Ներածություն

Հերմիթյան ինտերպոլյացիա

Նախքան անդրադառնալը բազմաչափ ինտերպոլյացիայի խնդրին, քննարկենք մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի ինտերպոլյացիայի որոշ դետալներ:

Ենթադրենք տրված են $f : \Omega \mapsto \Theta, \Omega, \Theta \subset \mathbb{R}$ ֆունկցիան, $\{x_i\}_{i=0}^{N}$ կետերը և դրանց համապատասխան $\{y_i = f(x_i)\}_{i=0}^{N}$ արժեքները: Յուրաքանչյուր $[x_i, x_{i+1}]$ հատվածում ինտերպոլացնող ֆունկցիան իրենից ներկայացնում է գծային ֆունկցիա, որը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$p_1^{(i)}(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} y_i + \frac{x - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1}, i = \overline{0, N-1}$$

Այսպիսով $[x_0, x_N]$ հատվածում կտոր առ կտոր մոտարկող ֆունկցիան տրվում է հետևյալ կերպ.

$$p_1(x) = \sum_{i=0}^{N} \varphi_i(x) y_i$$

Որտեղ

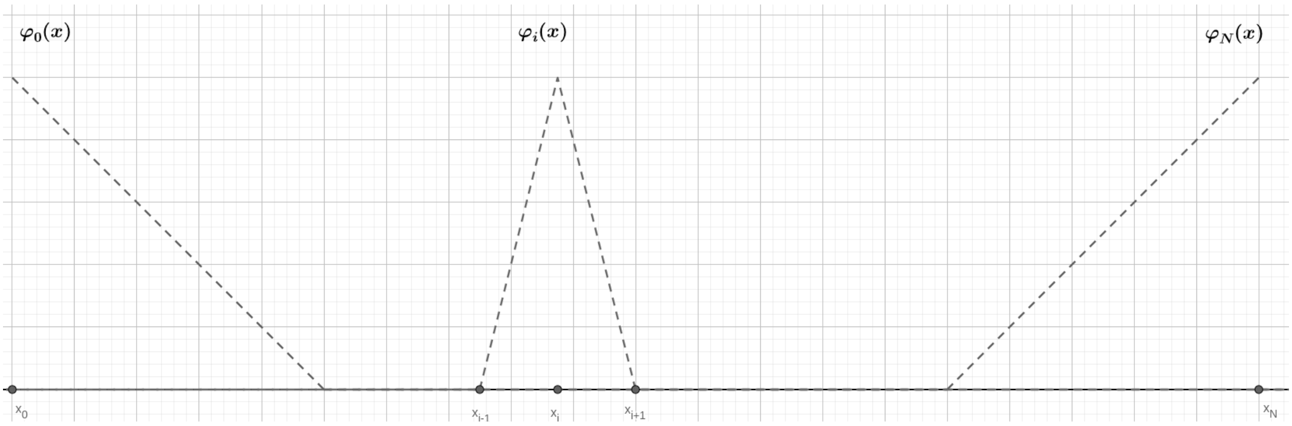
$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, x \in [x_0, x_1] \\ 0, x \in [x_1, x_N] \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, x \in [x_0, x_{i-1}] \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, x \in [x_{i+1}, x_N] \end{cases}$$

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} 0, x \in [x_0, x_{N-1}] \\ \dfrac{x - x_{N-1}}{x_N - x_{N-1}}, x \in [x_{N-1}, x_N] \end{cases}$$

$\varphi_i(x)$ ֆունկցիաները կոչվում են բազիսային ֆունկցիաներ, որոնք ունեն այսպես կոչված լոկալ կրողներ, քանի որ դրանք ոչ զրոյական են որևէ տիրույթում և զրոյական որոշման տիրույթի մնացած մասերում: Նմանատիպ բազիսային ֆունկցիաների հիմնական հատկությունն այն է, որ դրանք հավասար են մեկի որևէ կոնկրետ հանգույցում և հավասար են զրոյի մնացած բոլոր հանգույցներում: Նշենք սակայն, որ այս տիպի ինտերպոլյացիան C^0 դասի է, այսինքն միայն անընդհատ է, և հետևաբար կիրառելի չէ այն խնդիրներում, որտեղ պահանջվում է ավելի բարձր կարգի ողորկություն:

Ստորև տրված է բազիսային ֆունկցիաների սխեմատիկ ներկայացում.



Նկար 1

Այժմ դիտարկենք հետևյալ խնդիրը. Անհրաժեշտ է կառուցել կտոր առ կտեր մոտարկող ֆունկցիա, որը ֆունկցիայի արժեքի հետ մեկտեղ կհամընկնի նաև ֆունկցիայի առաջին կարգի ածանցյալի հետ ինտերպոլյացիոն կետերում: Այսինքն.

$$\frac{d^j}{dx^j}f(x_i) = \frac{d^j}{dx^j}p_3(x_i),\ j=0,1;\ i=\overline{0,N-1}$$

Յուրաքանչյուր $[x_i, x_{i+1}]$ հատվածում ինտերպոլյացիոն ֆունկցիան իրենից ներկայացնում է խորանարդային ֆունկցիա, որը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով:

$$p_3^{(i)} = \alpha_i(x)f(x_i) + \beta_{i+1}(x)f(x_{i+1}) + \gamma_i(x)f^{'}(x_i) + \delta_{i+1}(x)f^{'}(x_{i+1})$$

որտեղ

$$\alpha_i(x) = \frac{(x_{i+1}-x)^2\left[(x_{i+1}-x_i)+2\,(x-x_i)\right]}{(x_{i+1}-x_i)^3}, \beta_{i+1}(x) = \frac{(x-x_i)^2\left[(x_{i+1}-x_i)+2\,(x_{i+1}-x)\right]}{(x_{i+1}-x_i)^3}$$

$$\gamma_i(x) = \frac{(x-x_i)\,(x_{i+1}-x)^2}{(x_{i+1}-x_i)^2}, \delta_{i+1}(x) = \frac{(x-x_i)^2\,(x-x_{i+1})}{(x_{i+1}-x_i)^2}$$

Այսպիսով $[x_0, x_N]$ հատվածում կտոր առ կտոր մոտարկող ֆունկցիան տրվում է հետևյալ կերպ.

$$p_3(x) = \sum_{i=0}^{N}\left[\varphi_i^{(0)}f(x_i) + \varphi_i^{(1)}f^{'}(x_i)\right]$$

որտեղ

$$\varphi_0^{(0)}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x_1-x)^2\left[(x_1-x_0)+2\,(x-x_0)\right]}{(x_1-x_0)^3}, x\in[x_0,x_1] \\ 0, x\in[x_1,x_N] \end{cases}$$

$$\varphi_i^{(0)}(x) = \begin{cases} 0, x\in[x_0,x_{i-1}] \\ \dfrac{(x-x_{i-1})^2\left[(x_i-x_{i-1})+2\,(x_i-x)\right]}{(x_i-x_{i-1})^3}, x\in[x_{i-1},x_i] \\ \dfrac{(x_{i+1}-x)^2\left[(x_{i+1}-x_i)+2\,(x-x_i)\right]}{(x_{i+1}-x_i)^3}, x\in[x_i,x_{i+1}] \\ 0, x\in[x_{i+1},x_N] \end{cases}$$

