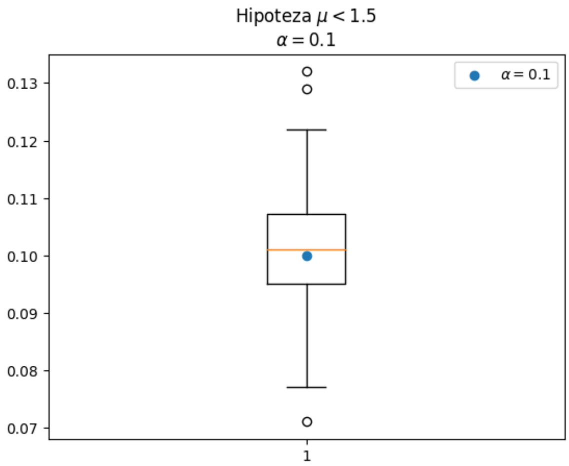
$$\begin{aligned}
&\mu \neq \mu_0 \quad C_1 = (-\infty, -1.6448536269514722] \cup [1.6448536269514722, \infty) \\
&\mu > \mu_0 \quad C_2 = [1.2815515655446004, \infty) \\
&\mu < \mu_0 \quad C_3 = (-\infty, -1.2815515655446004]
\end{aligned}$$



(a) $\mu \neq \mu_0, \quad \alpha = 0.1$



(b) $\mu > \mu_0, \quad \alpha = 0.1$

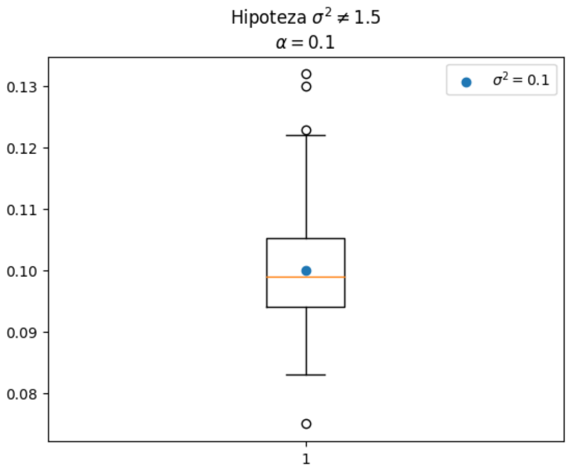


(c) $\mu < \mu_0, \quad \alpha = 0.1$

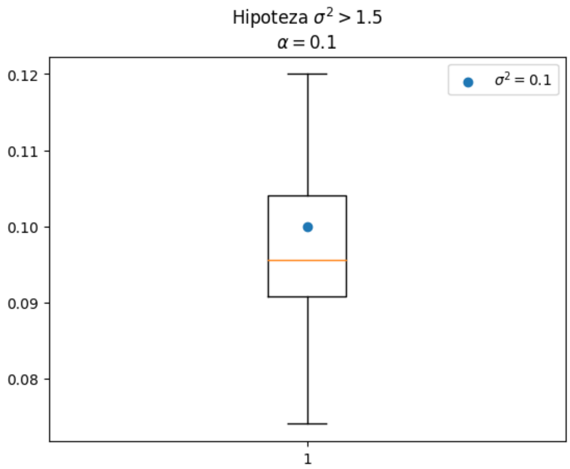
Rysunek 11: Wykresy pudełkowe dla hipotez z zadania 1. dla $\alpha = 0.1$

Obszary krytyczne wynoszą odowiednio:

