

# Գլուխ 1

## Միաչափ ինտերպոլյացիա

### 1.1 Էրմիթյան ինտերպոլյացիա

Նախքան անդրադառնալ բազմաչափ ինտերպոլյացիայի խնդրին, քննարկենք մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի ինտերպոլյացիայի որոշ դետալներ:

Ենթադրենք տրված են  $f : \Omega \mapsto \Theta, \Omega, \Theta \subset \mathbb{R}$  ֆունկցիան,  $\{x_i\}_{i=0}^N$  կետերը և դրանց համապատասխան  $\{y_i = f(x_i)\}_{i=0}^N$  արժեքները: Յուրաքանչյուր  $[x_i, x_{i+1}]$  հատվածում ինտերպոլացնող ֆունկցիան իրենից ներկայացնում է գլխային ֆունկցիա, որը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$p_1^{(i)}(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1}, i = \overline{0, N-1} \quad (1)$$

Այսպիսով  $[x_0, x_N]$  հատվածում կտոր առ կտոր մոտարկող ֆունկցիան տրվում է հետևյալ կերպ.

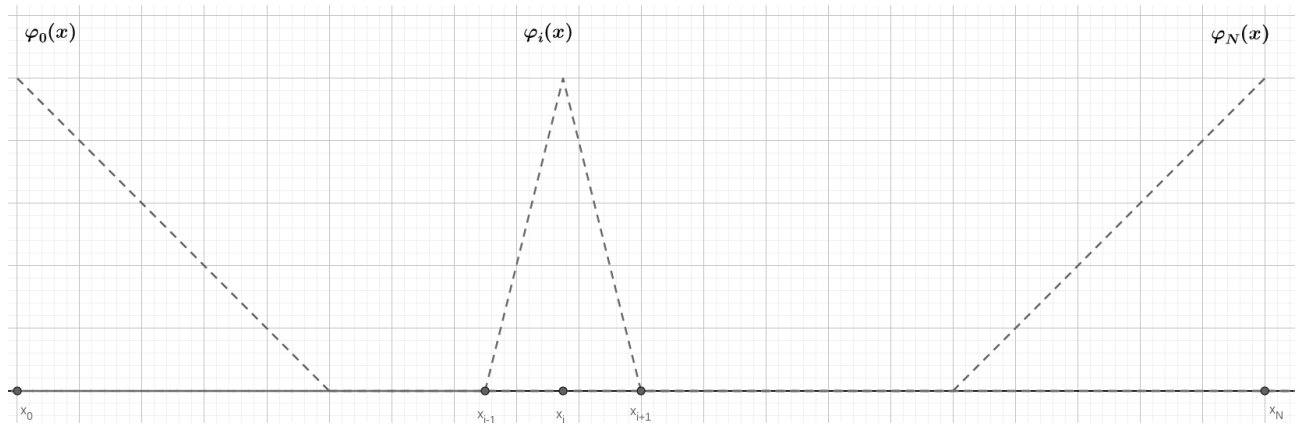
$$p_1(x) = \sum_{i=0}^N \varphi_i(x) y_i \quad (2)$$

Որտեղ

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, x \in [x_0, x_1] \\ 0, x \in [x_1, x_N] \end{cases} \\ \varphi_i(x) &= \begin{cases} 0, x \in [x_0, x_{i-1}] \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, x \in [x_{i+1}, x_N] \end{cases} \\ \varphi_N(x) &= \begin{cases} 0, x \in [x_0, x_{N-1}] \\ \frac{x - x_{N-1}}{x_N - x_{N-1}}, x \in [x_{N-1}, x_N] \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

$\varphi_i(x)$  ֆունկցիաները կոչվում են բազիսային ֆունկցիաներ, որոնք ունեն այսպես կոչված լոկալ կրողներ, քանի որ դրանք ոչ զրոյական են որևէ տիրույթում և զրոյական որոշման

տիրույթի մնացած մասերում: Նմանատիպ բազիսային ֆունկցիաների հիմնական հատկությունն այն է, որ դրանք հավասար են մեկի որևէ կոնկրետ հանգույցում և հավասար են զրոյի մնացած բոլոր հանգույցներում: Նշենք սակայն, որ այս տիպի ինտերպոլյացիան  $C^0$  դասի է, այսինքն միայն անընդհատ է, և հետևաբար կիրառելի չէ այն խնդիրներում, որտեղ պահանջվում է ավելի բարձր կարգի ողորկություն:



Նկար 1.1. Գծային ինտերպոլյացիայի բազիսային ֆունկցիաներ:

Այժմ դիտարկենք հետևյալ խնդիրը. անհրաժեշտ է կառուցել կտոր առ կտոր մոտարկող ֆունկցիա, որը ֆունկցիայի արժեքի հետ մեկտեղ կհամըկնի նաև ֆունկցիայի առաջին կարգի ածանցյալի արժեքի հետ ինտերպոլյացիոն հանգույցներում: Այսինքն.

$$\frac{d^j}{dx^j} f(x_i) = \frac{d^j}{dx^j} p_3(x_i), \quad j = 0, 1; \quad i = \overline{0, N-1} \quad (4)$$

Յուրաքանչյուր  $[x_i, x_{i+1}]$  հատվածում ինտերպոլյացիոն ֆունկցիան իրենից ներկայացնում է խորանարդային ֆունկցիա, որը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով:

$$p_3^{(i)} = \alpha_i(x)f(x_i) + \beta_{i+1}(x)f(x_{i+1}) + \gamma_i(x)f'(x_i) + \delta_{i+1}(x)f'(x_{i+1}) \quad (5)$$

որտեղ

$$\begin{aligned} \alpha_i(x) &= \frac{(x_{i+1} - x)^2 [(x_{i+1} - x_i) + 2(x - x_i)]}{(x_{i+1} - x_i)^3} \\ \beta_{i+1}(x) &= \frac{(x - x_i)^2 [(x_{i+1} - x_i) + 2(x_{i+1} - x)]}{(x_{i+1} - x_i)^3} \\ \gamma_i(x) &= \frac{(x - x_i)(x_{i+1} - x)^2}{(x_{i+1} - x_i)^2}, \quad \delta_{i+1}(x) = \frac{(x - x_i)^2(x - x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)^2} \end{aligned} \quad (6)$$

Այսպիսով  $[x_0, x_N]$  հատվածում կտոր առ կտոր մոտարկող ֆունկցիան ներկայացվում է բազիսային ֆունկցիաների գծային կոմբինացիայի տեսքով.

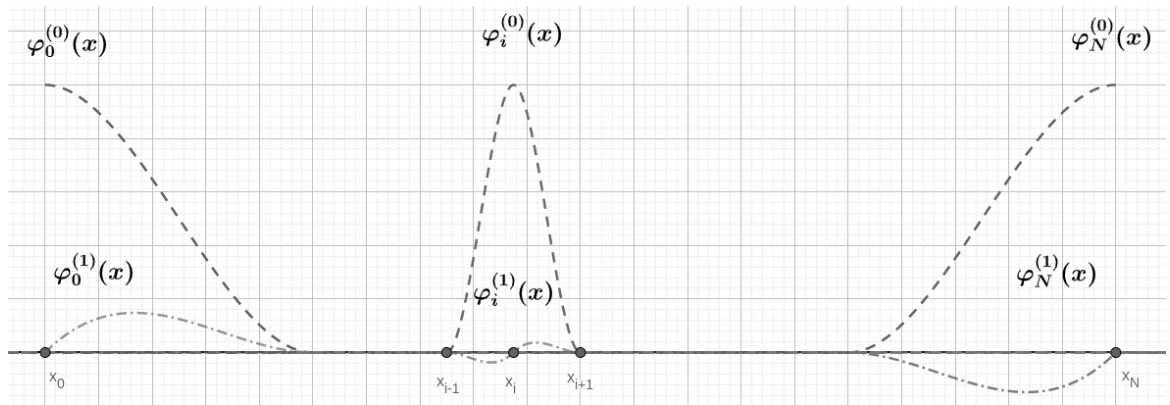
$$p_3(x) = \sum_{i=0}^N \left[ \varphi_i^{(0)} f(x_i) + \varphi_i^{(1)} f'(x_i) \right] \quad (7)$$

որտեղ

$$\begin{aligned} \varphi_0^{(0)}(x) &= \begin{cases} \frac{(x_1 - x)^2 [(x_1 - x_0) + 2(x - x_0)]}{(x_1 - x_0)^3}, & x \in [x_0, x_1] \\ 0, & x \in [x_1, x_N] \end{cases} \\ \varphi_i^{(0)}(x) &= \begin{cases} 0, & x \in [x_0, x_{i-1}] \\ \frac{(x - x_{i-1})^2 [(x_i - x_{i-1}) + 2(x_i - x)]}{(x_i - x_{i-1})^3}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{(x_{i+1} - x)^2 [(x_{i+1} - x_i) + 2(x - x_i)]}{(x_{i+1} - x_i)^3}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & x \in [x_{i+1}, x_N] \end{cases} \\ \varphi_N^{(0)}(x) &= \begin{cases} 0, & x \in [x_0, x_{N-1}] \\ \frac{(x - x_{N-1})^2 [(x_N - x_{N-1}) + 2(x_N - x)]}{(x_N - x_{N-1})^3}, & x \in [x_{N-1}, x_N] \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \varphi_0^{(1)}(x) &= \begin{cases} \frac{(x - x_0)(x_1 - x)^2}{(x_1 - x_0)^2}, & x \in [x_0, x_1] \\ 0, & x \in [x_1, x_N] \end{cases} \\ \varphi_i^{(1)}(x) &= \begin{cases} 0, & x \in [x_0, x_{i-1}] \\ \frac{(x - x_{i-1})^2 (x - x_i)}{(x_i - x_{i-1})^2}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{(x - x_i)(x_{i+1} - x)^2}{(x_{i+1} - x_i)^2}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & x \in [x_{i+1}, x_N] \end{cases} \\ \varphi_N^{(1)}(x) &= \begin{cases} 0, & x \in [x_0, x_{N-1}] \\ \frac{(x - x_{N-1})^2 (x - x_N)}{(x_N - x_{N-1})^2}, & x \in [x_{N-1}, x_N] \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