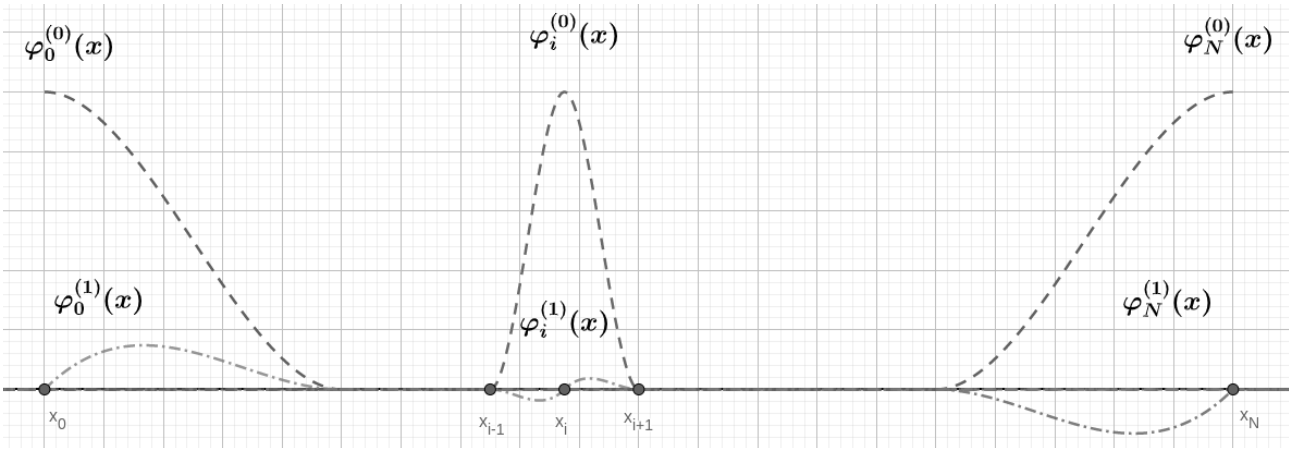
$$\varphi_N^{(0)}(x) = \begin{cases} 0, x\in[x_0,x_{N-1}] \\ \dfrac{(x-x_{N-1})^2\left[(x_N-x_{N-1})+2\,(x_N-x)\right]}{(x_N-x_{N-1})^3}, x\in[x_{N-1},x_N] \end{cases}$$

$$\varphi_0^{(1)}(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-x_0)(x_1-x)^2}{(x_1-x_0)^2}, x\in[x_0,x_1]\\ 0, x\in[x_1,x_N]\end{cases}$$

$$\varphi_i^{(1)}(x)=\begin{cases}0, x\in[x_0,x_{i-1}]\\ \dfrac{(x-x_{i-1})^2(x-x_i)}{(x_i-x_{i-1})^2}, x\in[x_{i-1},x_i]\\ \dfrac{(x-x_i)(x_{i+1}-x)^2}{(x_{i+1}-x_i)^2}, x\in[x_i,x_{i+1}]\\ 0, x\in[x_{i+1},x_N]\end{cases}$$

$$\varphi_N^{(1)}(x)=\begin{cases}0, x\in[x_0,x_{N-1}]\\ \dfrac{(x-x_{N-1})^2(x-x_N)}{(x_N-x_{N-1})^2}, x\in[x_{N-1},x_N]\end{cases}$$

Ստորև տրված է բազիսային ֆունկցիաների սխեմատիկ ներկայացում.



Նկար 2

Այսպիսով ստացանք C^1 ինտերպոլյացիա:

Ընդհանուր դեպքում հերմիթյան ինտերպոլյացիայի պայմանը կարելի է գրել հետևյալ կերպ.

$$\frac{d^k}{dx^k}f(x_i)=\frac{d^k}{dx^k}p_{2m-1}(x_i),\ i=\overline{0,N},\ k=\overline{0,m-1}$$

Քառակուսային և խորանարդային ինտերպոլյացիա

Խնդիրներում, որտեղ անհրաժեշտ է որոշել միայն տրված ֆունկիցիան, ֆունկցիայի ածանցյալներն ինտերպոլացնելու փոխարեն դրվում է դրանց անընդհատության պայման բազիսային ֆուկցիաների միացման կետերում, բավականին հեշտացնելով դրված խնդիրը և դրա լուծումը: Սակայն այս դեպքում բազիսային ֆունկցիաները չեն հանդիսանում լոկալ կրողներ, ուստի կիրառական տեսանկյունից հարմար չեն:

Նման տիպի ինտերպոլյացիայի կառուցման պարզագույն օրինակը հետևյալն է. Յուրաքանչյուր $[x_i, x_{i+1}]$ ինտերվալում կառուցենք այպիսի պարաբոլ, որ բոլոր x_i հանգուցային կետերում առանջին կարգի ածանցյալները լինեն անընդհատ:

$$S_2^{(i)}(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + c_i (x - x_i)(x - x_{i+1})$$

Ածանցյալների անընդհատության պայմանից կհետևի, որ

$$c_i + c_{i-1} = \frac{1}{h^2}\left(f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})\right) \;\; i = \overline{1, N-1}$$

Քանի որ համակարգը պարունակում է $N-1$ հավասարում, ապա մնում է մեկ ազատ գործակից, որը կարելի գտնել, որևէ x_j հանգուցային կետում որոշելով $S_2^{(j)''}$-ն:

Առավել կիրառելի են խորանարդային սփլայնները: Այս դեպքում յուրաքանչյուր $[x_i, x_{i+1}]$ ինտերվալում կառուցվում են երրորդ աստիճանի բազմանդամներ այնպիսին, որ դրանց միացման կետերում (հանգույցներում) առաջին և երկրորդ կարգի ածանցյալները լինեն անընդհատ:

Բազմանդամը դիտարկելու փոխարեն դիտարկենք նրա երկրորդ կարգի ածանցյալը: Այն գծային ֆունկցիա է, հետևաբար այն կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$S_3^{(i)''}(x) = c_i\frac{x_{i+1} - x}{x - x_i} + c_{i+1}\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

որտեղ c_i և c_{i+1}-ը x_i և x_{i+1} կետերում երկրորդ կարգի ածանցյալների արժեններն են: Հաշվի առնելով նաև հետևյալ պայմանները.

$$\begin{cases} S_3^{(i)}(x_i) &= f_i \\ S_3^{(i)}(x_{i+1}) &= f_{i+1} \\ S_3^{(i-1)'}(x_i) &= S_3^{(i)'}(x_i) \end{cases}$$

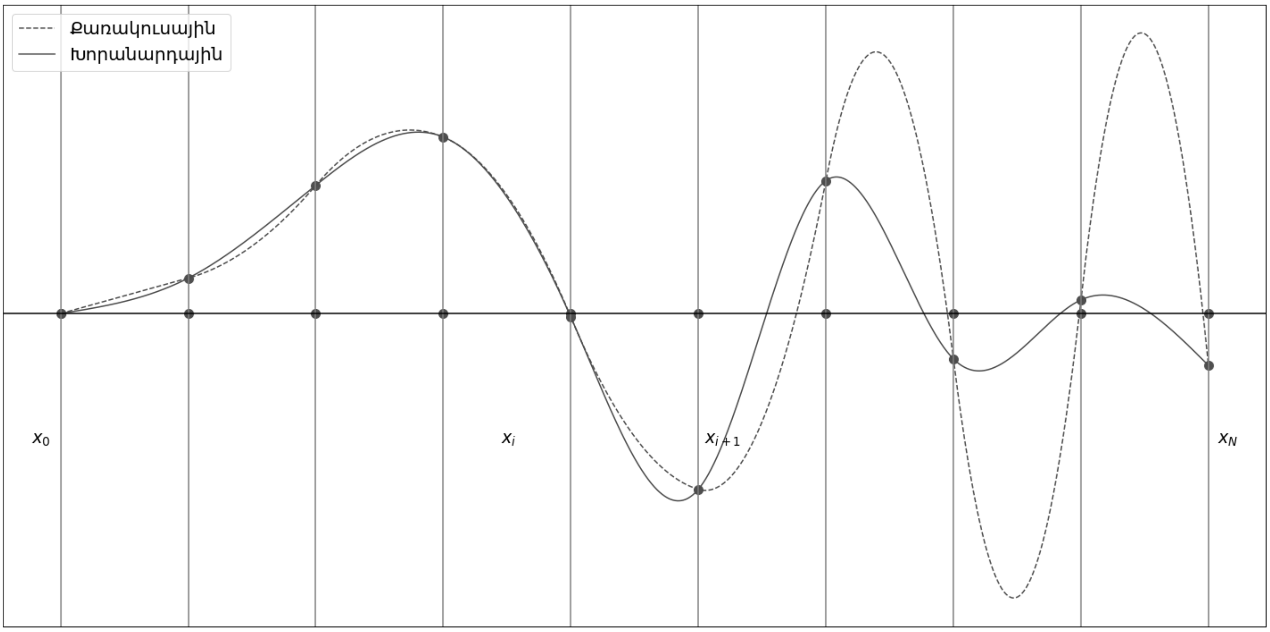
կստանանք հետևյալ տեսքի խորանարդային սփլայն.

$$S_3^{(i)}(x) = \frac{c_i}{6h}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{c_{i+1}}{6h}(x - x_i)^3 + \left(\frac{f_i}{h} - \frac{hc_i}{6}\right)(x_{i+1} - x) + \left(\frac{f_{i+1}}{h} - \frac{hc_{i+1}}{6}\right)(x - x_i)$$

c_i գործակիցները բավարարում են հետևյալ պայմաններին.

$$c_{i+1} + 4c_i + c_{i-1} = \frac{6}{h^2}\left(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}\right)$$