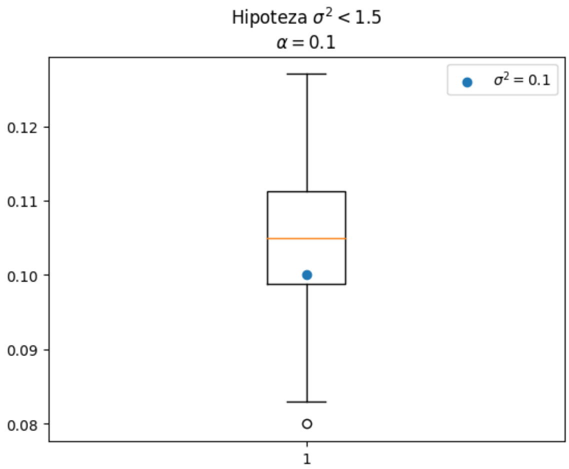
$$
\begin{aligned}
\sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad & C_1 = (-\infty, 926.6311609204329] \cup [1073.6426506574246, \infty) \\
\sigma^2 > \sigma_0^2 \quad & C_2 = [1056.6952292962342, \infty) \\
\sigma^2 < \sigma_0^2 \quad & C_3 = (-\infty, 942.1612343926897]
\end{aligned}
$$



(a) $\sigma^2 \neq \sigma_0^2, \quad \alpha = 0.1$



(b) $\sigma^2 > \sigma_0^2, \quad \alpha = 0.1$



(c) $\sigma^2 < \sigma_0^2, \quad \alpha = 0.1$

Rysunek 12: Wykresy pudełkowe dla hipotez z zadania 2. dla $\alpha = 0.1$

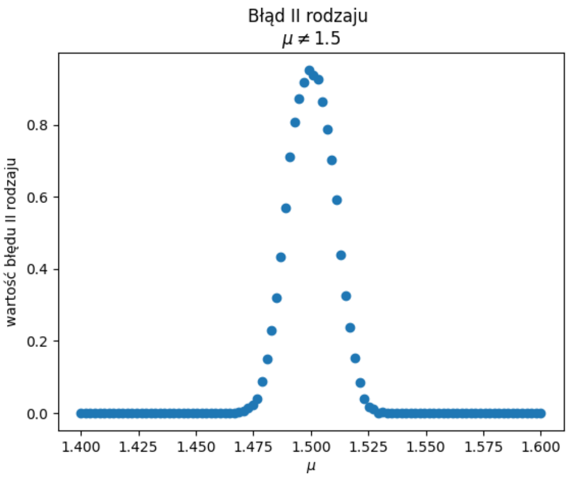
3.2 Błąd II rodzaju

Aby otrzymać błąd II rodzaju, generujemy prostą próbę losową z rozkładu normalnego o parametrach zgodnych z H_1 i sprawdzamy ile razy przyjmujemy hipotezę zerową. Wyniki postanowiłyśmy przedstawić na wykresach dla μ z przedziału $[1.4, 1.6]$ z krokiem 100 oraz σ^2 z przedziału $[1, 2]$ z krokiem 100.

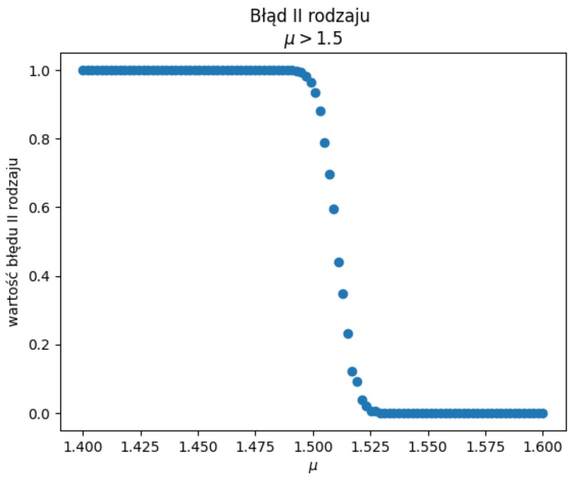
- dla $\mu \in [1.4, 1.6]$ z krokiem 100, $\quad \alpha = 0.05$

Obszary krytyczne wynoszą odowiednio:

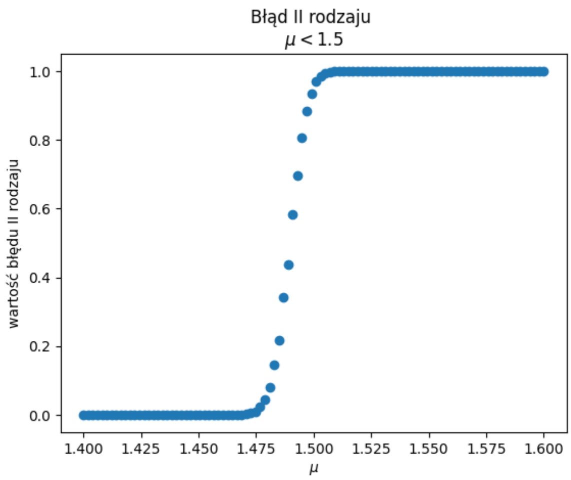
$$\begin{aligned}
&\mu \neq \mu_0 \quad C_1 = (-\infty, -1.959963984540054] \cup [1.959963984540054, \infty) \\
&\mu > \mu_0 \quad C_2 = [1.6448536269514722, \infty) \\
&\mu < \mu_0 \quad C_3 = (-\infty, -1.6448536269514722]
\end{aligned}$$



(a) $\mu \neq \mu_0, \quad \alpha = 0.05$



(b) $\mu > \mu_0, \quad \alpha = 0.05$



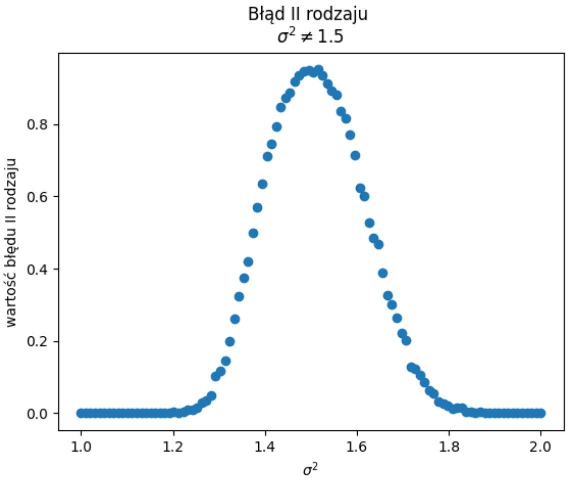
(c) $\mu < \mu_0, \quad \alpha = 0.05$

Rysunek 13: Wykresy dla hipotez z zadania 1. dla $\alpha = 0.05$

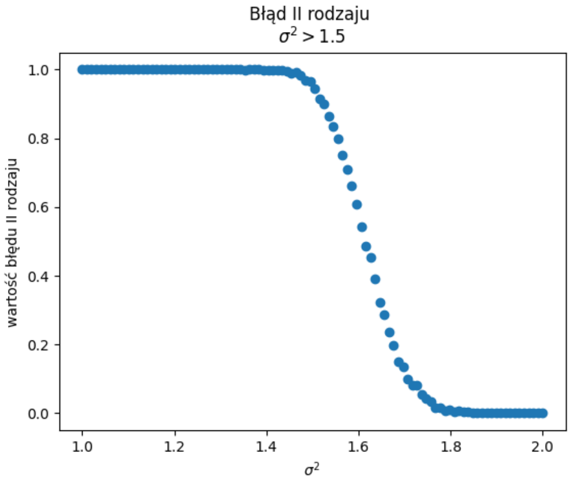
- dla $\sigma^2 \in [1,2]$ z krokiem 100, $\quad \alpha = 0.05$

Obszary krytyczne wynoszą odowiednio:

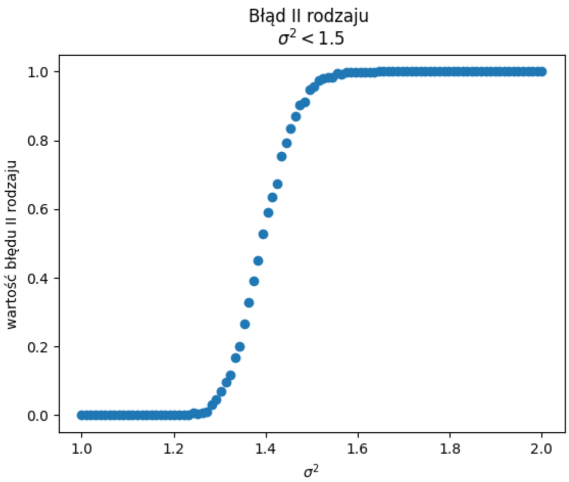
$$\begin{aligned} \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad & C_1 = (-\infty, 913.3009983021134] \cup [1088.4870677259353, \infty) \\ \sigma^2 > \sigma_0^2 \quad & C_2 = [1073.6426506574246, \infty) \\ \sigma^2 < \sigma_0^2 \quad & C_3 = (-\infty, 926.6311609204329] \end{aligned}$$



