Ներածություն

Հերմիթյան ինտերպոլյացիա

Նախքան անդրադառնալը բազմաչափ ինտերպոլյացիայի խնդրին, քննարկենք մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի ինտերպոլյացիայի որոշ դետալներ:

Ենթադրենք տրված են $f:\Omega\mapsto\Theta, \Omega, \Theta\subset\mathbb{R}$ ֆունկցիան, $\{x_i\}_{i=0}^{N}$ կետերը և դրանց համապատասխան $\{y_i=f\left(x_i\right)\}_{i=0}^{N}$ արժեքները: Յուրաքանչյուր $[x_i, x_{i+1}]$ հատվածում ինտերպոլացնող ֆունկցիան իրենից ներկայացնում է գծային ֆունկցիա, որը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$p_1^{(i)}\left(x\right)=\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}y_i+\frac{x-x_{i+1}}{x_{i+1}-x_i}y_{i+1}, i=\overline{0,N-1}$$

Այսպիսով $[x_0, x_N]$ հատվածում կտոր առ կտոր մոտարկող ֆունկցիան տրվում է հետևյալ կերպ.

$$p_1\left(x\right)=\sum_{i=0}^{N}\varphi_i\left(x\right)y_i$$

Որտեղ

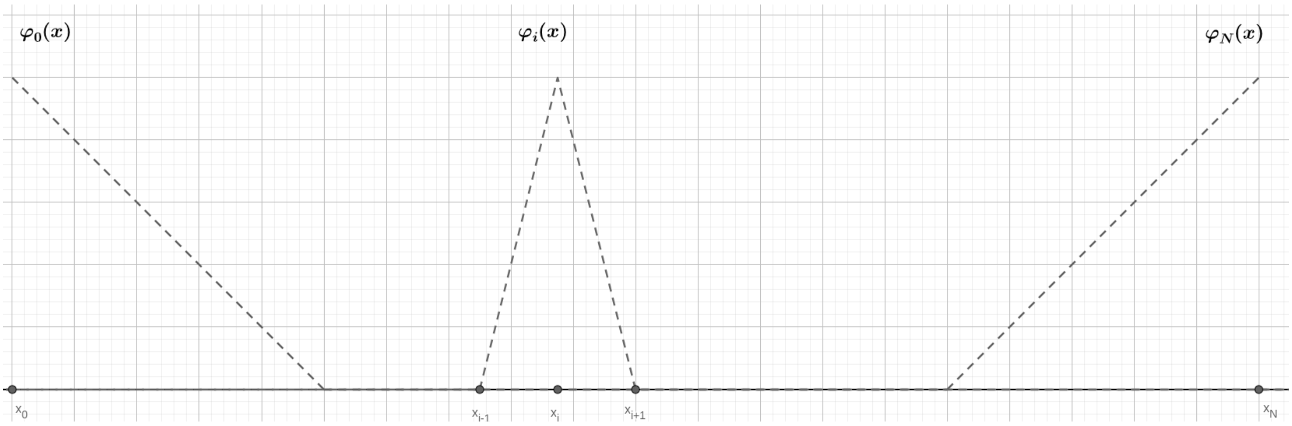
$$\varphi_0\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x_1-x}{x_1-x_0}, x\in[x_0,x_1]\\ 0, x\in[x_1,x_N]\end{cases}$$

$$\varphi_i\left(x\right)=\begin{cases}0, x\in[x_0,x_{i-1}]\\ \dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, x\in[x_{i-1},x_i]\\ \dfrac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, x\in[x_i,x_{i+1}]\\ 0, x\in[x_{i+1},x_N]\end{cases}$$

$$\varphi_N\left(x\right)=\begin{cases}0, x\in[x_0,x_{N-1}]\\ \dfrac{x-x_{N-1}}{x_N-x_{N-1}}, x\in[x_{N-1},x_N]\end{cases}$$

$\varphi_i\left(x\right)$ ֆունկցիաները կոչվում են բազիսային ֆունկցիաներ, որոնք ունեն այսպես կոչված լոկալ կրողներ, քանի որ դրանք ոչ զրոյական են որևէ տիրույթում և զրոյական որոշման տիրույթի մնացած մասերում: Նմանատիպ բազիսային ֆունկցիաների հիմնական հատկությունն այն է, որ դրանք հավասար են մեկի որևէ կոնկրետ հանգույցում և հավասար են զրոյի մնացած բոլոր հանգույցներում: Նշենք սակայն, որ այս տիպի ինտերպոլյացիան C^0 դասի է, այսինքն միայն անընդհատ է, և հետևաբար կիրառելի չէ այն խնդիրներում, որտեղ պահանջվում է ավելի բարձր կարգի ողորկություն:

Ստորև տրված է բազիսային ֆունկցիաների սխեմատիկ ներկայացում.



Նկար 1

Այժմ դիտարկենք հետևյալ խնդիրը. Անհրաժեշտ է կառուցել կտոր առ կտեր մոտարկող ֆունկցիա, որը ֆունկցիայի արժեքի հետ մեկտեղ կհամընկնի նաև ֆունկցիայի առաջին կարգի ածանցյալի հետ ինտերպոլյացիոն կետերում: Այսինքն.

$$\frac{d^j}{dx^j}f(x_i) = \frac{d^j}{dx^j}p_3(x_i),\ j = 0,1;\ i = \overline{0, N-1}$$

Յուրաքանչյուր $[x_i, x_{i+1}]$ հատվածում ինտերպոլյացիոն ֆունկցիան իրենից ներկայացնում է խորանարդային ֆունկցիա, որը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով:

$$p_3^{(i)} = \alpha_i(x)f(x_i) + \beta_{i+1}(x)f(x_{i+1}) + \gamma_i(x)f^{'}(x_i) + \delta_{i+1}(x)f^{'}(x_{i+1})$$

որտեղ

$$\alpha_i(x) = \frac{(x_{i+1}-x)^2\left[(x_{i+1}-x_i) + 2\left(x-x_i\right)\right]}{(x_{i+1}-x_i)^3}, \beta_{i+1}(x) = \frac{(x-x_i)^2\left[(x_{i+1}-x_i) + 2\left(x_{i+1}-x\right)\right]}{(x_{i+1}-x_i)^3}$$

$$\gamma_i(x) = \frac{(x-x_i)\left(x_{i+1}-x\right)^2}{(x_{i+1}-x_i)^2}, \delta_{i+1}(x) = \frac{(x-x_i)^2\left(x-x_{i+1}\right)}{(x_{i+1}-x_i)^2}$$

Այսպիսով $[x_0, x_N]$ հատվածում կտոր առ կտոր մոտարկող ֆունկցիան տրվում է հետևյալ կերպ.

$$p_3(x) = \sum_{i=0}^{N}\left[\varphi_i^{(0)}f(x_i) + \varphi_i^{(1)}f^{'}(x_i)\right]$$

որտեղ

$$\varphi_0^{(0)}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x_1-x)^2\left[(x_1-x_0) + 2\left(x-x_0\right)\right]}{(x_1-x_0)^3}, x \in [x_0, x_1] \\ 0, x \in [x_1, x_N] \end{cases}$$

$$\varphi_i^{(0)}(x) = \begin{cases} 0, x \in [x_0, x_{i-1}] \\ \dfrac{(x-x_{i-1})^2\left[(x_i-x_{i-1}) + 2\left(x_i-x\right)\right]}{(x_i-x_{i-1})^3}, x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{(x_{i+1}-x)^2\left[(x_{i+1}-x_i) + 2\left(x-x_i\right)\right]}{(x_{i+1}-x_i)^3}, x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, x \in [x_{i+1}, x_N] \end{cases}$$

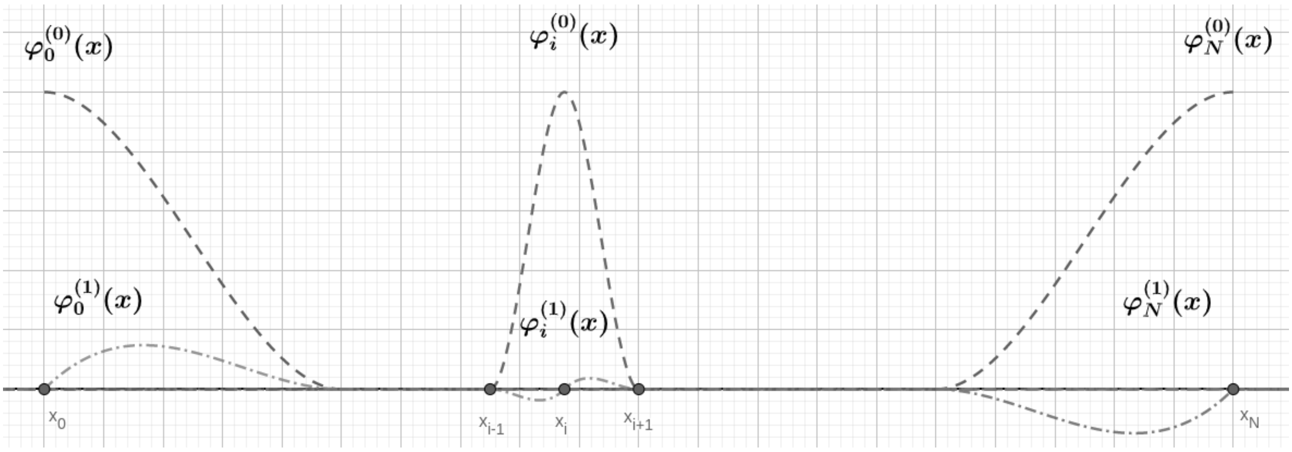
$$\varphi_N^{(0)}(x) = \begin{cases} 0, x \in [x_0, x_{N-1}] \\ \dfrac{(x-x_{N-1})^2\left[(x_N-x_{N-1}) + 2\left(x_N-x\right)\right]}{(x_N-x_{N-1})^3}, x \in [x_{N-1}, x_N] \end{cases}$$

$$\varphi_0^{(1)}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - x_0)(x_1 - x)^2}{(x_1 - x_0)^2}, x \in [x_0, x_1] \\ 0, x \in [x_1, x_N] \end{cases}$$

$$\varphi_i^{(1)}(x) = \begin{cases} 0, x \in [x_0, x_{i-1}] \\ \dfrac{(x - x_{i-1})^2 (x - x_i)}{(x_i - x_{i-1})^2}, x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{(x - x_i)(x_{i+1} - x)^2}{(x_{i+1} - x_i)^2}, x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, x \in [x_{i+1}, x_N] \end{cases}$$

$$\varphi_N^{(1)}(x) = \begin{cases} 0, x \in [x_0, x_{N-1}] \\ \dfrac{(x - x_{N-1})^2 (x - x_N)}{(x_N - x_{N-1})^2}, x \in [x_{N-1}, x_N] \end{cases}$$

Ստորև տրված է բազիսային ֆունկցիաների սխեմատիկ ներկայացում.