Ստորև ներկայացվում է քառակուսային և խորանարդային ինտերպոլյացիայի օրինակ



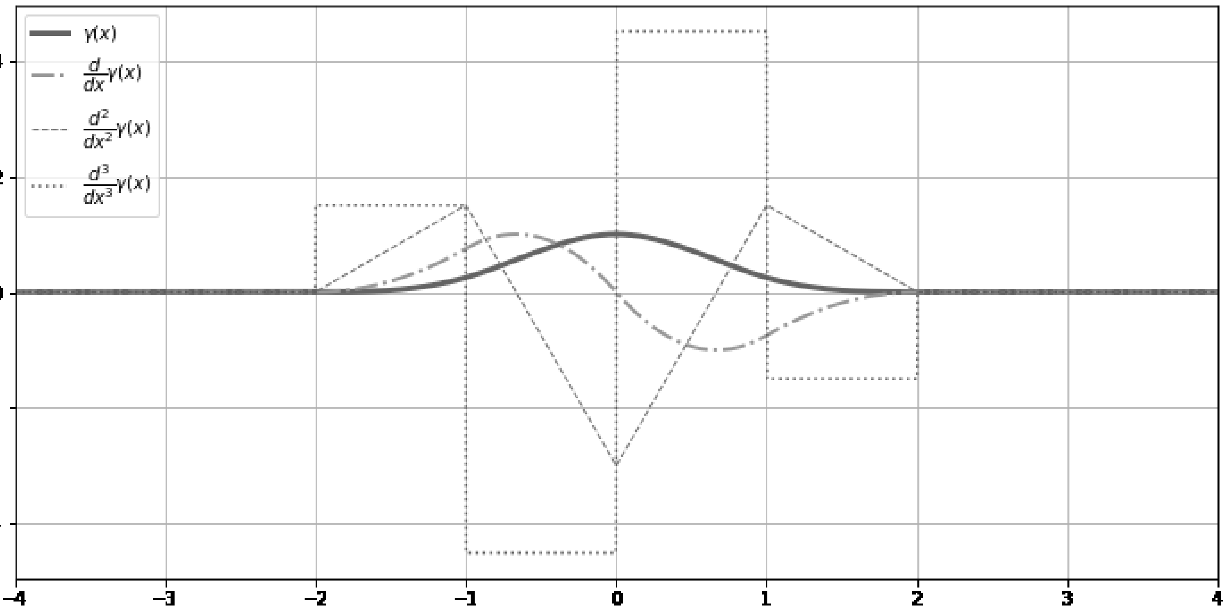
Նկար N

Այժմ դիտարկենք լոկալ կրող ունեցող խորանարդային սփլայները: Այդպիսի սփլայ առաջարկել է ավստրացի մաթեմատիկոս Առնոլդ Շնեբերգը:

Դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան.

$$\gamma(x) = \frac{1}{4}\left[(x+2)_+^3 - 4\,(x+1)_+^3 + (x)_+^3 - 4\,(x-1)_+^3 + (x-2)_+^3\right]$$

Ստորև ներկայացվում է γ ֆունկցիան և նրա մինչև երրորդ կարգի ածանցյալները.



Նկար 3

Ենթադրենք տրված է $[x_0, x_N]$ ինտերվալը, և տրոհված է N հավասար մասերի h քայլով: Յուրաքանչյուր հանգուցային կետի $(i = 2, \dots N-2)$ համար բազիսային ֆունկցիան տրվում է հետևյալ բանաձևով.

$$B_i\left(\frac{x}{h}\right) = \gamma\left(\frac{x - x_0}{h} - i\right)$$

Այս ֆունկցիաները և նրանց մինչև երկրորդ կարգի ածանցյալները հավասար են զրոյի $\mathbb{R}\setminus[x_{i-2}, x_{i+2}]$ տիրույթում:

Մնացած բազիսային ֆունկիաները պետք է կառուցել այլ կերպ, քանի որ դրանց մի մասը դուրս է ընկած $[x_0, x_N]$ ինտերվալից:

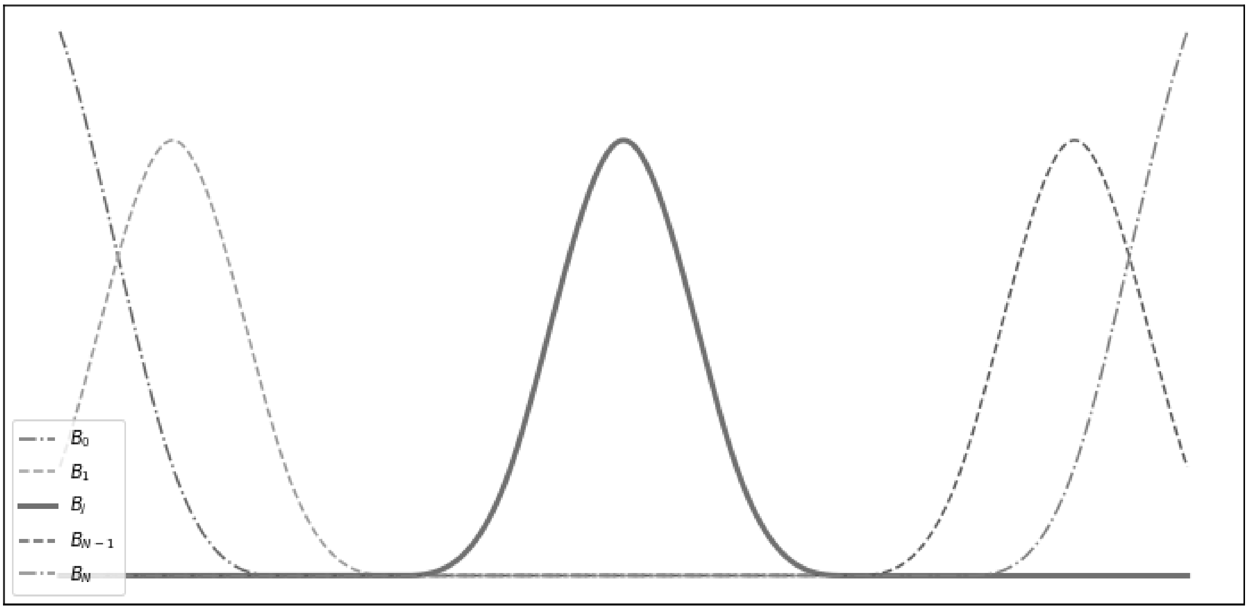
$$B_0\left(\frac{x}{h}\right) = \gamma\left(\frac{x}{h}\right) + \left(\frac{h-x}{4h}\right)_+^3,\ x \in [x_0, x_2]$$

$$B_1\left(\frac{x}{h}\right) = \gamma\left(\frac{x}{h}\right),\ x \in [x_0, x_3]$$

$$B_{N-1}\left(\frac{x}{h}\right) = \gamma\left(\frac{x}{h}\right),\ x \in [x_{N-3}, x_N]$$

$$B_N\left(\frac{x}{h}\right) = \gamma\left(\frac{x}{h}\right) + \left(\frac{x-(N-1)h}{4h}\right)_+^3, \ x \in [x_{N-2}, x_N]$$

Ստորև ներկայացվում է B_j բազիսների գծագիրը.



Նկար 3

Տրված $\{f_j\}$ ինտերպոլյացիոն տվյալնեով կառուցենք սփլայն.

$$F(x) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i B_i\left(\frac{x}{h}\right)$$

Հաշվի առնելով ինտերպոլյացիոն պայմանները.

$$F(x_i) = f_i$$

կստանանք հետևյալ հավասարումերի համակարգը.

$$\begin{cases} \frac{9}{4}\alpha_0 + \frac{1}{4}\alpha_0 & = f_0 \\ \frac{1}{4}\alpha_{j-1} + \alpha_j + \frac{1}{4}\alpha_{j+1} & = f_j \\ \frac{9}{4}\alpha_{N-1} + \frac{1}{4}\alpha_N & = f_N \end{cases}$$

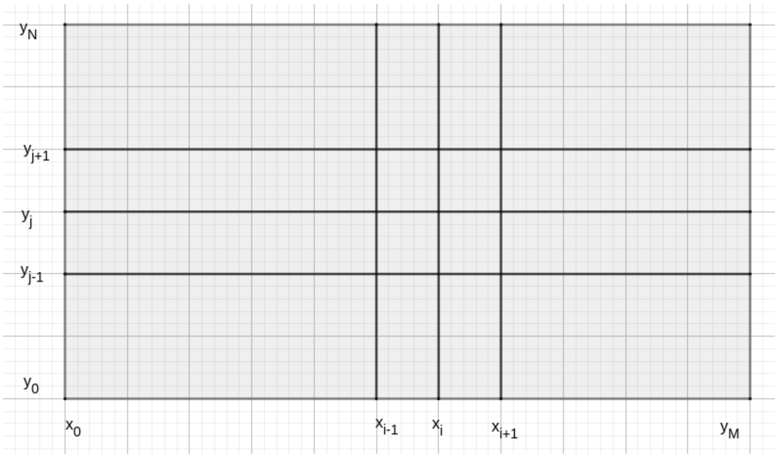
Երկչափ մոտարկում

Այժմ դիտարկենք երկու փոփոխականի կտոր առ կտոր անընդհատ մոտարկման խնդիրը ∂R եզրով սահմանափակ R տիրույթում: Տիրույթը տրոհվում է որոշակի թվով էլեմենտների: Կախված R տիրույթից, առանձնացվում են հետևյալ մոտակման ձևերը.