Վերը ներկայացված ինտերպոլյացիաների օրինակները էրմիթյան



Նկար 1.2. երկրորդ կարգի էրմիթյան ինտերպոլացիայի բազիսային ֆունկցիաներ:

ինտերպոլացիայի մասնավոր դեպքեր են համապատասխանաբար 1 և 2 կարգերի դեպքում: Ընդհանուր դեպքում  $m$ -րդ կարգի էրմիթյան ինտերպոլացիայի պայմանը կարելի է գրել հետևյալ կերպ.

$$\frac{d^k}{dx^k} f(x_i) = \frac{d^k}{dx^k} p_{2m-1}(x_i), \quad i = \overline{0, N}, \quad k = \overline{0, m-1} \quad (10)$$

## 1.2 Քառակուսային և խորանարդային ինտերպոլյացիա

Խնդիրներում, որտեղ անհրաժեշտ է որոշել միայն տրված ֆունկցիան, ֆունկցիայի ածանցյալներն ինտերպոլացնելու փոխարեն դրվում է դրանց անընդհատության պայման հանգուցային կետերում, բավականին հեշտացնելով դրված խնդիրը և դրա լուծումը: Նման տիպի ինտերպոլյացիայի կառուցման պարզագույն օրինակը հետևյալն է. Յուրաքանչյուր  $[x_i, x_{i+1}]$  ինտերվալում կառուցվում է այսիսի պարաբոլ, որ բոլոր  $x_i$  հանգուցային կետերում առանցին կարգի ածանցյալները լինեն անընդհատ:

$$S_2^{(i)}(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i) + c_i (x - x_i)(x - x_{i+1}) \quad (11)$$

Ածանցյալների անընդհատության պայմանից կհետևի, որ

$$c_i + c_{i-1} = \frac{1}{h^2} (f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})) \quad i = \overline{1, N-1} \quad (12)$$

Քանի որ համակարգը պարունակում է  $N - 1$  հավասարում, ապա մնում է մեկ ազատ գործակից, որը կարելի գտնել, որևէ  $x_j$  հանգուցային կետում որոշելով  $S_2^{(j)''}$ -ն:

Առավել կիրառելի են խորանարդային սփլայնները: Այս դեպքում յուրաքանչյուր  $[x_i, x_{i+1}]$  ինտերվալում կառուցվում են երրորդ աստիճանի բազմանդամներ այնպես, որ հանգուցներում առաջին և երկրորդ կարգի ածանցյալները լինեն անընդհատ: Բազմանդամը դիտարկելու փոխարեն դիտարկենք նրա երկրորդ կարգի ածանցյալը: Այն գծային ֆունկցիա է, հետևաբար այն կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$S_3^{(i)''}(x) = c_i \frac{x_{i+1} - x}{x - x_i} + c_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (13)$$

որտեղ  $c_i$  և  $c_{i+1}$ -ը  $x_i$  և  $x_{i+1}$  կետերում երկրորդ կարգի ածանցյալների արժեքներն են: Հաշվի առնելով ինտերպոլյացիոն և անընդհատության պայմանները.

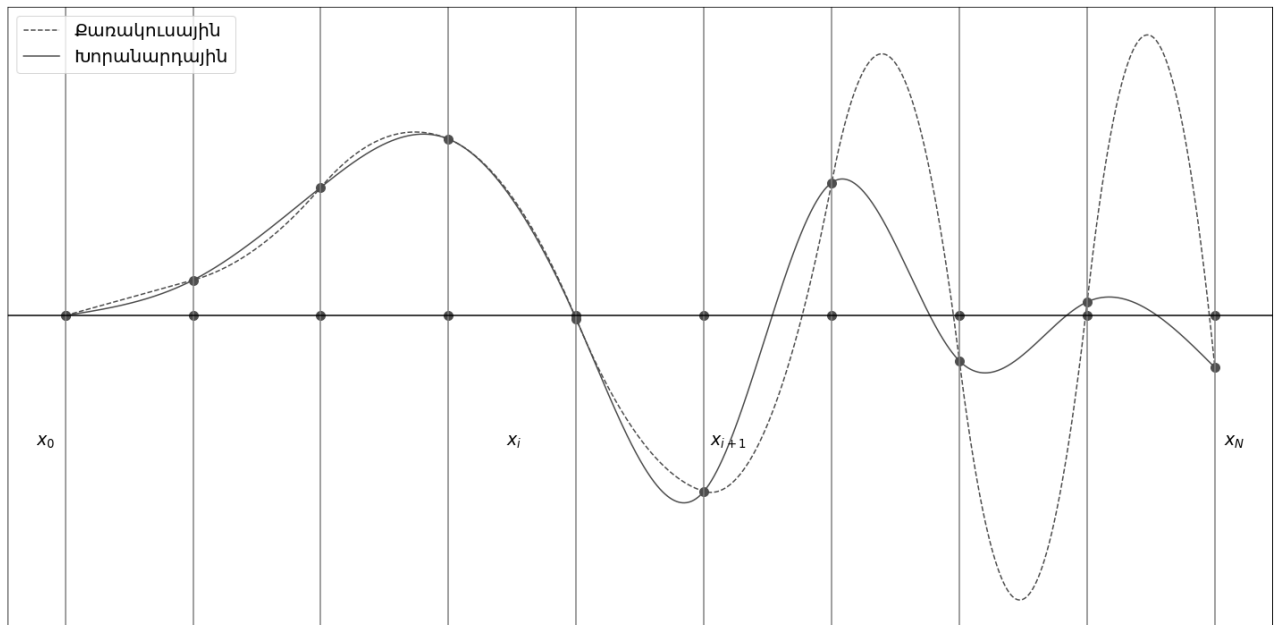
$$\begin{cases} S_3^{(i)}(x_i) &= f_i \\ S_3^{(i)}(x_{i+1}) &= f_{i+1} \\ S_3^{(i-1)'}(x_i) &= S_3^{(i)'}(x_i) \end{cases} \quad (14)$$

կստանանք հետևյալ տեսքի խորանարդային սփլայն.

$$S_3^{(i)}(x) = \frac{c_i}{6h} (x_{i+1} - x)^3 + \frac{c_{i+1}}{6h} (x - x_i)^3 + \left( \frac{f_i}{h} - \frac{hc_i}{6} \right) (x_{i+1} - x) + \left( \frac{f_{i+1}}{h} - \frac{hc_{i+1}}{6} \right) (x - x_i) \quad (15)$$

որտեղից  $c_i$  գործակիցների համար կստացվի հետևյալ հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} c_{i+1} + 4c_i + c_{i-1} = \frac{6}{h^2} (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) & i = \overline{1, N-1} \\ c_0 = A \\ c_N = B \end{cases} \quad (16)$$



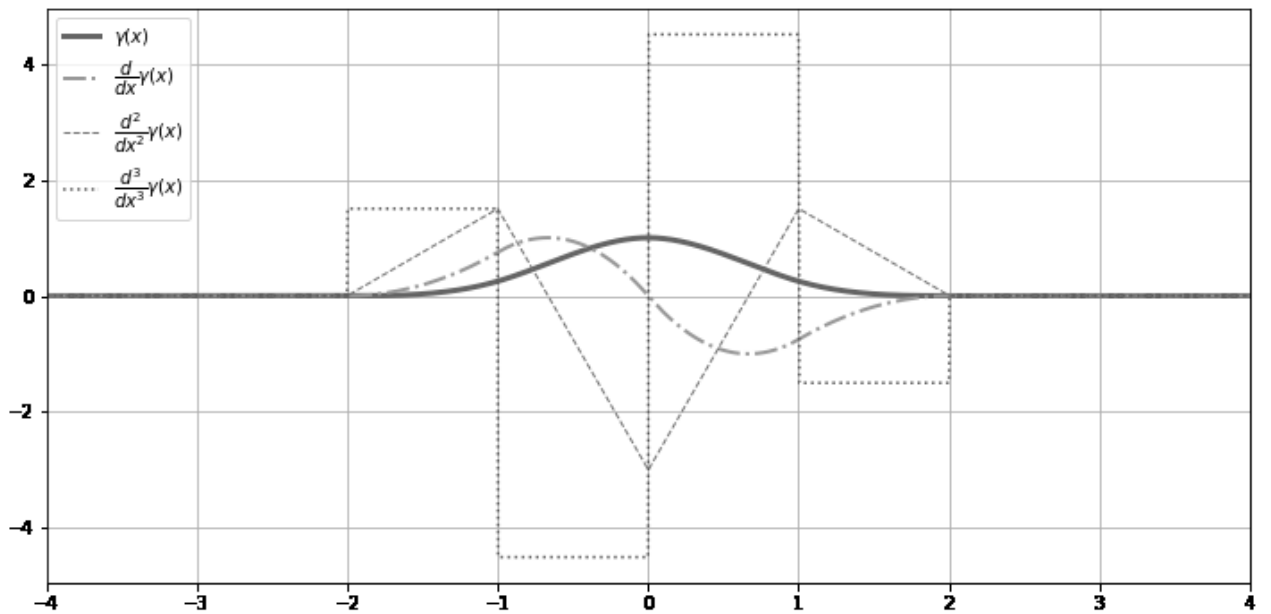
Նկար 1.3. Քառակուսային և խորանարդային ինտերպոլացիաների համեմատում:

Այժմ դիտարկենք լոկալ կրող ունեցող խորանարդային սփլայները: Այդպիսի սփլայներ առաջարկել է ավստրիացի մաթեմատիկոս Առնոլդ Շներբերգը: Դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան.

$$\gamma(x) = \frac{1}{4} (\{x+2\}_+^3 - 4\{x+1\}_+^3 + 6\{x\}_+^3 - 4\{x-1\}_+^3 + \{x-2\}_+^3) \quad (17)$$

որտեղ

$$\{x\}_+ = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (18)$$



Նկար 1.4.  $\gamma(x)$  ֆունկցիան և նրա մինչև երրորդ կարգի ածանցյալները.