Նկար 2

Այսպիսով ստացանք C^1 ինտերպոլյացիա:

Ընդհանուր դեպքում հերմիթյան ինտերպոլյացիայի պայմանը կարելի է գրել հետևյալ կերպ.

$$\frac{d^k}{dx^k} f(x_i) = \frac{d^k}{dx^k} p_{2m-1}(x_i), \ i = \overline{0, N}, \ k = \overline{0, m-1}$$

Քառակուսային և խորանարդային ինտերպոլյացիա

Խնդիրներում, որտեղ անհրաժեշտ է որոշել միայն տրված ֆունկիցիան, ֆունկցիայի ածանցյալներն ինտերպոլացնելու փոխարեն դրվում է դրանց անընդհատության պայման բազիսային ֆուկցիաների միացման կետերում, բավականին հեշտացնելով դրված խնդիրը և դրա լուծումը: Սակայն այս դեպքում բազիսային ֆունկցիաները չեն հանդիսանում լոկալ կրողներ, ուստի կիրառական տեսանկյունից հարմար չեն:

Նման տիպի ինտերպոլյացիայի կառուցման պարզագույն օրինակը հետևյալն է. Յուրաքանչյուր $[x_i, x_{i+1}]$ ինտերվալում կառուցենք այպիսի պարաբոլ, որ բոլոր x_i հանգուցային կետերում առանջին կարգի ածանցյալները լինեն անընդհատ:

$$S_2^{(i)}(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\,(x - x_i) + c_i\,(x - x_i)\,(x - x_{i+1})$$

Ածանցյալների անընդհատության պայմանից կհետևի, որ

$$c_i + c_{i-1} = \frac{1}{h^2}\,(f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))\;\; i = \overline{1, N-1}$$

Քանի որ համակարը պարունակում է $N-1$ հավասարում, ապա մնում է մեկ ազատ գործակից, որը կարելի գտնել, որևէ x_j հանգուցային կետում որոշելով $S_2^{(j)''}$-ն:

Առավել կիրառելի են խորանարդային սփլայնները: Այս դեպքում յուրաքանչյուր $[x_i, x_{i+1}]$ ինտերվալում կառուցվում են երրորդ աստիճանի բազմանդամներ այնպիսին, որ դրանց միացման կետերում (հանգույցներում) առաջին և երկրորդ կարգի ածանցյալները լինեն անընդհատ:

Բազմանդամը դիտարկելու փոխարեն դիտարկենք նրա երկրորդ կարգի ածանցյալը: Այն գծային ֆունկցիա է, հետևաբար այն կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$S_3^{(i)''}(x) = c_i \frac{x_{i+1} - x}{x - x_i} + c_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

որտեղ c_i և c_{i+1}-ը x_i և x_{i+1} կետերում երկրորդ կարգի ածանցյալների արժենքներն են: Հաշվի առնելով նաև հետևյալ պայմանները.

$$\begin{cases} S_3^{(i)}(x_i) & = f_i \\ S_3^{(i)}(x_{i+1}) & = f_{i+1} \\ S_3^{(i-1)'}(x_i) & = S_3^{(i)'}(x_i) \end{cases}$$

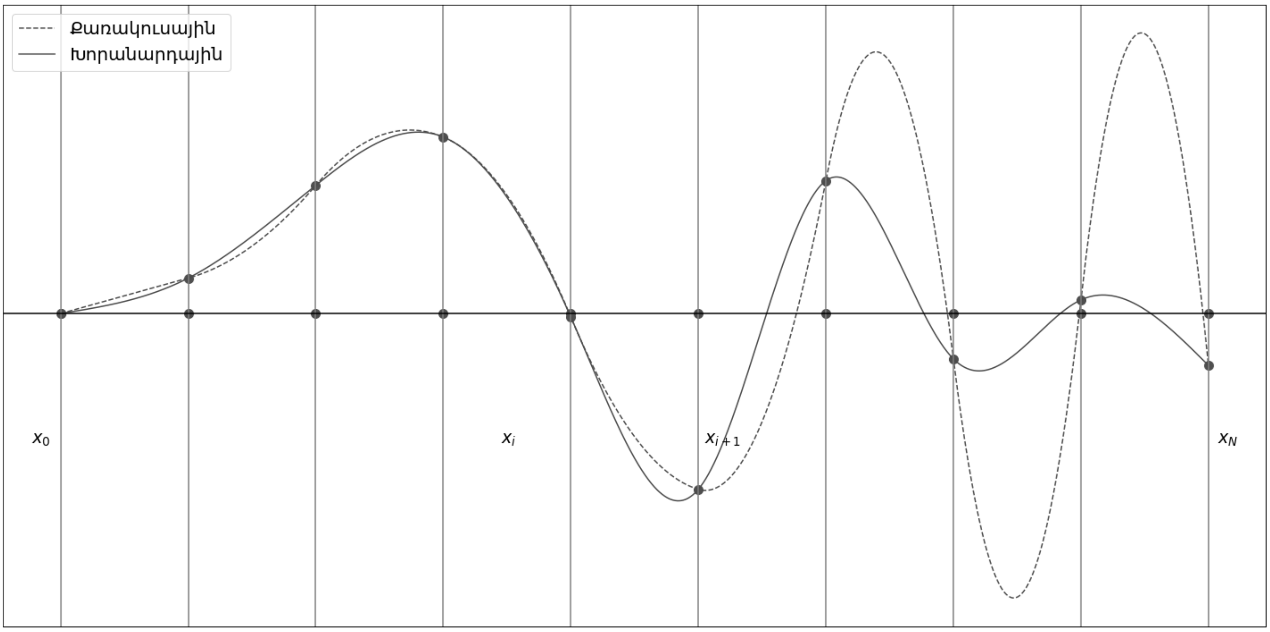
կստանանք հետևյալ տեսքի խորանարդային սփլայն.

$$S_3^{(i)}(x) = \frac{c_i}{6h}\,(x_{i+1} - x)^3 + \frac{c_{i+1}}{6h}\,(x - x_i)^3 + \left(\frac{f_i}{h} - \frac{hc_i}{6}\right)(x_{i+1} - x) + \left(\frac{f_{i+1}}{h} - \frac{hc_{i+1}}{6}\right)(x - x_i)$$

c_i գործակիցները բավարարում են հետևյալ պայմաններին.

$$c_{i+1} + 4c_i + c_{i-1} = \frac{6}{h^2}\left(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}\right)$$

Ստորև ներկայացվում է քառակուսային և խորանարդային ինտերպոլյացիայի օրինակ



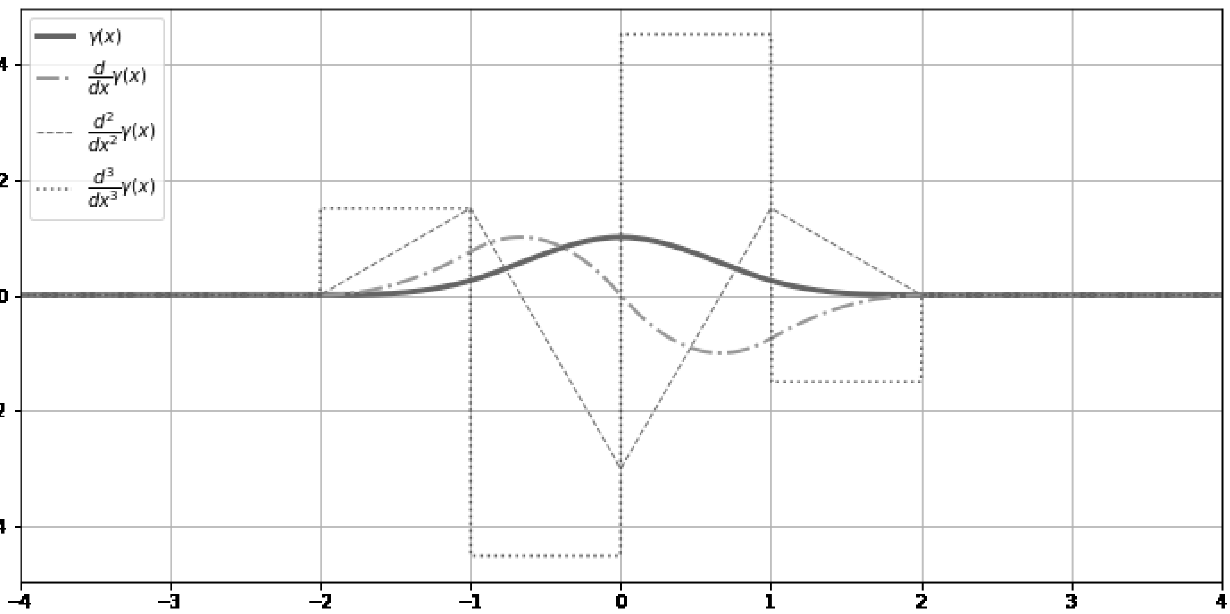
Նկար 3

Այժմ դիտարկենք լոկալ կրող ունեցող խորանարդային սփլայները: Այդպիսի սփլայ առաջարկել է ավստրացի մաթեմատիկոս Առնոլդ Շնեբերգը:

Դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան.

$$\gamma(x)=\frac{1}{4}\left[(x+2)_+^3-4\,(x+1)_+^3+(x)_+^3-4\,(x-1)_+^3+(x-2)_+^3\right]$$

Ստորև ներկայացվում է γ ֆունկցիան և նրա մինչև երրորդ կարգի ածանցյալները.



Նկար 4

Ենթադրենք տրված է $[x_0,x_N]$ ինտերվալը, և տրոհված է N հավասար մասերի h քայլով: Յուրաքանչյուր հանգուցային կետի $(i=2,\ldots N{-}2)$ համար բազիսային ֆունկցիան տրվում է հետևյալ բանաձևով.

$$B_i\left(\frac{x}{h}\right)=\gamma\left(\frac{x-x_0}{h}-i\right)$$

Այս ֆունկցիաները և նրանց մինչև երկրորդ կարգի ածանցյալները հավասար են զրոյի $\mathbb{R}\backslash\left[x_{i-2},x_{i+2}\right]$ տիրույթում:

Մնացած բազիսային ֆունկիաները պետք է կառուցել այլ կերպ, քանի որ դրանց մի մասը դուրս է ընկած $[x_0,x_N]$ ինտերվալից:

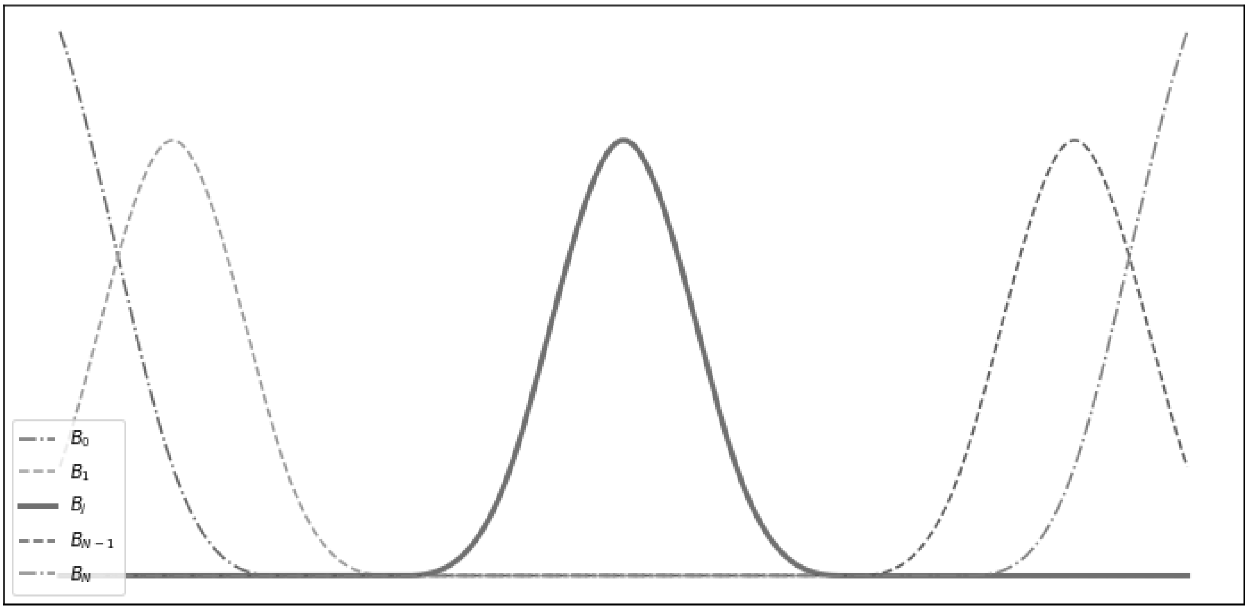
$$B_0\left(\frac{x}{h}\right)=\gamma\left(\frac{x}{h}\right)+\left(\frac{h-x}{4h}\right)_+^3,\ x\in[x_0,x_2]$$

$$B_1\left(\frac{x}{h}\right)=\gamma\left(\frac{x}{h}\right),\ x\in[x_0,x_3]$$

$$B_{N-1}\left(\frac{x}{h}\right)=\gamma\left(\frac{x}{h}\right),\ x\in[x_{N-3},x_N]$$

$$B_N\left(\frac{x}{h}\right) = \gamma\left(\frac{x}{h}\right) + \left(\frac{x-(N-1)h}{4h}\right)_+^3,\ x \in [x_{N-2}, x_N]$$

Ստորև ներկայացվում է B_j բազիսների գծագիրը.



