学部数学のための論理学

Logic for Undergraduate Mathematics

（最終更新日：2024 年 5 月 16 日）

はじめに

本稿の位置づけ

本稿は，著者による『数学』第 1 巻「古典一階述語論理」（執筆中）の内容を，学部数学の学習者を対象とした読み物として改変・再構成したものである．

前提知識

いかなる前提知識も仮定しない．

本稿の目的と内容

本稿の目的は，学部数学を理解するために必要十分な論理学の知識を提供することである．具体的には，等号付き一階述語論理と呼ばれる体系の中で，証明を行えるようになることが目標となる．

これから学部数学を学ぶ者へ向けたテキストであるので，あえて冗長化あるいは簡素化した箇所がある．

論理そのものに関する事実（i.e. メタ定理）のいくつかは，「事実」の項目で掲げるに留め，その論証（i.e. メタ証明）は行わない．そのような事実の論証を知りたい場合は，数理論理学の書籍にあたることを勧める（参考文献を参照のこと）．

記法

筆者が本稿以外で用例を確認していない用語や概念には，初出の箇所で * 印を付けて明示する（例：**記述集合***（description set））．

読み進める上で注意を要する項目には，直上にを表示する．

その他

~~この文書の紙面サイズは B5 であり，両面印刷することで左綴じ冊子として製本できる．~~（この文書は現在執筆中です．頻繁に無言修正しますので印刷はおすすめしません．）

目次

第 1 章

統語論

1.1 記述と言語

1.1.1 メタ言語，対象言語

項目 1.1.1 （記述，所属言語）

1. 紙に書いたり，スクリーンに映し出したりすることで他者と視覚的に共有可能な図形を**記述***（description）という．記述は直観的な意味内容を持つことも持たないこともある（記述の直観的な意味内容とは何か？という問いは，本稿の立ち入るところではない）．
2. 記述には，その**所属言語名***（name of belonging language）または**言語**（language）と呼ばれるものがただ一つ定まっている．記述 $\mathcal{X}$ の所属言語名が $\mathcal{L}$ であることを，$\mathcal{X}$ は $\mathcal{L}$ に**所属する***（belong），または $\mathcal{X}$ は$\mathcal{L}$ **の記述**（description in $\mathcal{L}$）であるという．

例　「い」「数学」「Python において，`"Hello world!"` は文字列である.」は記述であり，これらは言語**日本語**に所属している．

項目 1.1.1.2で示しているように，「所属言語名」と「言語」は全く区別せずに用いる．

前提 1 （日本語）

読者は，与えられた記述の所属言語名が日本語であるか否かを判定でき，また日本語である場合は，その記述の意味内容を直観的に理解できるものとする．

前提 2 （意味論的に閉じた言語の排除）

ある言語に所属する記述を用いて，同じ言語に所属する記述について語ることはできない．

項目 1.1.2 （メタ／対象記述，メタ／対象言語）

1. ある言語の記述を用いて，別の言語の記述について語るとき，前者の記述は**メタレベル**（meta-level）の記述，または**メタ記述***（metadescription）であるといい，後者の記述は**対象レベル**（object level）の記述，または**対象記述***（object description）であるという．
2. メタ記述の所属言語名を**メタ言語**（metalanguage），対象記述の所属言語名を**対象言語**（object language）という．

例　日本語で書かれた Python の解説書があるとき，「`"Hello world!"` は文字列である.」はメタ記述，「`"Hello world!"`」は対象記述であり，メタ言語は日本語，対象言語は Python である．

注意 1.1.3

前提 2は，同じ言語 $\mathcal{L}$ がメタ言語であり同時に対象言語でもあることはありえない，ということを意味している．

約束 1.1.4

ここでは，前提 1によって読者がその意味内容をよく理解できることが保障された，**日本語**をメタ言語とする[a]．対象言語が何であるかは項目 1.2.11で明らかにされる．

[a] なお，日本語とは呼ばれるものの，実際には記述を簡略化するための記法などを導入して補強された日本語である．

項目 1.1.5 （メタ定義，メタ定理，メタ証明）

メタ記述の意味内容を定めるメタ記述を**メタ定義**（metadefinition），メタ記述を用いて論証可能なメタ記述を**メタ定理**（metatheorem），メタ定理の論証を**メタ証明**（metaproof）という．

注意 1.1.6 （メタ論理について）

本稿で行うことを一言で述べれば，「論理の体系自体を規定し，それに基づいて論理を運用すること」である．論理の体系を規定するのに論理の体系自身を用いることはできないから，その作業を行うための言語が必要となる．これがメタ言語である．この作業はでたらめに行うわけにはいかないので，私たちはメタ言語の中で論証を行いながらその作業を行うことになる．これがメタ証明である．メタ証明はちょうど，私たちが普段日本語を用いて様々な論証を行うときの論証そのものと思うことができるが，これはやはりある種の「論理」によって正当化されている．そのようなメタ言語における論理を**メタ論理**（metalogic）という．すると，メタ論理の正当性は何を基準に確かめればよいのか，という問いが当然生じる．

仮に，この問題を解消するために，メタ論理の体系もやはり正確に規定することを試みたとするとどうなるだろうか．まず，この規定はメタメタ言語によって行われることになる．しかし，このメタメタ言語もメタメタ論理を持っているから，これはメタメタメタ言語を用いて規定されねばならない．しかし，このメタメタメタ言語もまたメタメタメタ論理を持っており，…と，無限後退に陥ってしまうのである．本稿では，そのような後退をどこかで停止させるために，「私たちが既に直観的に知っている論理が存在し，そして私たちはそれを正しく運用できる」という前提を前提 1によって保障し，その論理を規定不要な論理として選ぶことで，この問題を回避している[a]．

なおこれに関連して，メタ言語においてどのような知識を既知のものとするかという問題もある．例えば，基礎付け主義的モチベーションをもって論理学を学ぶ人々がよく直面する問題として，「集合論を学ぶために述語論理を学ぼうとしたところ，述語論理が集合論を用いて定義されていた」というものがある．これは，ただ「集合論を直観的に論証可能な既知のものとするか否か」に対する姿勢の違いである，と解釈することができる[b]．そのような，メタ言語において既知とされている論理的／数学的理論を総称して**メタ理論**（metatheory）という．たいていは，上で述べたような直観的な論理に加え，初等的な算術や素朴集合論が前提されることが多い．本稿では，この点でミニマルな立場をとり，そのような数学的知識の使用はできる限り回避することにしている（上の「集合論を…」の問題もあるので，特に集合論の使用は回避している）．

[a] しかし当然これは解決にはなっておらず，「私たちが直観的に知っているこの論理の源は何であるのか」「なぜ何らの規定もなしに正当性を判断できるのか」「そもそもそのような直観的な論理など存在するのか」などの新たな問題が生まれることになる．

[b] ただしこれは，基礎付け主義的観点からはそのように解釈できる，という話に過ぎない．実際には，現代の論理学（特に数理

論理学）の多くは，そもそも基礎付け主義的なモチベーションで行われていない．その目的はむしろ，数学の体系が持つ様々な性質を調べることであって，その道具立てとして，許容される限りの数学を用いるのは不合理な話ではない．

1.1.2　メタ言語内変数，メタ変数

項目 1.1.7では，メタ言語内変数やメタ変数と呼ばれるものを説明するが，メタ言語である日本語に慣れ親しんでいる読者はこれらを直観的に扱えるものと想定して，厳密には規定せず，例示という形で済ませている．詳しくは**例**を参照せよ．

項目 1.1.7 （メタ言語内変数，メタ変数）

1. メタ記述 $\mathcal{X}$ が，その所属言語名 $\mathcal{L}$ の記述の一部（$\mathcal{X}$ の**スコープ**（scope）と呼ばれる）を**参照する**（refer）役割を持つとき，$\mathcal{X}$ を $\mathcal{L}$ の**メタ言語内変数***（variable inside metalanguage）という．
2. メタ記述 $\mathcal{X}$ が，その所属言語名 $\mathcal{L}$ の任意の対象記述を「参照する」役割を持つとき，$\mathcal{X}$ を $\mathcal{L}$ の**メタ変数**（metavariable）という．

例　日本語をメタ言語，Python を対象言語として，「参照する」の意味するところを例示してみよう．

1. $\boldsymbol{x}$ が，日本語の記述の一部，例えばヒト科であるとされる記述[a]のみを「参照する」メタ記述であるとき，

   (i)　任意の $\boldsymbol{x}$ に対し，$\boldsymbol{x}$ は哺乳類である．

   というメタ記述から，

   (ii)　チンパンジーは哺乳類である．

   が言えることは明らかであろう．この記述 (i)のような記述に現れる $\boldsymbol{x}$ が，メタ言語内変数である．ここで，$\boldsymbol{x}$ はヒト科であるとされる記述のみを参照するので，例えば「ゾウリムシ」について

   ゾウリムシは哺乳類である．

   とは言えない．なぜなら，メタ記述「ゾウリムシはヒト科である」は成り立つと言えないからである．
   あるいは，

   チンパンジーは哺乳類である．

   から

   $\boldsymbol{x}$ が哺乳類であるような $\boldsymbol{x}$ が存在する．

   が言えることも明らかであろう．
2. 上と同様に，$\mathtt{x}$ が任意の Python の記述を「参照する」とき，

   (iii)　任意の $\mathtt{x}$ に対し，$\mathtt{x}$ が Python の整数であれば，`print(x)` は $\mathtt{x}$ を表示する．

   という記述から，

   (iv)　`1234` が Python の整数であれば，`print(1234)` は `1234` を表示する．

   が言えることは明らかであろう．この記述 (iii)のような記述に現れる $\mathtt{x}$ がメタ変数である．ただし，メタ言語内変数のときと異なり，$\mathtt{x}$ が「参照している」のは**任意の** Python の記述であるから，

   (v)　`def:` が Python の整数であれば，`print(def:)` は `def:` を表示する．

も言えることに注意しよう[b]．「$\mathbf{x}$」自体は Python の記述ではないことに注目せよ．

あるいは，

`print(1234)` は 1234 を表示する．

から，

`print(x)` が $\mathbf{x}$ を表示し，かつ Python の整数であるような $\mathbf{x}$ が存在する．

またはより省略して，

`print(x)` が $\mathbf{x}$ を表示するような Python の整数 $\mathbf{x}$ が存在する．

が言えることも明らかであろう．

[a] つまり，メタ記述「$\mathcal{X}$ はヒト科である」が，その意味内容に照らして成り立つとされているようなメタ記述 $\mathcal{X}$.

