Notes on discrete groups and Furstenberg boundaries

kamojiro @kamojiro24e

2018 年 9 月 8 日

目次

1 Introduction 1

2 G-**境界** 2

3 $\partial_F G = \partial_H G$ 4

4 C*-**単純性** 4

G を (可算) 離散群とする.

1 Introduction

この記事は [KK17] と [[BKKO17] を元に書いています．詳しく知りたい場合は，これらの論文を参照してください．近年，C*-単純性について大きな進展がありました．本ノートは Kalantar-Kennedy [KK17] に興味を持ってもらうことを目的に書きます．それについて解説をするために，まず群 C*-環についての復習から始めます.

定義 1.1. λ を G の左正則表現とする．つまり,

$$G \ni g \mapsto \lambda_g\,[= \delta_h \mapsto \delta_{gh}] \in B(l^2(G))$$

G の既約群 *C**-環 $C^*_r(G)$ を $\overline{\mathrm{span}}\{\lambda_g\}$ で定める．$C^*_r(G)$ 上の標準的なトレースを $\tau = \langle \cdot\, \delta_e, \delta_e \rangle$ で定める.

次にメインテーマである C*-単純性と，それと深い関わりのある UTP(この略称が一般的か知らない) の定義をします.

定義 1.2. G が *C**-単純性を持つとは，G の既約群 *C**-環 $C^*_r(G)$ が単純，すなわち非自明な両側閉イデアルを持たないということである.

G が *uniaue trace property(UTP)* を持つとは，既約群 *C**-環 $C^*_r(G)$ が標準的なトレースを除いでトレースを持たないということである．ここでいうトレース τ とは，$C^*_r(G)$ 上の非負線形汎関数で，ノルム 1 であり，各 $a, b \in C^*_r(G)$ に対し，$\tau(ab) = \tau(ba)$ を満たすもののことである.

C*-単純性や UTP に関する初めての結果は Powers [Pow75] によるもので，この証明は以後，C*-単純性や UTP を証明するための標準的な方法になりました.

定理 1.1 ([Pow75])**.** 任意の $a \in C^*_r(\mathbb{F}_2)$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある自然数 N と $g_1, \ldots, g_n \in G$ が存在して,

$$\|\tau(a)1 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \lambda_g a \lambda_g^*\| < \varepsilon.$$

特に，$\mathbb{F}_2$ は C^*-単純性と *UTP* を持つ．ただし，$\mathbb{F}_2$ はランク 2 の自由群である．

この定理に出てくる不等式を含む条件を Powers' averaging property といい，これと類似の方法により，様々な結果が示された．自由積とか融合積とか HNN 拡大とか，(あとでかく) 全く異なる方法を導いたのが Kalantar と Kennedy であり，Furstenberg 境界を用いた手法です．本ノートの目標は次の定理を理解することです．

定理 1.2 ([KK17])**.** G を離散群とする．$\partial_F G$ を G の *Furstenberg* 境界とする．このとき，次は同値である．

1. G は C^*-単純性を持つ．
2. 半直積 C^*-環 $C(\partial_F G) \rtimes_r G$ が単純．
3. ある G-境界 B が存在して，半直積 C^*-環 $C(B) \rtimes_r G$ が単純．
4. G の $\partial_F G$ への作用は *(topologically) free* である．
5. ある G-境界 B が存在して，G の B への作用が *topologically free* である．

ここで，4 つ目の条件の topologically に括弧がついているのは，実際はあってもなくてもいい条件であるため．

定理 1.3 ([BKKO17])**.** 次は同値である．

1. G は *Furstenberg* 境界に *free* に作用する
2. ある G-境界 B が存在して，G は B に *topologically free* に作用する．

以上のことから，C*-単純性を示したいときには，topologically free に作用する G-境界を構成すれば良いことが分かる．例えば，Bass-Serre tree の境界とか。

2 G-境界

定義 2.1. G を群とし，X を G が作用するコンパクトハウスドルフ空間とする．X が非自明な G-不変閉部分集合を持たないとき，G-作用は *minimal* という．各 X 上の確率測度 μ に対して，G-軌道の閉包 $\overline{G \cdot \mu}$ がディラック測度を持つとき，G-作用は *strongly proximal* という．