Նկար 5

Տրված $\{f_j\}$ ինտերպոլյացիոն տվյալներով կառուցենք սփլայն.

$$F(x) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i B_i\left(\frac{x}{h}\right)$$

Հաշվի առնելով ինտերպոլյացիոն պայմանները.

$$F(x_i) = f_i$$

կստանանք հետևյալ հավասարումերի համակարգը.

$$\begin{cases} \frac{5}{4}\alpha_0 + \frac{1}{4}\alpha_0 & = f_0 \\ \frac{1}{4}\alpha_{j-1} + \alpha_j + \frac{1}{4}\alpha_{j+1} & = f_j \\ \frac{5}{4}\alpha_{N-1} + \frac{1}{4}\alpha_N & = f_N \end{cases}$$

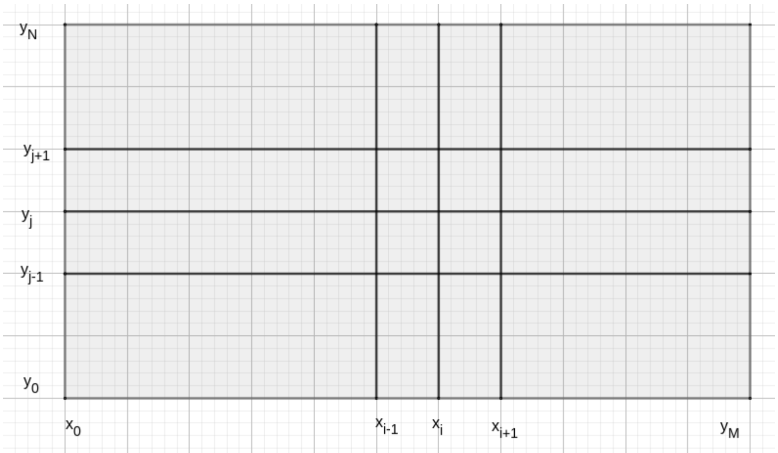
Երկչափ մոտարկում

Այժմ դիտարկենք երկու փոփոխականի կտոր առ կտոր անընդհատ մոտարկման խնդիրը ∂R եզրով սահմանափակ R տիրույթում: Տիրույթը տրոհվում է որոշակի թվով էլեմենտների: Կախված R տիրույթից, առանձնացվում են հետևյալ մոտակման ձևերը.

Ուղղանկյուն տիրույթ

Դիցուք տրված են $f : \Omega \mapsto \Theta$, $\Theta \subset \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = [x_0, x_M] \times [y_0, y_N]$, ուղղանկյուն տիրույթը, որը տրոհված է $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, ուղղանկյուն էլեմենտների:

$$x_{i+1} - x_i = h_1,\ y_{j+1} - y_j = h_2,\ i = \overline{0, M-1}, j = \overline{0, N-1}$$



Նկար 6

$C^{(0,0)}$ մոտարկում

Յուրաքանչյուր $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ էլեմենտի վրա f ֆունկցիան մոտարկվում հետևյալ քառակուսային ֆունկցիայով:

$$p_1^{(i,j)}(x,y) = \alpha_{i,j}(x,y) f(x_i, y_j) + \beta_{i+1,j}(x,y) f(x_{i+1}, y_j)\, \gamma_{i,j+1}(x,y) f(x_i, y_{j+1}) + \delta_{i+1,j+1}(x,y) f(x_{i+1}, y_{j+1})$$

որտեղ

$$\alpha_{i,j}(x,y) = \frac{1}{h_1 h_2} \left(x_{i+1} - x\right) \left(y_{j+1} - y\right)$$

$$\beta_{i+1,j}(x,y) = \frac{1}{h_1 h_2} \left(x - x_i\right) \left(y_{j+1} - y\right)$$

$$\gamma_{i,j+1}(x,y) = \frac{1}{h_1 h_2} \left(x_{i+1} - x\right) \left(y - y_j\right)$$

$$\delta_{i+,j+1}(x,y) = \frac{1}{h_1 h_2}\left(x - x_i\right)\left(y - y_j\right)$$

Այսպիսով $[x_0, x_M]\times[y_0, y_M]$ տիրույթում կտոր առ կտոր մոտարկող ֆունկցիան տրվում է հետևյալ կերպ.

$$p_1(x,y) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\varphi_{i,j}(x,y)f(x_i,y_j)$$

որտեղ

$$\varphi_{i,j}\left(x,y\right) = \begin{cases} \frac{1}{h_1 h_2}\left(x - x_{i-1}\right)\left(y - y_{j-1}\right), (x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \\ \frac{1}{h_1 h_2}\left(x - x_{i-1}\right)\left(y_{j+1} - y\right), (x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_j, y_{j+1}] \\ \frac{1}{h_1 h_2}\left(x_{i+1} - x\right)\left(y - y_{j-1}\right), (x,y) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j] \\ \frac{1}{h_1 h_2}\left(x_{i+1} - x\right)\left(y_{j+1} - y\right), (x,y) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \\ 0, otherwise \end{cases}$$

Վերը դիտարկված մոտարկումը հանդիսանում է երկչափ Հերմիթյան մոտարկման մասնավոր դեպք:

Ընդհանուր դեպքում, տրված $k \in \mathbb{N}$ թվի և տրված ուղղանկյուն տիրույթի ցանկացած ուղղանկյունաձև տրոհման էլեմենտում կարելի է կառուցել $C^{k-1,k-1}$ կարգի մոտարկող բազմանդամ, որը $2k-1$ -րդ կարգի բազմանդամ է ըստ իր յուրաքանչյուր փոփոխականի և, ինտերպոլյացիայի պայմանները կարելի է գրել հետևյալ կերպ.

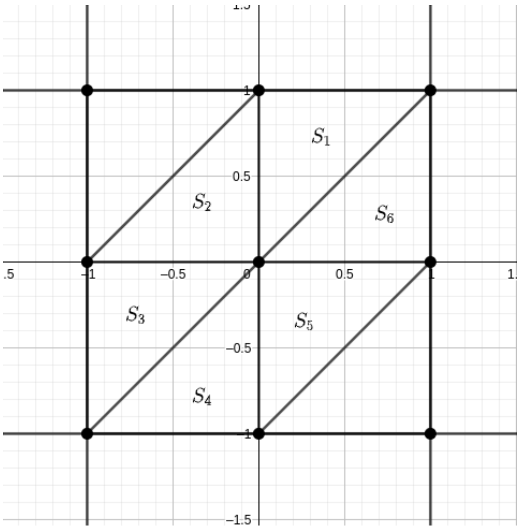
$$\frac{d^{p+q}}{dx^p dy^q}f(x_i,y_j) = \frac{d^{p+q}}{dx^p dy^q}p_{2k-1}(x_i,y_j)$$

$$p,q = \overline{0,k-1};\ i = \overline{0,M};\ j = \overline{0,N}$$

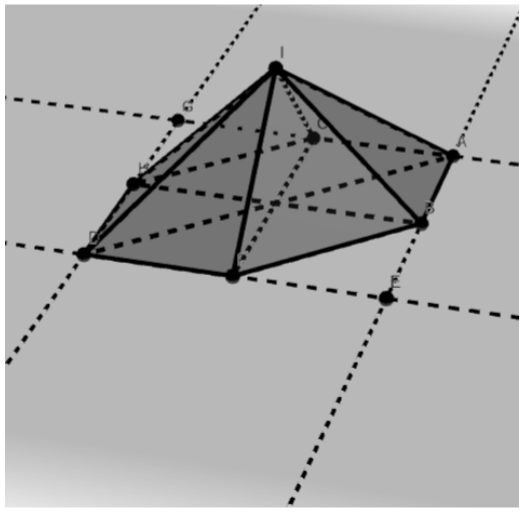
Այժմ դիտարկենք ուղղանկյուն տիրույթի տրոհման և բազիսային ֆունկցիաների կառուցման այլ տարբերակ: Այս դեպքում տիրույթը տրոհենք ըստ նախորդ տարբերակի, ի հավելումն յուրաքանչյուր ուղղանկյուն էլեմենտ տրոհելով երկու ուղղանկյուն եռանկյունների.

Դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան.

$$\varphi\left(x,y\right)=\begin{cases}1-y, & (x,y)\in S_1\\ 1+x-y, & (x,y)\in S_2\\ 1+x, & (x,y)\in S_3\\ 1+y, & (x,y)\in S_4\\ 1-x+y, & (x,y)\in S_5\\ 1-x, & (x,y)\in S_6\\ 0, otherwise & \end{cases}$$



Նկար 7



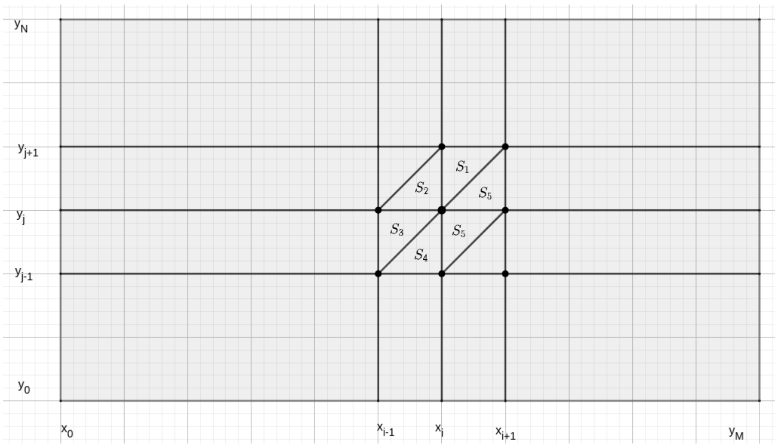
Նկար 8

Պարզ է, որ այն յուրաքանչյուր ուղղանկյուն էլեմենտում $C^{(0,0)}$ ֆունկցիա է:
Այժմ յուրաքանչյուր x_i, y_j կետի վրա կառուցենք հետևյալ ֆունկցիան.

$$\varphi_{i,j}(x,y)=\varphi\left(\frac{x-x_i}{h_1},\frac{y-y_j}{h_2}\right)$$

Այդ դեպքում f ֆունկցիայի մոտարկման բանաձևը կտվրի հետևյալ կերպ:

$$p_1(x,y)=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}\varphi_{i,j}(x,y)f(x_i,y_j)$$



Նկար 9

$C^{(2,2)}$ **մոտարկում**

Մեկ փոփոխականի մոտարկան խնդրը դիտարկելից քննարկեցինք Շնեըբերգի կողմից առաջարկված խորանարդային բազիսային սփլայնները: Այս սփլայնները կարող ենք օգտագործել երկչափ մոտարկման համար: Յուրաքանչյուր (x_i, y_j) հանգույցի վրա կառուցենք բազիսային ֆունկցիա կազմելով $B_i\left(\frac{x}{h_1}\right)$ և $B_j\left(\frac{x}{h_2}\right)$ ֆունկցիաների թենզորական արտադրյալը:

$$\varphi^{ij}(x,y) = B_i\left(\frac{x}{h_1}\right) B_j\left(\frac{x}{h_2}\right)$$

Տրված $\{f_{ij}\}$ ինտերպոլյացիոն տվյալնեով կառուցենք սփլայն.

$$F(x,y) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_{ij}\varphi^{ji}(x,y)$$

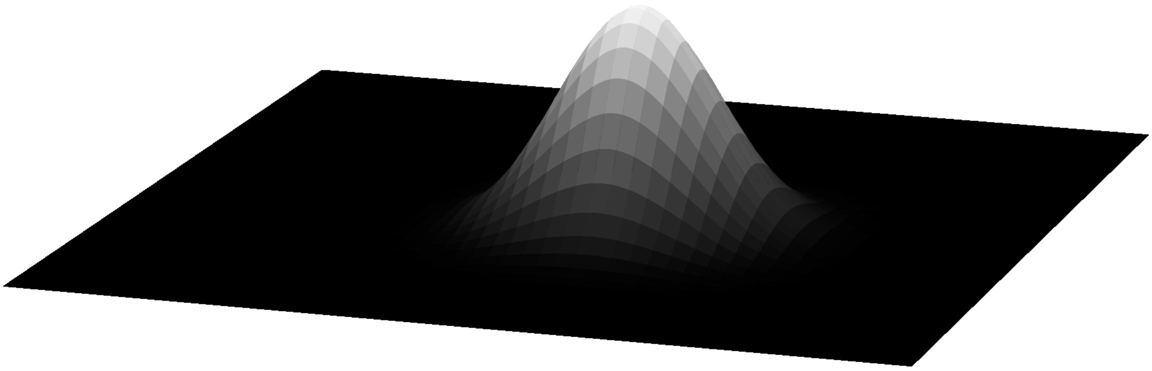
Հաշվի առնելով ինտերպոլյացիոն պայմանները.

$$F(x_{ij}) = f_{ij}$$

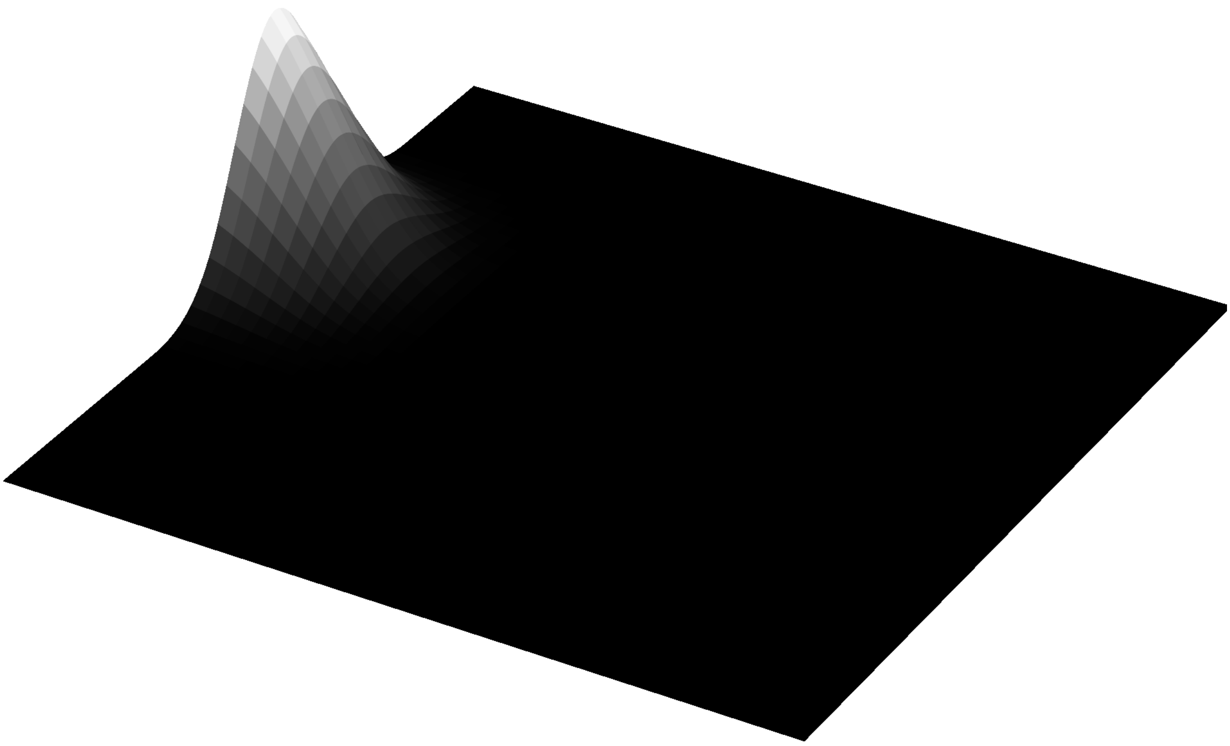
կստանանք հետևյալ հավասարումերի համակարգը.

$$\begin{cases}
\alpha_{00} + \frac{5}{16}(\alpha_{01} + \alpha_{10}) + \frac{1}{16}\alpha_{11} & = f_{00} \\
\alpha_{M0} + \frac{5}{16}(\alpha_{M1} + \alpha_{M-1,0}) + \frac{1}{16}\alpha_{M-1,1} & = f_{M0} \\
\alpha_{0N} + \frac{5}{16}(\alpha_{1N} + \alpha_{0,N-1}) + \frac{1}{16}\alpha_{N-1,1} & = f_{0N} \\
\alpha_{MN} + \frac{5}{16}(\alpha_{M-1,N} + \alpha_{M,N-1}) + \frac{1}{16}\alpha_{M-1,N-1} & = f_{MN} \\
\frac{5}{4}\alpha_{i,1} + \frac{5}{16}(\alpha_{i-1,0} + \alpha_{i+1,0}) + \frac{1}{4}\alpha_{i,1} + \frac{1}{16}(\alpha_{i-1,1} + \alpha_{i+1,1}) & = f_{i0} \\
\frac{5}{4}\alpha_{i,N-1} + \frac{5}{16}(\alpha_{i-1,N} + \alpha_{i+1,N}) + \frac{1}{4}\alpha_{i,N-1} + \frac{1}{16}(\alpha_{i-1,N-1} + \alpha_{i+1,N-1}) & = f_{iN} \\
\frac{5}{4}\alpha_{1,j} + \frac{5}{16}(\alpha_{0,j-1} + \alpha_{0,j+1}) + \frac{1}{4}\alpha_{1,j} + \frac{1}{16}(\alpha_{1,j-1} + \alpha_{1,j+1}) & = f_{0j} \\
\frac{5}{4}\alpha_{M-1,j} + \frac{5}{16}(\alpha_{M,j-1} + \alpha_{M,j+1}) + \frac{1}{4}\alpha_{M-1,j} + \frac{1}{16}(\alpha_{M-1,j-1} + \alpha_{M-1,j+1}) & = f_{Mj} \\
\alpha_{ij} + \frac{1}{4}(\alpha_{i,j-1} + \alpha_{i,j+1} + \alpha_{i-1,j} + \alpha_{i+1,j}) + \frac{1}{16}(\alpha_{i-1,j-1} + \alpha_{i-1,j+1} + \alpha_{i+1,j-1} + \alpha_{i+1,j+1}) & = f_{ij}
\end{cases}$$

Ստորև ներկայացվում է φ^{ij} բազիսային ֆունկցիաների գծագիրը.



Նկար 10



Նկար 11

Բազմանկյուն տիրույթ

Բազմանկյուն տիրույթ ասելով կհասկանանք կամ հենց բազմանկյունաձև տիրույթը, կամ դրա՝ բազմանկյունով մոտարկումը:

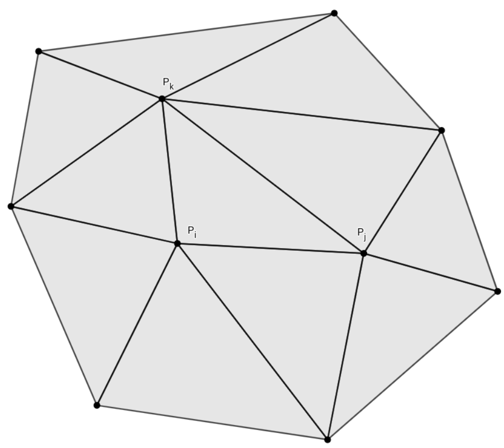
Դիցուք տրված են $f:\Omega\mapsto\Theta, \Theta\subset\mathbb{R}, \Omega\subset\mathbb{R}^2$ բազմանկյուն տիրույթը, որը կամայական ձևով տրոհված է եռանկյուն էլեմենտների: Յուրաքանչյուր այդպիսի P_1, P_2, P_3 գագաթներով եռանկյան համար դիտարկենք հետևյալ մոտարկող ֆունկցիան.

$$p_1(x,y)=\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{3}p_i^{(1)}(x,y)f(x_i,y_i)$$

$$S=\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix}$$

$$p_i^{(1)}(x,y)=x_jy_k-x_ky_j+x(y_j-y_k)-y(x_j-x_k)$$

որտեղ $(x_i,y_i),\ i=1,2,3$ տրված եռանկյուն էլեմենտի գագաթներն են (հերթականությունը ժամսլաքին հակառակ ուղղությամբ):



Նկար 12

Բնական է, որ որևէ կետի նկատմամբ լրիվ բազիսային ֆունկցիայի կառուցելու համար անհրաժեշտ է իրար գումարել այն բոլոր եռանկյուն էլեմենտների՝ այդ կետին համապատասխան ֆունկցիաները, որոնց համար տվյալ կետը գագաթ է: Հետևաբար, ընդհանուր դեպքում վերը նշված մոտարկան եղանակը հաշվողական տեսակետից հարմար չէ:

Վարիացիոն մեթոդ

Վարիացիոն մեթոդները հանդիպում են բազմաթիվ ֆիզիկական և այլ խնդիրնորում, և այդ խնդիրների մոտավոր լուծումը հիմնված է համապատասխան վարիացիոն մեթոդների վրա:

Սահմանումներ

$f : \Omega \mapsto \Theta,\ \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ \Theta \subset \mathbb{R}$ ֆունկցիայի ϵ շրջակայք ասելով կհասկանանք այն բոլոր g ֆունկցիաների բազմությունը, որոնց համար տեղի ունի

$$|f - g| < \epsilon$$

պայմանը:

Խնդրի դրվածքը

Վարիացիոն մեթոդի սկզբունքն այն է, որ դիտարկվող ֆունկցիայի ինտեգրալը տրված տիրույթում ընդունում է մեծագույն (փոքրագույն) արժեք տվյալ համակարգի իրական վիճակի համար, համեմատած բոլոր հնարավոր վիճակների բազմության հետ:
Ենթաինտեգրալային ֆունկցիան կախված է տրված կոորդինատներից, ֆունկցիայի արժեքից, նրա ածանցյալներից, իսկ ինտեգրումը կատարվում է տրված կոորդինատական համակարգում, որը կարող է ներառել նաև ժամանակը: Մինիմումի որոշման խնդիրը հաճախ բերվում է մի քանի դիֆերենցիալ հավասարումների, համապատասխան եզրային պայմաններով:
Այն հանդիսանում է իրական փոփոխականի ֆունկցիայի էքստրեմումի որոնման խնդրի ընդհանրացում, որտեղ տվյալ ֆունկցիայի համար կոմպակտ տիրույթում անհրաժեշտ է գտնել այպիսի կետեր, որոնք հանդիսանում են մինիմում (մաքսիմում) այդ տիրույթի որևէ շրջակայքում:

Վարիացիոն մեթոդում ինտեգրալը հանդիսանում է ֆունկցիոնալ, որը կախված է ֆուկցիայից, որի որոշման տիրույթը հանդիսանում է թույլատրելի ֆունկցիաների տարածությունն է:

Այս մեթոդի հիմնական դժվարությունը կայանում է նրանում, որ խնդիրները, որոնք կարող են ձևակերպվել որպես վարիացիոն, հնարավոր է, որ լուծում չունենան այն պատճառով, որ ֆունկցիոնալ տարածությունները կոմպակտ չեն:

Սակայն վարիացիոն մեթոդի հիմնական առավելությունն այն է, որ դրա կիրառման համար դրվող պահանջները ավելի թույլ են, որը թույլ է տալիս միայն անընդհատ ֆունկցիաներով կառուցել մոտավոր լուծում, առանց ածանցյալների անընդհատության պայմանի:

Օրինակներ

Որպես օրինակ դիտարկենք հետևյալ կրկնակի ինտեգրալը.

$$I(f) = \iint\limits_{\Omega} F(x, y, f, f_x, f_y)\, dxdy$$

որտեղ $f \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ և որի արժեքները որոշված են $\partial\Omega$ ում: Այս դեպքում մինիմումի անհրաժեշտ է, որ $f(x, y)$ ֆունկցիան բավարարի Էյլեր-Լագրանժի հավասարմանը, հավելելով համապատասխան եզրային պայմանները:

$$\frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} - F_u = 0$$

Օրինակ, $F = \frac{1}{2}\left(u_x^2 + u_y^2\right)$ դեպքում խնդիրը բերվում է Լապլասի հավասարմանը.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Այժմ պարզ է, որ երկրորդ կարգի ածանցյալների անընդհատությունը անհրաժեշտ է Էյլեր-Լագրանժի հավասարման գոյության համար: Բայց վարիացիոն մեթոդը պահանջում է միայն f ի անընդհատություն և առաջին կարգի մասնակի ածանցյալների կտոր առ կտոր անընդհատություն:

Ստացիոնար խնդիրներ

Դիֆերենցիալ հավասարումը, որը կապված է վարիավիոն խնդրի հետ, կոչվում է Էյլեր-Լագրանժի հավասարում: Այս հանդիսանում է միայն անհրաժեշտ պայման, որին պետք է բավարարի ֆունկցիան, որը մինիմիզացնում (մաքսիմիզացնում) է ֆունկցիոնալը: Դիտարկենք հետևյալ օրինակները.

1. Մեկ փոփոխականի ֆունկցիա.

   $$f \in \Omega \mapsto \Theta,\ \Omega, \Theta \subset \mathbb{R}$$

   Այս դեպքում ֆունկցիոնալն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

   $$I(f) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F\left(x, f, f'\right) dx$$

   որտեղ $f(x_0)$ և $f(x_1)$, $x_0, x_1 \in \Theta$ ը տրված են: Մինիմիմում գոյության անհրաժեշտ պայման է հանդիսանում հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

   $$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'} = 0$$

Որը համարժեք է.

$$\frac{d^2 f}{dx^2} F_{f' f'} + \frac{df}{dx} F_{f' f} + F_{f' x} - F_f = 0$$

2. Մի քանի անհատ ֆունկցիաներ ֆունկցիա.

$$f, g \in \Omega \mapsto \Theta,\ \Omega, \Theta \subset \mathbb{R}$$

Այս դեպքում ֆունկցիոնալն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$I\left(f\right) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F\left(x, f, g, f^{'}, g^{'}\right) dx$$

որտեղ $f(x_0),\ f(x_1),\ g(x_0),\ g(x_1)$, $x_0, x_1 \in \Theta$ ը տրված են: Մինիմիմում գոյության անհրաժեշտ պայման է հանդիսանում հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը.

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f^{'}} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial g} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial g^{'}} = 0$$

3. Բարձր կարգի ածանցյալներ.

$$f \in \Omega \mapsto \Theta,\ \Omega, \Theta \subset \mathbb{R}$$

Այս դեպքում ֆունկցիոնալն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$I\left(f\right) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F\left(x, f, f^{'}, f^{''}, \ldots, f^{(n)}\right) dx$$

որտեղ $f(x_0),\ f(x_1),\ f^{'}(x_0),\ f^{'}(x_1)$, $x_0, x_1 \in \Theta$ ը տրված են: Մինիմիմում գոյության անհրաժեշտ պայման է հանդիսանում հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f^{'}} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial f^{''}} - \ldots (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial F}{\partial f^{(n)}} = 0$$

4. Մի քանի անկախ փոփոխականներ.

$$f \in \Omega \mapsto \Theta,\ \Omega \subset \mathbb{R}^n, \Theta \subset \mathbb{R}$$

Այս դեպքում ֆունկցիոնալն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$I\left(f\right)=\int\limits_{\Omega}\cdots\int F\left(x,f,f_{x_1},f_{x_2},\ldots f_{x_n}\right)d\Omega$$

որտեղ f ֆունկցիայի արժեքները $\partial\Omega$-ի վրա տրված են:

Մինիմումի գոյության անհրաժեշտ պայման է հանդիսանում հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\frac{\partial F}{\partial f}-\frac{d}{dx_1}\frac{\partial F}{\partial f_{x_1}}-\cdots-\frac{d}{dx_n}\frac{\partial F}{\partial f_{x_n}}=0$$

Եզրային պայմաններ

Նախորդիվ դիտարկել էինք այնպիսի խնդիրներ, որտեղ ֆունկցիան արժեքները տրված տիրույթի եզրի տրված են:Սակայն որոշ խնդիրնորում ֆունկցիան տիրույթի եզրում տրված չէ, և տրվում են այլ տիպի եզրային պայմաններ:Նման դեպքերում որպես եզրային պայման դիտարկվում են հետևյալ պայմանները.

Մեկ փոփոխականի ֆունկցիա

$$\frac{\partial F}{\partial f'} = 0$$

Երկու անհայտ ֆունկցիա

$$\frac{\partial F}{\partial f'} = \frac{\partial F}{\partial g'}$$

Երկու փոփոխականի ֆունկցիա

$$F_{u_x}\frac{dy}{ds} - F_{u_y}\frac{dx}{ds} = 0$$

որոնք հայտնի են որպես *բնական կամ գլխավոր* եզրային պայմաններ:

Պայմանական էքստրեմում

Այսպիսի վարիացիոն խնդիրներում անհրաժեշտ է մինիմիզացնել (մաքսիմիզացնել) տրված ֆունկցիոնալը, պայմանով, որ մեկ այլ ֆունկցիոնալ ընդունում է որևէ արժեք այդ ֆունկցիայի համար: Այսինքն, եթե դիտարկենք ֆունկցիանալ, որի արժեքների բազմությունը մեկ փոփոխականի ֆունկցիաներ են, ապա կունենանք.

$$I(f) = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, f, f'\right) dx$$

$$\int_{x_0}^{x_1} G\left(x, f, f'\right) dx = C$$

Այս խնդրի համար Էյլեր-Լագրանժի հավասարումը հետևյալն է.

$$\frac{\partial (F + \lambda G)}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial (F + \lambda G)}{\partial f'} = 0$$

Մոտավոր մեթոդներ. Վերջավոր էլեմենտների մեթոդ

Խնդիրների վարիացիոն մեթոդով ձևակերպումը, և վարիացիոն մեթոդների ավելի թույն պայմանները թույլ են տալիս այդ խնդիրները լուծել մոտավոր մեթոդներով, որոնք հաճախ անվանվում են ուղիղ մեթոդներ: Ուղիղ մեթոդներից է Ռիտցի մինիմիզացնող հաջորդականության մեթոդը, որը քննության կառնենք:

Ռիտցի մեթոդ

Դիտարկենք որևէ վարիացիոն մեթոդով տրված մինիմիզացիայի խնդիր.

$$I\left(f\right)\longrightarrow min,\ f\in\Gamma$$

որտեղ I ֆունկցիոնալը տրված տիրույթում որոշյալ ինտեգրալ է:

Մոտավոր լուծում կարելի է ստանալ, եթե ֆունկցիոնալի արժեքների բազմությունը սահմանափակենք որևէ վերջավոր չափանի ենթատարածությունով, որն ունի $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ բազիս:,

$$\Gamma_N\in\Gamma$$

Ենթադրենք, որ I ֆունկցիոնալի արժեքների տիրույթը ունի ճշգրիտ ստորին եզր, նշանակենք այն α_0 ով: Այդ դեպքում գոյություն ունի $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ հաջորդականություն այնպիսին, որ

$$\lim_{n\to\infty}I\left(f_n\right)=\lim_{n\to\infty}I\left(\sum_{j=1}^n\gamma_j\varphi_j\right)=\alpha_0$$

և ֆունկցիոնալի որոշման տիրույթի ցանկացած այլ g ֆունկցիայի համար

$$I\left(g\right)\geq\alpha_0$$

լուծումը փնտրենք հետևյալ կերպ.

$$f_0=\sum_{j=1}^N\gamma_j\varphi_j,\ \gamma_j\in\mathbb{R}$$

Այդ դեպքում խնդիրը բերվում է սովորական մինիմումի խնդրի.

$$\frac{\partial I}{\partial\gamma_i}=\frac{\partial}{\partial\gamma_i}I\left(\sum_{j=1}^N\gamma_j\varphi_j\right)=0$$

Պուասոնի հավասարման լուծում Ռիտցի մեթոդով

Դիտարկենք հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u\Big|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

որտեղ $D = [x_0, x_N] \times [y_0, y_M]$:

Այս դիֆերենցիալ հավասարման համապատասխան վարիացիոն խնդիրը կլինի.

$$I(u) = \frac{1}{2}\iint\limits_D \left[u_x^2 + u_y^2\right] dxdy + \iint\limits_D fudxdy \longrightarrow min$$