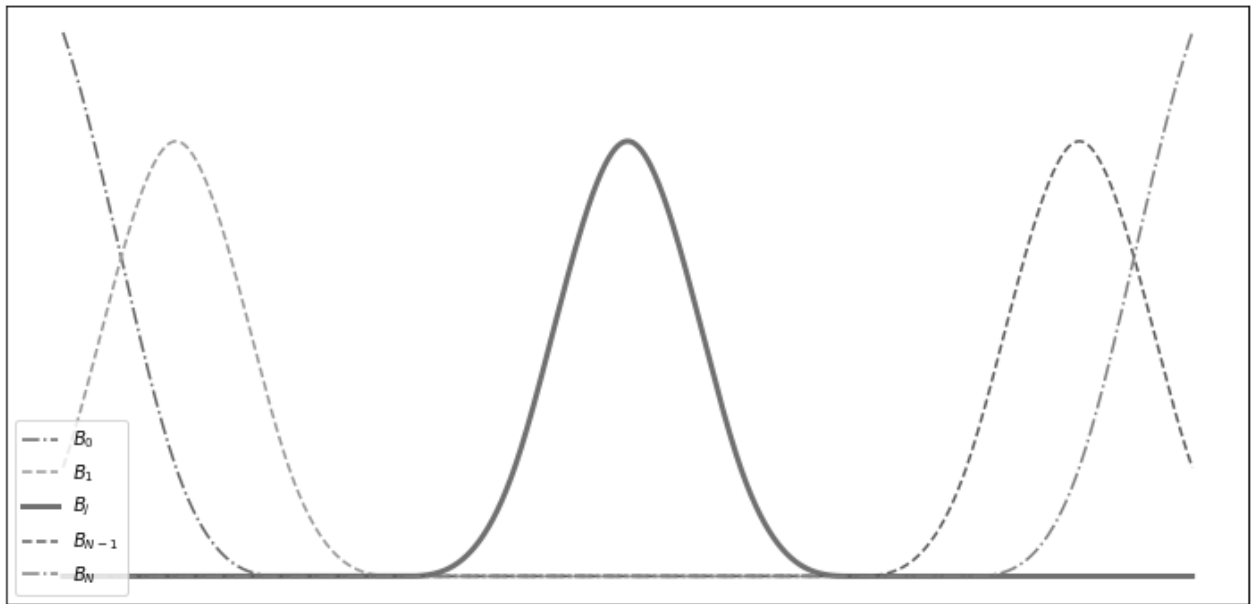
Ենթադրենք տրված է  $[x_0, x_N]$  ինտերվալը տրոհված  $N$  հավասար մասերի  $h$  քայլով: Յուրաքանչյուր  $x_i$  հանգույցի ( $i = \overline{2, N-2}$ ) համար բազիսային ֆունկցիան տրվում է հետևյալ բանաձևով.

$$B_i\left(\frac{x}{h}\right) = \gamma\left(\frac{x-x_0}{h} - i\right) \quad (19)$$

Այս ֆունկցիաները և նրանց մինչև երկրորդ կարգի ածանցյալները հավասար են զրոյի  $\mathbb{R} \setminus (x_{i-2}, x_{i+2})$  տիրույթում: Մնացած բազիսային ֆունկցիաները պետք է կառուցել այլ

Կերպ, քանի որ դրանց մի մասը դուրս է ըկած  $[x_0, x_N]$  ինտերվալից:

$$\begin{aligned}
 B_0\left(\frac{x}{h}\right) &= \gamma\left(\frac{x}{h}\right) + \left\{\frac{h-x}{4h}\right\}_+^3, \quad x \in [x_0, x_2] \\
 B_1\left(\frac{x}{h}\right) &= \gamma\left(\frac{x}{h}\right), \quad x \in [x_0, x_3] \\
 B_{N-1}\left(\frac{x}{h}\right) &= \gamma\left(\frac{x}{h}\right), \quad x \in [x_{N-3}, x_N] \\
 B_N\left(\frac{x}{h}\right) &= \gamma\left(\frac{x}{h}\right) + \left\{\frac{x-(N-1)h}{4h}\right\}_+^3, \quad x \in [x_{N-2}, x_N]
 \end{aligned} \tag{20}$$



Նկար 1.5.  $B_j$  բազիսային ֆունկցիաների գրաֆիկական ներկայացում:

Տրված  $\{(x_j, f_j)\}_{j=0}^N$  ինտերպոլացիոն տվյալներով կառուցենք սփլայն.

$$F(x) = \sum_{i=0}^N \alpha_i B_i\left(\frac{x}{h}\right) \tag{21}$$

Հաշվի առնելով ինտերպոլացիոն պայմանները կստանանք հետևյալ հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} \frac{5}{4}\alpha_0 + \frac{1}{4}\alpha_0 &= f_0 \\ \frac{1}{4}\alpha_{j-1} + \alpha_j + \frac{1}{4}\alpha_{j+1} &= f_j, \quad j = \overline{1, N-1} \\ \frac{5}{4}\alpha_{N-1} + \frac{1}{4}\alpha_N &= f_N \end{cases} \tag{22}$$



## Գլուխ 2

### Երկչափ մոտարկում

Այժմ դիտարկենք երկու փոփոխականի ֆունկցիայի մոտարկման խնդիրը: Ի տարբերություն մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի ինտերպոլյացիայի, այս դեպքում տիրույթի տրոհումը կարելի է իրականացնել կամայական ձևով:

#### Սահմանում.

Կասենք, որ տրված  $f(x, y)$  ֆունկցիան  $C^{(p,q)}$  կարգի ֆունկցիա է, եթե

$$\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}, \quad i = \overline{0, p}, \quad j = \overline{0, q}$$

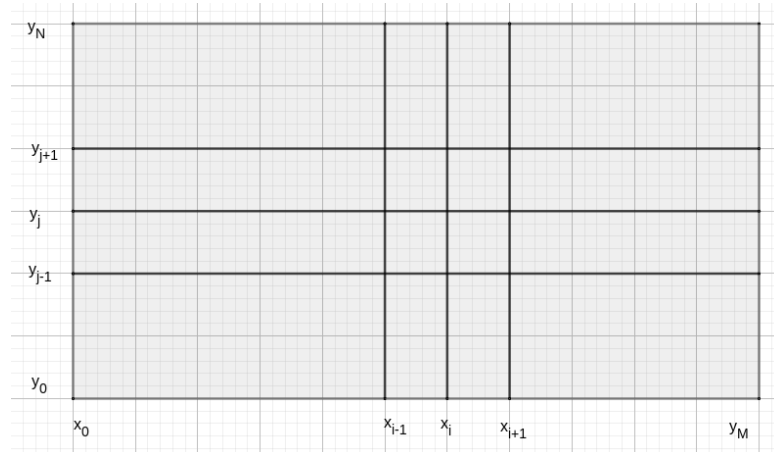
ֆունկցիաները անընդհատ են:

Կախված տրված տիրույթից և դրա տրոհման ձևից, առանձնացվում են հետևյալ մոտարկման ձևերը.

## 2.1 Ուղղանկյուն տիրույթ

Դիցուք տրված են  $f : \Omega \mapsto \Theta$ ,  $\Theta \subset \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = [x_0, x_M] \times [y_0, y_N]$  ուղղանկյուն տիրույթը, որը տրոհված է  $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ , ուղղանկյուն էլեմենտների:

$$x_{i+1} - x_i = h_1, \quad y_{j+1} - y_j = h_2, \quad i = \overline{0, M-1}, j = \overline{0, N-1}$$



Նկար 2.1. Ուղղանկյունաձև տիրույթի տրոհում ուղղանկյուն էլեմենտների:

## 2.1. Էրմիթյան ինտերպոլացիա

Երկգծային ինտերպոլացիա:

Յուրաքանչյուր  $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$  էլեմենտի վրա  $f$  ֆունկցիան մոտարկվում է հետևյալ քառակուսային ֆունկցիայով:

$$p_1^{(i,j)}(x, y) = f_{ij}\alpha_{i,j}(x, y) + f_{i+1,j}\beta_{i+1,j}(x, y) + f_{i,j+1}\gamma_{i,j+1}(x, y) + f_{i+1,j+1}\delta_{i+1,j+1}(x, y) \quad (1)$$