注 2.0.1. まとめると，次のように言い換えられる．

$$
\begin{aligned}
X \text{ が } G-\text{境界} &\Leftrightarrow \text{任意の } X \text{ 上の確率測度} \mu \text{に対し，} \overline{G \cdot \mu} \supset X (= \{\delta_x\}_{x \in X}) \\
&\Leftrightarrow \text{任意の } X \text{ 上の確率測度} \mu \text{と } x \in X \text{ に対し，ある } g_i \in G \text{ が存在して，任意の } f \in C(X) \text{ に対し，} \\
&\quad\ g_i.\mu(f) = \mu(g_i^{-1}.f) \to f(x).
\end{aligned}
$$

ただし，$g.f(x) := f(g^{-1}.x)$ である．

例のために，free と topologically free の定義についてまとめておきます．

定義 2.2. G を群とし，X を G が作用する位相空間とする．e を G の単位元とする．

- 作用が *free* $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ 任意の $x \in X$ と $g \in G \backslash \{e\}$ に対し，$g.x \neq x$.
- 作用が *topologically free* $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ 任意の x に対し，$\{g \in G |$ ある x の近傍 U があって $g|_U = \mathrm{id}_U\} = \{e\}$.

注 2.0.2. *free* $\Rightarrow$ *topologically free.*

例 1 ($\mathbb{F}_2$)**.** 自由群 $\mathbb{F}_2$ について，$\mathbb{F}_2$-境界を作る．まず，$\mathbb{F}_2$ のケーリーグラフを考える．頂点の集合を $V(T)$,

辺の集合を $E(T)$ で表し，次のように定める．a, b を $\mathbb{F}_2$ の生成元とし，$S = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ とおく．

$$V(T) := \{\mathbb{F}_2\text{の既約な語全体}\} = \{e, a, a^{-1}, b, b^{-1}, a^2, ab, ab^{-1}, \cdots\},$$
$$E(T) := \{(x, y) \in V(T) \times V(T) | \text{ ある } S \text{ の元 } z \text{ が存在して, } xz = y\}.$$

既約とは aa^{-1} のように打ち消し合うところがないという意味です．だいたい次の図のような感じです．真ん中が単位元 e です．詳しくは *wikipedia* を見てください．ちなみに，木 T には最短の道の長さを距離とする離

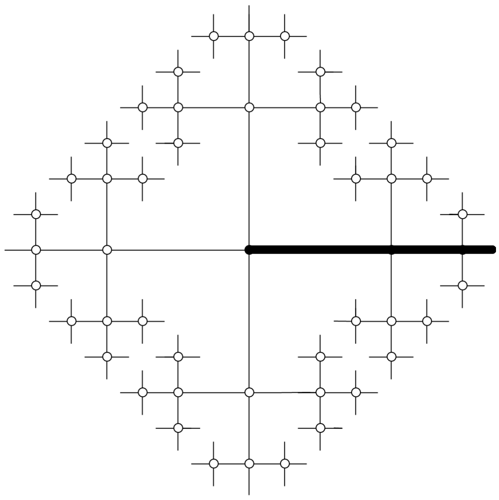

図 1　木 aaa

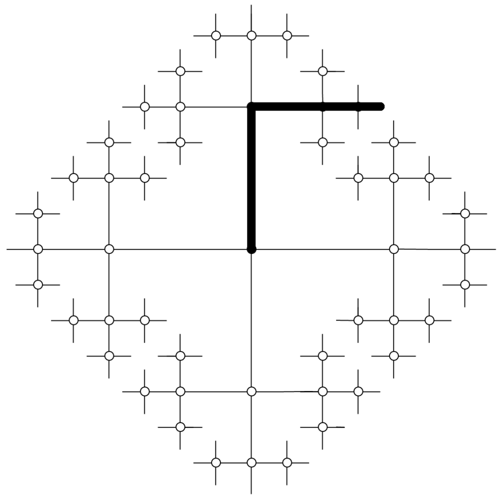

図 2　木 baa

散位相が入ります．次に，この木 T の境界 ∂T を次のように，無限に続く既約な "語" の全体として定義する．

$$\partial T := \{x_1 x_2 x_3 \cdots | x_i \in S, \text{ 既約 }\}$$

木 T も境界 ∂T も右に語が続いているので，$\mathbb{F}_2$ が左から作用することができます．例えば，$aaa\cdots \in \partial T$(図 *1*) に $b \in \mathbb{F}_2$ を作用させせると，$baaa\cdots \in \partial T$(図 *2*) に移る．また，$\partial T$ には $\{U(v)\}_{v \in V(T)}$ を開基とする位相が入ります．ただし，各頂点 $v \in V(T)$ に対し，

$$U(v) := \{vx_1 x_2 x_3 \cdots | x_i \in S, \text{ 既約 }\}$$

と定めます．この位相により，∂T は完全不連結コンパクトハウスドルフ空間になります．ちなみに，この開基はコンパクト開集合です．

命題 2.1. ∂T は $\mathbb{F}_2$-境界であり，$\mathbb{F}_2$ は ∂T に *topologically free* に作用する．