(a) $\mu \neq \mu_0, \quad \alpha = 0.05$



(b) $\mu > \mu_0, \quad \alpha = 0.05$



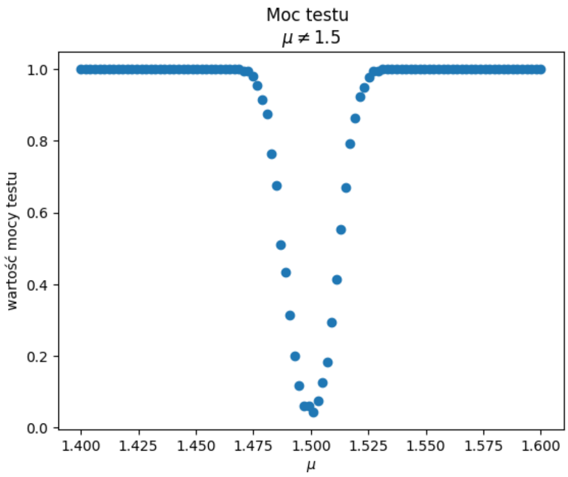
(c) $\mu < \mu_0, \quad \alpha = 0.05$

Rysunek 14: Wykresy dla hipotez z zadania 2. dla $\alpha = 0.05$

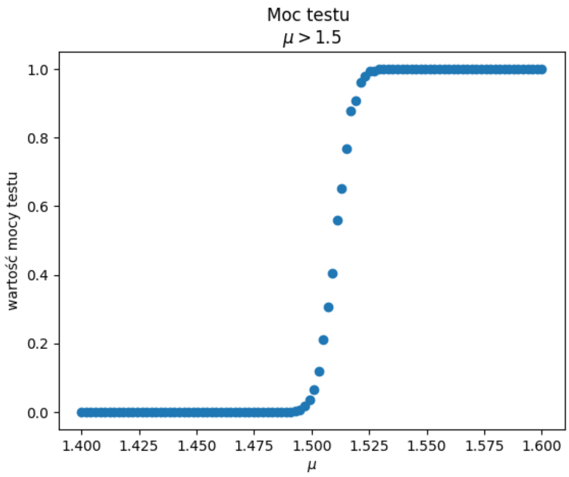
3.3 Moc testu

Moc testu to odrzucenie fałszywej hipotezy zerowej i przyjęcie prawdziwej hipotezy alternatywnej. Otrzymujemy ją ze wzoru 1 − błąd II rodzaju.

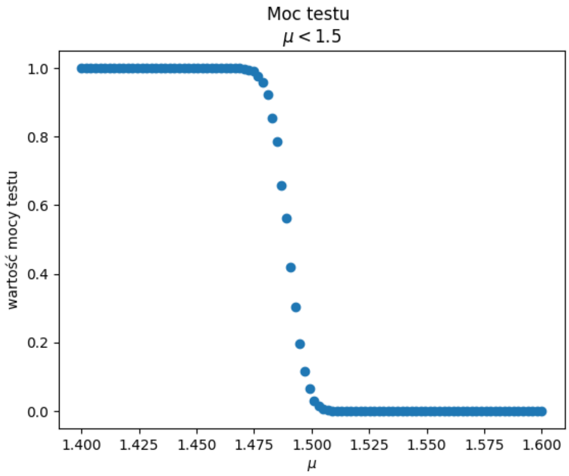
- dla $\mu \in [1.4, 1.6]$, $\quad \alpha = 0.05$