որտեղ

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j}(x, y) &= \frac{1}{h_1 h_2} (x_{i+1} - x) (y_{j+1} - y) \\ \beta_{i+1,j}(x, y) &= \frac{1}{h_1 h_2} (x - x_i) (y_{j+1} - y) \\ \gamma_{i,j+1}(x, y) &= \frac{1}{h_1 h_2} (x_{i+1} - x) (y - y_j) \\ \delta_{i+1,j+1}(x, y) &= \frac{1}{h_1 h_2} (x - x_i) (y - y_j) \end{aligned} \quad (2)$$

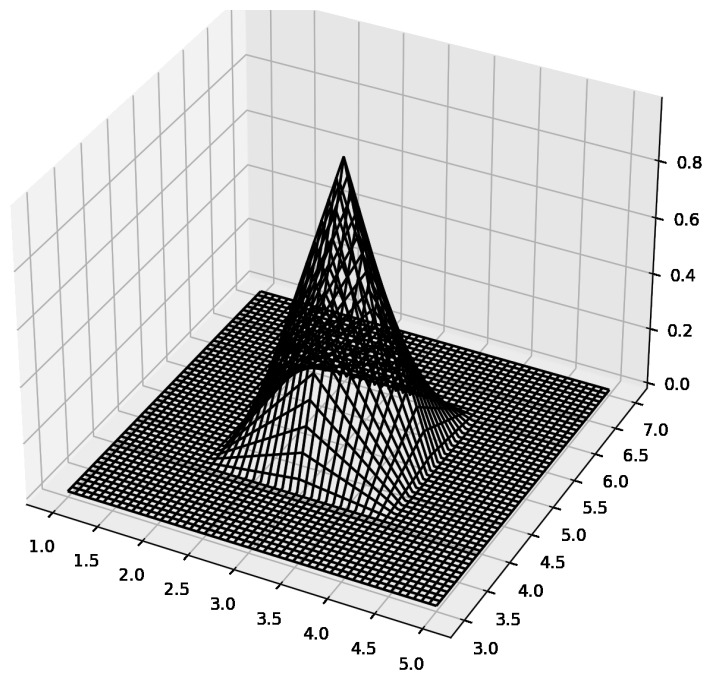
Այսպիսով  $[x_0, x_M] \times [y_0, y_M]$  տիրույթում կտոր առ կտոր մոտարկող ֆունկցիան տրվում է հետևյալ բանաձևով.

$$p_1(x, y) = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N f_{ij} \varphi^{(ij)}(x, y) \quad (3)$$

որտեղ

$$\varphi^{(ij)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{h_1 h_2} (x - x_{i-1}) (y - y_{j-1}), & (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \\ \frac{1}{h_1 h_2} (x - x_{i-1}) (y_{j+1} - y), & (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_j, y_{j+1}] \\ \frac{1}{h_1 h_2} (x_{i+1} - x) (y - y_{j-1}), & (x, y) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j] \\ \frac{1}{h_1 h_2} (x_{i+1} - x) (y_{j+1} - y), & (x, y) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \\ 0, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases} \quad (4)$$

Պարզ է, որ ստացված բազիսային ֆունկցիան  $C^{(0,0)}$  ֆունկցիա է:

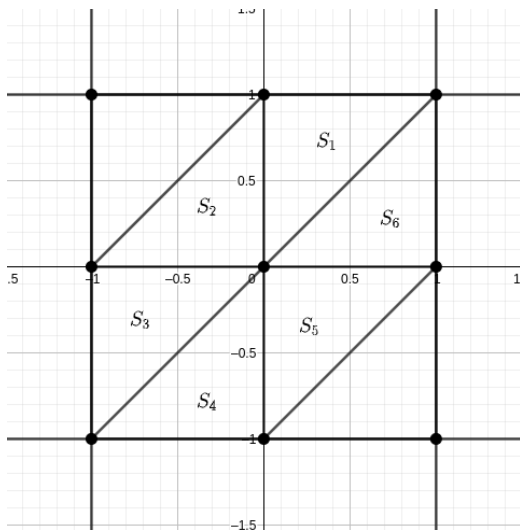


Նկար 2.5. Երկգծային ինտերպոլացիայի բազիսային ֆունկցիայի գրաֆիկ:

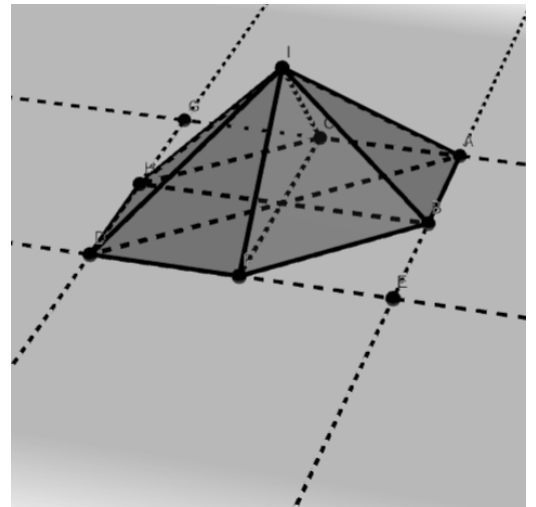
Կուրանտի գծային ֆունկցիա:

Այժմ դիտարկենք ուղղանկյուն տիրույթի տրոհման և բազիսային ֆունկցիաների կառուցման այլ տարբերակ: Այս դեպքում տիրույթը տրոհենք ինչպես նախորդ դեպքում, ի հավելումն յուրաքանչյուր ուղղանկյուն էլեմենտ տրոհելով երկու ուղղանկյուն եռանկյունների, ինչպես ցույց է տրված Նկար 2.2-ում: Դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան.

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1 - y, & (x, y) \in S_1 \\ 1 + x - y, & (x, y) \in S_2 \\ 1 + x, & (x, y) \in S_3 \\ 1 + y, & (x, y) \in S_4 \\ 1 - x + y, & (x, y) \in S_5 \\ 1 - x, & (x, y) \in S_6 \\ 0, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases} \quad (5)$$



Նկար 2.3. Ուղղանկյուն էլեմենտի տրոհումը եռանկյունների:



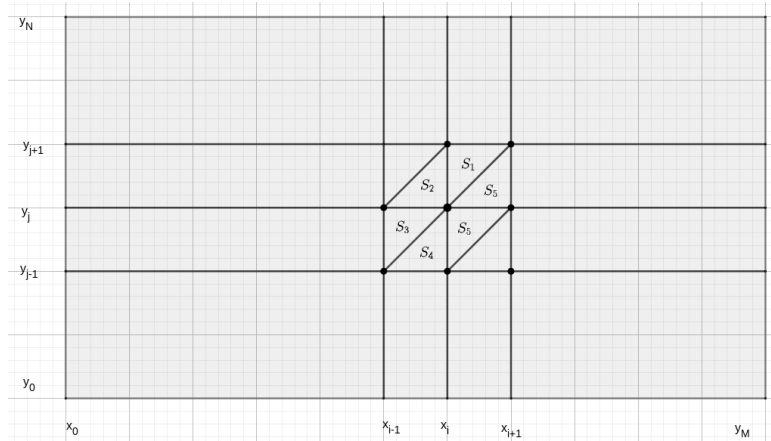
Նկար 2.4. Բազիսային ֆունկցիայի տեսքը

Պարզ է, որ այն  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  տիրույթում  $C^{(0,0)}$  ֆունկցիա է: Այն հայտնի է որպես Կուրանտի բազիսային ֆունկցիա, ի պատիվ գերմանացի մաթեմատիկոս Ռիխարդ Կուրանտի: Այժմ յուրաքանչյուր  $(x_i, y_j)$  հանգուցային կետի համար կառուցենք բազիսային ֆունկցիա օգտվելով (6)-ից.

$$\varphi^{(ij)}(x, y) = \varphi\left(\frac{x - x_i}{h_1}, \frac{y - y_j}{h_2}\right) \quad (6)$$

Յուրաքանչյուր կետի համար ունենալով բազիսային ֆունկցիա,  $f$  ֆունկցիայի մոտարկման բանաձևը կտվրի հետևյալ կերպ.

$$p_1(x, y) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \varphi^{(ij)}(x, y) f(x_i, y_j) \quad (7)$$



Նկար 2.5. Տիրույթի տրոհումը ուղղանկյուն եռանկյունների

Երկխորանարդային ինտերպոլյացիա:

Միավոր քառակուսու վրա կառուցենք մոտարկող ֆունկցիա, որը լրիվ խորանարդային բազմանդամ է ըստ երկու փոփոխականի.

$$p_3^{(i,j)}(x, y) = \sum_{i,j=0}^3 \alpha_{ij} x^i y^j \quad (8)$$

որտեղ  $\alpha_{ij}$  գործակիցները միարժեքորեն որոշվում են գազաթների վրա  $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  ֆունկցիաների արժեքներով: Դրանք որոշելով (5) գումարը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$p_3^{(i,j)}(x, y) = \sum_{0 \leq i,j,k,l \leq 1} \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} \psi_i^{(k)}(x) \psi_j^{(l)}(y) \quad (9)$$

որտեղ

$$\psi_0^{(0)}(t) = (1-t)^2(1+2t)$$

$$\psi_0^{(1)}(t) = (1-t)^2 t$$

$$\psi_1^{(0)}(t) = t^2(3-2t)$$

$$\psi_1^{(1)}(t) = t^2(t-1)$$

Այժմ օգտվելով (5) բանաձևից և ունենալով տրված տիրույթի տրոհման  $h_1$  և  $h_2$  քայլերը, յուրաքանչյուր գագաթի համար կարող ենք կազմել բազիսային ֆունկցիա, և ամբողջ տիրույթում ինտերպոլացնող ֆունկցիան կունենա հետևյալ տեսքը.