D տիրույթը տրոհենք ուղղանկյուն եղանկյունների, և որպես բազիսային ֆունկցիաներ վերցնենք Կուրանտի ֆունկցիաները.

$$\varphi_{i,j}(x,y) = \varphi\left(\frac{x - x_i}{h_1}, \frac{y - y_j}{h_2}\right)$$

Որոնելի ֆունկցիան կփնտրենք բազիսային ֆունկցիաների գծային կոմբինացիայի տեսքով.

$$u(x,y) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} u_{ij}\varphi_{i,j}(x,y)$$

Ուստի ինտեգրալային ֆունկցիոնալը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$\frac{1}{2}\iint\limits_D \left[\left(\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} u_{ij}\varphi_{x,ij}(x,y)\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} u_{ij}\varphi_{y,ij}(x,y)\right)^2\right] dxdy + \iint\limits_D f(x,y)\left[\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} u_{ij}\varphi_{ij}(x,y)\right] dxdy$$

Համաձայն էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանի.

$$\frac{\partial I}{\partial u_{kl}} = \frac{\partial}{\partial u_{kl}} I\left(\sum_{j=0}^{M} u_{ij}\varphi_{i,j}(x,y)\right) = 0$$

Դիտարկենք առաջին կրկնակի գումարը.

$$\left(\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} u_{ij}\varphi_{x,ij}(x,y)\right)^2 = u_{kl}^2\varphi_{x,kl}^2(x,y) + 2u_{kl}\varphi_{x,kl}(x,y)[\ldots] + [\ldots]^2$$

որտեղ բազմակետերով արտահայտությունը իր մեջ չի պարունակում u_{kl} ը:
Հանգունորեն, երկրորդ կրկնակի գումարի համար՝

$$\left(\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} u_{ij}\varphi_{y,ij}(x,y)\right)^2 = u_{kl}^2\varphi_{y,kl}^2(x,y) + 2u_{kl}\varphi_{y,kl}(x,y)[\ldots] + [\ldots]^2$$

Այսպիսով ավելի պարզեցված տեսքով համակարգը ունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{\partial}{\partial u_{kl}} I\left(u\right) = \iint\limits_{D} \left[2u_{kl}\varphi_{x,kl}^2(x,y) + 2\varphi_{x,kl}(x,y)[\dots] + 2u_{kl}\varphi_{y,kl}^2(x,y) + 2\varphi_{y,kl}(x,y)[\dots] + 2f(x,y)\varphi_{kl}(x,y)\right] dxdy$$

Դիտարկենք $\varphi_{x,kl}(x,y)$ և $\varphi_{y,kl}(x,y)$ ֆունկցիաները:

$$\varphi_{x,kl}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in S_1 \\ \frac{1}{h_1}, & (x,y) \in S_2 \\ \frac{1}{h_1}, & (x,y) \in S_3 \\ 0, & (x,y) \in S_4 \\ -\frac{1}{h_1}, & (x,y) \in S_5 \\ -\frac{1}{h_1}, & (x,y) \in S_6 \\ 0, otherwise \end{cases}, \quad \varphi_{y,kl}(x,y) = \begin{cases} -\frac{1}{h_2}, & (x,y) \in S_1 \\ -\frac{1}{h_2}, & (x,y) \in S_2 \\ 0, & (x,y) \in S_3 \\ \frac{1}{h_2}, & (x,y) \in S_4 \\ \frac{1}{h_2}, & (x,y) \in S_5 \\ 0, & (x,y) \in S_6 \\ 0, otherwise \end{cases}$$

Քանի որ $\varphi_{x,kl}^2(x,y)$ և $\varphi_{y,kl}^2(x,y)$ ֆունկցիաները ոչ զրոյական են $[x_{k-1,l}, x_{k+1,l}] \times [y_{k,l-1}, y_{k,l+1}]$ ում, ապա

$$\iint\limits_{D} 2u_{kl}\varphi_{x,kl}^2(x,y)dxdy = 4u_{kl}\frac{h_2}{h_1}$$

$$\iint\limits_{D} 2u_{kl}\varphi_{y,kl}^2(x,y)dxdy = 4u_{kl}\frac{h_1}{h_2}$$

Քանի որ յուրաքանչյուր φ_{kl} բազիսային ֆունկցիա հատվում է $\varphi_{k-1,l}$, $\varphi_{k+1,l}$, $\varphi_{k,l-1}$, $\varphi_{k,l+1}$ ֆունկցիաների հետ, ապա

$$\iint\limits_{D} 2\varphi_{x,kl}(x,y)[\dots]dxdy =$$

$$2\iint\limits_{D} \varphi_{x,kl}(x,y)[u_{k-1,l}\varphi_{x,k-1,l}(x,y) + u_{k+1,l}\varphi_{x,k+1,l}(x,y) + u_{k,l-1}\varphi_{x,k,l-1}(x,y) + u_{k,l+1}\varphi_{x,k,l+1}(x,y)]dxdy =$$

$$= -2u_{k-1,l}\frac{h_2}{h_1} - 2u_{k+1,l}\frac{h_2}{h_1}$$

Հանգունորեն՝

$$2\iint\limits_{D} \varphi_{y,kl}(x,y)[\dots]dxdy = -2u_{k,l-1}\frac{h_1}{h_2} - 2u_{k,l+1}\frac{h_1}{h_2}$$

Եվ վերջապես

$$2\iint\limits_{D} f(x,y)\varphi_{kl}(x,y)dxdy \approx 2f_{kl}h_1h_2$$

Դիրիխլեի եզրային պայմանների համար կունենանք:

$$u_{0,l} = u_{N,l} = u_{k,0} = u_{k,M} = 0$$

Այսպիսով, ստացանք հետևյալ հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} 2\left[\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right]u_{kl} - \frac{1}{h_1^2}u_{k-1,l} - \frac{1}{h_1^2}u_{k+1,l} - \frac{1}{h_2^2}u_{k,l-1} - \frac{1}{h_2^2}u_{k,l+1} + f_{kl} = 0 \\ u_{0,l} = u_{N,l} = u_{k,0} = u_{k,M} = 0 \end{cases}$$

Ծրագրային իրականացում

Պուասոնի հավասարման մոտավոր լուծումը իրականացնելու համար օգտվենք Python ծրագրավորմալ լեզվից, օգտագործելով Numpy գրադարանը, որը հարմար է բազմաչափ զանգվածների հետ մաթեմատիկական գործողություններ իրականացնելու համար: Վիզուալի կառուցալու համար կօգտվենք Matplotlib գրադարանից:

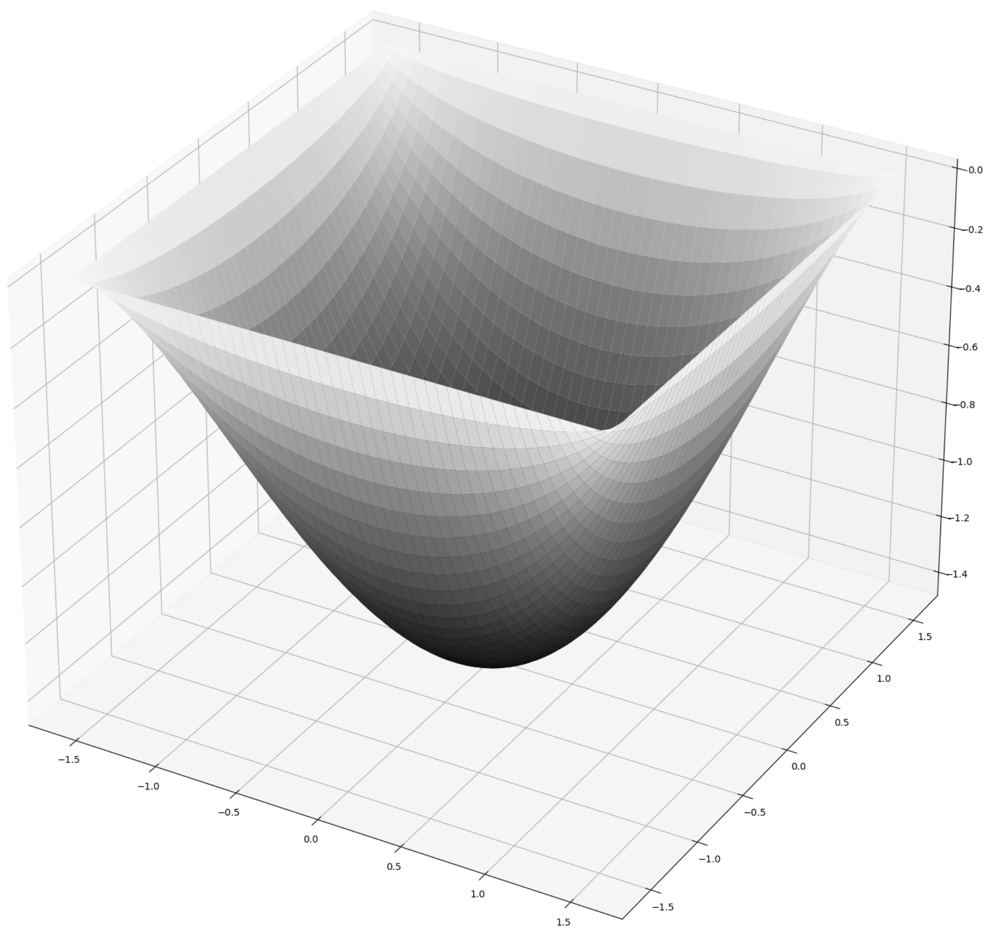
Ծրագրի սկզբում տրվում է ուղղանկյուն տիրույթի սահմանները և դրա տրոհման h_1 և h_2 քայլերը, f ֆունկցիան: Հաջորդիվ կազմվում է հավասարումների համակարգը, կանչվում այն լուծող ֆունկցիան: Այնուհետև բազիսային ֆունկցիաների միջոցով կառուցվում է մոտարկող ֆունկցիան:

Օրինակ

$$\begin{cases} \Delta u = 2 \\ u\Big|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

$$D = \left[-\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}\right] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}\right], \; h_1 = h_2 = \frac{\pi}{200}$$

Խնդրի համար ստացված լուծումը.