[b] ただしこちらも，1234 は Python の整数であるから，記述 (iv) より，`print(1234)` が 1234 を表示することが導かれる一方，`def:` は Python の整数ではないので，記述 (v) から何かを導くことはできない．

記法 1.1.8 （メタ言語内変数とメタ変数の表記）

1. 以降，メタ言語内変数として，太字筆記体ラテン小文字 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \ldots, \boldsymbol{z}$ を用いる．
2. 以降，メタ変数として，太字ローマン体ラテン小文字 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{z}$ や，ギリシャ小文字 $\alpha, \beta, \ldots, \omega$ を用いる．

つまり，突然 $\boldsymbol{x}$ や $\mathbf{x}$ が登場したときは，その前に書かれるべき「$\boldsymbol{x}$ をメタ言語内変数とする．」「$\mathbf{x}$ をメタ変数とする．」といった仮定が省略されているものと考えればよい．

約束 1.1.9

「任意の $\boldsymbol{x}$ に対し，」「任意の $\mathbf{x}$ に対し，」のようなメタ記述は省略される．例えば，記述 (i) と記述 (iii) は，それぞれ通常

$\boldsymbol{x}$ は哺乳類である．

や

(vi)　$\mathbf{x}$ が Python の整数であれば，`print(x)` は $\mathbf{x}$ を表示する．

と省略される．

記法 1.1.10 （(x: $\mathcal{P}$)）

$\mathbf{x}$ をメタ変数とし，$\mathcal{P}$ を（通常は $\mathbf{x}$ を含む）メタ記述とする．$\mathcal{P}$ が成り立つことを仮定する記述（例えば，「$\mathcal{P}$ ならば」）を「($\mathbf{x}$: $\mathcal{P}$)」と書く．

例　記述 (vi) は

($\mathbf{x}$: $\mathbf{x}$ は Python の整数である．)
`print(x)` は $\mathbf{x}$ を表示する．

と書け，あるいはさらに省略して

($\mathbf{x}$: Python の整数)
`print(x)` は $\mathbf{x}$ を表示する．

と書くこともできる．

記法 1.1.11 （⇒，⇔）

メタ記述 $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ に対し，「$\mathcal{P}$ ならば $\mathcal{Q}$」を $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ と書き，「$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ かつ $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$」を $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ と書く．

注意 1.1.12 （等価な言い表し方）

次が全て同じ内容であることに注意せよ．ただし $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ はメタ記述とする（通常，$\mathcal{P}$ は $\mathbf{x}$ を含む)．

- $\mathbf{x}$ をメタ変数とする．任意の $\mathbf{x}$ に対し，$\mathcal{P}$ ならば $\mathcal{Q}$
- 任意の $\mathbf{x}$ に対し，$\mathcal{P}$ ならば $\mathcal{Q}$
- $\mathcal{P}$ ならば $\mathcal{Q}$
- $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$
- $(\mathbf{x}\colon \mathcal{P})$
$\mathcal{Q}$

それぞれ，記法 1.1.8.2，約束 1.1.9，記法 1.1.11，記法 1.1.10を参照せよ．

記法 1.1.13 （≡，≢，:≡）

1. 記述 $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ が図形として同じであることを $\mathcal{X} \equiv \mathcal{Y}$ と書き，そうでないことを $\mathcal{X} \not\equiv \mathcal{Y}$ と書く．
2. $\mathcal{X}$ を記述 $\mathcal{Y}$ の別表記として用いるということを $\mathcal{X} :\equiv \mathcal{Y}$ と書く．

例　Python を対象言語とすると，`2 + 4` ≡ `2 + 4` だが，`2 + 4` ≢ `1 + 5` である．また，foo :≡ `2 + 4` とすれば，foo ≡ `2 + 4` であり，foo ≢ `1 + 5` である．

注意 1.1.14 （別表記についての注意）

別表記は，記述を簡易化するために導入される，見せかけの図形である．上の例で，見かけ上 foo は `2 + 4` と異なるように見えるが，それはあくまで見かけ上そのように見えるだけである．実際には foo はまさに `2 + 4` そのものであり，したがって図形として全く同じ（foo ≡ `2 + 4`）なのである．あえて言えば，`2 + 4` の代わりに私たちに実際に見えている図形「foo」自体は存在せず，したがって対象記述でもメタ記述でもない．

1.1.3　メタ自然数

項目 1.1.15 （メタ自然数をスコープとするメタ言語内変数）

以降，**メタ自然数**であるとされる記述を参照するメタ言語内変数として，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ を用いる．具体的に何がメタ自然数であるとされるかは，次のメタ定義 1.1.16で定められる．

メタ定義 1.1.16 （メタ自然数）

メタ自然数（meta natural number）を以下の条件によって定める．

(1) ○ はメタ自然数である．
(2) $\boldsymbol{n}|$ はメタ自然数である．
(3) 以上によってメタ自然数であると分かるメタ記述のみがメタ自然数である．

例　○，○|，○||||| は全てメタ自然数である．

注意 1.1.17 （メタ自然数のメタ定義についての注意）

上記の(3)をより正確に書けば,

(3) 以下のいずれかが成り立つ.

(3.1) $\boldsymbol{n} \equiv \bigcirc$

(3.2) $\boldsymbol{n} \equiv \boldsymbol{m}|$ なる $\boldsymbol{m}$ が存在する.

となる. 以降も,「以上によって...であると分かる記述のみが...である.」というような短縮表現を多用する.

注意 1.1.18 （メタ自然数はメタ記述である）

メタ定義 1.1.16はメタ定義であるから，メタ自然数はメタ記述である（項目 1.1.5).

メタ定義 1.1.19 （$0, 1, 2, \ldots$）

1. $\mathbf{0} :\equiv \bigcirc$
2. $\mathbf{1} :\equiv \bigcirc|$
3. $\mathbf{2} :\equiv \bigcirc||$
4. $\mathbf{3} :\equiv \bigcirc|||$
5. (以下省略)

これ以降も，通常親しんでいる表記法に従って別表記を定める（例えば「$\mathbf{10} :\equiv \bigcirc||||||||||$」など）．これらの別表記を，**数字***（numeral）と呼ぶ．数字には太字アラビア数字を用いる．

注意 1.1.20 （メタ自然数についての注意）

1. $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots$ は（正確には，その元の表記である $\bigcirc, \bigcirc|, \bigcirc||, \ldots$ は），私たちが直観的に知っている，ゼロ，イチ，ニ，...などの数概念（**直観的自然数**（intuitive natural number)）と同一視できる（この「直観的自然数」が何であるのかという哲学的問題は，本稿の立ち入るところではない).
2. メタ自然数は，数学における**自然数**（natural number）とは異なる．自然数は数学の内部で定義される対象だが，メタ自然数は，その数学の体系自体を構築する上での部品となる対象である．

約束 1.1.21 （メタ自然数は直観的自然数で代替可能）

読者は，直観的自然数について，小学校レベルの基本的な演算や，大小関係や，何かの個数を数えることなどのような常識的な知識を，既に直観的に持っているであろう．これらはすべて，メタ定義 1.1.16を出発点として，メタ自然数上で明確にメタ定義できる．しかし，これを素直に実行すると，以降の議論が意味もなく煩雑になるので，本稿ではそれらを一切省略する．代わりに，注意 1.1.20.1に照らして，**読者は，メタ自然数に関する事項を，あたかも直観的自然数に関する事項であるかのように扱ってよいとする**．つまり，例えばメタ自然数間の大小関係 $\mathbf{2} \mathrel{\dot{\geq}} \mathbf{1}$ を結論付けるために，直観的自然数に関する「ニはイチ以上である」という直観的知識を用いてよい，ということである（$\dot{\geq}$ については記法 1.1.23を参照).こうした直観的自然数への依拠は，メタ自然数による議論を用いることで，望めばいつでも消去できるということを意識しておくとよい．

注意 1.1.22（数字についての注意）

1. 複数桁の別表記，例えば $\mathbf{10}$ は，
$$\bigcirc||||||||||\equiv\mathbf{10}\equiv\bigcirc|\bigcirc$$
という矛盾を引き起こすので不当である，と思われるかもしれない．しかし，これは見かけ上の問題である．実際には，$\mathbf{10}$ は $\mathbf{1}$ と $\mathbf{0}$ を「書き並べた」ものではなく，「$\mathbf{10}$」全体で 1 つの数字をなすものとしてメタ定義されているので，$\mathbf{10}\equiv\bigcirc|\bigcirc$ は成り立たない．よりこのことに慎重になるなら，正式には
$$\mathrm{ten}:\equiv\bigcirc||||||||||$$
などと定めておいて，実際に表記する上では ten の代わりに $\mathbf{10}$ と書いているものと思えばよい．三桁以上の数字も同様である．
2. これ以降，メタ自然数が，数字を用いないで直接 $\bigcirc||\ldots|$ の形で書かれることはめったにない．