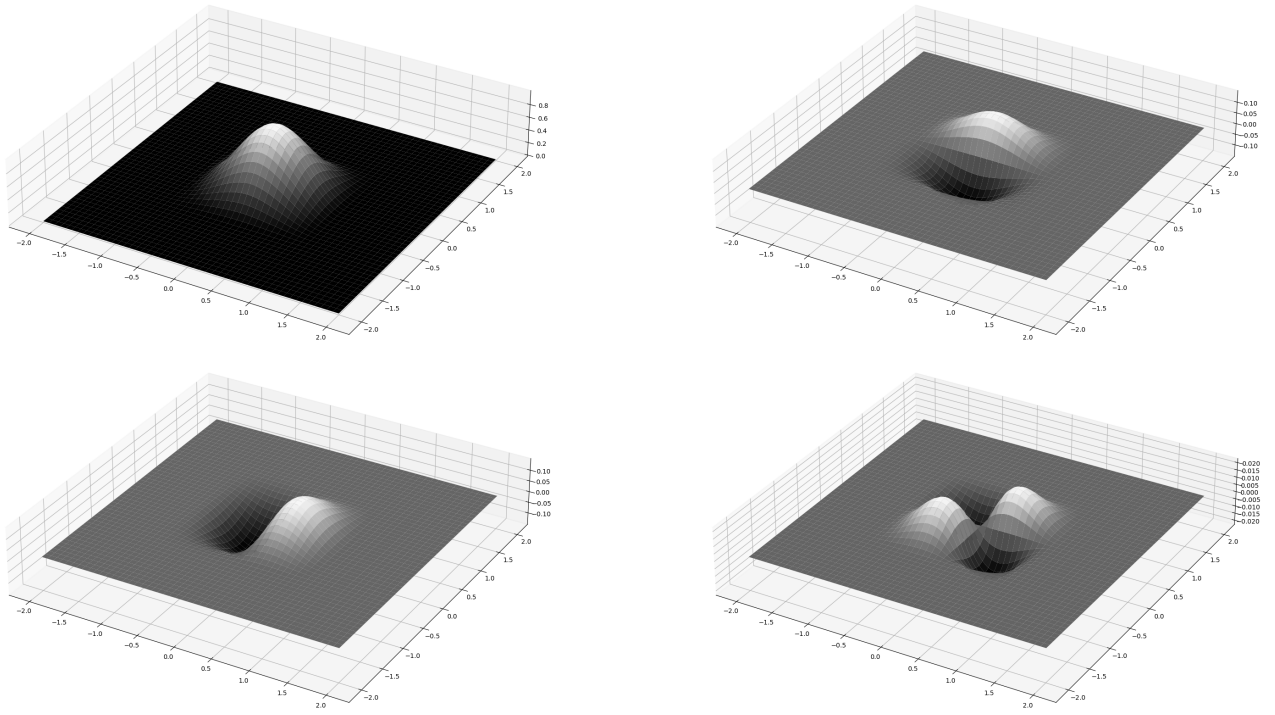
$$p_3(x) = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \left[ f_{ij} \alpha^{(ij)}(x, y) + \frac{\partial f_{ij}}{\partial x} \beta^{(ij)}(x, y) + \frac{\partial f_{ij}}{\partial y} \gamma^{(ij)}(x, y) + \frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial x \partial y} \delta^{(ij)}(x, y) \right] \quad (10)$$

որտեղ

$$\begin{aligned} \alpha^{(ij)} &= \varphi^{(0)} \left( \frac{x-x_0}{h_1} - i \right) \varphi^{(0)} \left( \frac{y-y_0}{h_2} - j \right), \\ \beta^{(ij)} &= \varphi^{(1)} \left( \frac{x-x_0}{h_1} - i \right) \varphi^{(0)} \left( \frac{y-y_0}{h_2} - j \right), \\ \gamma^{(ij)} &= \varphi^{(0)} \left( \frac{x-x_0}{h_1} - i \right) \varphi^{(1)} \left( \frac{y-y_0}{h_2} - j \right), \\ \delta^{(ij)} &= \varphi^{(1)} \left( \frac{x-x_0}{h_1} - i \right) \varphi^{(1)} \left( \frac{y-y_0}{h_2} - j \right) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\varphi^{(0)} = \begin{cases} (1+t)^2(1-2t), & -1 \leq x \leq 0 \\ (1-t)^2(1+2t), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\varphi^{(1)} = \begin{cases} (1+t)^2 t, & -1 \leq x \leq 0 \\ (1-t)^2 t, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



Նկար 2.2 Երկխորանարդային ինտերպոլացիայի բազիսային ֆունկցիաների գծապատկեր:

Վերը ներկայացված երկու ինտերպոլացիաները էրմիթյան ինտերպոլացիայի մասնավոր դեպքեր են: Ընդհանուր դեպքում ցանկացած  $k$  բնական թվի և տրված ուղղանկյունաձև տրոհման յուրաքանչյուր էլեմենտի վրա կարելի է կառուցել  $C^{(k-1,k-1)}$  ինտերպոլացնող ֆունկցիա, որը ըստ յուրաքանչյուր փոփոխականի  $(2k-1)$ -րդ կարգի բազմանդամ է և բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} f(x_i, y_j) = \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} p_{2k-1}(x_i, y_j), \quad p, q = \overline{0, k-1}, \quad i = \overline{0, M}, \quad j = \overline{0, N} \quad (12)$$



## 2.2. Խորանարդային մոտարկում

Երկխորանարդային սփլայն:

Մեկ փոփոխականի մոտարկան խնդիրը դիտարկելից քննարկեցինք Շներբերգի կողմից առաջարկված խորանարդային բազիսային սփլայնները: Այս սփլայնները կարող ենք օգտագործել երկչափ մոտարկման համար: Յուրաքանչյուր  $(x_i, y_j)$  հանգույցի վրա կառուցենք բազիսային ֆունկցիա կազմելով  $B_i\left(\frac{x}{h_1}\right)$  և  $B_j\left(\frac{y}{h_2}\right)$  ֆունկցիաների թենզորական արտադրյալը:

$$\varphi^{(ij)}(x, y) = B_i\left(\frac{x}{h_1}\right) B_j\left(\frac{y}{h_2}\right) \quad (13)$$

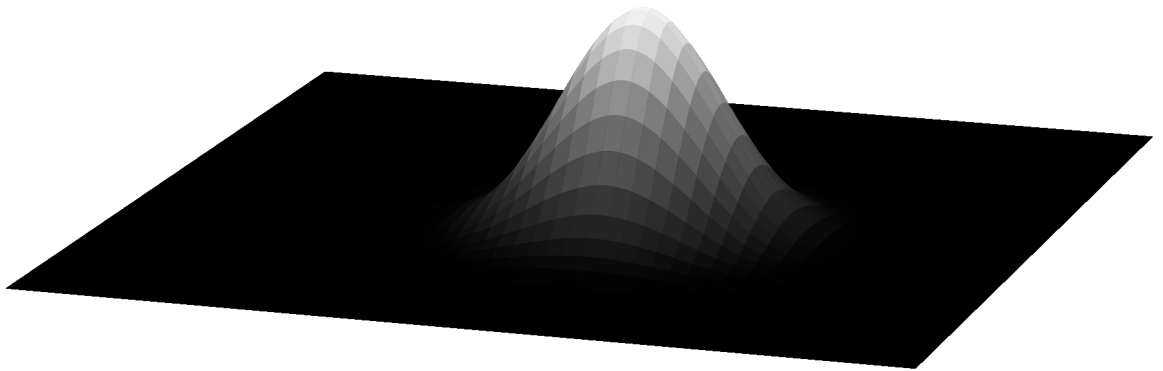
Ստացված բազիսային ֆունկցիան  $C^{(2,2)}$  ֆունկցիա է:

Տրված  $\{(x_{ij}, y_{ij}, f_{ij})\}$  ինտերպոլացիոն տվյալներով կառուցենք սփլայն.

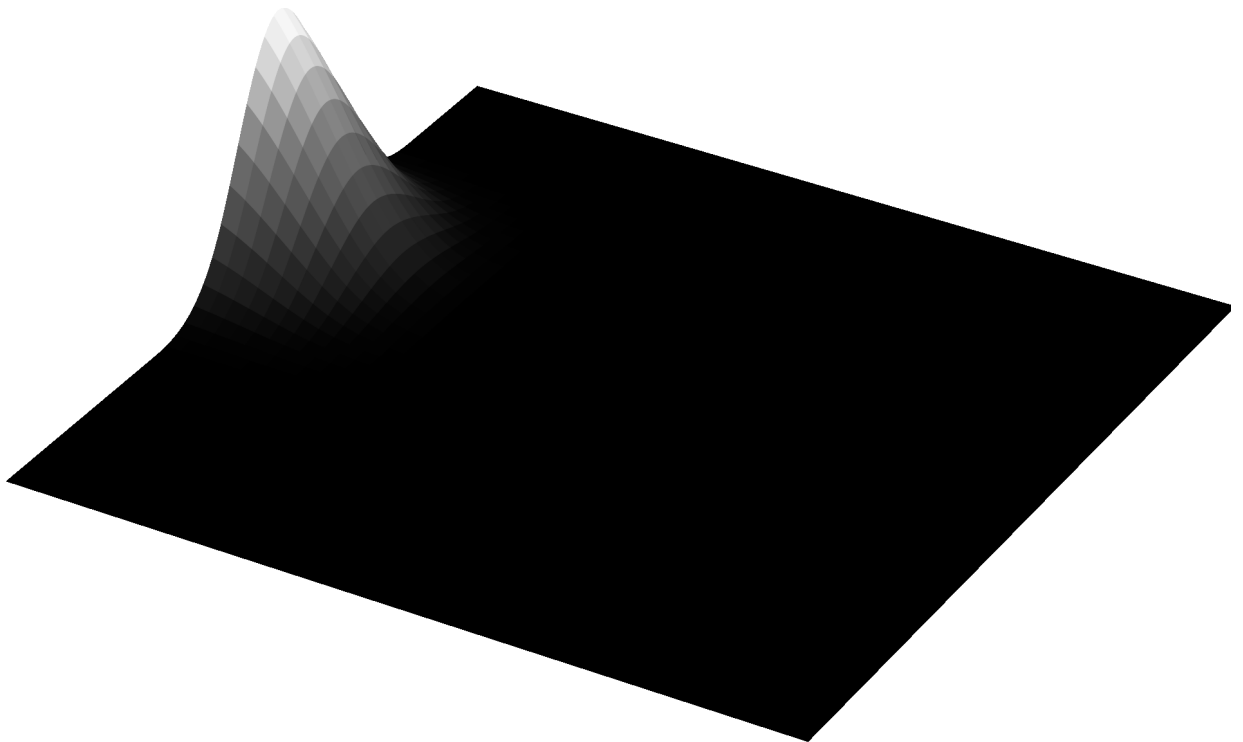
$$F(x, y) = \sum_{i=0}^N \alpha_{ij} \varphi^{(ij)}(x, y) \quad (14)$$