Նկար 13

Բիհարմոնիկ հավասարում

Դիտարկենք հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\begin{cases} \Delta^2 u &= f \\ u\Big|_{\partial D} &= 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial D} &= 0 \end{cases}$$

որտեղ $D = [x_0, x_N] \times [y_0, y_M]$:

Այս դիֆերենցիալ հավասարման համապատասխան վարիացիոն խնդիրը կլինի.

$$I(u) = \frac{1}{2} \iint\limits_D \left[u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2\right] dxdy - \iint\limits_D fudxdy \longrightarrow min$$

D տիրույթը տրոհենք ուղղանկյուների h_1 և h_2 քայլերով համապատասխանաբար ըստ x և y կոորդինատների: Որոնելի ֆունկցիան կփնտրենք բազիսային ֆունկցիաների գծային կոմբինացիայի տեսքով.

$$u(x,y) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} u_{ij} \varphi^{ij}(x,y)$$

Հետևաբար ինտեգրալ ֆունկցիոնալը կունենք հետևյալ տեսքը.

$$\frac{1}{2} \iint\limits_D \left[\left(\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} u_{ij} \varphi_{xx}^{ij}(x,y) \right)^2 + 2 \left(\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} u_{ij} \varphi_{xy}^{ij}(x,y) \right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} u_{ij} \varphi_{yy}^{ij}(x,y) \right)^2 \right] dxdy - \iint\limits_D f(x,y) \left[\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} u_{ij} \varphi^{ij}(x,y) \right] dxdy$$

Համաձայն էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանի.

$$\frac{\partial I}{\partial u_{kl}} = \frac{\partial}{\partial u_{kl}} I \left(\sum_{j=0}^{M} u_{ij} \varphi^{ij}(x,y) \right) = 0$$

Դիտարկենք առաջին կրկնակի գումարը.

$$\left(\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} u_{ij} \varphi_{xx}^{ij}(x,y) \right)^2 = \left[u_{kl} \varphi_{xx}^{kl}(x,y)\right]^2 + 2u_{kl} \varphi_{xx}^{kl}(x,y)[\dots] + [\dots]^2$$

որտեղ բազմակետերով արտահայտությունը իր մեջ չի պարունակում u_{kl} ը: Հանգունորեն երկրորդ կրկնակի գումարի համար.

$$\left(\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} u_{ij} \varphi_{xy}^{ij}(x,y) \right)^2 = \left[u_{kl} \varphi_{xy}^{kl}(x,y)\right]^2 + 2u_{kl} \varphi_{xy}^{kl}(x,y)[\dots] + [\dots]^2$$

Հանգունորեն երրորդ կրկնակի գումարի համար.

$$\left(\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} u_{ij}\varphi_{yy}^{ij}(x,y)\right)^2 = \left[u_{kl}\varphi_{yy}^{kl}(x,y)\right]^2 + 2u_{kl}\varphi_{yy}^{kl}(x,y)[\dots] + [\dots]^2$$

Այսպիսով ավելի պարզեցված տեսքով համակարգը ունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{\partial}{\partial u_{kl}} I(u) = \iint\limits_D \left[2u_{kl}\left\{\varphi_{xx}^{kl}(x,y)\right\}^2 + 2\varphi_{xx}^{kl}(x,y)[\dots] + 4u_{kl}\left\{\varphi_{xy}^{kl}(x,y)\right\}^2 + 4\varphi_{xy}^{kl}(x,y)[\dots] + 2\left\{\varphi_{yy}^{kl}(x,y)\right\}^2 + 2u_{kl}\varphi_{yy}^{kl}(x,y)[\dots] + 2f(x,y)\varphi_{kl}(x,y)\right] dxdy$$

Քանի որ տրված են Դիրիխլեի և Նեյմանի եզրային պայմանները, կդիտարկենք միայն $2 \le k \le M-2, 2 \le l \le N-2$ դեպքերը:
Ինտեգրալը հաշվենք անդամ առ անդամ:

$$\iint\limits_D 2u_{kl}\left\{\varphi_{xx}^{kl}(x,y)\right\}^2 dxdy = 2u_{kl}\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}}\int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}}\left\{B_k''(x)B_l(y)\right\}^2 dxdy = 2u_{kl}\cdot\frac{6}{h_1^3}\cdot\frac{151}{140}h_2$$

$$\iint\limits_D 4u_{kl}\left\{\varphi_{xy}^{kl}(x,y)\right\}^2 dxdy = 4u_{kl}\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}}\int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}}\left\{B_k'(x)B_l'(y)\right\}^2 dxdy = 4u_{kl}\cdot\frac{3}{2h_1}\cdot\frac{3}{2h_2}$$

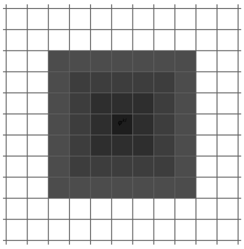
$$\iint\limits_D 2u_{kl}\left\{\varphi_{yy}^{kl}(x,y)\right\}^2 dxdy = 2u_{kl}\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}}\int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}}\left\{B_k(x)B_l''(y)\right\}^2 dxdy = 2u_{kl}\cdot\frac{151}{140}h_2\cdot\frac{6}{h_1^3}$$

$$\iint\limits_D 2f(x,y)\varphi^{kl}(x,y)dxdy = 2\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}}\int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} f(x,y)B_k(x)B_l(y)dxdy \approx$$

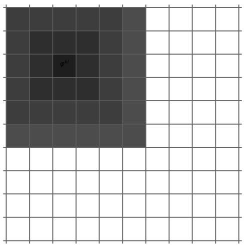
$$\approx \frac{2}{9}h_1h_2\left[f_{k-1,l} + 2f_{k,l} + f_{k+1,l}\right]\left[f_{k,l-1} + 2f_{k,l} + f_{k,l+1}\right]$$

Դիտարկենք մյուս ինտեգրալները: Քանի որ φ^{ij} բազիսային ֆունկցիաները ունեն լոկալ կրողներ $4 \times 4 = 16$ ուղղանկյուն էլեմենտներում, ապա տրված φ^{kl} ֆունկցիան հատվում է 49 այլ բազիսային ֆունկցիաների հետ: Բացառություն են կազմում $i = 2, M-2$, $j = 2, N-2$ դեպքերը, որոնց համար լոկալ կրողը $6 \times 7 = 42$ է եզրին հարող հանգույցների համար, և $6 \times 6 = 36$ անկյուններին հարող հանգույցների համար: Ստորև ներկայացվում է երեք հնարավոր դեքերը (արտակատկերման համար ներկված հանգույցները պատկերված են ուղղանկյունների տեսքով):

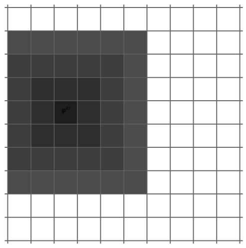
$$\iint\limits_D 2\varphi_{xx}^{kl}(x,y)[\dots]dxdy, \iint\limits_D 4\varphi_{xy}^{kl}(x,y)[\dots]dxdy, \iint\limits_D 2\varphi_{yy}^{kl}(x,y)[\dots]dxdy$$



Նկար 14



Նկար 15



Նկար 16

ինտեգրալները ներկայացնենք կրկնակի ինտեգրալների տեսքով:

$$\iint\limits_D 2\varphi_{xx}^{kl}(x,y)[\ldots]dxdy = 2\sum_{\substack{i=k-3\\ i\neq k}}^{k+3}\sum_{\substack{j=l-3\\ j\neq l}}^{l+3} u_{ij}\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k^{''}(x)B_i^{''}(x)dx\int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y)B_j(y)dy$$

$$\iint\limits_D 4\varphi_{xy}^{kl}(x,y)[\ldots]dxdy = 4\sum_{\substack{i=k-3\\ i\neq k}}^{k+3}\sum_{\substack{j=l-3\\ j\neq l}}^{l+3} u_{ij}\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k^{'}(x)B_i^{'}(x)dx\int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l^{'}(y)B_j^{'}(y)dy$$

$$\iint\limits_D 2\varphi_{yy}^{kl}(x,y)[\ldots]dxdy = 2\sum_{\substack{i=k-3\\ i\neq k}}^{k+3}\sum_{\substack{j=l-3\\ j\neq l}}^{l+3} u_{ij}\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x)B_i(x)dx\int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l^{''}(y)B_j^{''}(y)dy$$

Դիտարկենք հետևյալ դեքպերը.

1. $3 \le k \le M-3,\ 3 \le l \le N-3$

   Առաջին ինտեգրալի համար

$$\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k^{''}(x)B_{k-3}^{''}(x)dx = \frac{3}{8h_1^3},\ \int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k^{''}(x)B_{k-2}^{''}(x)dx = 0,\ \int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k^{''}(x)B_{k-1}^{''}(x)dx = -\frac{27}{8h_1^3}$$

$$\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k^{''}(x)B_{k+1}^{''}(x)dx = -\frac{27}{8h_1^3},\ \int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k^{''}(x)B_{k+2}^{''}(x)dx = 0,\ \int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k^{''}(x)B_{k+3}^{''}(x)dx = \frac{3}{8h_1^3}$$

$$\int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y)B_{l-3}(y)dy = \frac{h_2}{2240},\ \int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y)B_{l-2}(y)dy = \frac{3h_2}{56},\ \int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y)B_{l-1}(y)dy = \frac{1991h_2}{2240}$$

$$\int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y)B_{l+1}(y)dy = \frac{1991h_2}{2240},\ \int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y)B_{l+2}(y)dy = \frac{3h_2}{56},\ \int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y)B_{l+3}(y)dy = \frac{h_2}{2240}$$

Երկրորդ ինտեգրալի համար

$$\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k^{'}(x)B_{k-3}^{'}(x)dx = \frac{-3}{160h_1}, \int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k^{'}(x)B_{k-2}^{'}(x)dx = \frac{-9}{20h_1}, \int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k^{'}(x)B_{k-1}^{'}(x)dx = \frac{-9}{32h_1},$$

$$\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k^{'}(x)B_{k+1}^{'}(x)dx = \frac{-9}{32h_1}, \int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k^{'}(x)B_{k+2}^{'}(x)dx = \frac{-9}{20h_1}, \int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k^{'}(x)B_{k+3}^{'}(x)dx = \frac{-3}{160h_1},$$

$$\int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l^{'}(y)B_{l-3}^{'}(y)dy = \frac{-3}{160h_2}, \int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l^{'}(y)B_{l-2}^{'}(y)dy = \frac{-9}{20h_2}, \int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l^{'}(y)B_{l-1}^{'}(y)dy = \frac{-9}{32h_2},$$

$$\int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l^{'}(y)B_{l+1}^{'}(y)dy = \frac{-9}{32h_2}, \int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l^{'}(y)B_{l+2}^{'}(y)dy = \frac{-9}{20h_2}, \int\limits_{y_{l+2}}^{y_{l+2}} B_l^{'}(y)B_{l+3}^{'}(y)dy = \frac{-3}{160h_2},$$

Երրորդ ինտեգրալի համար

$$\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x)B_{k-3}(x)dx = \frac{h_1}{2240}, \int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x)B_{k-2}(x)dx = \frac{3h_1}{56}, \int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x)B_{k-1}(x)dx = \frac{1991h_1}{2240}$$

$$\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x)B_{k+1}(x)dx = \frac{1991h_1}{2240}, \int\limits_{x_{k-2}}^{x_{l+2}} B_k(x)B_{k+2}(x)dx = \frac{3h_1}{56}, \int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x)B_{k+3}(x)dx = \frac{h_1}{2240}$$

$$\int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l^{''}(y)B_{l-3}^{''}(y)dy = \frac{3}{8h_2^3}, \int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l^{''}(y)B_{l-2}^{''}(y)dy = 0, \int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l^{''}(y)B_{l-1}^{''}(y)dy = -\frac{27}{8h_2^3}$$

$$\int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l^{''}(y)B_{l+1}^{''}(y)dy = -\frac{27}{8h_2^3}, \int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l^{''}(y)B_{l+2}^{''}(y)dy = 0, \int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l^{''}(y)B_{l+3}^{''}(y)dy = \frac{3}{8h_2^3}$$