Proof. まず，$\mathbb{F}_2$-境界であることを示す．

1 つ目に，minimal を示す．任意に $x = x_1 x_2 x_3 \cdots, y = y_1 y_2 y_3 \cdots \in \partial T$ をとる．$x_k = (y_1 y_2 \cdots y_k)(x_1 x_2 \cdots x_k)^{-1} x$ と定めると，y に収束する．次に示す．開集合 $U \ni y$ を任意にとる．ある $n \in \mathbb{N}$ があって，$U(y_1 y_2 \cdots y_n) \subset U$ となるものがある．$k \leq n$ に対して，$x_k \in U(y_1 y_2 \cdots y_n) \subset U$.

2 つ目に, strongly proximal を示す．任意に $\mu \in \mathcal{P}(\partial T)$ をとる．まず, ある T の頂点の列 $y_k = x_1 x_2 \cdots x_k$ $(x_i \in S)$ で $\mu(U(y_k)) \to 0$ であるものが存在する．これは，$\mu(X) = \mu(U(a) \cup U(a^{-1}) \cup U(b) \cup U(b^{-1})) = \mu(U(a)) + \mu(U(a^{-1})) + \mu(U(b)) + \mu(U(b^{-1}))$ みたいな性質を用いて，区間縮小法と同様にして，実現できる．

$y^{-1} = x_1^{-1} x_2^{-1} \cdots \in \partial T$ とし，$g_i = x_1^{-1} x_2^{-1} \cdots x_i^{-1} x_i^{-1} \cdots x_2^{-1} x_1^{-1}$ とする．$\varepsilon > 0$ と $f \in C(\partial T)$ をとる．$\{U(y_k^{-1})\}$ が y^{-1} の基本近傍系をなすことから，ある $l_0 \in \mathbb{N}$ があって，$|f(y^{-1}) - f(x)| < \varepsilon$ $(x \in U(y_{l_0}^{-1}))$ となる．また，y_k の選び方から，ある $l_1 \in \mathbb{N}$ があって，$\mu(U(y_{l_1})) < \min(\varepsilon, \varepsilon / \|f\|_{sup})$.

よって，任意の $i \geq \max(l_0, l_1)$ に対して，

$$\begin{aligned}
\left|f(y^{-1}) - g_i.\mu(f)\right| &\leq \left|f(y^{-1}) - \int_{U(y_{l_1})^c} f(g_i.x)d\mu(x)\right| + \left|\int_{U(y_{l_1})} f(g_i.x)d\mu(x)\right| \\
&\leq \left|f(y^{-1}) - \int_{U(y_{l_1})^c} f(y^{-1})d\mu\right| + \left|\int_{U(y_{l_1})^c} |f(y^{-1}) - f(g_i.x)|d\mu\right| + \frac{\varepsilon}{\|f\|_{sup}} \cdot \|f\|_{sup} \\
&\leq |f(y^{-1})|\mu(U(y_{l_1})) + \varepsilon\mu(\partial T) + \varepsilon \\
&\leq 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

次に，topologically free を示す．$x = x_1x_2x_3\cdots \in \partial T$ をとる．ある $e \neq g \in G$ と x のある頂点 $v \in U(v)$ が存在して，$g|_{U(v)} = \mathrm{id}_{U(v)}$．しかし，$g$ が固定する ∂T の元は $ggg\cdots$ と $g^{-1}g^{-1}g^{-1}\cdots$ のみなので，矛盾する．よって，topologically free である．この議論により，free でないことも分かる． □

定理 2.1 ([Fur73])**.** 離散群 G に対して，普遍 G-境界が存在する．つまり，任意の G-境界は普遍 G-境界からの G-同変連続写像の像である．