Հաշվի առնելով ինտերպոլացիոն պայմանները կստանանք հետևյալ հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} \alpha_{00} + \frac{5}{16}(\alpha_{01} + \alpha_{10}) + \frac{1}{16}\alpha_{11} = f_{00} \\ \alpha_{M0} + \frac{5}{16}(\alpha_{M1} + \alpha_{M-1,0}) + \frac{1}{16}\alpha_{M-1,1} = f_{M0} \\ \alpha_{0N} + \frac{5}{16}(\alpha_{1N} + \alpha_{0,N-1}) + \frac{1}{16}\alpha_{N-1,1} = f_{0N} \\ \alpha_{MN} + \frac{5}{16}(\alpha_{M-1,N} + \alpha_{M,N-1}) + \frac{1}{16}\alpha_{M-1,N-1} = f_{MN} \\ \frac{5}{4}\alpha_{i,1} + \frac{5}{16}(\alpha_{i-1,0} + \alpha_{i+1,0}) + \frac{1}{4}\alpha_{i,1} + \frac{1}{16}(\alpha_{i-1,1} + \alpha_{i+1,1}) = f_{i0} \\ \frac{5}{4}\alpha_{i,N-1} + \frac{5}{16}(\alpha_{i-1,N} + \alpha_{i+1,N}) + \frac{1}{4}\alpha_{i,N-1} + \frac{1}{16}(\alpha_{i-1,N-1} + \alpha_{i+1,N-1}) = f_{iN} \\ \frac{5}{4}\alpha_{1,j} + \frac{5}{16}(\alpha_{0,j-1} + \alpha_{0,j+1}) + \frac{1}{4}\alpha_{1,j} + \frac{1}{16}(\alpha_{1,j-1} + \alpha_{1,j+1}) = f_{0j} \\ \frac{5}{4}\alpha_{M-1,j} + \frac{5}{16}(\alpha_{M,j-1} + \alpha_{M,j+1}) + \frac{1}{4}\alpha_{M-1,j} + \frac{1}{16}(\alpha_{M-1,j-1} + \alpha_{M-1,j+1}) = f_{Mj} \\ \alpha_{ij} + \frac{1}{4}(\alpha_{i,j-1} + \alpha_{i,j+1} + \alpha_{i-1,j} + \alpha_{i+1,j}) + \frac{1}{16}(\alpha_{i-1,j-1} + \alpha_{i-1,j+1} + \alpha_{i+1,j-1} + \alpha_{i+1,j+1}) = f_{ij} \end{cases} \quad (15)$$



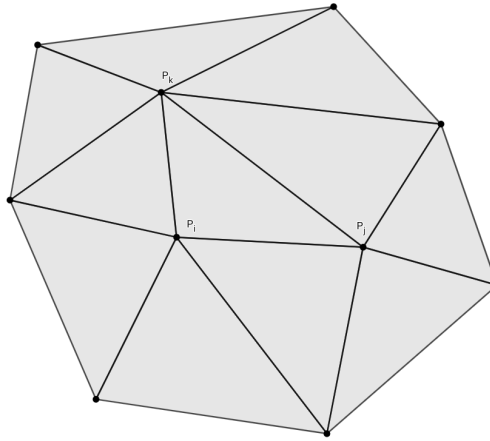
Նկար 2.6.  $\varphi^{(ij)}$  բազիսային ֆունկցիաների պատկեր:



Նկար 2.7 Տիրույթի եզրի վրա գտնվող բազիսային ֆունկցիա:

## Բազմանկյուն տիրույթ

Բազմանկյուն տիրույթ ասելով կհասկանանք կամ հենց բազմանկյունաձև տիրույթը, կամ դրա բազմանկյուններով մոտարկումը: Դիցուք տրված են  $f : \Omega \mapsto \Theta, \Theta \subset \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$  բազմանկյուն տիրույթը, որը կամայական ձևով տրոհված է եռանկյուն էլեմենտների:



Նկար 2.8. Տիրույթի եռանկյունաձև տրոհման օրինակ:

## 2.2 Լագրանժի ինտերպոլյացիա

Յուրաքանչյուր եռանկյուն էլեմենտի վրա դիտարկենք  $m$ -րդ կարգի լրիվ բազմանդամ

$$F_m(x, y) = \sum_{k+l=0}^m \alpha_{kl} x^k y^l \quad (16)$$

որը կարող է օգտագործվել որպես ինտերպոլյացիոն ֆունկցիա  $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$  սիմետրիկ դասավորված կետերի վրա: Դիտարկենք հետևյալ մասնավոր դեպքերը.

### 1. Գծային ինտերպոլյացիա ( $m=1$ )

Յուրաքանչյուր  $P_1, P_2, P_3$  գագաթներով եռանկյուն էլեմենտի համար դիտարկենք հետևյալ մոտարկող ֆունկցիան.

$$F_1(x, y) = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^3 p_i^{(1)}(x, y) f(x_i, y_i) \quad (17)$$

որտեղ  $S$ -ը  $P_1, P_2, P_3$  կետերով կազմված եռանկյան մակերեսի կրկնապատիկն է, իսկ  $p_i^{(1)}$  ֆունկցիաները սահմանվում են հետևյալ կերպ.

$$p_i^{(1)}(x, y) = x_j y_k - x_k y_j + x(y_j - y_k) - y(x_j - x_k) \quad (18)$$

$$S = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

որտեղ  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  տրված եռանկյուն էլեմենտի գագաթներն են (հերթականությունը ժամսլաքին հակառակ ուղղությամբ):

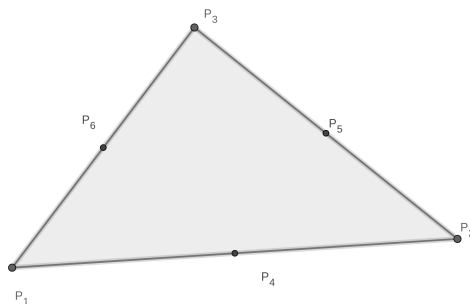
## 2. Քառակուսային ինտերպոլյացիա (m=2)

Յուրաքանչյուր եռանկյուն էլեմենտի վրա գագաթներից բացի դիտարկենք նաև միջնակետերը: Ինտերպոլացնող բազմանդամը ունի հետևյալ տեսքը.

$$F_2(x, y) = \frac{1}{S^2} \sum_{i=1}^6 p_i^{(2)}(x, y) f(x_i, y_i) \quad (19)$$

որտեղ

$$\begin{aligned} p_i^{(2)}(x, y) &= p_i^{(1)}(x, y) \left( 2p_i^{(1)}(x, y) - 1 \right), \quad i = 1, 2, 3 \\ p_4^{(2)}(x, y) &= 4p_1^{(1)}(x, y)p_2^{(1)}(x, y) \\ p_5^{(2)}(x, y) &= 4p_2^{(1)}(x, y)p_3^{(1)}(x, y) \\ p_6^{(2)}(x, y) &= 4p_1^{(1)}(x, y)p_3^{(1)}(x, y) \end{aligned} \quad (20)$$



Նկար 2.8. Կետերի դասավորվածությունը կամայական եռանկյան վրա:

## 3. Խորանարդային ինտերպոլյացիա (m=3)

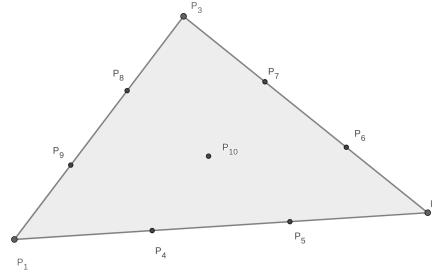
Այս տեսքում յուրականչյուր կողմի վրա ավելացնենք ևս երկու կետ այն տրոհելով երեք հավասար մասի և դրանց ավելացնելով եռանկյան կենտրոնը:

Ինտերպոլացնող բազմանդամը ունի հետևյալ տեսքը.

$$F_3(x, y) = \frac{1}{S^3} \sum_{i=1}^{10} p_i^{(3)}(x, y) f(x_i, y_i) \quad (21)$$