記法 1.1.23（$\dot{\geq}$，$\dot{\leq}$，$\dot{>}$，$\dot{<}$，$\dot{+}$，$\dot{-}$）

1. $\boldsymbol{m}$ が $\boldsymbol{n}$ 以上・以下であることをそれぞれ $\boldsymbol{m}\mathrel{\dot{\geq}}\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{m}\mathrel{\dot{\leq}}\boldsymbol{n}$ と書く．
2. $\boldsymbol{m}$ が $\boldsymbol{n}$ より大きい・小さいことをそれぞれ $\boldsymbol{m}\mathrel{\dot{>}}\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{m}\mathrel{\dot{<}}\boldsymbol{n}$ と書く．
3. $\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{n}$ の和と非負差をそれぞれ $\boldsymbol{m}\mathbin{\dot{+}}\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{m}\mathbin{\dot{-}}\boldsymbol{n}$ と書く．

例
$$\begin{aligned}\mathbf{2}&\mathrel{\dot{\geq}}\mathbf{2}\\ \mathbf{0}&\mathrel{\dot{\leq}}\mathbf{1}\\ \mathbf{3}\mathbin{\dot{+}}\mathbf{1}&\equiv\mathbf{4}\\ \mathbf{5}\mathbin{\dot{-}}\mathbf{2}&\equiv\mathbf{3}\\ \mathbf{2}\mathbin{\dot{-}}\mathbf{5}&\equiv\mathbf{0}\end{aligned}$$

注意 1.1.24

1. ただし，非負差 $\boldsymbol{m}\mathbin{\dot{-}}\boldsymbol{n}$ とは，$\boldsymbol{m}\mathrel{\dot{<}}\boldsymbol{n}$ のときは $\mathbf{0}$ となるような差である．
2. メタ自然数どうしの図形としての等しさ（$\equiv$）は，そのまま直観的自然数の「等しさ」のイメージと同じように振舞う．また，約束 1.1.21で断ったように本稿では省略しているが，$\dot{+}$ や $\dot{-}$ などの演算結果も（図形である）メタ自然数として定めることができるので，記法 1.1.23の例にあるような $\equiv$ の用法も正当である．

記法 1.1.25（メタ言語内変数／メタ変数の表記）

1. 以降，記法 1.1.8.1に加え，それらにメタ自然数の添え字を付けてできる文字（$\boldsymbol{n}_{\mathbf{0}}$ など）も，メタ言語内変数として用いる．
2. 以降，記法 1.1.8.2に加え，それらにメタ自然数の添え字を付けてできる文字（$\phi_{\mathbf{2}}$ など）も，メタ変数として用いる．

注意 1.1.26（添え字付きメタ変数についての注意）

メタ言語内変数／メタ変数として使える文字は，無数に用意されていなければならない（そうでないと，全ての文字を使い切ってしまうということが起こりうる）．しかし現実的には，私たちは無数の文字を用意することができないので（記法 1.1.8.1／記法 1.1.8.2で使用可能な文字とされたのは，せいぜい 26 文

字／50 文字である)，有限の文字から無数に文字を作ることができるように，記法 1.1.25のような手段を導入することが必要となる．

このことを踏まえれば，添え字付きのメタ言語内変数／メタ変数（$\boldsymbol{n}_0, \mathbf{x}_1$）は，元の文字（$\boldsymbol{n}, \mathbf{x}$）と添え字（$\mathbf{0}, \mathbf{1}$）の二か所の部分からなる**のではない**ということが分かるだろう．例えばメタ変数 $\mathbf{x}_1$ は「$\mathbf{x}_1$」全体で一つの文字を（したがって一つのメタ変数を）なすのであり，$\mathbf{x}$ とは何の関係もない．つまり，文字 $\mathbf{x}$ が文字 $\mathbf{y}$ と異なるのと全く同じ意味で，文字 $\mathbf{x}_1$ は文字 $\mathbf{x}$ と異なるのである（メタ言語内変数についても同様）．したがって，例えば $\boldsymbol{n} \equiv \mathbf{4}$ であるからといって，$\boldsymbol{n}_2 \equiv \mathbf{4}_2$ とはならず，$\boldsymbol{n}$ とはそもそも異なる文字である $\boldsymbol{n}_2$ については，何も言うことはできない．

よりこのことに慎重になるなら，全く重複しない文字種を使えばよい．つまり，正式にはメタ言語内変数として

- 太字筆記体ラテン文字 $\boldsymbol{\mathscr{a}}, \boldsymbol{\mathscr{b}}, \dots, \boldsymbol{\mathscr{z}}$
- 筆記体ラテン文字にメタ自然数の添え字を付けたもの（$\mathscr{a}_{\mathbf{0}}$ や $\mathscr{n}_{\mathbf{123}}$ など）

を，メタ変数として

- 太字ローマン体ラテン文字 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{z}$
- ギリシャ文字 $\alpha, \beta, \dots, \omega$
- ローマン体ラテン文字およびローマン体ギリシャ文字に，メタ自然数の添え字を付けたもの（$\mathrm{a}_{\mathbf{0}}$ や $\upphi_{\mathbf{123}}$ など）

を用いることにしておいて，しかし実際に表記する上では慣習的に $\mathscr{a}_{\mathbf{0}}$ や $\mathrm{a}_{\mathbf{0}}$ や $\upphi_{\mathbf{123}}$ の代わりに $\boldsymbol{\mathscr{a}}_{\mathbf{0}}$ や $\mathbf{a}_{\mathbf{0}}$ や $\phi_{\mathbf{123}}$ と書いているものと思えばよい．

1.2 記号

メタ定義 1.2.1 （論理定項，変数，論理記号）

1. 以下を**論理定項**（logical constant）という．
   - $\neg$　　**否定**（negation）
   - $\to$　　**含意**（implication）
   - $\exists$　　**存在量化子**（existential quantifier）
2. **変数**（variable）を以下の条件によって定める．
   (1) $v_{\boldsymbol{n}}$ は変数である．
   (2) 以上によって変数であるであると分かる記述のみが変数である．
3. 論理定項と変数を**論理記号**（logical symbol）という．

例　$v_{\mathbf{0}}, v_{\mathbf{1}}, v_{\mathbf{2}}, \dots$ など，v にメタ自然数の添え字を付けたものは全て変数である．

メタ定義 1.2.2 （言語，述語記号／関数記号／定数記号の個数）

言語指定子*（language specifier）$\mathscr{L}$ は，以下からなる．

- $\mathrm{Np}^{\mathscr{L}}$　　**$\mathscr{L}$–述語記号の個数***（number of $\mathscr{L}$–predicate symbols）と呼ばれる $\mathbf{1}$ 以上のメタ自然数
- $\mathrm{Nf}^{\mathscr{L}}$　　**$\mathscr{L}$–関数記号の個数***（number of $\mathscr{L}$–function symbols）と呼ばれるメタ自然数

- $\mathrm{Nc}^{\mathscr{L}}$　**$\mathscr{L}$–定数記号の個数***（number of $\mathscr{L}$–constant symbols）と呼ばれるメタ自然数
- $\mathrm{ar}^{\mathscr{L}}$　メタ定義 1.2.5.1を見よ．

記法 1.2.3 （言語の表記）

以降，$\mathscr{L}, \mathscr{L}', \mathscr{L}'', \dots$ は言語とする．

メタ定義 1.2.4 （述語記号，関数記号，定数記号，非論理記号）

1. $p_{\mathbf{1}}, \dots, p_{\mathrm{Np}^{\mathscr{L}}}$ を，**$\mathscr{L}$–述語記号**（$\mathscr{L}$–predicate symbol）という．
2. $f_{\mathbf{1}}, \dots, f_{\mathrm{Nf}^{\mathscr{L}}}$ を，**$\mathscr{L}$–関数記号**（$\mathscr{L}$–function symbol）という．
3. $c_{\mathbf{1}}, \dots, c_{\mathrm{Nc}^{\mathscr{L}}}$ を，**$\mathscr{L}$–定数記号**（$\mathscr{L}$–constant symbol）という．
4. $\mathscr{L}$–述語記号，$\mathscr{L}$–関数記号，$\mathscr{L}$–定数記号を，**$\mathscr{L}$–非論理記号**（$\mathscr{L}$–nonlogical symbol）という．

例　$\mathrm{Np}^{\mathscr{L}} \equiv \mathbf{2}$，$\mathrm{Nf}^{\mathscr{L}} \equiv \mathbf{0}$，$\mathrm{Nc}^{\mathscr{L}} \equiv \mathbf{1}$ とすれば，以下のみが $\mathscr{L}$–非論理記号となる．

$\mathscr{L}$–述語記号　$p_{\mathbf{1}}, p_{\mathbf{2}}$
$\mathscr{L}$–関数記号　なし
$\mathscr{L}$–定数記号　$c_{\mathbf{1}}$

メタ定義 1.2.5 （項数，$\boldsymbol{n}$ 項述語記号／関数記号）

1. ($\mathbf{x}$: $\mathscr{L}$–述語記号または $\mathscr{L}$–関数記号)
   $\mathrm{ar}^{\mathscr{L}}$ は，$\mathbf{x}$ に対し，その**$\mathscr{L}$–項数**（$\mathscr{L}$–arity）と呼ばれる $\mathbf{1}$ 以上のメタ自然数を与える対応規則である．
   $\mathrm{ar}^{\mathscr{L}}$ によって $\mathbf{x}$ に与えられる $\mathscr{L}$–項数を，$\mathrm{ar}^{\mathscr{L}}_{\mathbf{x}}$ と書く．
2. $\mathrm{ar}^{\mathscr{L}}_{\mathbf{p}} \equiv \boldsymbol{n}$ であるような $\mathscr{L}$–述語記号 $\mathbf{p}$ を，**$\boldsymbol{n}$ 項 $\mathscr{L}$–述語記号**（$\boldsymbol{n}$-ary $\mathscr{L}$–predicate symbol）という．
3. $\mathrm{ar}^{\mathscr{L}}_{\mathbf{f}} \equiv \boldsymbol{n}$ であるような $\mathscr{L}$–関数記号 $\mathbf{f}$ を，**$\boldsymbol{n}$ 項 $\mathscr{L}$–関数記号**（$\boldsymbol{n}$-ary $\mathscr{L}$–function symbol）という．

