Komputerowa analiza szeregów czasowych
2023/2024

Lista 5

1. Jest wiadomo, że funkcja $k(h) = 1$ dla $h = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ jest dodatnio określona, gdyż jest funkcją autokowariancji szeregu czasowego $X_t = Z$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, gdzie Z jest zmienną losową o średniej zero i jednostkowej wariancji. Wykorzystując twierdzenie z wykładu sprawdź, czy poniższe funkcje są również dodatnio określone:

   (a) $k(h) = (-1)^h$

   (b)

$$k(h) = \begin{cases} 1 & \text{dla } h = 0 \\ 0.4 & \text{dla } h = \pm 1 \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

2. Niech $\{Y_t\}$ będzie szeregiem czasowym zdefiniowanym nastepująco:

$$Y_t = X_t + W_t,$$

   gdzie $\{W_t\} \sim IID(0, \sigma_W^2)$, $\{X_t\}$ jest szeregiem czasowym zdefioniowanym jako

$$X_t = Z_t + \phi Z_{t-1}, \quad \{Z_t\} \sim IID(0, \sigma_Z^2)$$

   oraz $\mathbb{E}(Z_t W_s) = 0$ dla wszystkich s, t.

   (a) Sprawdź czy $\{Y_t\}$ stacjonarny i znajdź jego funkcję autokowariancji.

   (b) Wysymuluj szereg czasowy $\{Y_t\}$ i porównaj funkcję otrzymaną w punkcie a) z empiryczną funkcją autokowariancji.

3. Pokaż, że dwa szeregi MA(1)

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$$
$$Y_t = U_t + \frac{1}{\theta} U_{t-1} \quad \{U_t\} \sim IID(0, \sigma^2\theta^2)$$

   gdzie $0 < |\theta| < 1$, mają tę samą funkcję autokowariancji.

4. Wysymuluj próbę z modelu:

$$X_t = m(t) + s(t) + Y_t,$$

gdzie $m(t)$ to wielomian rzędu 1 o zadanych współczynnikach, a $s(t)$ -dowolna funkcja okresowa. Ponadto $\{Y_t\}$ to szereg MA(1) (zdefiniowany na wykładzie). Policz funkcję autokowariancji szeregu $\{X_t\}$. Następnie usuń składowe deterministyczne. Empiryczną funkcję autokowariancji uzyskanego szeregu (po usunięciu składowych deterministycznych) porównaj z funkcją autokowariancji szeregu MA(1).