որտեղ

$$\begin{aligned} p_i^{(3)}(x, y) &= \frac{1}{2} p_i^{(1)}(x, y) \left( 3p_i^{(1)}(x, y) - 1 \right) \left( 3p_i^{(1)}(x, y) - 2 \right), \quad i = 1, 2, 3 \\ p_4^{(3)}(x, y) &= \frac{9}{2} p_1^{(1)}(x, y) p_2^{(1)}(x, y) \left( 3p_1^{(1)}(x, y) - 1 \right) \\ p_5^{(3)}(x, y) &= \frac{9}{2} p_1^{(1)}(x, y) p_2^{(1)}(x, y) \left( 3p_2^{(1)}(x, y) - 1 \right) \\ p_6^{(3)}(x, y) &= \frac{9}{2} p_2^{(1)}(x, y) p_3^{(1)}(x, y) \left( 3p_3^{(1)}(x, y) - 1 \right) \\ p_7^{(3)}(x, y) &= \frac{9}{2} p_2^{(1)}(x, y) p_3^{(1)}(x, y) \left( 3p_3^{(1)}(x, y) - 1 \right) \\ p_8^{(3)}(x, y) &= \frac{9}{2} p_3^{(1)}(x, y) p_1^{(1)}(x, y) \left( 3p_3^{(1)}(x, y) - 1 \right) \\ p_9^{(3)}(x, y) &= \frac{9}{2} p_3^{(1)}(x, y) p_1^{(1)}(x, y) \left( 3p_1^{(1)}(x, y) - 1 \right) \\ p_{10}^{(3)}(x, y) &= 27 p_1^{(1)}(x, y) p_2^{(1)}(x, y) p_3^{(1)}(x, y) \end{aligned} \quad (22)$$



Նկար 2.9. Կետերի դասավորվածությունը կամայական եռանկյան վրա:

Բնական է, որ որևէ կետի նկատմամբ լրիվ բազիսային ֆունկցիայի կառուցելու համար անհրաժեշտ է իրար գումարել այն բոլոր եռանկյուն էլեմենտների այդ կետին համապատասխան ֆունկցիաները, որոնց համար տվյալ կետը գազաթ է:

## **2.2 Էրմիթյան ինտերպոլացիա**

To be continued

## **Գլուխ 3**

### **Վարիացիոն մեթոդ**

Մաթեմատիկական ֆիզիկայի բազմաթիվ խնդիրներ կապված են վարիացիոն մեթոդի հետ, որը մաթեմատիկական անալիզի գլխավոր մեթոդներից է:

#### **Խնդրի դրվածքը**

Վարիացիոն մեթոդի սկզբունքն այն է, որ դիտարկվող ֆունկցիայի ինտեգրալը տրված տիրույթում ընդունում է մեծագույն (փոքրագույն) արժեք տվյալ համակարգի իրական վիճակի համար, համեմատած բոլոր հնարավոր վիճակների բազմության հետ: Ենթաինտեգրալային ֆունկցիան կախված է տրված կոորդինատներից, ֆունկցիայի արժեքից, նրա ածանցյալներից, իսկ ինտեգրումը կատարվում է տրված կոորդինատական համակարգում, որը կարող է ներառել նաև ժամանակը: Մինիմումի որոշման խնդիրը հաճախ բերվում է մի քանի դիֆերենցիալ հավասարումների, համապատասխան եզրային պայմաններով: Այն իրական փոփոխականի ֆունկցիայի էքստրեմումի որոնման խնդրի ընդհանրացումն է, որտեղ տրված ֆունկցիայի համար կոմպակտ տիրույթում անհրաժեշտ է գտնել այսպիսի կետեր, որոնք մինիմում (մաքսիմում) են իրենց որևէ շրջակայքում: Վարիացիոն մեթոդում ֆունկցիոնալ ինտեգրալ է, որը կախված է ֆունկցիայից, որի որոշման տիրույթը թույլատրելի ֆունկցիաների տարածությունն է: Այս մեթոդի հիմնական դժվարությունը կայանում է նրանում, որ խնդիրները, որոնք կարող են ձևակերպվել որպես վարիացիոն, հնարավոր է, որ լուծում չունենան այն պատճառով, որ ֆունկցիոնալ տարածությունները կոմպակտ չեն: Սակայն վարիացիոն մեթոդի հիմնական առավելությունն այն է, որ դրա կիրառման համար դրվող պահանջները ավելի թույլ են:

## Օրինակներ

Որպես օրինակ դիտարկենք հետևյալ կրկնակի ինտեգրալը.

$$I(f) = \iint_{\Omega} F(x, y, f, f_x, f_y) dx dy \quad (1)$$

որտեղ  $f \in C^2(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  և որի արժեքները որոշված են  $\partial\Omega$  ում: Այս դեպքում, որպեսզի  $f$  ֆունկցիան (1) ֆունկցիոնալի համարա հանդիսանա մինիմում, անհրաժեշտ է, որ  $f(x, y)$  ֆունկցիան բավարարի Էյլեր-Լագրանժի հավասարմանը, հավելելով համապատասխան եզրային պայմանները:

$$\frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} - F_u = 0 \quad (2)$$

Օրինակ,  $F = \frac{1}{2} (u_x^2 + u_y^2)$  դեպքում խնդիրը բերվում է Լապլասի հավասարմանը.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

Այժմ պարզ է, որ երկրորդ կարգի ածանցյալների անընդհատությունը անհրաժեշտ է Էյլեր-Լագրանժի հավասարման գոյության համար: Բայց վարիացիոն մեթոդը պահանջում է միայն  $f$  ի անընդհատություն և առաջին կարգի մասնակի ածանցյալների կտոր առ կտոր անընդհատություն:

Դիֆերենցիալ հավասարումը, որը կապված է վարիացիոն խնդրի հետ, կոչվում է Էյլեր-Լագրանժի հավասարում: Այս միայն անհրաժեշտ պայման է, որին պետք է բավարարի ֆունկցիան, որը մինիմիզացնում (մաքսիմիզացնում) է ֆունկցիոնալը:



Ստորև դիտարկվում են խնդիրների մի քանի տարբերակներ.

1. Մեկ փոփոխականի ֆունկցիա.

$$f \in \Omega \mapsto \Theta, \quad \Omega, \Theta \subset \mathbb{R}$$

Այս դեպքում ֆունկցիոնալն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$I(f) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, f, f') dx$$

որտեղ  $f(x_0)$  և  $f(x_1)$ ,  $x_0, x_1 \in \Theta$  ը տրված են: Մինիմիում գոյության անհրաժեշտ պայման է հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} = 0$$

Որը համարժեք է.

$$\frac{d^2 f}{dx^2} F_{f'f'} + \frac{df}{dx} F_{f'f} + F_{f'x} - F_f = 0$$

2. Մի քանի անհայտ ֆունկցիաներ.

$$f, g \in \Omega \mapsto \Theta, \quad \Omega, \Theta \subset \mathbb{R}$$

Այս դեպքում ֆունկցիոնալն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$I(f) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, f, g, f', g') dx$$

որտեղ  $f(x_0)$ ,  $f(x_1)$ ,  $g(x_0)$ ,  $g(x_1)$ ,  $x_0, x_1 \in \Theta$  ը տրված են: Մինիմիում գոյության անհրաժեշտ պայման է հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը.

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial g} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial g'} = 0$$

3. Բարձր կարգի ածանցյալներ.

$$f \in \Omega \mapsto \Theta, \Omega, \Theta \subset \mathbb{R}$$

Այս դեպքում ֆունկցիոնալն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$I(f) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, f, f', f'', \dots, f^{(n)}) dx$$

որտեղ  $f(x_0), f(x_1), f'(x_0), f'(x_1), x_0, x_1 \in \Theta$  ը տրված են: Մինիմիում գոյության անհրաժեշտ պայման է հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial f''} - \dots (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{\partial F}{\partial f^{(n)}} = 0$$

4. Մի քանի անկախ փոփոխականներ.

$$f \in \Omega \mapsto \Theta, \Omega \subset \mathbb{R}^n, \Theta \subset \mathbb{R}$$

Այս դեպքում ֆունկցիոնալն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$I(f) = \int_{\Omega} \dots \int F(x, f, f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}) d\Omega$$

որտեղ  $f$  ֆունկցիայի արժեքները  $\partial\Omega$ -ի վրա տրված են:

Մինիմիում գոյության անհրաժեշտ պայման է հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx_1} \frac{\partial F}{\partial f_{x_1}} - \dots - \frac{d}{dx_n} \frac{\partial F}{\partial f_{x_n}} = 0$$

## Եզրային պայմաններ

Նախորդիվ դիտարկել էինք այնպիսի խնդիրներ, որտեղ ֆունկցիան արժեքները տրված տիրույթի եզրի տրված են: Սակայն որոշ խնդիրներում ֆունկցիան տիրույթի եզրում տրված չէ, և տրվում են այլ տիպի եզրային պայմաններ: Նման դեպքերում որպես եզրային պայման դիտարկվում են հետևյալ պայմանները.