例　もし $p_{\mathbf{1}}$ の $\mathscr{L}$–項数 $\mathrm{ar}^{\mathscr{L}}_{p_{\mathbf{1}}}$ が $\mathbf{3}$ であれば，$p_{\mathbf{1}}$ は $\mathbf{3}$ 項 $\mathscr{L}$–述語記号である．

注意 1.2.6

数理論理学では，

- 論理定項
- 変数の集合 V
- $\mathscr{L}$–述語記号の集合 $P_{\mathscr{L}}$
- $\mathscr{L}$–関数記号の集合 $F_{\mathscr{L}}$
- $\mathscr{L}$–定数記号の集合 $C_{\mathscr{L}}$
- $\mathscr{L}$–項数関数 $ar_{\mathscr{L}}\colon P_{\mathscr{L}} \cup F_{\mathscr{L}} \to \omega \setminus \{0\}$

からなる $\mathscr{L}$ を**一階の言語**（first-order language）と呼ぶ（項目 1.1.1.2の「言語」とは異なる概念である）．ここでは，素朴集合論の知識を仮定していないのでこのような定義は行っていないものの，言語指定子を指定することは，実質的に一階の言語を一つ定めたのと同義になる（「言語指定子」という名称はこれが理由である）．

記法 1.2.7 （様々なメタ変数）

以降，以下の左に示すメタ変数，またはそれに添え字を付けてできるメタ変数は，右のものであるとする．つまり，例えば突然 $\mathbf{v}$ が登場したときは，その前に書かれるべき「($\mathbf{v}$: 変数)」が省略されているものと考え，また「...なる $\mathbf{v}$ が存在する」のような記述は「...なる変数 $\mathbf{v}$ が存在する」と読み替えればよい．

- $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$　変数
- $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$　$\mathscr{L}$–述語記号
- $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$　$\mathscr{L}$–関数記号
- $\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}$　$\mathscr{L}$–定数記号

約束 1.2.8

以降，$p_{\boldsymbol{n}}$，$f_{\boldsymbol{n}}$，$c_{\boldsymbol{n}}$ が断りなく登場したときには，それぞれ $\mathrm{Np}^{\mathscr{L}} \mathrel{\dot{\geq}} \boldsymbol{n}$，$\mathrm{Nf}^{\mathscr{L}} \mathrel{\dot{\geq}} \boldsymbol{n}$，$\mathrm{Nc}^{\mathscr{L}} \mathrel{\dot{\geq}} \boldsymbol{n}$ が仮定されているものとする．

メタ定義 1.2.9 （記号，記号列，現れる）

1. 論理記号と $\mathscr{L}$–非論理記号を，**$\mathscr{L}$–記号**（$\mathscr{L}$–symbol）という．
2. $\mathscr{L}$–記号を並べてできる記述を，**$\mathscr{L}$–記号列**（$\mathscr{L}$–symbol string）または**$\mathscr{L}$–表現**（$\mathscr{L}$–expression）という．
3. ($\mathbf{x}$: $\mathscr{L}$–記号，$\mathbf{y}$: $\mathscr{L}$–記号列)
   $\mathbf{x}$ が $\mathbf{y}$ の中に**現れる**（appear）とは，$\mathbf{y}$ を構成する $\mathscr{L}$–記号の並びに $\mathbf{x}$ が含まれていることをいう．

例　以下の中で，a)とb)のみが $\mathscr{L}$–記号，a)–c)のみが $\mathscr{L}$–記号列である．また，$\to$ はa)とc)の中のみに現れている．

a)　$\to$　　b)　$f_{\mathbf{8}}$　　c)　$\neg \to f_{\mathbf{8}} \neg v_{\mathbf{2}}$　　d)　$\mathbf{8}$

注意 1.2.10

特に，$\mathscr{L}$–記号は $\mathscr{L}$–記号列である．

項目 1.2.11 （対象記述の確定）

任意の $\mathscr{L}$–記号列は対象記述であり，また対象記述である記述は $\mathscr{L}$–記号列のみである．

注意 1.2.12 （記号の分類）

$\mathscr{L}$–記号は以下のように分類できる．

- $\mathscr{L}$–記号
  - 論理記号
    - 論理定項: $\neg$, $\rightarrow$, $\exists$
    - 変数: $v_{\mathbf{0}}, v_{\mathbf{1}}, v_{\mathbf{2}}, \ldots$
  - $\mathscr{L}$–非論理記号
    - $\mathscr{L}$–述語記号: $p_{\mathbf{1}}, \ldots, p_{\mathrm{Np}^{\mathscr{L}}}$
    - $\mathscr{L}$–関数記号: $f_{\mathbf{1}}, \ldots, f_{\mathrm{Nf}^{\mathscr{L}}}$
    - $\mathscr{L}$–定数記号: $c_{\mathbf{1}}, \ldots, c_{\mathrm{Nc}^{\mathscr{L}}}$

1.3 形成規則

メタ定義 1.3.1 （項）

$\mathscr{L}$–項（$\mathscr{L}$–term）を以下の条件によって定める．

(1) 変数記号は $\mathscr{L}$–項である．
(2) $\mathscr{L}$–定数記号は $\mathscr{L}$–項である．
(3) ($\tau_{\mathbf{1}}, \ldots, \tau_{\mathrm{ar}^{\mathscr{L}}_{\mathbf{f}}}$: $\mathscr{L}$–項)
$\mathbf{f}\tau_{\mathbf{1}} \ldots \tau_{\mathrm{ar}^{\mathscr{L}}_{\mathbf{f}}}$ は $\mathscr{L}$–項である．
(4) 以上によって $\mathscr{L}$–項であると分かる記述のみが $\mathscr{L}$–項である．

例　$\mathrm{ar}^{\mathscr{L}}_{f_{\mathbf{2}}} \equiv \mathbf{1}$, $\mathrm{ar}^{\mathscr{L}}_{f_{\mathbf{4}}} \equiv \mathbf{2}$ であるとし，τ, σ は $\mathscr{L}$–項とする．以下は全て $\mathscr{L}$–項である．

a) $v_{\mathbf{6}}$　b) $c_{\mathbf{2}}$　c) $f_{\mathbf{4}}v_{\mathbf{6}}c_{\mathbf{2}}$
d) $f_{\mathbf{2}}f_{\mathbf{4}}v_{\mathbf{6}}c_{\mathbf{2}}$　e) $f_{\mathbf{2}}\tau$　f) $f_{\mathbf{4}}f_{\mathbf{2}}\tau\sigma$
g) $f_{\mathbf{4}}f_{\mathbf{2}}\tau f_{\mathbf{4}}v_{\mathbf{6}}c_{\mathbf{2}}$

一方，以下は $\mathscr{L}$–項ではない．

a) $f_{\mathbf{2}}$　b) $v_{\mathbf{6}}c_{\mathbf{2}}$　c) $f_{\mathbf{4}}v_{\mathbf{6}}$
d) $f_{\mathbf{2}}\tau\sigma$　e) $f_{\mathbf{2}}f_{\mathbf{2}}v_{\mathbf{6}}c_{\mathbf{2}}$　f) $c_{\mathbf{2}}f_{\mathbf{4}}v_{\mathbf{6}}$
g) $f_{\mathbf{2}}c_{\mathbf{2}}f_{\mathbf{2}}$

注意 1.3.2 （項のメタ定義に関する注意）

メタ定義 1.3.1をより正確に書くと以下のようになる．

(1) ($\mathbf{v}$: 変数記号)

$\mathbf{v}$ は $\mathscr{L}$–項である．

(2) ($\mathbf{c}$: 変数記号)
$\mathbf{c}$ は $\mathscr{L}$–項である．

(3) ($\mathbf{f}$: $\mathscr{L}$–関数記号，$\tau_{\mathbf{1}}, \ldots, \tau_{\mathrm{ar}_{\mathbf{f}}^{\mathscr{L}}}$: $\mathscr{L}$–項)
$\mathbf{f}\tau_{\mathbf{1}} \ldots \tau_{\mathrm{ar}_{\mathbf{f}}^{\mathscr{L}}}$ は $\mathscr{L}$–項である．

(4) (τ: $\mathscr{L}$–項)
以下のいずれかが成り立つ．

(4.1) τ は変数記号である．
(4.2) τ は $\mathscr{L}$–定数記号である．
(4.3) $\tau \equiv \mathbf{f}\tau_{\mathbf{1}} \ldots \tau_{\mathrm{ar}_{\mathbf{f}}^{\mathscr{L}}}$ となるような関数記号 $\mathbf{f}$ と $\mathscr{L}$–項 $\tau_{\mathbf{1}} \ldots \tau_{\mathrm{ar}_{\mathbf{f}}^{\mathscr{L}}}$ が存在する．

記法 1.3.3 （項の別表記）

読みやすさのため，$\mathbf{f}\tau_{\mathbf{1}} \ldots \tau_{\mathrm{ar}_{\mathbf{f}}^{\mathscr{L}}}$ は $\mathbf{f}\left(\tau_{\mathbf{1}}, \ldots, \tau_{\mathrm{ar}_{\mathbf{f}}^{\mathscr{L}}}\right)$ とも書かれる．