定義 2.3. 上の定理にある普遍 G-境界を *Furstenberg* 境界といい，$\partial_F G$ とかく．

3 $\partial_F G = \partial_H G$

定理を述べるためにいくつか定義をする．

定義 3.1. *C*-環の単位的自己共役閉部分空間を operator system といい，G 作用を持つ operator system を G-operator system という．ただし，operator system の自己同型写像は order isomorphism とする．*

$\mathcal{S}\mathcal{T}$ を operator system とし，$\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ を $\mathbb{C}$-線形写像とする．φ が任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\varphi \otimes \mathrm{id}_{M_n(\mathbb{C})}$ が positive であるとき，completely positive という．特に，φ が単位元を保つなら，u.c.p.(unital completely positive) とかく．さらに，G-同変なら，G-u.c.p. とかく．

次の定理が C*-単純性の証明において，重要な役割を果たす．

定理 3.1. *$\partial_F G = \partial_H G$.*
ただし，$d_H G$ は *Hamana* 境界である．

これを使うことで，次に呪文を唱えることができるようになる．$\mathcal{S}$ を operator system とし，$\mathcal{T}$ をその operator subsystem とする．

G-injectivity　任意の G-u.c.p. 写像 $\varphi : \mathcal{T} \to C(\partial_F G)$ は $\mathcal{S}$ 上の G-u.c.p. 写像に拡張される．
G-essentiality　全ての G-u.c.p. 写像 $\varphi : C(\partial_F G) \to S$ は等長である．
G-rigidity　$C(\partial_F G)$ から自分自身への G-u.c.p. 写像は $\mathrm{id}_{C(\partial_F G)}$ のみである．

注 3.1.1. $*$-準同型は *completely positive* である．

4 C*-単純性

この章では C*-単純性の証明を行う．準備として，いくつかの定理を述べる．詳細は [BO08] などを参照すると良い．

定理 4.1 (Arveson's extension theorem)**.** *A を単位的 C*-環とし，$\mathcal{S} \subset A$ を operator subsystem とする．このとき，任意の u.c.p. 写像 $\varphi : \mathcal{S} \to B(H)$ は A 上の u.c.p. 写像に拡張される．ただし，$B(H)$ は Hilbert 空*

間 H 上の有界線形作用素全体とする．

定理 4.2. *A, B を C^*-環とし，$\varphi : A \to B$ を u.c.p. 写像とする．このとき，$a \in A$ が $\varphi(a^*a) = \varphi(a)^*\varphi(a), \varphi(aa^*) = \varphi(a)\varphi(a)^*$ を満たすとき，任意の $b \in A$ に対して，$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a)$ が成立する．*

定義 4.1. $\{a \in A | \varphi(a^*a) = \varphi(a)^*\varphi(a), \varphi(aa^*) = \varphi(a)\varphi(a)^*\}$ を φ の *multiplicative domain* という．

定義 4.2. A を G-C^*-環とする．このとき，G-u.c.p. 写像 $E : A \rtimes_r G \to A$ で，

$$E(\sum_{g \in G\, fin.} a_g \lambda_g) = a_e$$

であり，$E|_A = \mathrm{id}_A$ となるものが唯一つ存在する．これを *canonical conditional expectation* という．

注 4.2.1. *canonical conditional expectation は忠実 (i.e. $E(a^*a) = 0 \Rightarrow a = 0$) である．*

定理 4.3 ([KK17])**.** *G を離散群とする．$\partial_F G$ を G の Furstenberg 境界とする．このとき，次は同値である．*

1. *G は C^*-単純性を持つ．*
2. *半直積 C^*-環 $C(\partial_F G) \rtimes_r G$ が単純．*
3. *ある G-境界 B が存在して，半直積 C^*-環 $C(B) \rtimes_r G$ が単純．*
4. *G の $\partial_F G$ への作用は (topologically) free である．*
5. *ある G-境界 B が存在して，G の B への作用が topologically free である．*

4. $\Rightarrow$ 1. の証明のみ行う．この証明は [BKKO17] を元にしている．

Proof. I を $C_r^*(G)$ の 0 でない両側閉イデアルとする．$\pi : C_r^*(G) \to B(H)$ を商写像 $C_r^*(G) \to C_r^*(G)/I$ と $C_r^*(G)/I$ の universal representation の合成とする．

π が単射であることを示す ($\Rightarrow I \subset \ker(\pi) = 0 \Rightarrow I = 0$).