Ուղղանկյուն տիրույթ

Դիցուք տրված են $f : \Omega \mapsto \Theta$, $\Theta \subset \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = [x_0, x_M] \times [y_0, y_N]$, ուղղանկյուն տիրույթը, որը տրոհված է $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, ուղղանկյուն էլեմենտների:

$$x_{i+1} - x_i = h_1,\ y_{j+1} - y_j = h_2,\ i = \overline{0, M-1}, j = \overline{0, N-1}$$



Նկար 3

$C^{(0,0)}$ մոտարկում

Յուրաքանչյուր $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ էլեմենտի վրա f ֆունկցիան մոտարկվում հետևյալ քառակուսային ֆունկցիայով:

$$p_1^{(i,j)}(x,y) = \alpha_{i,j}(x,y) f(x_i, y_j) + \beta_{i+1,j}(x,y) f(x_{i+1}, y_j)\, \gamma_{i,j+1}(x,y) f(x_i, y_{j+1}) + \delta_{i+1,j+1}(x,y) f(x_{i+1}, y_{j+1})$$

որտեղ

$$\alpha_{i,j}(x,y) = \frac{1}{h_1 h_2} (x_{i+1} - x)(y_{j+1} - y)$$

$$\beta_{i+1,j}(x,y) = \frac{1}{h_1 h_2} (x - x_i)(y_{j+1} - y)$$

$$\gamma_{i,j+1}(x,y) = \frac{1}{h_1 h_2} (x_{i+1} - x)(y - y_j)$$

$$\delta_{i+,j+1}(x,y)=\frac{1}{h_1h_2}\left(x-x_i\right)\left(y-y_j\right)$$

Այսպիսով $[x_0,x_M]\times[y_0,y_M]$ տիրույթում կտոր առ կտոր մոտարկող ֆունկցիան տրվում է հետևյալ կերպ.

$$p_1(x,y)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\varphi_{i,j}(x,y)f(x_i,y_j)$$

որտեղ

$$\varphi_{i,j}\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{1}{h_1h_2}\left(x-x_{i-1}\right)\left(y-y_{j-1}\right),(x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\\ \frac{1}{h_1h_2}\left(x-x_{i-1}\right)\left(y_{j+1}-y\right),(x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_j,y_{j+1}]\\ \frac{1}{h_1h_2}\left(x_{i+1}-x\right)\left(y-y_{j-1}\right),(x,y)\in[x_i,x_{i+1}]\times[y_{j-1},y_j]\\ \frac{1}{h_1h_2}\left(x_{i+1}-x\right)\left(y_{j+1}-y\right),(x,y)\in[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]\\ 0,otherwise\end{cases}$$

Վերը դիտարկված մոտարկումը հանդիսանում է երկչափ Հերմիթյան մոտարկման մասնավոր դեպք:

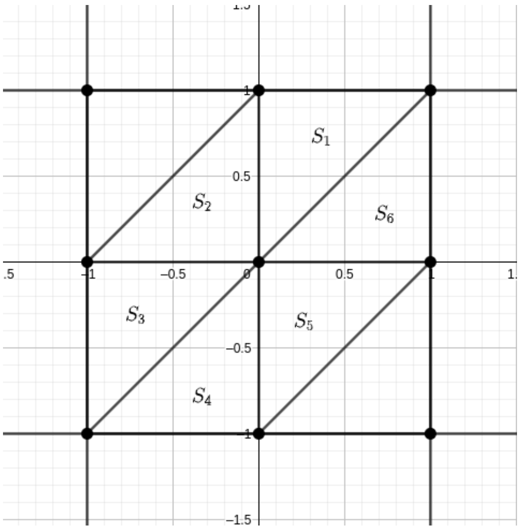
Ընդհանուր դեպքում, տրված $k\in\mathbb{N}$ թվի և տրված ուղղանկյուն տիրույթի ցանկացած ուղղանկյունաձև տրոհման էլեմենտում կարելի է կառուցել $C^{k-1,k-1}$ կարգի մոտարկող բազմանդամ, որը $2k-1$ -րդ կարգի բազմանդամ է ըստ իր յուրաքանչյուր փոփոխականի և, ինտերպոլյացիայի պայմանները կարելի է գրել հետևյալ կերպ.

$$\frac{d^{p+q}}{dx^pdy^q}f(x_i,y_j)=\frac{d^{p+q}}{dx^pdy^q}p_{2k-1}(x_i,y_j)$$
$$p,q=\overline{0,k-1};\ i=\overline{0,M};\ j=\overline{0,N}$$

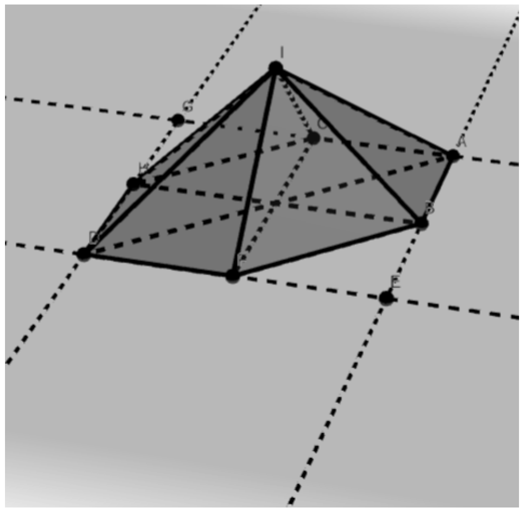
Այժմ դիտարկենք ուղղանկյուն տիրույթի տրոհման և բազիսային ֆունկցիաների կառուցման այլ տարբերակ: Այս դեպքում տիրույթը տրոհենք ըստ նախորդ տարբերակի, ի հավելումն յուրաքանչյուր ուղղանկյուն էլեմենտ տրոհելով երկու ուղղանկյուն եռանկյունների.

Դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան.

$$\varphi\left(x,y\right)=\begin{cases}1-y, & (x,y)\in S_1\\ 1+x-y, & (x,y)\in S_2\\ 1+x, & (x,y)\in S_3\\ 1+y, & (x,y)\in S_4\\ 1-x+y, & (x,y)\in S_5\\ 1-x, & (x,y)\in S_6\\ 0, otherwise & \end{cases}$$



Նկար 4



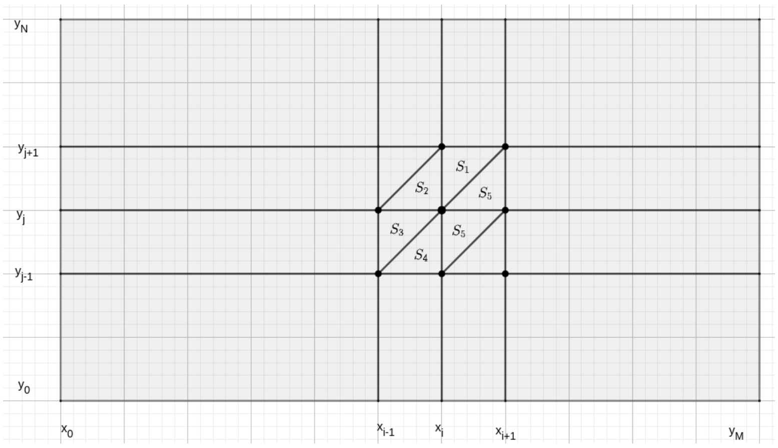
Նկար 5

Պարզ է, որ այն յուրաքանչյուր ուղղանկյուն էլեմենտում $C^{(0,0)}$ ֆունկցիա է:
Այժմ յուրաքանչյուր x_i, y_j կետի վրա կառուցենք հետևյալ ֆունկցիան.