例　メタ定義 1.3.1での例をこれに倣って表せば，以下のようになる．

a) $v_{\mathbf{6}}$
b) $c_{\mathbf{2}}$
c) $f_{\mathbf{4}}(v_{\mathbf{6}}, c_{\mathbf{2}})$
d) $f_{\mathbf{2}}(f_{\mathbf{4}}(v_{\mathbf{6}}, c_{\mathbf{2}}))$
e) $f_{\mathbf{2}}(\tau)$
f) $f_{\mathbf{4}}(f_{\mathbf{2}}(\tau), \sigma)$
g) $f_{\mathbf{4}}(f_{\mathbf{2}}(\tau), f_{\mathbf{4}}(v_{\mathbf{6}}, c_{\mathbf{2}}))$

メタ定義 1.3.4 （原子論理式）

$\mathscr{L}$–原子論理式（$\mathscr{L}$–atomic formula）を以下の条件によって定める．

(1) ($\mathbf{p}$: $\mathscr{L}$–述語記号，$\tau_{\mathbf{1}}, \ldots, \tau_{\mathrm{ar}_{\mathbf{p}}^{\mathscr{L}}}$: $\mathscr{L}$–項)
$\mathbf{p}\tau_{\mathbf{1}} \ldots \tau_{\mathrm{ar}_{\mathbf{p}}^{\mathscr{L}}}$ は $\mathscr{L}$–原子論理式である．

(2) 以上によって $\mathscr{L}$–原子論理式であると分かる記述のみが $\mathscr{L}$–原子論理式である．

例　$p_{\mathbf{1}}, p_{\mathbf{2}}, p_{\mathbf{3}}, f_{\mathbf{1}}, f_{\mathbf{4}}$ の項数はそれぞれ $\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{3}$ であるとし，τ, σ は $\mathscr{L}$–項とする．以下は全て $\mathscr{L}$–原子論理式である．

a) $p_{\mathbf{1}}v_{\mathbf{0}}$
b) $p_{\mathbf{3}}c_{\mathbf{2}}v_{\mathbf{1}}$
c) $p_{\mathbf{2}}v_{\mathbf{3}}v_{\mathbf{2}}v_{\mathbf{0}}$
d) $p_{\mathbf{3}}f_{\mathbf{1}}v_{\mathbf{3}}c_{\mathbf{2}}f_{\mathbf{1}}v_{\mathbf{1}}v_{\mathbf{4}}$
e) $p_{\mathbf{3}}\tau f_{\mathbf{4}}c_{\mathbf{1}}v_{\mathbf{2}}\sigma$

一方，以下は $\mathscr{L}$–原子論理式ではない．

a) $p_{\mathbf{1}}v_{\mathbf{0}}v_{\mathbf{2}}$
b) $v_{\mathbf{1}}p_{\mathbf{2}}v_{\mathbf{2}}$
c) $p_{\mathbf{1}}p_{\mathbf{1}}v_{\mathbf{4}}$
d) $p_{\mathbf{2}}f_{\mathbf{1}}c_{\mathbf{6}}v_{\mathbf{1}}$
e) $p_{\mathbf{3}}\tau f_{\mathbf{4}}c_{\mathbf{1}}v_{\mathbf{2}}p_{\mathbf{1}}v_{\mathbf{0}}$

記法 1.3.5 （原子論理式の別表記）

読みやすさのため，$\mathbf{p}\tau_{\mathbf{1}} \ldots \tau_{\mathrm{ar}_{\mathbf{p}}^{\mathscr{L}}}$ は $\mathbf{p}\left(\tau_{\mathbf{1}}, \ldots, \tau_{\mathrm{ar}_{\mathbf{p}}^{\mathscr{L}}}\right)$ とも書かれる．

例　メタ定義 1.3.4での例を，これと記法 1.3.3に倣って表せば，以下のようになる．

a) $p_{\mathbf{1}}(v_{\mathbf{0}})$
b) $p_{\mathbf{3}}(c_{\mathbf{2}}, v_{\mathbf{1}})$
c) $p_{\mathbf{2}}(v_{\mathbf{3}}, v_{\mathbf{2}}, v_{\mathbf{0}})$
d) $p_{\mathbf{3}}(f_{\mathbf{1}}(v_{\mathbf{3}}, c_{\mathbf{2}}), f_{\mathbf{1}}(v_{\mathbf{1}}, v_{\mathbf{4}}))$
e) $p_{\mathbf{3}}(\tau, f_{\mathbf{4}}(c_{\mathbf{1}}, v_{\mathbf{2}}, \sigma))$

メタ定義 1.3.6 （論理式）

$\mathscr{L}$–論理式（$\mathscr{L}$–formula）を以下の条件によって定める．

(1) $\mathscr{L}$–原子論理式は $\mathscr{L}$–論理式である．
(2) (ϕ: $\mathscr{L}$–論理式)
$\neg\phi$ は $\mathscr{L}$–論理式である．
(3) (ϕ, ψ: $\mathscr{L}$–論理式)
$\to \phi\psi$ は $\mathscr{L}$–論理式である．
(4) (ϕ: $\mathscr{L}$–論理式)
$\exists \mathbf{v}\, \phi$ は $\mathscr{L}$–論理式である．
(5) 以上によって $\mathscr{L}$–論理式であると分かる記述のみが $\mathscr{L}$–論理式である．

例　$\mathrm{ar}^{\mathscr{L}}_{f_4} \equiv \mathbf{2}$，$\mathrm{ar}^{\mathscr{L}}_{p_2} \equiv \mathbf{1}$ であるとし，ϕ, ψ, χ は $\mathscr{L}$–論理式とする．以下は全て $\mathscr{L}$–論理式である．

a) $p_2 f_4 v_1 v_2$　b) $\exists v_2\, p_2 v_4$　c) $\neg\neg\phi$
d) $\to \phi \to \psi\chi$　e) $\exists v_1 \neg \exists v_2 \to \phi\psi$

一方，以下は $\mathscr{L}$–論理式ではない．

a) $\phi\neg$　b) $\to \phi \to \psi$　c) $\to\to \phi\psi$
d) $\to f_4 v_1 \phi$　e) $\exists c_1\, \phi$　f) $\exists p_2\, \phi$

記法 1.3.7 （論理式の別表記）

読みやすさのため，$\to \phi\psi$ は $(\phi \to \psi)$ とも書かれる．なお，前者のような記法を**前置記法**（prefix notation）または**ポーランド記法**（Polish notation），後者のような記法を**中置記法**（infix notation）という．

例　メタ定義 1.3.6での例を，これと記法 1.3.3，記法 1.3.5に倣って表せば，以下のようになる．

a) $p_2\,(f_4\,(v_1, v_2))$　b) $\exists v_2\, p_2\,(v_4)$　c) $\neg\neg\phi$
d) $(\phi \to (\psi \to \chi))$　e) $\exists v_1 \neg \exists v_2\,(\phi \to \psi)$

項目 1.3.8 （形成規則）

以上のメタ定義 1.3.1，メタ定義 1.3.4，メタ定義 1.3.6を，**$\mathscr{L}$–形成規則**（$\mathscr{L}$–formation rule）という．

事実 1.3.9 （一意可読性）

$\mathscr{L}$–項，$\mathscr{L}$–原子論理式，$\mathscr{L}$–論理式は，次の**一意可読性**（unique readability）と呼ばれる性質を持つ．

1. (τ: $\mathscr{L}$–項)
次のうちちょうど一つが成り立つ．
(1) τ は変数記号である．
(2) τ は $\mathscr{L}$–定数記号である．
(3) $\tau \equiv \mathbf{f}\sigma_1 \ldots \sigma_{\mathrm{ar}^{\mathscr{L}}_{\mathbf{f}}}$ となるような $\mathbf{f}$ と $\mathscr{L}$–項 $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\mathrm{ar}^{\mathscr{L}}_{\mathbf{f}}}$ がちょうど一つずつ存在する．
2. (α: $\mathscr{L}$–原子論理式)
$\alpha \equiv \mathbf{p}\tau_1 \ldots \tau_{\mathrm{ar}^{\mathscr{L}}_{\mathbf{p}}}$ となるような $\mathbf{p}$ と $\mathscr{L}$–項 $\tau_1, \ldots, \tau_{\mathrm{ar}^{\mathscr{L}}_{\mathbf{p}}}$ がちょうど一つずつ存在する．
3. (ϕ: $\mathscr{L}$–論理式)

次のうちちょうど一つが成り立つ．

(1) ϕ は $\mathscr{L}$–原子論理式である．
(2) $\phi \equiv \neg\psi$ となるような $\mathscr{L}$–論理式 ψ がちょうど一つ存在する．
(3) $\phi \equiv\ \to \psi\chi$ となるような $\mathscr{L}$–論理式 ψ と χ がちょうど一つずつ存在する．
(4) $\phi \equiv \exists \mathbf{v}\, \psi$ となるような $\mathbf{v}$ と $\mathscr{L}$–論理式 ψ がちょうど一つずつ存在する．

記法 1.3.10 （さらなる別表記）

記法 1.3.3，記法 1.3.5，記法 1.3.7に加え，$\mathscr{L}$–項や $\mathscr{L}$–論理式の正式な形が推測できる範囲で，さらなる括弧の省略や追加を行うこともある．例えば，もっとも外側の () を省略したり，$\exists \mathbf{v}\, p_{\mathbf{1}}\,(v_{\mathbf{0}}, v_{\mathbf{1}})$ を $\exists \mathbf{v}\,(p_{\mathbf{1}}\,(v_{\mathbf{0}}, v_{\mathbf{1}}))$ と書いたりすることがある．