2. $k = 2, l = 2$

Առաջին ինտեգրալի համար

$$\int\limits_{x_0}^{x_4} B_2^{''}(x)B_0^{''}(x)dx = \frac{3}{8h_1^3}, \int\limits_{x_0}^{x_4} B_2^{''}(x)B_1^{''}(x)dx = -\frac{27}{8h_1^3}$$

$$\int\limits_{x_0}^{x_4} B_2^{''}(x)B_3^{''}(x)dx = -\frac{27}{8h_1^3}, \int\limits_{x_0}^{x_4} B_2^{''}(x)B_4^{''}(x)dx = 0, \int\limits_{x_0}^{x_4} B_2^{''}(x)B_5^{''}(x)dx = \frac{3}{8h_1^3}$$

$$\int\limits_{y_0}^{y_4} B_2(y)B_0(y)dy = \frac{121h_2}{2240}, \int\limits_{y_0}^{y_4} B_2(y)B_1(y)dy = \frac{1991h_2}{2240}$$

$$\int_{y_0}^{y_4} B_2(y)B_3(y)dy = \frac{1991h_2}{2240}, \int_{y_0}^{y_4} B_l(y)B_4(y)dy = \frac{3h_2}{56}, \int_{y_0}^{y_4} B_l(y)B_{l+3}(y)dy = \frac{h_2}{2240}$$

Երկրորդ ինտեգրալի համար

$$\int_{x_0}^{x_4} B_2'(x)B_0'(x)dx = -\frac{15}{32h_1}, \int_{x_0}^{x_4} B_2'(x)B_1'(x)dx = -\frac{9}{32h_1},$$

$$\int_{x_0}^{x_4} B_2'(x)B_3'(x)dx = \frac{-9}{32h_1}, \int_{x_0}^{x_4} B_k'(x)B_3'(x)dx = \frac{-9}{20h_1}, \int_{x_0}^{x_4} B_k'(x)B_5'(x)dx = \frac{-3}{160h_1},$$

$$\int_{y_0}^{y_4} B_2'(y)B_0'(y)dy = -\frac{9}{32h_2}, \int_{y_0}^{y_4} B_l'(y)B_1'(y)dy = -\frac{9}{32h_2},$$

$$\int_{y_0}^{y_4} B_2'(y)B_3'(y)dy = \frac{-9}{32h_2}, \int_{y_0}^{y_4} B_l'(y)B_3'(y)dy = \frac{-9}{20h_2}, \int_{y_0}^{y_4} B_l'(y)B_5'(y)dy = \frac{-3}{160h_2},$$

Երրորդ ինտեգրալի համար

$$\int_{x_0}^{x_4} B_2(x)B_0(x)dx = \frac{121h_1}{2240}, \int_{x_0}^{x_4} B_2(x)B_1(x)dx = \frac{1991h_1}{2240}$$

$$\int_{x_0}^{x_4} B_2(x)B_3(x)dx = \frac{1991h_1}{2240}, \int_{x_0}^{x_4} B_2(x)B_4(x)dx = \frac{3h_1}{56}, \int_{x_0}^{x_4} B_2(x)B_5(x)dx = \frac{h_1}{2240}$$

$$\int_{y_0}^{y_4} B_2''(y)B_0''(y)dy = -\frac{3}{8h_1^2}, \int_{y_0}^{y_4} B_2''(y)B_1''(y)dy = -\frac{27}{8h_2^3}$$

$$\int_{y_0}^{y_4} B_2''(y)B_3''(y)dy = -\frac{27}{8h_2^3}, \int_{y_0}^{y_4} B_2''(y)B_4''(y)dy = 0, \int_{y_0}^{y_4} B_2''(y)B_5''(y)dy = \frac{3}{8h_2^3}$$

3. $k = M - 2, l = N - 2$

   Քանի որ բազիսային ֆունկցիաները սիմետրիկ են, ապա այդ դեպքում կատարվում են նույն հաշվարկները, ինչ նախորդ կետում:

Հաշվի առնելով նախորդիվ հաշվարկված ինտեգրալները, ինչպես նաև Դիրիխլեի և Նեյմանի եզրային պայմանները, կստանանք հետևյալ հավասարումների համակարգը. Դիրիխլեի եզրային պայմաններ.

$$\begin{cases} u_{00} + \dfrac{5}{16}(u_{01} + u_{10}) + \dfrac{1}{16}u_{11} & = 0 \\ u_{M0} + \dfrac{5}{16}(u_{M1} + u_{M-1,0}) + \dfrac{1}{16}u_{M-1,1} & = 0 \\ u_{0N} + \dfrac{5}{16}(u_{1N} + u_{0,N-1}) + \dfrac{1}{16}u_{N-1,1} & = 0 \\ u_{MN} + \dfrac{5}{16}(u_{M-1,N} + u_{M,N-1}) + \dfrac{1}{16}u_{M-1,N-1} & = 0 \end{cases}$$

Նեյմանի եզրային պայմաններ.

$$\begin{cases} \dfrac{3}{4h_2}\left(u_{i1} - u_{i0}\right) + \dfrac{3}{16h_2}\left(u_{i-1,0} + u_{i+1,0} + u_{i-1,1} + u_{i+1,1}\right) & = 0 \\ \dfrac{3}{4h_2}\left(u_{iN} - u_{i,N-1}\right) + \dfrac{3}{16h_2}\left(u_{i-1,N-1} + u_{i+1,N-1} + u_{i-1,N-1} + u_{i+1,N-1}\right) & = 0 \\ \dfrac{3}{4h_1}\left(u_{1j} - u_{0j}\right) + \dfrac{3}{16h_1}\left(u_{0,j-1} + u_{0,j+1} + u_{1,j-1} + u_{1,j+1}\right) & = 0 \\ \dfrac{3}{4h_1}\left(u_{Mj} - u_{M-1,j}\right) + \dfrac{3}{16h_1}\left(u_{M-1,j-1} + u_{M-1,j+1} + u_{M-1,j-1} + u_{M-1,j+1}\right) & = 0 \end{cases}$$

Մինիմումի պայմաններ.

$$\left(\begin{bmatrix} 3/8h_1^2 \\ 0 \\ -27/8h_1^3 \\ 6/h_1^3 \\ -27/8h_1^3 \\ 0 \\ 3/8h_1^2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} h_2/2240 \\ 3h_2/56 \\ 1991h_2/2240 \\ 151h_2/140 \\ 1991h_2/2240 \\ 3h_2/56 \\ h_2/2240 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3/160h_1 \\ -9/20h_1 \\ -9/32h_1 \\ 3/2h_1 \\ -9/32h_1 \\ -9/20h_1 \\ -3/160h_1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3/160h_1 \\ -9/20h_1 \\ -9/32h_1 \\ 3/2h_1 \\ -9/32h_1 \\ -9/20h_1 \\ -3/160h_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_2/2240 \\ 3h_2/56 \\ 1991h_2/2240 \\ 151h_2/140 \\ 1991h_2/2240 \\ 3h_2/56 \\ h_2/2240 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3/8h_1^2 \\ 0 \\ -27/8h_1^3 \\ 6/h_1^3 \\ -27/8h_1^3 \\ 0 \\ 3/8h_1^2 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} u_{k-3,l-3} & u_{k-2,l-3} & u_{k-1,l-3} & u_{k,l-3} & u_{k+1,l-3} & u_{k+2,l-3} & u_{k+3,l-3} \\ u_{k-3,l-2} & u_{k-2,l-2} & u_{k-1,l-2} & u_{k,l-2} & u_{k+1,l-2} & u_{k+2,l-2} & u_{k+3,l-2} \\ u_{k-3,l-1} & u_{k-2,l-1} & u_{k-1,l-1} & u_{k,l-1} & u_{k+1,l-1} & u_{k+2,l-1} & u_{k+3,l-1} \\ u_{k-3,l} & u_{k-2,l} & u_{k-1,l} & u_{k,l} & u_{k+1,l} & u_{k+2,l} & u_{k+3,l} \\ u_{k-3,l+1} & u_{k-2,l+1} & u_{k-1,l+1} & u_{k,l+1} & u_{k+1,l+1} & u_{k+2,l+1} & u_{k+3,l+1} \\ u_{k-3,l+2} & u_{k-2,l+2} & u_{k-1,l+2} & u_{k,l+2} & u_{k+1,l+2} & u_{k+2,l+2} & u_{k+3,l+2} \\ u_{k-3,l+3} & u_{k-2,l+3} & u_{k-1,l+3} & u_{k,l+3} & u_{k+1,l+3} & u_{k+2,l+3} & u_{k+3,l+3} \end{bmatrix} = \frac{2}{9}h_1h_2\left[f_{k-1,l} + 2f_{k,l} + f_{k+1,l}\right]\left[f_{k,l-1} + 2f_{k,l} + f_{k,l+1}\right]$$

$k = 2, M-2$, ինչպես նաև $l = 2, N-2$ -ի համար կազմվում է նույն հավասարումը, փոխելով միայն համապատասխան գործակիցները և դրանց քանակը:

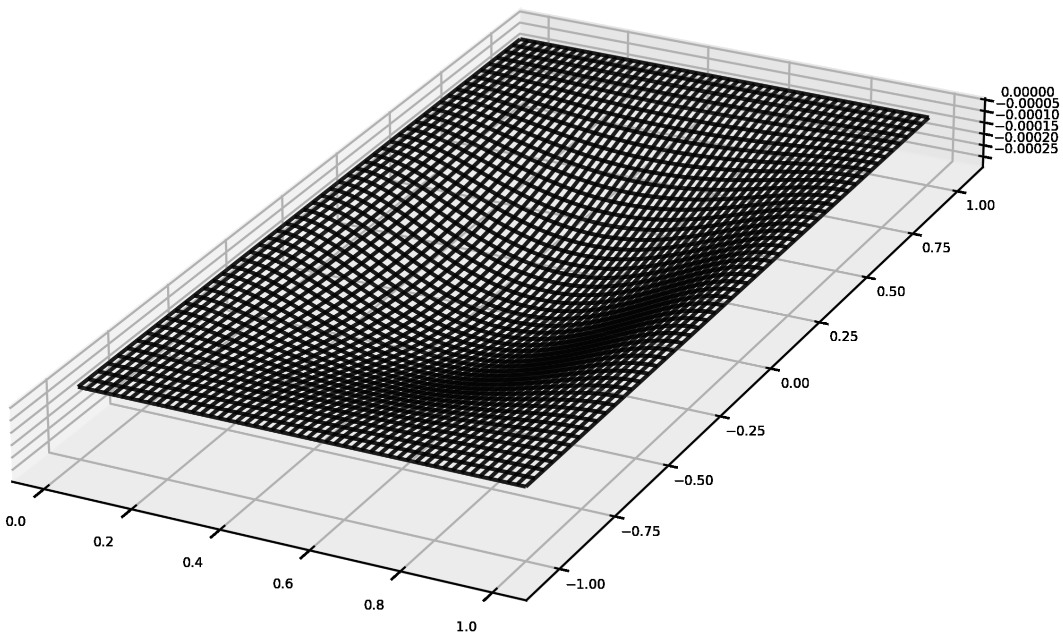
Ծրագրային իրականացում

Ինչպես Պուասոնի հավասարման դեպքում, այնպես էլ այս դեպքում կօգտվենք նույն գործիքներից:

Որպես օրինակ լուծենք հետևյալ հավասարումը տրված կոնկրոտ տիրույթով և f ֆունկցիայով:

$$\begin{cases} \Delta^2 u & = 1 \\ u\Big|_{\partial D} & = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial D} & = 0 \end{cases}$$

որտեղ $D = [0,1] \times [-1,1]\,,\ h_1 = 0.01, h_2 = 0.02$
Խնդրի համար ստացված լուծումը.



Նկար 17