$$\varphi_{i,j}(x,y)=\varphi\left(\frac{x-x_i}{h_1},\frac{y-y_j}{h_2}\right)$$

Այդ դեպքում f ֆունկցիայի մոտարկման բանաձևը կտվրի հետևյալ կերպ:

$$p_1(x,y) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}\varphi_{i,j}(x,y)f(x_i,y_j)$$



Նկար 5

$C^{(2,2)}$ **մոտարկում**

Մեկ փոփոխականի մոտարկան խնդրը դիտարկելից քննարկեցինք Շներբերգի կողմից առաջարկված խորանարդային բազիսային սփլայնները: Այս սփլայնները կարող ենք օգտագործել երկչափ մոտարկման համար: Յուրաքանչյուր (x_i, y_j) հանգույցի վրա կառուցենք բազիսային ֆունկցիա կազմելով $B_i\left(\frac{x}{h_1}\right)$ և $B_j\left(\frac{x}{h_2}\right)$ ֆունկցիաների թենզորական արտադրյալը:

$$\varphi^{ij}(x,y) = B_i\left(\frac{x}{h_1}\right) B_j\left(\frac{x}{h_2}\right)$$

Տրված $\{f_{ij}\}$ ինտերպոլյացիոն տվյալնեով կառուցենք սփլայն.

$$F(x,y) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_{ij}\varphi^{ji}(x,y)$$

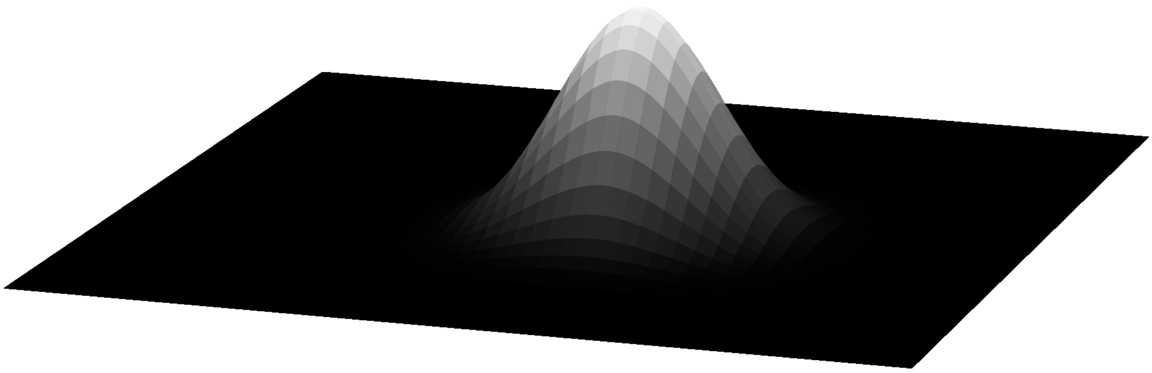
Հաշվի առնելով ինտերպոլյացիոն պայմանները.

$$F(x_{ij}) = f_{ij}$$

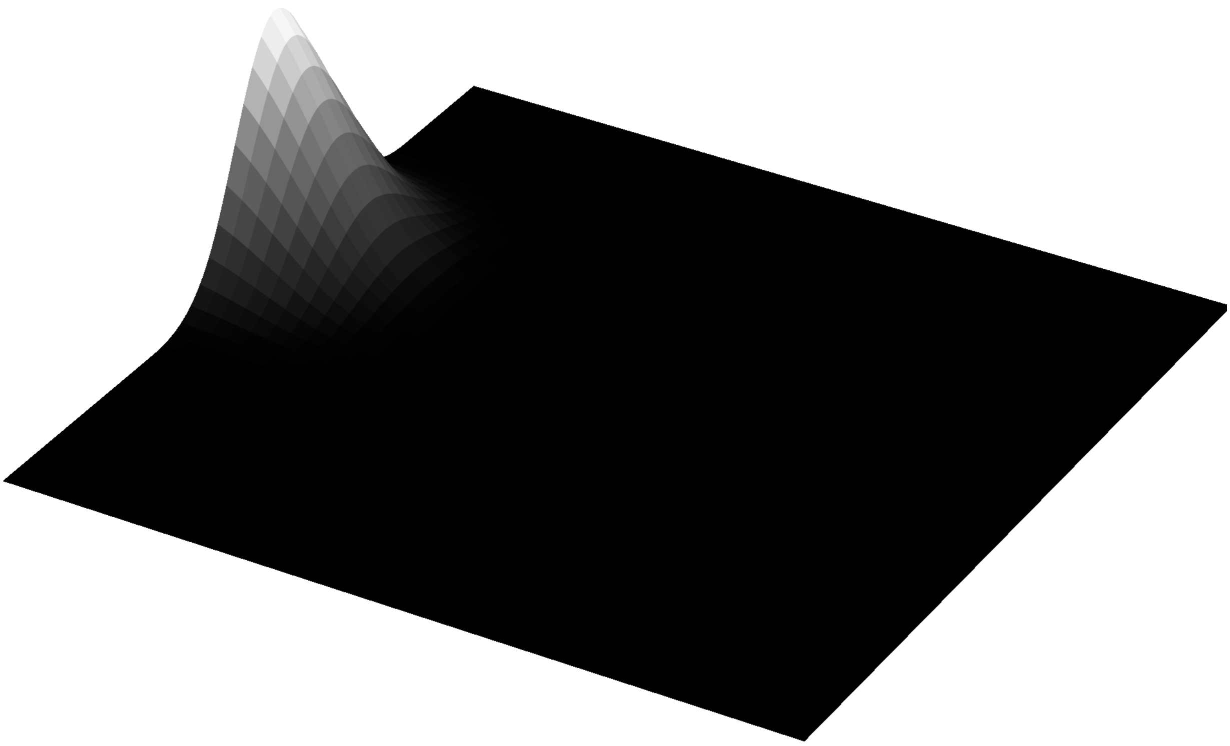
կստանանք հետևյալ հավասարումերի համակարգը.

$$\begin{cases}
\alpha_{00} + \frac{5}{16}(\alpha_{01} + \alpha_{10}) + \frac{1}{16}\alpha_{11} & = f_{00} \\
\alpha_{M0} + \frac{5}{16}(\alpha_{M1} + \alpha_{M-1,0}) + \frac{1}{16}\alpha_{M-1,1} & = f_{M0} \\
\alpha_{0N} + \frac{5}{16}(\alpha_{1N} + \alpha_{0,N-1}) + \frac{1}{16}\alpha_{N-1,1} & = f_{0N} \\
\alpha_{MN} + \frac{5}{16}(\alpha_{M-1,N} + \alpha_{M,N-1}) + \frac{1}{16}\alpha_{M-1,N-1} & = f_{MN} \\
\frac{5}{4}\alpha_{i,1} + \frac{5}{16}(\alpha_{i-1,0} + \alpha_{i+1,0}) + \frac{1}{4}\alpha_{i,1} + \frac{1}{16}(\alpha_{i-1,1} + \alpha_{i+1,1}) & = f_{i0} \\
\frac{5}{4}\alpha_{i,N-1} + \frac{5}{16}(\alpha_{i-1,N} + \alpha_{i+1,N}) + \frac{1}{4}\alpha_{i,N-1} + \frac{1}{16}(\alpha_{i-1,N-1} + \alpha_{i+1,N-1}) & = f_{iN} \\
\frac{5}{4}\alpha_{1,j} + \frac{5}{16}(\alpha_{0,j-1} + \alpha_{0,j+1}) + \frac{1}{4}\alpha_{1,j} + \frac{1}{16}(\alpha_{1,j-1} + \alpha_{1,j+1}) & = f_{0j} \\
\frac{5}{4}\alpha_{M-1,j} + \frac{5}{16}(\alpha_{M,j-1} + \alpha_{M,j+1}) + \frac{1}{4}\alpha_{M-1,j} + \frac{1}{16}(\alpha_{M-1,j-1} + \alpha_{M-1,j+1}) & = f_{Mj} \\
\alpha_{ij} + \frac{1}{4}(\alpha_{i,j-1} + \alpha_{i,j+1} + \alpha_{i-1,j} + \alpha_{i+1,j}) + \frac{1}{16}(\alpha_{i-1,j-1} + \alpha_{i-1,j+1} + \alpha_{i+1,j-1} + \alpha_{i+1,j+1}) & = f_{ij}
\end{cases}$$

Ստորև ներկայացվում է φ^{ij} բազիսային ֆունկցիաների գծագիրը.