(a) $\mu \neq \mu_0, \quad \alpha = 0.05$



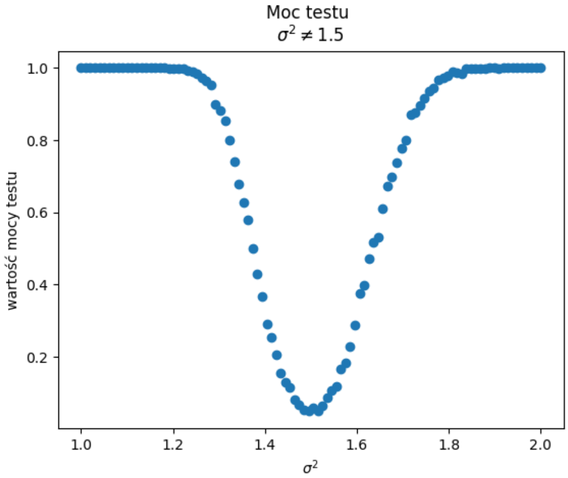
(b) $\mu > \mu_0, \quad \alpha = 0.05$



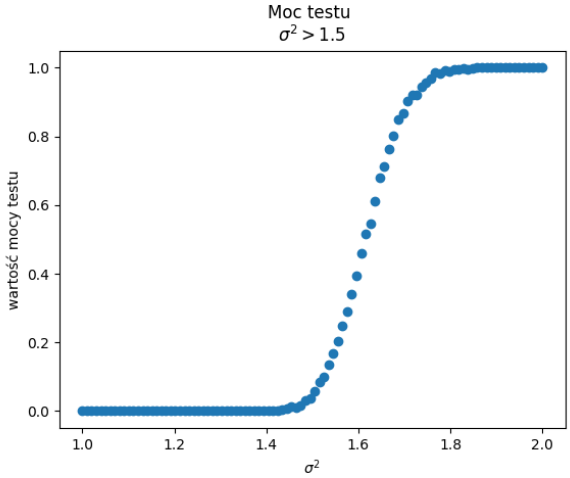
(c) $\mu < \mu_0, \quad \alpha = 0.05$

Rysunek 15: Wykresy dla hipotez z zadania 1. dla $\alpha = 0.05$

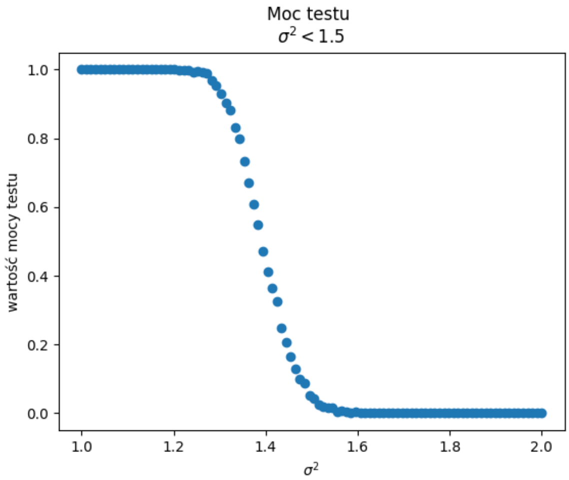
- dla $\sigma^2 \in [1, 2]$, $\alpha = 0.05$



(a) $\mu \neq \mu_0$, $\alpha = 0.05$



(b) $\mu > \mu_0$, $\alpha = 0.05$



(c) $\mu < \mu_0$, $\alpha = 0.05$

Rysunek 16: Wykresy dla hipotez z zadania 2. dla $\alpha = 0.05$

3.4 Wnioski

Wyznaczone wartości błędów I i II rodzaju są zbliżone do oczekiwanych wartości, co potwierdza poprawność obliczeń. Możemy zaobserwować, że wartości błędów I rodzaju są porównywalne do poziomu istotności α. W przypadku błędów II rodzaju oraz mocy testów możemy zauważyć, że im bierzemy wartość bliższą teoretycznej wartości hipotezy zerowej, tym większy jest błąd i tym mniejsza moc testu.