記法 1.3.11 （様々なメタ変数）

以降，記法 1.2.7と同様に，以下の左に示すメタ変数，またはそれに添え字を付けてできるメタ変数は，右のものを表すとする．

- σ, τ　$\mathscr{L}$–項
- α, β　$\mathscr{L}$–原子論理式
- ϕ, ψ, χ　$\mathscr{L}$–論理式

記法 1.3.12 （$\wedge$，$\vee$，$\leftrightarrow$，$\forall$）

1. $\wedge\phi\psi :\equiv \neg \to \phi\neg\psi$
2. $\vee\phi\psi :\equiv \to \neg\phi\psi$
3. $\leftrightarrow \phi\psi :\equiv \wedge \to \phi\psi \to \psi\phi$
4. $\forall \mathbf{v}\, \phi :\equiv \neg \exists \mathbf{v}\, \neg\phi$

記法 1.3.13 （$\wedge$，$\vee$，$\leftrightarrow$ の中置記法）

以降，読みやすさのため，

- $\wedge\phi\psi$ は $(\phi \wedge \psi)$
- $\vee\phi\psi$ は $(\phi \vee \psi)$
- $\leftrightarrow \phi\psi$ は $(\phi \leftrightarrow \psi)$

とも書かれる．これらも記法 1.3.7と同様に，左の書き方は**前置記法**，右の書き方は**中置記法**と呼ばれる．括弧も，記法 1.3.10と同様にさらに省略・追加することがある．

注意 1.3.14

記法 1.3.12を記法 1.3.13に従ってそれぞれ書き換えると，

1. $\phi \wedge \psi :\equiv \neg(\phi \to \neg\psi)$
2. $\phi \vee \psi :\equiv \neg\phi \to \psi$
3. $\phi \leftrightarrow \psi :\equiv (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$
4. $\forall \mathbf{v}\, \phi :\equiv \neg \exists \mathbf{v}\, \neg\phi$

となる．

1.4 変数と代入

メタ定義 1.4.1 （自由変数）

$\mathbf{v}$ が ϕ の**自由変数**（free variable）である，または $\mathbf{v}$ が ϕ の中に**自由に現れる**（occur freely）ことを，以下の条件によって定める．

(1) $\mathbf{v}$ は α の自由変数である $\Leftrightarrow$ $\mathbf{v}$ は α の中に現れている．
(2) $\mathbf{v}$ は $\neg\psi$ の自由変数である $\Leftrightarrow$ $\mathbf{v}$ は ψ の自由変数である．
(3) $\mathbf{v}$ は $\to\psi\chi$ の自由変数である $\Leftrightarrow$ $\mathbf{v}$ は ψ か χ の少なくとも一方の自由変数である．
(4) $\mathbf{v}$ は $\exists\mathbf{u}\,\psi$ の自由変数である $\Leftrightarrow$ $\mathbf{v}$ は ψ の自由変数であり，かつ $\mathbf{v}\not\equiv\mathbf{u}$ である．

例　$\mathrm{ar}^{\mathscr{L}}_{f_1}\equiv\mathbf{1}$，$\mathrm{ar}^{\mathscr{L}}_{p_2}\equiv\mathbf{2}$ であるとする．$v_{\mathbf{0}}$ は，以下の $\mathscr{L}$–論理式の自由変数である．

a) $p_{\mathbf{2}}(v_{\mathbf{0}},v_{\mathbf{1}})$
b) $p_{\mathbf{2}}(c_{\mathbf{1}},f_{\mathbf{1}}(v_{\mathbf{0}}))$
c) $\neg(\phi\to p_{\mathbf{2}}(v_{\mathbf{0}},v_{\mathbf{1}}))$
d) $\exists v_{\mathbf{1}}\,p_{\mathbf{2}}(v_{\mathbf{0}},v_{\mathbf{1}})$
e) $p_{\mathbf{2}}(v_{\mathbf{0}},v_{\mathbf{1}})\to\exists v_{\mathbf{0}}\,p_{\mathbf{2}}(v_{\mathbf{0}},v_{\mathbf{1}})$
f) $\exists v_{\mathbf{0}}\,p_{\mathbf{2}}(v_{\mathbf{0}},v_{\mathbf{1}})\to\exists v_{\mathbf{1}}\,p_{\mathbf{2}}(v_{\mathbf{0}},v_{\mathbf{1}})$

一方，$v_{\mathbf{0}}$ は以下の $\mathscr{L}$–論理式の自由変数ではない．

a) $p_{\mathbf{2}}(c_{\mathbf{1}},c_{\mathbf{2}})$
b) $\exists v_{\mathbf{0}}\,\phi$
c) $\exists v_{\mathbf{0}}\,\phi\to\neg\exists v_{\mathbf{0}}\,\psi$
d) $\exists v_{\mathbf{1}}\,p_{\mathbf{2}}(c_{\mathbf{1}},c_{\mathbf{2}})\to\exists v_{\mathbf{0}}\,\phi$

メタ定義 1.4.2 （束縛変数）

$\mathbf{v}$ が ϕ の**束縛変数**（bound variable）であることを，以下の条件によって定める．

(1) $\mathbf{v}$ は α の束縛変数ではない．
(2) $\mathbf{v}$ は $\neg\psi$ の束縛変数である $\Leftrightarrow$ $\mathbf{v}$ は ψ の束縛変数である．
(3) $\mathbf{v}$ は $\to\psi\chi$ の束縛変数である $\Leftrightarrow$ $\mathbf{v}$ は ψ か χ の少なくとも一方の束縛変数である．
(4) $\mathbf{v}$ は $\exists\mathbf{u}\,\psi$ の束縛変数である $\Leftrightarrow$ $\mathbf{v}$ は ψ の束縛変数であるか，または $\mathbf{v}\equiv\mathbf{u}$ である．

例　$\mathrm{ar}^{\mathscr{L}}_{f_1}\equiv\mathbf{1}$，$\mathrm{ar}^{\mathscr{L}}_{p_2}\equiv\mathbf{2}$ であるとする．$v_{\mathbf{0}}$ は，以下の $\mathscr{L}$–論理式の束縛変数である．

a) $\exists v_{\mathbf{0}}\,p_{\mathbf{2}}(v_{\mathbf{0}},v_{\mathbf{1}})$
b) $\exists v_{\mathbf{0}}\,p_{\mathbf{2}}(c_{\mathbf{1}},f_{\mathbf{1}}(v_{\mathbf{0}}))$
c) $\neg\exists v_{\mathbf{0}}(\phi\to p_{\mathbf{2}}(v_{\mathbf{0}},v_{\mathbf{1}}))$
d) $\exists v_{\mathbf{1}}\,\exists v_{\mathbf{0}}\,p_{\mathbf{2}}(v_{\mathbf{0}},v_{\mathbf{1}})$
e) $p_{\mathbf{2}}(v_{\mathbf{0}},v_{\mathbf{1}})\to\exists v_{\mathbf{0}}\,p_{\mathbf{2}}(v_{\mathbf{0}},v_{\mathbf{1}})$
f) $\exists v_{\mathbf{0}}\,p_{\mathbf{2}}(v_{\mathbf{0}},v_{\mathbf{1}})\to\exists v_{\mathbf{1}}\,p_{\mathbf{2}}(v_{\mathbf{0}},v_{\mathbf{1}})$
g) $\exists v_{\mathbf{0}}\,\phi$
h) $\phi\to\neg\exists v_{\mathbf{0}}\,\phi$

メタ定義 1.4.3 （文）

$\mathscr{L}$–論理式 ϕ が**$\mathscr{L}$–文**（$\mathscr{L}$–sentence）または**$\mathscr{L}$–閉論理式**（$\mathscr{L}$–closed formula）であるとは，ϕ の自由変数であるような $\mathbf{v}$ が存在しないことをいう．

例　$\mathrm{ar}^{\mathscr{L}}_{f_1}\equiv\mathbf{1}$，$\mathrm{ar}^{\mathscr{L}}_{p_2}\equiv\mathbf{2}$ であるとする．以下は全て $\mathscr{L}$–文である．

a) $p_{\mathbf{2}}(c_{\mathbf{1}},c_{\mathbf{2}})$
b) $\exists v_{\mathbf{1}}\,p_{\mathbf{2}}(v_{\mathbf{1}},v_{\mathbf{1}})$
c) $\exists v_{\mathbf{0}}\,\exists v_{\mathbf{1}}\,p_{\mathbf{2}}(v_{\mathbf{0}},v_{\mathbf{1}})$
d) $\exists v_{\mathbf{0}}\,p_{\mathbf{2}}(c_{\mathbf{1}},f_{\mathbf{1}}(v_{\mathbf{0}}))$

e) $\exists v_{\mathbf{0}}\, \exists v_{\mathbf{1}}\, (p_{\mathbf{2}}\,(v_{\mathbf{0}}, v_{\mathbf{1}}) \to \exists v_{\mathbf{0}}\, p_{\mathbf{2}}\,(v_{\mathbf{0}}))$ f) $\exists v_{\mathbf{0}}\, \neg \exists v_{\mathbf{2}}\, \exists v_{\mathbf{1}}\, p_{\mathbf{2}}\,(v_{\mathbf{0}}, v_{\mathbf{1}})$

事実 1.4.4

$\mathbf{v}$ は ϕ の束縛変数である $\Rightarrow$ $\mathbf{v}$ は ϕ の自由変数ではない.