Նկար 5



Նկար 5

Բազմանկյուն տիրույթ

Բազմանկյուն տիրույթ ասելով կիասկանանք կամ հենց բազմանկյունաձև տիրույթը, կամ դրա՝ բազմանկյունով մոտարկումը:

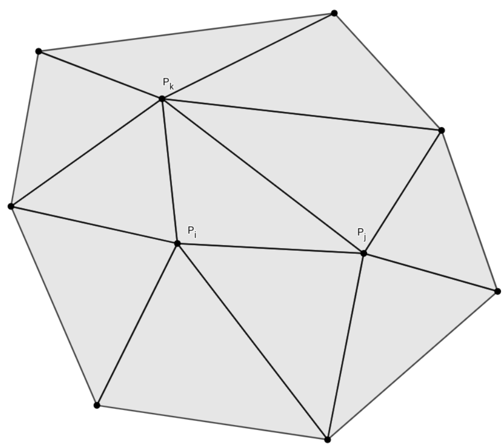
Դիցուք տրված են $f : \Omega \mapsto \Theta, \Theta \subset \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$ բազմանկյուն տիրույթը, որը կամայական ձևով տրոհված է եռանկյուն էլեմենտների: Յուրաքանչյուր այդպիսի P_1, P_2, P_3 գագաթներով եռանկյան համար դիտարկենք հետևյալ մոտարկող ֆունկցիան.

$$p_1(x,y) = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{3} p_i^{(1)}(x,y)f(x_i,y_i)$$

$$S = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$p_i^{(1)}(x,y) = x_j y_k - x_k y_j + x(y_j - y_k) - y(x_j - x_k)$$

որտեղ $(x_i, y_i),\ i = 1, 2, 3$ տրված եռանկյուն էլեմենտի գագաթներն են (հերթականությունը ժամսլաքին հակառակ ուղղությամբ):



Նկար 6

Բնական է, որ որևէ կետի նկատմամբ լրիվ բազիսային ֆունկցիայի կառուցելու համար անհրաժեշտ է իրար գումարել այն բոլոր եռանկյուն էլեմենտների՝ այդ կետին համապատասխան ֆունկցիաները, որոնց համար տվյալ կետը գագաթ է: Հետևաբար, ընդհանուր դեպքում վերը նշված մոտարկան եղանակը հաշվողական տեսակետից հարմար չէ:

Վարիացիոն մեթոդ

Վարիացիոն մեթոդները հանդիպում են բազմաթիվ ֆիզիկական և այլ խնդիրնորում, և այդ խնդիրների մոտավոր լուծումը հիմնված է համապատասխան վարիացիոն մեթոդների վրա:

Սահմանումներ

$f : \Omega \mapsto \Theta,\ \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ \Theta \subset \mathbb{R}$ ֆունկցիայի ϵ շրջակայք ասելով կիասկանանք այն բոլոր g ֆունկցիաների բազմությունը, որոնց համար տեղի ունի

$$|f - g| < \epsilon$$

պայմանը:

Խնդրի դրվածքը

Վարիացիոն մեթոդի սկզբունքն այն է, որ դիտարկվող ֆունկցիայի ինտեգրալը տրված տիրույթում ընդունում է մեծագույն (փոքրագույն) արժեք տվյալ համակարգի իրական վիճակի համար, համեմատած բոլոր հնարավոր վիճակների բազմության հետ: Ենթաինտեգրալային ֆունկցիան կախված է տրված կոորդինատներից, ֆունկցիայի արժեքից, նրա ածանցյալներից, իսկ ինտեգրումը կատարվում է տրված կոորդինատական համակարգում, որը կարող է ներառել նաև ժամանակը: Մինիմումի որոշման խնդիրը հաճախ բերվում է մի քանի դիֆերենցիալ հավասարումների, համապատասխան եզրային պայմաններով:
Այն հանդիսանում է իրական փոփոխականի ֆունկցիայի էքստրեմումի որոնման խնդրի ընդհանրացում, որտեղ տվյալ ֆունկցիայի համար կոմպակտ տիրույթում անհրաժեշտ է գտնել այլպիսի կետեր, որոնք հանդիսանում են մինիմում (մաքսիմում) այդ տիրույթի որևէ շրջակայքում:

Վարիացիոն մեթոդում ինտեգրալը հանդիսանում է ֆունկցիոնալ, որը կախված է ֆուկցիայից, որի որոշման տիրույթը հանդիսանում է թույլատրելի ֆունկցիաների տարածությունն է:

Այս մեթոդի հիմնական դժվարությունը կայանում է նրանում, որ խնդիրները, որոնք կարող են ձևակերպվել որպես վարիացիոն, հնարավոր է, որ լուծում չունենան այն պատճառով, որ ֆունկցիոնալ տարածությունները կոմպակտ չեն:

Սակայն վարիացիոն մեթոդի հիմնական առավելությունն այն է, որ դրա կիրառման համար դրվող պահանջները ավելի թույլ են, որը թույլ է տալիս միայն անընդհատ ֆունկցիաներով կառուցել մոտավոր լուծում, առանց ածանցյալների անընդհատության պայմանի:

Օրինակներ

Որպես օրինակ դիտարկենք հետևյալ կրկնակի ինտեգրալը.

$$I(f) = \iint\limits_{\Omega} F(x, y, f, f_x, f_y)\, dxdy$$

որտեղ $f \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ և որի արժեքները որոշված են $\partial\Omega$ ում: Այս դեպքում մինիմումի անհրաժեշտ է, որ $f(x, y)$ ֆունկցիան բավարարի Էյլեր-Լագրանժի հավասարմանը, հավելելով համապատասխան եզրային պայմանները:

$$\frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} - F_u = 0$$

Օրինակ, $F = \frac{1}{2}\left(u_x^2 + u_y^2\right)$ դեպքում խնդիրը բերվում է Լապլասի հավասարմանը.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Այժմ պարզ է, որ երկրորդ կարգի ածանցյալների անընդհատությունը անհրաժեշտ է Էյլեր-Լագրանժի հավասարման գոյության համար: Բայց վարիացիոն մեթոդը պահանջում է միայն f ի անընդհատություն և առաջին կարգի մասնակի ածանցյալների կտոր առ կտոր անընդհատություն:

Ստացիոնար խնդիրներ

Դիֆերենցիալ հավասարումը, որը կապված է վարիավիոն խնդրի հետ, կոչվում է Էյլեր-Լագրանժի հավասարում: Այս հանդիսանում է միայն անհրաժեշտ պայման, որին պետք է բավարարի ֆունկցիան, որը մինիմիզացնում (մաքսիմիզացնում) է ֆունկցիոնալը: Դիտարկենք հետևյալ օրինակները.

1. Մեկ փոփոխականի ֆունկցիա.

$$f \in \Omega \mapsto \Theta,\ \Omega, \Theta \subset \mathbb{R}$$

Այս դեպքում ֆունկցիոնալն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$I(f) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F\left(x, f, f'\right) dx$$

որտեղ $f(x_0)$ և $f(x_1)$, $x_0, x_1 \in \Theta$ ը տրված են: Մինիմիմում գոյության անհրաժեշտ պայման է հանդիսանում հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'} = 0$$

Որը համարժեք է.
$$\frac{d^2 f}{dx^2}F_{f'f'} + \frac{df}{dx}F_{f'f} + F_{f'x} - F_f = 0$$

2. Մի քանի անհատ ֆունկցիաներ ֆունկցիա.

$$f, g \in \Omega \mapsto \Theta,\ \Omega, \Theta \subset \mathbb{R}$$

Այս դեպքում ֆունկցիոնալն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$I\left(f\right) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F\left(x, f, g, f^{'}, g^{'}\right) dx$$

որտեղ $f(x_0),\ f(x_1),\ g(x_0),\ g(x_1)$, $x_0, x_1 \in \Theta$ ը տրված են: Մինիմիմում գոյության անհրաժեշտ պայման է հանդիսանում հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը.