Arveson's extension theorem より，ある u.c.p. 写像 $\varphi : C(\partial_F G) \rtimes_r G \to B(H)$ で $\varphi|_{C_r^*(G)} = \pi$ となるものが存在する．φ が忠実であることを示せば良い ($\because a \in \ker(\pi) \Rightarrow a^*a \in \ker(\pi) \subset \ker\varphi \Rightarrow a = 0$)．ここで，$\pi$ は $*$-準同型なので，$C_r^*(G)$ は φ の multiplicative domain に含まれる．特に，$a \in C(\partial_F G) \rtimes_r G$ と $g \in G$ に対して，

$$\varphi(\lambda_g a \lambda_g^*) = \varphi(\lambda_g)\varphi(a)\varphi(\lambda_g^*) = \pi(\lambda_g)\varphi(a)\pi(\lambda_g^*) = \mathrm{Ad}(\pi(\lambda_g))\varphi(a)$$

となる．つまり，ϕ は G-同変になる．これで呪文を唱えることが可能になった．

G-rigidity より，$\varphi|_{C(\partial_F G)}$ は等長である．よって，逆写像 $(\varphi|_{C(\partial_F G)})^{-1} : \varphi(C(\partial_F G)) \to C(\partial_F G)$ が定義でき，これは G-u.c.p. 写像になる．G-injectivity より，G-u.c.p. 写像 $\tau : \mathrm{Im}(\varphi) \to C(\partial_F G)$ で $\tau|_{\varphi(C(\partial_F G))} = (\varphi|_{C(\partial_F G)})^{-1}$ となるものが存在する．

$$\begin{tikzcd}
C(\partial_F G) \rtimes G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dotted, "\psi"] & \mathrm{Im}(\varphi) \arrow[dl, dotted, "\tau"] & \subset & B(H) \\
C(\partial_F G) & \varphi(C(\partial_F G)) \arrow[l, "(\varphi|_{C(\partial_F G)})^{-1}"'] \arrow[u, phantom, "\cup"]
\end{tikzcd}$$

$\psi := \tau \circ \varphi : C(\partial_F G) \rtimes G \to C(\partial_F G)$ と定めると，これは G-u.c.p. 写像の合成であるため，G-u.c.p. 写像である．ψ が canonical conditional expectation E と一致することを示す．これが分かると，canonical conditional expectation は忠実なので，φ も忠実なことが示される．G-rigidity より，$\psi|_{C(\partial_F G)} : C(\partial_F G) \to C(\partial_F G)$ は $\mathrm{id}_{C(\partial_F G)}$ である．特に，$C(\partial_F G)$ は ψ の multiplicative domain である．最後に，$e \neq s \in G$

に対し，$\psi(\lambda_s) = 0$ を示せば，canonical conditinal expectation との一致が示される．$e \neq s \in G$ をとる．$f \in C(\partial_F G)$ に対し，

$$\psi(\lambda_g)f = \psi(\lambda_g)\psi(f) = \psi(\lambda_g f) = \psi(\lambda_g f \lambda_g^* \lambda_g) = \psi(g.f\lambda_g) = g.f\psi(\lambda_g).$$

特に，G は free に $\partial_F G$ に作用するので，$x \in X$ に対して，$g.x \neq x$ となる．よって，ある $f \in C(\partial_F G)$ が存在して，$f(x) \neq f(g.x)$ となる．よって，$\psi(\lambda_g)(f(x) - f(g.x)) = 0$ となり，$\psi(\lambda_g) = 0$ が導かれる． □

参考文献

[BKKO17] Emmanuel Breuillard, Mehrdad Kalantar, Matthew Kennedy, and Narutaka Ozawa. C*-simplicity and the unique trace property for discrete groups. *Publications mathématiques de l'IHÉS*, 126(1):35–71, 2017.

[BO08] Nathanial Patrick Brown and Narutaka Ozawa. *C*-algebras and finite-dimensional approximations*, volume 88. American Mathematical Soc., 2008.

[Fur73] Harry Furstenberg. Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces. *Harmonic analysis on homogeneous spaces*, 26:193–229, 1973.

[KK17] Mehrdad Kalantar and Matthew Kennedy. Boundaries of reduced c*-algebras of discrete groups. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2017(727):247–267, 2017.

[Pow75] R Powers. Simplicity of the c*-algebra associated with the free group on two generators, duke math.. 49 (1975), 151–156. *CrossRef MathSciNet Google Scholar*, 1975.