注意 1.4.5

事実 1.4.4の逆は成り立たない．つまり，$\mathbf{v}$ が ϕ の束縛変数でも自由変数でもない，ということがありうる．具体的には，メタ定義 1.4.1／メタ定義 1.4.2のe)における $v_{\mathbf{0}}$ がそうである．

メタ定義 1.4.6 （項への代入）

σ 中の $\mathbf{v}$ への τ の**代入**（substitution）$(\sigma)\,[\tau/\mathbf{v}]$ を，以下の条件によって定める．

(1) $(\mathbf{v})\,[\tau/\mathbf{v}] :\equiv \tau$
(2) $\mathbf{u} \not\equiv \mathbf{v}$ ならば，$(\mathbf{u})\,[\tau/\mathbf{v}] :\equiv \mathbf{u}$
(3) $(\mathbf{c})\,[\tau/\mathbf{v}] :\equiv \mathbf{c}$
(4) $\left(\mathbf{f}\sigma_{\mathbf{1}} \ldots \sigma_{\mathrm{ar}_{\mathbf{f}}^{\mathscr{L}}}\right)[\tau/\mathbf{v}] :\equiv \mathbf{f}\,(\sigma_{\mathbf{1}})\,[\tau/\mathbf{v}] \ldots \left(\sigma_{\mathrm{ar}_{\mathbf{f}}^{\mathscr{L}}}\right)[\tau/\mathbf{v}]$

例 $\mathrm{ar}_{f_1}^{\mathscr{L}} \equiv \mathbf{2}$，$\mathrm{ar}_{f_2}^{\mathscr{L}} \equiv \mathbf{2}$，$\mathrm{ar}_{f_3}^{\mathscr{L}} \equiv \mathbf{3}$ であるとする．

a) $(v_{\mathbf{0}})\,[c_{\mathbf{1}}/v_{\mathbf{0}}] \equiv c_{\mathbf{1}}$
b) $(v_{\mathbf{3}})\,[f_{\mathbf{1}}\,(v_{\mathbf{1}}, v_{\mathbf{3}})\,/v_{\mathbf{0}}] \equiv v_{\mathbf{3}}$
c) $(c_{\mathbf{2}})\,[f_{\mathbf{1}}\,(c_{\mathbf{1}}, v_{\mathbf{0}})\,/v_{\mathbf{0}}] \equiv c_{\mathbf{2}}$
d)
$$\begin{aligned}
&(f_{\mathbf{3}}\,(c_{\mathbf{2}}, v_{\mathbf{0}}, f_{\mathbf{2}}\,(v_{\mathbf{0}}, v_{\mathbf{1}})))\,[f_{\mathbf{2}}\,(c_{\mathbf{1}}, v_{\mathbf{0}})\,/v_{\mathbf{0}}]\\
&\equiv f_{\mathbf{3}}\,((c_{\mathbf{2}})\,[f_{\mathbf{2}}\,(c_{\mathbf{1}}, v_{\mathbf{0}})\,/v_{\mathbf{0}}]\,, (v_{\mathbf{0}})\,[f_{\mathbf{2}}\,(c_{\mathbf{1}}, v_{\mathbf{0}})\,/v_{\mathbf{0}}]\,, (f_{\mathbf{2}}\,(v_{\mathbf{0}}, v_{\mathbf{1}}))\,[f_{\mathbf{2}}\,(c_{\mathbf{1}}, v_{\mathbf{0}})\,/v_{\mathbf{0}}])\\
&\equiv f_{\mathbf{3}}\,(c_{\mathbf{2}}, f_{\mathbf{2}}\,(c_{\mathbf{1}}, v_{\mathbf{0}})\,, f_{\mathbf{2}}\,((v_{\mathbf{0}})\,[f_{\mathbf{2}}\,(c_{\mathbf{1}}, v_{\mathbf{0}})\,/v_{\mathbf{0}}]\,, (v_{\mathbf{1}})\,[f_{\mathbf{2}}\,(c_{\mathbf{1}}, v_{\mathbf{0}})\,/v_{\mathbf{0}}]))\\
&\equiv f_{\mathbf{3}}\,(c_{\mathbf{2}}, f_{\mathbf{2}}\,(c_{\mathbf{1}}, v_{\mathbf{0}})\,, f_{\mathbf{2}}\,(f_{\mathbf{2}}\,(c_{\mathbf{1}}, v_{\mathbf{0}})\,, v_{\mathbf{1}}))
\end{aligned}$$

メタ定義 1.4.7 （論理式への代入）

ϕ 中の $\mathbf{v}$ への τ の**代入**（substitution）$(\phi)\,[\tau/\mathbf{v}]$ を，以下の条件によってに定める．

(1) $\left(\mathbf{p}\sigma_{\mathbf{1}} \ldots \sigma_{\mathrm{ar}_{\mathbf{p}}^{\mathscr{L}}}\right)[\tau/\mathbf{v}] :\equiv \mathbf{p}\,(\sigma_{\mathbf{1}})\,[\tau/\mathbf{v}] \ldots \left(\sigma_{\mathrm{ar}_{\mathbf{p}}^{\mathscr{L}}}\right)[\tau/\mathbf{v}]$
(2) $(\neg\psi)\,[\tau/\mathbf{v}] :\equiv \neg\,(\psi)\,[\tau/\mathbf{v}]$
(3) $(\to \psi\chi)\,[\tau/\mathbf{v}] :\equiv\ \to (\psi)\,[\tau/\mathbf{v}]\,(\chi)\,[\tau/\mathbf{v}]$
(4) $(\exists \mathbf{v}\,\psi)\,[\tau/\mathbf{v}] :\equiv \exists \mathbf{v}\,\psi$
(5) $\mathbf{u} \not\equiv \mathbf{v}$ ならば，$(\exists \mathbf{u}\,\psi)\,[\tau/\mathbf{v}] :\equiv \exists \mathbf{v}\,(\psi)\,[\tau/\mathbf{v}]$

例 $\mathrm{ar}_{f_1}^{\mathscr{L}} \equiv \mathbf{1}$，$\mathrm{ar}_{f_2}^{\mathscr{L}} \equiv \mathbf{2}$，$\mathrm{ar}_{p_1}^{\mathscr{L}} \equiv \mathbf{2}$，$\mathrm{ar}_{p_2}^{\mathscr{L}} \equiv \mathbf{1}$ であるとする．

a)
$$\begin{aligned}
&(p_{\mathbf{2}}(f_{\mathbf{2}}(c_{\mathbf{1}}, v_{\mathbf{1}})))\,[f_{\mathbf{1}}(v_{\mathbf{3}})/v_{\mathbf{1}}]\\
&\equiv p_{\mathbf{2}}((f_{\mathbf{2}}(c_{\mathbf{1}}, v_{\mathbf{1}}))\,[f_{\mathbf{1}}(v_{\mathbf{3}})/v_{\mathbf{1}}])\\
&\equiv p_{\mathbf{2}}(f_{\mathbf{2}}(c_{\mathbf{1}}, f_{\mathbf{1}}(v_{\mathbf{3}})))
\end{aligned}$$

b) $(\neg p_2(v_2) \to p_1(v_1, v_0))\,[f_1(v_3)/v_1]$

$\equiv (\neg p_2(v_2))\,[f_1(v_3)/v_1] \to (p_1(v_1, v_0))\,[f_1(v_3)/v_1]$

$\equiv \neg(p_2(v_2))\,[f_1(v_3)/v_1] \to (p_1(v_1, v_0))\,[f_1(v_3)/v_1]$

$\equiv \neg p_2((v_2)\,[f_1(v_3)/v_1]) \to p_1((v_1)\,[f_1(v_3)/v_1]\,, (v_0)\,[f_1(v_3)/v_1])$

$\equiv \neg p_2(v_2) \to p_1(f_1(v_3), v_0)$

c) $(\exists v_5 (p_1(v_5, v_1) \to \exists v_1\, p_2(v_1)))\,[v_0/v_1]$

$\equiv \exists v_5 (p_1(v_5, v_1) \to \exists v_1\, p_2(v_1))\,[v_0/v_1]$

$\equiv \exists v_5 ((p_1(v_5, v_1))\,[v_0/v_1] \to (\exists v_1\, p_2(v_1))\,[v_0/v_1])$

$\equiv \exists v_5 (p_1((v_5)\,[v_0/v_1]\,, (v_1)\,[v_0/v_1]) \to \exists v_1\, p_2(v_1))$

$\equiv \exists v_5 (p_1(v_5, v_0) \to \exists v_1\, p_2(v_1))$

事実 1.4.8

1. $(\sigma)\,[\tau/\mathbf{v}]$ は $\mathscr{L}$–項である．
2. $(\phi)\,[\tau/\mathbf{v}]$ は $\mathscr{L}$–論理式である．

記法 1.4.9

以降，誤解のない範囲で，$(\sigma)\,[\tau/\mathbf{v}]$ や $(\phi)\,[\tau/\mathbf{v}]$ を，$\sigma\,[\tau/\mathbf{v}]$ や $\phi\,[\tau/\mathbf{v}]$ と書くことがある．

メタ定義 1.4.10 （自由に代入可能）

τ が ϕ 中の $\mathbf{v}$ に**自由に代入可能**（freely substitutable），または ϕ 中の $\mathbf{v}$ が τ に対して**自由である**（free for）ことを，以下の条件によって定める．

(1) τ は α 中の $\mathbf{v}$ に自由に代入可能である．
(2) τ は $\neg\psi$ 中の $\mathbf{v}$ に自由に代入可能である $\Leftrightarrow$ τ は ψ 中の $\mathbf{v}$ に自由に代入可能である．
(3) τ は $\to \psi\chi$ 中の $\mathbf{v}$ に自由に代入可能である $\Leftrightarrow$ τ は ψ 中および χ 中の $\mathbf{v}$ に自由に代入可能である．
(4) τ は $\exists \mathbf{u}\, \psi$ 中の $\mathbf{v}$ に自由に代入可能である $\Leftrightarrow$ 以下のいずれかが成り立つ．

(4.1) $\mathbf{v}$ は $\exists \mathbf{u}\, \psi$ の自由変数ではない．
(4.2) τ は ψ 中の $\mathbf{v}$ に自由に代入可能で，かつ $\mathbf{u}$ は τ の中に現れない．