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial g} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial g^{'}} = 0$$

3. Բարձր կարգի ածանցյալներ.

$$f \in \Omega \mapsto \Theta,\ \Omega, \Theta \subset \mathbb{R}$$

Այս դեպքում ֆունկցիոնալն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$I\left(f\right) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F\left(x, f, f^{'}, f^{''}, \ldots, f^{(n)}\right) dx$$

որտեղ $f(x_0),\ f(x_1),\ f^{'}(x_0),\ f^{'}(x_1)$, $x_0, x_1 \in \Theta$ ը տրված են: Մինիմիմում գոյության անհրաժեշտ պայման է հանդիսանում հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial f''} - \ldots (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial F}{\partial f^{(n)}} = 0$$

4. Մի քանի անկախ փոփոխականներ.

$$f \in \Omega \mapsto \Theta,\ \Omega \subset \mathbb{R}^n, \Theta \subset \mathbb{R}$$

Այս դեպքում ֆունկցիոնալն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$I(f) = \int \cdots \int\limits_{\Omega} F\left(x, f, f_{x_1}, f_{x_2}, \ldots f_{x_n}\right) d\Omega$$

որտեղ f ֆունկցիայի արժեքները $\partial\Omega$-ի վրա տրված են:

Մինիմումի գոյության անհրաժեշտ պայման է հանդիսանում հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx_1}\frac{\partial F}{\partial f_{x_1}} - \cdots - \frac{d}{dx_n}\frac{\partial F}{\partial f_{x_n}} = 0$$

Եզրային պայմաններ

Նախորդիվ դիտարկել էինք այնպիսի խնդիրներ, որտեղ ֆունկցիան արժեքները տրված տիրույթի եզրի տրված են: Սակայն որոշ խնդիրնորում ֆունկցիան տիրույթի եզրում տրված չէ, և տրվում են այլ տիպի եզրային պայմաններ: Նման դեպքերում որպես եզրային պայման դիտարկվում են հետևյալ պայմանները.

Մեկ փոփոխականի ֆունկցիա

$$\frac{\partial F}{\partial f'} = 0$$

Երկու անհայտ ֆունկցիա

$$\frac{\partial F}{\partial f'} = \frac{\partial F}{\partial g'}$$

Երկու փոփոխականի ֆունկցիա

$$F_{u_x}\frac{dy}{ds} - F_{u_y}\frac{dx}{ds} = 0$$

որոնք հայտնի են որպես *բնական կամ գլխավոր* եզրային պայմաններ:

Պայմանական էքստրեմում

Այսպիսի վարիացիոն խնդիրներում անհրաժեշտ է մինիմիզացնել (մաքսիմիզացնել) տրված ֆունկցիոնալը, պայմանով, որ մեկ այլ ֆունկցիոնալ ընդունում է որևէ արժեք այդ ֆունկցիայի համար: Այսինքն, եթե դիտարկենք ֆունկցիանալ, որի արժեքների բազմությունը մեկ փոփոխականի ֆունկցիաներ են, ապա կունենանք.

$$I\left(f\right) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F\left(x, f, f'\right) dx$$

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} G\left(x, f, f'\right) dx = C$$

Այս խնդրի համար Էյլեր-Լագրանժի հավասարումը հետևյալն է.

$$\frac{\partial\left(F+\lambda G\right)}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\left(F+\lambda G\right)}{\partial f'} = 0$$

Մոտավոր մեթոդներ. Վերջավոր էլեմենտների մեթոդ

Խնդիրների վարիացիոն մեթոդով ձևակերպումը, և վարիացիոն մեթոդների ավելի թույն պայմանները թույլ են տալիս այդ խնդիրները լուծել մոտավոր մեթոդներով, որոնք հաճախ անվանվում են ուղիղ մեթոդներ: Ուղիղ մեթոդներից է Ռիտցի մինիմիզացնող հաջորդականության մեթոդը, որը քննության կառնենք:

Ռիտցի մեթոդ

Դիտարկենք որևէ վարիացիոն մեթոդով տրված մինիմիզացիայի խնդիր.

$$I\left(f\right)\longrightarrow min,\ f\in\Gamma$$

որտեղ I ֆունկցիոնալը տրված տիրույթում որոշյալ ինտեգրալ է:

Մոտավոր լուծում կարելի է ստանալ, եթե ֆունկցիոնալի արժեքների բազմությունը սահմանափակենք որևէ վերջավոր չափանի ենթատարածությունով, որն ունի $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ բազիս:,

$$\Gamma_N\in\Gamma$$

Ենթադրենք, որ I ֆունկցիոնալի արժեքների տիրույթը ունի ճշգրիտ ստորին եզր, նշանակենք այն α_0 ով: Այդ դեպքում գոյություն ունի $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ հաջորդականություն այնպիսին, որ

$$\lim_{n\to\infty}I\left(f_n\right)=\lim_{n\to\infty}I\left(\sum_{j=1}^n\gamma_j\varphi_j\right)=\alpha_0$$

և ֆունկցիոնալի որոշման տիրույթի ցանկացած այլ g ֆունկցիայի համար

$$I\left(g\right)\geq\alpha_0$$

լուծումը փնտրենք հետևյալ կերպ.

$$f_0=\sum_{j=1}^N\gamma_j\varphi_j,\ \gamma_j\in\mathbb{R}$$

Այդ դեպքում խնդիրը բերվում է սովորական մինիմումի խնդրի.

$$\frac{\partial I}{\partial\gamma_i}=\frac{\partial}{\partial\gamma_i}I\left(\sum_{j=1}^N\gamma_j\varphi_j\right)=0$$

Պուասոնի հավասարման լուծում Ռիտցի մեթոդով

Դիտարկենք հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u\Big|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

որտեղ $D = [x_0, x_N] \times [y_0, y_M]$:

Այս դիֆերենցիալ հավասարման համապատասխան վարիացիոն խնդիրը կլինի.

$$I(u) = \frac{1}{2} \iint\limits_D \left[u_x^2 + u_y^2\right] dxdy + \iint\limits_D fudxdy \longrightarrow min$$

D տիրույթը տրոհենք ուղղանկյուն եռանկյունների, և որպես բազիսային ֆունկցիաներ վերցնենք Կուրանտի ֆունկցիաները.

$$\varphi_{i,j}(x,y) = \varphi\left(\frac{x - x_i}{h_1}, \frac{y - y_j}{h_2}\right)$$

Որոնելի ֆունկցիան կփնտրենք բազիսային ֆունկցիաների գծային կոմբինացիայի տեսքով.

$$u(x,y) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} u_{ij} \varphi_{i,j}(x,y)$$

Ուստի ինտեգրալային ֆունկցիոնալը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$\frac{1}{2} \iint\limits_D \left[\left(\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} u_{ij} \varphi_{x,ij}(x,y)\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} u_{ij} \varphi_{y,ij}(x,y)\right)^2\right] dxdy + \iint\limits_D f(x,y) \left[\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} u_{ij} \varphi_{ij}(x,y)\right] dxdy$$

Համաձայն էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանի.

$$\frac{\partial I}{\partial u_{kl}} = \frac{\partial}{\partial u_{kl}} I \left(\sum_{j=0}^{M} u_{ij} \varphi_{i,j}(x,y)\right) = 0$$

Դիտարկենք առաջին կրկնակի գումարը.

$$\left(\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} u_{ij} \varphi_{x,ij}(x,y)\right)^2 = u_{kl}^2 \varphi_{x,kl}^2(x,y) + 2u_{kl}\varphi_{x,kl}(x,y)[\ldots] + [\ldots]^2$$

որտեղ բազմակետերով արտահայտությունը իր մեջ չի պարունակում u_{kl} ը:

Հանգունորեն, երկրորդ կրկնակի գումարի համար՝

$$\left(\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} u_{ij} \varphi_{y,ij}(x,y)\right)^2 = u_{kl}^2 \varphi_{y,kl}^2(x,y) + 2u_{kl}\varphi_{y,kl}(x,y)[\ldots] + [\ldots]^2$$

Այսպիսով ավելի պարզեցված տեսքով համակարգը ունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{\partial}{\partial u_{kl}} I\left(u\right) = \iint\limits_{D} \left[2u_{kl}\varphi^2_{x,kl}(x,y) + 2u_{kl}\varphi_{x,kl}(x,y)[\dots] + 2u_{kl}\varphi^2_{y,kl}(x,y) + 2u_{kl}\varphi_{y,kl}(x,y)[\dots] + 2f(x,y)\varphi_{kl}(x,y)\right] dxdy$$