例 $\mathrm{ar}^{\mathscr{L}}_{f_1} \equiv \mathbf{2}$，$\mathrm{ar}^{\mathscr{L}}_{p_1} \equiv \mathbf{1}$ であるとする．

a) v_1 は $p_1(v_0)$ 中の v_0 に自由に代入可能である．
b) v_1 は $\exists v_1\, p_1(v_0)$ 中の v_0 に自由に代入可能ではない．
c) v_0 は $\exists v_0\, p_1(v_0)$ 中の v_0 に自由に代入可能である．
d) $f_1(v_0, v_1)$ は $p_1(v_0) \to \exists v_2\, p_1(v_0)$ 中の v_0 に自由に代入可能である．
e) $f_1(v_0, v_1)$ は $p_1(v_0) \to \exists v_1\, p_1(v_0)$ 中の v_0 に自由に代入可能ではない．
f) $f_1(c_1, c_2)$ は $p_1(v_0)$ 中の v_0 に自由に代入可能である．

事実 1.4.11

1. $\mathbf{v}$ は ϕ 中の $\mathbf{v}$ に自由に代入可能である.
2. $\mathbf{v}$ は ϕ の自由変数ではない $\Rightarrow$ τ は ϕ 中の $\mathbf{v}$ に自由に代入可能である.
3. τ の中にいかなる変数も現れない $\Rightarrow$ τ は ϕ 中の $\mathbf{v}$ に自由に代入可能である.
4. τ に現れるいかなる変数も ϕ の束縛変数ではない $\Rightarrow$ τ は ϕ 中の $\mathbf{v}$ に自由に代入可能である.

演習問題

§ 1.1

問 1. 以下の日本語の文が不合理な文であることを示し，この不合理がメタ言語・対象言語の区別によってどのように回避されるか述べよ．

a) この文は偽である．

b) 二十文字以内で定義できない最小の正の整数

問 2. 以下の問いに答えよ．

a) メタ定義 1.1.16の**例**が正しいことを示せ．

b) $||||$ はメタ自然数ではないことを示せ．

問 3. 以下がメタ言語内変数やメタ変数であるか否かを判定せよ．

a) $\mathbf{p}$　b) $\mathbf{3}$　c) $\bigcirc$　d) ϕ

e) $v_{\mathbf{1}}$　f) $\mathbf{z_2}$　g) $\gamma_{\boldsymbol{n}}$　h) $\boldsymbol{n}_\gamma$

i) $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{i}}$　j) $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{i}_1}$　k) $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{n}}$

§ 1.2

以降は，記法 1.2.7を適用する．

問 1. 以下の省略されたメタ記述を，注意 1.1.12を参考に，元の正確なメタ記述に書き直せ．

a) $\mathbf{p}$ は $\mathscr{L}$–述語記号である．

b) $\mathbf{uv}$ は変数ではない．

c) ($\mathbf{x}$: $\mathscr{L}$–述語記号または $\mathscr{L}$–関数記号)
$\mathrm{ar}^{\mathscr{L}}_{\mathbf{x}} \equiv \boldsymbol{n}$

d) $\mathbf{v}_{\boldsymbol{i}}$ は変数である．

問 2. 変数のメタ定義（メタ定義 1.2.1.2）を，注意 1.1.17と同様に，より正確に書き直せ．

問 3. $\mathrm{Np}^{\mathscr{L}} \equiv \mathbf{4}$，$\mathrm{Nf}^{\mathscr{L}} \equiv \mathbf{3}$，$\mathrm{Nc}^{\mathscr{L}} \equiv \mathbf{0}$ のとき，$\mathscr{L}$–非論理記号を全て列挙せよ．また，$\mathrm{ar}^{\mathscr{L}}_{p_{\boldsymbol{n}}} \equiv \boldsymbol{n} \dotplus \mathbf{1}$ としたとき，$\mathbf{2}$ 項述語記号を全て列挙せよ．

問 4. 約束 1.2.8をわざわざ断っておかねばならない理由を述べよ．

問 5. メタ定義 1.2.9の**例**が正しいことを確認せよ．

問 6. 以下が $\mathscr{L}$–記号であるか否かを判定せよ．もし $\mathscr{L}$–記号であれば，論理定項，変数，$\mathscr{L}$–述語記号，$\mathscr{L}$–関数記号，$\mathscr{L}$–定数記号のいずれであるかを判定せよ．

a) $*$　b) $\exists$　c) $\neg_{\mathbf{3}}$　d) $\mathbf{2}$

e) $f_{\mathbf{10001}}$　f) c　g) $p_{\bigcirc|||}$　h) $v_{\boldsymbol{i}\dotplus\mathbf{1}}$

§ 1.3

執筆中

§ 1.4

執筆中

第 2 章

証明

参考文献

[Gol05] Goldrei, Derek. *Propositional and Predicate Calculus: A Model of Argument*. Springer, 2005.

[Hin05] Hinman, Peter G. *Fundamentals of Mathematical Logic*. A K Peters, 2005.

[Mar90] Margaris, Angelo. *First Order Mathematical Logic*. Dover Publications, 1990.

[Men15] Mendelson, Elliott. *Introduction to Mathematical Logic*. 6th ed. CRC Press, 2015.

[Tou03] Tourlakis, George. *Lectures in Logic and Set Theory*. Vol. 1: *Mathematical Logic*. CRC Press, 2003.

[van13] van Dalen, Dirk. *Logic and Structure*. 5th ed. Springer, 2013.

索引

記号一覧

記号	説明	項目
$\boldsymbol{\mathit{a}}, \ldots, \boldsymbol{\mathit{z}}$	メタ言語内変数の表記	記法 1.1.8.1
$\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{z}, \alpha, \ldots, \omega$	メタ変数の表記	記法 1.1.8.2，記法 1.1.25.2
$(\mathbf{x}\colon \mathcal{P})$	「$\mathcal{P}$ ならば」	記法 1.1.10
$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	メタ言語における「$\mathcal{P}$ ならば $\mathcal{Q}$」	記法 1.1.11
$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$	メタ言語における「$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ かつ $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$」	記法 1.1.11
$\mathbf{x} \equiv \mathbf{y}$	対象記述 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は図形として等しい	記法 1.1.13.1
$\mathbf{x} \not\equiv \mathbf{y}$	$\mathbf{x} \equiv \mathbf{y}$ の否定	記法 1.1.13.1
$\mathcal{X} :\equiv \mathbf{x}$	記述 $\mathcal{X}$ は対象記述 $\mathbf{x}$ を表す	記法 1.1.13.2
$\bigcirc, \bigcirc\vert, \bigcirc\vert\vert, \ldots$	メタ自然数	メタ定義 1.1.16
$\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots$	数字	メタ定義 1.1.19
$\mathbf{m} \mathrel{\dot{\geq}} \mathbf{n}$	$\mathbf{m}$ は $\mathbf{n}$ 以上である	記法 1.1.23.1
$\mathbf{m} \mathrel{\dot{\leq}} \mathbf{n}$	$\mathbf{m}$ は $\mathbf{n}$ 以下である	記法 1.1.23.1
$\mathbf{m} \mathrel{\dot{>}} \mathbf{n}$	$\mathbf{m}$ は $\mathbf{n}$ より大きい	記法 1.1.23.2
$\mathbf{m} \mathrel{\dot{<}} \mathbf{n}$	$\mathbf{m}$ は $\mathbf{n}$ より小さい	記法 1.1.23.2
$\mathbf{m} \mathbin{\dot{+}} \mathbf{n}$	$\mathbf{m}$ と $\mathbf{n}$ の和	記法 1.1.23.3
$\mathbf{m} \mathbin{\dot{-}} \mathbf{n}$	$\mathbf{m}$ と $\mathbf{n}$ の非負差	記法 1.1.23.3
$\neg$	否定（…でない）	メタ定義 1.2.1.1
$\rightarrow$	含意（…ならば…）	メタ定義 1.2.1.1
$\forall$	全称量化子（任意の…に対して…）	メタ定義 1.2.1.1
$v_{\mathbf{0}}, v_{\mathbf{1}}, v_{\mathbf{2}}, \ldots$	変数	メタ定義 1.2.1.2
$\mathrm{Np}^{\mathscr{L}}, \mathrm{Nf}^{\mathscr{L}}, \mathrm{Nc}^{\mathscr{L}}$	述語記号／関数記号／定数記号の個数	メタ定義 1.2.2
$\mathscr{L}, \mathscr{L}', \mathscr{L}'', \ldots$	言語	記法 1.2.3
$p_{\mathbf{0}}, p_{\mathbf{1}}, p_{\mathbf{2}}, \ldots$	述語記号	メタ定義 1.2.4.1
$f_{\mathbf{0}}, f_{\mathbf{1}}, f_{\mathbf{2}}, \ldots$	関数記号	メタ定義 1.2.4.2
$c_{\mathbf{0}}, c_{\mathbf{1}}, c_{\mathbf{2}}, \ldots$	定数記号	メタ定義 1.2.4.3
ar	項数を与える規則	メタ定義 1.2.5.1
$\mathrm{ar}_{\mathbf{x}}$	$\mathbf{x}$ の項数	メタ定義 1.2.5.1
$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$	変数を表すメタ変数	記法 1.2.7
$\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$	述語記号を表すメタ変数	記法 1.2.7
$\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$	関数記号を表すメタ変数	記法 1.2.7
$\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}$	定数記号を表すメタ変数	記法 1.2.7
σ, τ	項を表すメタ変数	記法 1.3.11
α, β	原子論理式を表すメタ変数	記法 1.3.11
ϕ, ψ, χ	論理式を表すメタ変数	記法 1.3.11