Դիտարկենք $\varphi_{x,kl}(x,y)$ և $\varphi_{y,kl}(x,y)$ ֆունկցիաները:

$$\varphi_{x,kl}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in S_1 \\ \frac{1}{h_1}, & (x,y) \in S_2 \\ \frac{1}{h_1}, & (x,y) \in S_3 \\ 0, & (x,y) \in S_4 \\ -\frac{1}{h_1}, & (x,y) \in S_5 \\ -\frac{1}{h_1}, & (x,y) \in S_6 \\ 0, otherwise \end{cases}, \quad \varphi_{y,kl}(x,y) = \begin{cases} -\frac{1}{h_2}, & (x,y) \in S_1 \\ -\frac{1}{h_2}, & (x,y) \in S_2 \\ 0, & (x,y) \in S_3 \\ \frac{1}{h_2}, & (x,y) \in S_4 \\ \frac{1}{h_2}, & (x,y) \in S_5 \\ 0, & (x,y) \in S_6 \\ 0, otherwise \end{cases}$$

Քանի որ $\varphi^2_{x,kl}(x,y)$ և $\varphi^2_{y,kl}(x,y)$ ֆունկցիաները ոչ զրոյական են $[x_{k-1,l}, x_{k+1,l}] \times [y_{k,l-1}, y_{k,l+1}]$ ում, ապա

$$\iint\limits_{D} 2u_{kl}\varphi^2_{x,kl}(x,y)dxdy = 4u_{kl}\frac{h_2}{h_1}$$

$$\iint\limits_{D} 2u_{kl}\varphi^2_{y,kl}(x,y)dxdy = 4u_{kl}\frac{h_1}{h_2}$$

Քանի որ յուրաքանչյուր φ_{kl} բազիսային ֆունկցիա հատվում է $\varphi_{k-1,l}$, $\varphi_{k+1,l}$, $\varphi_{k,l-1}$, $\varphi_{k,l+1}$ ֆունկցիաների հետ, ապա

$$\iint\limits_{D} 2u_{kl}\varphi_{x,kl}(x,y)[\dots]dxdy = 2u_{kl}\iint\limits_{D} \varphi_{x,kl}(x,y)[\varphi_{x,k-1,l}(x,y) + \varphi_{x,k+1,l}(x,y) + \varphi_{x,k,l-1}(x,y) + \varphi_{x,k,l+1}(x,y)]dxdy =$$

$$= -2u_{k-1,l}\frac{h_2}{h_1} - 2u_{k+1,l}\frac{h_2}{h_1}$$

Հանգունորեն՝

$$\iint\limits_{D} 2u_{kl}\varphi_{y,kl}(x,y)[\dots]dxdy = -2u_{k,l-1}\frac{h_1}{h_2} - 2u_{k,l+1}\frac{h_1}{h_2}$$

Եվ վերջապես

$$\iint_D 2f(x,y)\varphi_{kl}(x,y)dxdy \approx 2f_{kl}h_1h_2$$

Այսպիսով, ստացանք հետևյալ հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} 2\left[\dfrac{1}{h_1^2}+\dfrac{1}{h_2^2}\right]u_{kl}-\dfrac{1}{h_1^2}u_{k-1,l}-\dfrac{1}{h_1^2}u_{k+1,l}-\dfrac{1}{h_2^2}u_{k,l-1}-\dfrac{1}{h_2^2}u_{k,l+1}+f_{kl}=0 \\ u_{0,l}=u_{N,l}=u_{k,0}=u_{k,M}=0 \end{cases}$$

Ծրագրային իրականացում

Պուասոնի հավասարման մոտավոր լուծումը իրականացնելու համար օգտվենք Python ծրագրավորմալ լեզվից, օգտագործելով Numpy գրադարանը, որը հարմար է բազմաչափ զանգվածների հետ մաթեմատիկական գործողություններ իրականացնալու համար:

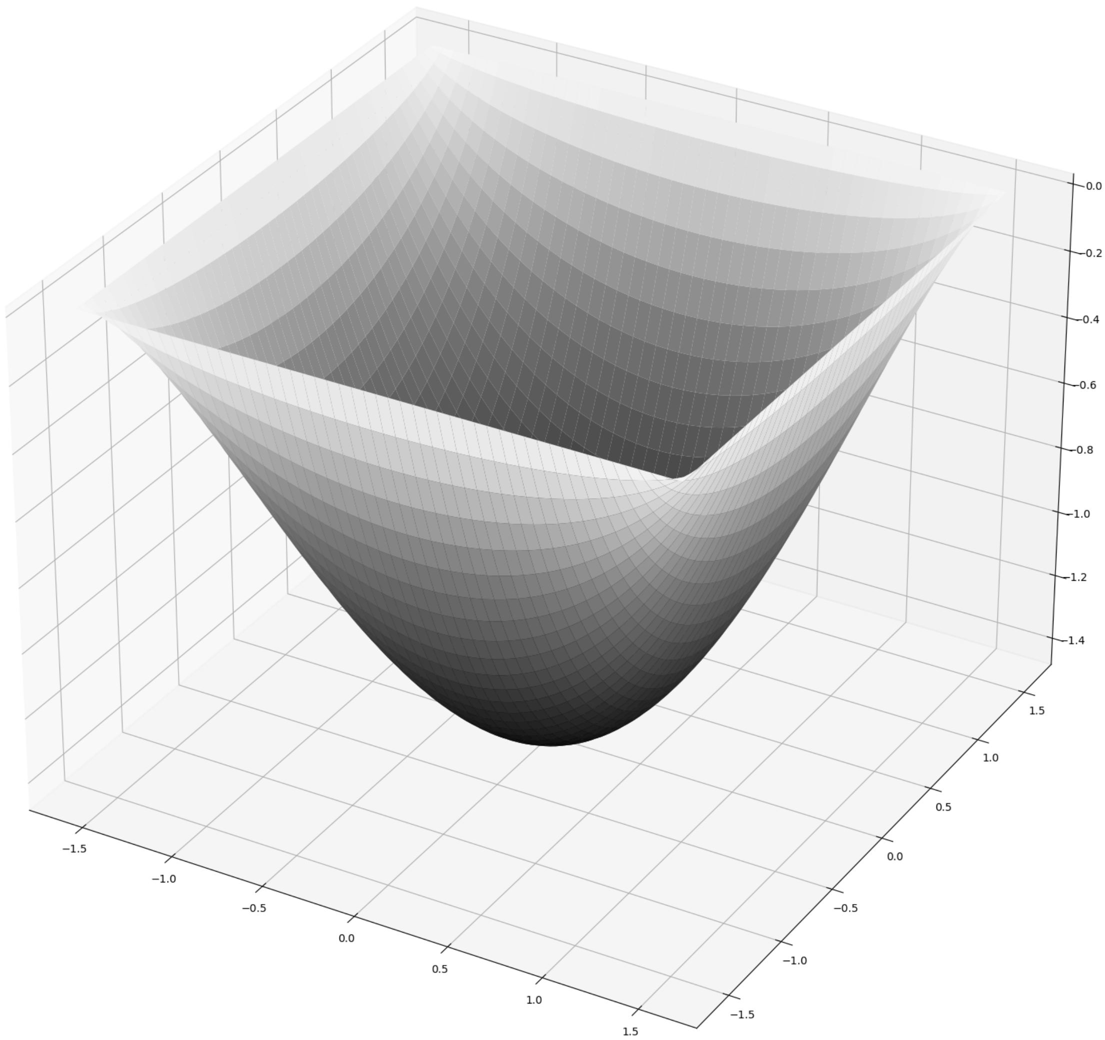
Ծրագրի սկզբում տրվում է ուղղանկյուն տիրույթի սահմանները և դրա տրոհման h_1 և h_2 քայլերը, f ֆունկցիան: Հաջորդիվ կազմվում է հավասարումների համակարգը, կանչվում այն լուծող ֆունկցիան: Այնուհետև բազիսային ֆունկցիաների միջոցով կառուցվում է մոտարկող ֆունկցիան:

Օրինակ

$$\begin{cases} \Delta u = 2 \\ u\Big|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

$$D = \left[-\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}\right] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}\right], \; h_1 = h_2 = \frac{\pi}{200}$$

Խնդրի համար ստացված լուծումը.



Նկար 7

Բիհարմոնիկ հավասարում

Դիտարկենք հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\begin{cases} \Delta^2 u & = f \\ u\Big|_{\partial D} & = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial D} & = 0 \end{cases}$$

որտեղ $D = [x_0, x_N] \times [y_0, y_M]$:

Այս դիֆերենցիալ հավասարման համապատասխան վարիացիոն խնդիրը կլինի.

$$I(u) = \frac{1}{2} \iint\limits_D (\Delta u)^2 \, dxdy + \iint\limits_D fudxdy \longrightarrow min$$