Մեկ փոփոխականի ֆունկցիա

$$\frac{\partial F}{\partial f'} = 0$$

Երկու անհայտ ֆունկցիա

$$\frac{\partial F}{\partial f'} = \frac{\partial F}{\partial g'}$$

Երկու փոփոխականի ֆունկցիա

$$F_{u_x} \frac{dy}{ds} - F_{u_y} \frac{dx}{ds} = 0$$

որոնք հայտնի են որպես *բնական կամ գլխավոր* եզրային պայմաններ:

## Պայմանական էքստրեմում

Այսպիսի վարիացիոն խնդիրներում անհրաժեշտ է մինիմիզացնել (մաքսիմիզացնել) տրված ֆունկցիոնալը, պայմանով, որ մեկ այլ ֆունկցիոնալ ընդունում է որևէ ֆիքսված արժեք այդ ֆունկցիայի համար: Այսինքն, եթե դիտարկենք ֆունկցիանալ, որի արժեքների բազմությունը մեկ փոփոխականի ֆունկցիաներ են, ապա կունենանք.

$$I(f) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, f, f') dx$$

$$\int_{x_0}^{x_1} G(x, f, f') dx = C$$

Այս խնդրի համար Էյլեր-Լագրանժի հավասարումը հետևյալն է.

$$\frac{\partial (F + \lambda G)}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial (F + \lambda G)}{\partial f'} = 0$$

## Գլուխ 4

### Մոտավոր մեթոդներ: Վերջավոր էլեմենտների մեթոդ

Խնդիրների վարիացիոն մեթոդով ձևակերպումը, և վարիացիոն մեթոդների ավելի թույլ պայմանները թույլ են տալիս այդ խնդիրները լուծել մոտավոր մեթոդներով, որոնք հաճախ անվանվում են ուղիղ մեթոդներ: Ուղիղ մեթոդներից է Ռիսցի մինիմիզացնող հաջորդականության մեթոդը, որը քննության կառնենք:

#### Ռիսցի մեթոդ

Դիտարկենք որևէ վարիացիոն մեթոդով տրված մինիմիզացիայի խնդիր.

$$I(f) \longrightarrow \min, \quad f \in \Gamma$$

որտեղ  $I$  ֆունկցիոնալը տրված տիրույթում որոշյալ ինտեգրալ է: Մոտավոր լուծում կարելի է ստանալ, եթե ֆունկցիոնալի արժեքների բազմությունը սահմանափակ ենք որևէ վերջավոր չափանի ենթատարածությունով, որն ունի  $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$  բազիս:

$$\Gamma_N \in \Gamma$$

Ենթադրենք, որ  $I$  ֆունկցիոնալի արժեքների տիրույթը ունի ճշգրիտ ստորին եզր, նշանակենք այն  $\alpha_0$  ով: Այդ դեպքում գոյություն ունի  $\{f_j\}_{j=1}^\infty$  հաջորդականություն այնպիսին, որ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} I\left(\sum_{j=1}^n \gamma_j \varphi_j\right) = \alpha_0 \quad (1)$$

և ֆունկցիոնալի որոշման տիրույթի ցանկացած այլ  $g$  ֆունկցիայի համար

$$I(g) \geq \alpha_0$$

լուծումը փնտրենք հետևյալ կերպ.

$$f_0 = \sum_{j=1}^N \gamma_j \varphi_j, \quad \gamma_j \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Այդ դեպքում խնդիրը բերվում է սովորական մինիմումի խնդրի.

$$\frac{\partial I}{\partial \gamma_i} = \frac{\partial}{\partial \gamma_i} I \left( \sum_{j=1}^N \gamma_j \varphi_j \right) = 0 \quad (3)$$

## 4.1 Պուասոնի հավասարման լուծում ուղղանկյուն տիրույթում

Դիտարկենք հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u|_{\partial D} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

որտեղ  $D = [x_0, x_N] \times [y_0, y_M]$ :

Այս դիֆերենցիալ հավասարման համապատասխան վարիացիոն խնդիրը կլինի.

$$I(u) = \frac{1}{2} \iint_D [u_x^2 + u_y^2] dx dy + \iint_D f u dx dy \rightarrow \min \quad (5)$$

D տիրույթը տրոհենք ուղղանկյուն եղանկյունների, և որպես բազիսային ֆունկցիաներ վերցնենք Կուրանտի ֆունկցիաները (2.7): Որոնելի ֆունկցիան կփնտրենք բազիսային ֆունկցիաների գծային կոմբինացիայի տեսքով.

$$u(x, y) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi^{(ij)}(x, y) \quad (6)$$

Ուստի ինտեգրալային ֆունկցիոնալը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$\frac{1}{2} \iint_D \left[ \left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_x^{(ij)}(x, y) \right)^2 + \left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_y^{(ij)}(x, y) \right)^2 + 2f(x, y) \left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi^{(ij)}(x, y) \right) \right] dx dy \quad (7)$$

Համաձայն էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանի.

$$\frac{\partial I}{\partial u_{kl}} = \frac{\partial}{\partial u_{kl}} I \left( \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi^{(ij)}(x, y) \right) = 0$$

Դիտարկենք առաջին կրկնակի գումարը.

$$\left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_x^{(ij)}(x, y) \right)^2 = [u_{kl} \varphi_x^{(kl)}(x, y)]^2 + 2u_{kl} \varphi_x^{(kl)}(x, y)[\dots] + [\dots]^2$$

որտեղ բազմակետերով արտահայտությունը իր մեջ չի պարունակում  $u_{kl}$  ը: Հանգունորեն,

Երկրորդ կրկնակի գումարի համար՝

$$\left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_y^{(ij)}(x, y) \right)^2 = [u_{kl} \varphi_y^{(kl)}(x, y)]^2 + 2u_{kl} \varphi_y^{(kl)}(x, y)[\dots] + [\dots]^2$$

Այսպիսով ավելի պարզեցված տեսքով համակարգը ունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{\partial}{\partial u_{kl}} I(u) = \iint_D [2u_{kl} \{ \varphi_x^{(kl)}(x, y) \}^2 + 2\varphi_x^{(kl)}(x, y)[\dots] + 2u_{kl} \{ \varphi_y^{(kl)}(x, y) \}^2 + 2\varphi_y^{(kl)}(x, y)[\dots] + 2f(x, y)\varphi^{(kl)}(x, y)] dx dy$$

Դիտարկենք  $\varphi_x^{(kl)}(x, y)$  և  $\varphi_y^{(kl)}(x, y)$  ֆունկցիաները:

$$\varphi_x^{(kl)}(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in S_1 \\ \frac{1}{h_1}, & (x, y) \in S_2 \\ \frac{1}{h_1}, & (x, y) \in S_3 \\ 0, & (x, y) \in S_4 \\ -\frac{1}{h_1}, & (x, y) \in S_5 \\ -\frac{1}{h_1}, & (x, y) \in S_6 \\ 0, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases} \quad (8)$$

$$\varphi_y^{(kl)}(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{h_2}, & (x, y) \in S_1 \\ -\frac{1}{h_2}, & (x, y) \in S_2 \\ 0, & (x, y) \in S_3 \\ \frac{1}{h_2}, & (x, y) \in S_4 \\ \frac{1}{h_2}, & (x, y) \in S_5 \\ 0, & (x, y) \in S_6 \\ 0, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases} \quad (9)$$

Քանի որ  $\varphi_x^{(kl)}(x, y)$  և  $\varphi_y^{(kl)}(x, y)$  ֆունկցիաները ոչ զրոյական են  $[x_{k-1,l}, x_{k+1,l}] \times [y_{k,l-1}, y_{k,l+1}]$  ում, ապա

$$\iint_D 2u_{kl} \left\{ \varphi_x^{(kl)}(x, y) \right\}^2 dx dy = 4u_{kl} \frac{h_2}{h_1} \quad (10)$$

$$\iint_D 2u_{kl} \left\{ \varphi_y^{(kl)}(x, y) \right\}^2 dx dy = 4u_{kl} \frac{h_1}{h_2} \quad (11)$$

Քանի որ յուրաքանչյուր  $\varphi_{kl}$  բազիսային ֆունկցիա հատվում է  $\varphi_{k-1,l}$ ,  $\varphi_{k+1,l}$ ,  $\varphi_{k,l-1}$ ,  $\varphi_{k,l+1}$  ֆունկցիաների հետ, ապա

$$\iint_D 2\varphi_x^{(kl)}(x, y)[\dots] dx dy = 2 \iint_D \left[ \varphi_x^{(kl)}(x, y) \sum_{\substack{r=k-1 \\ r \neq k}}^{k+1} \sum_{\substack{s=l-1 \\ s \neq l}}^{l+1} u_{rs} \varphi_x^{(rs)} \right] dx dy = -2u_{k-1,l} \frac{h_2}{h_1} - 2u_{k+1,l} \frac{h_2}{h_1} \quad (12)$$

Հանգումորեն՝

$$\iint_D 2\varphi_y^{(kl)}(x, y)[\dots] dx dy = 2 \iint_D \left[ \varphi_y^{(kl)}(x, y) \sum_{\substack{r=k-1 \\ r \neq k}}^{k+1} \sum_{\substack{s=l-1 \\ s \neq l}}^{l+1} u_{rs} \varphi_y^{(rs)} \right] dx dy = -2u_{k,l-1} \frac{h_1}{h_2} - 2u_{k,l+1} \frac{h_1}{h_2} \quad (13)$$

Եվ վերջապես

$$2 \iint_D f(x, y) \varphi^{(kl)}(x, y) dx dy \approx 2f_{kl} h_1 h_2 \quad (14)$$

Դիրիխլեի եզրային պայմանների համար կունենանք:

$$u_{0,l} = u_{N,l} = u_{k,0} = u_{k,M} = 0$$

Այսպիսով, ստացանք հետևյալ հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} 2 \left[ \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right] u_{kl} - \frac{1}{h_1^2} u_{k-1,l} - \frac{1}{h_1^2} u_{k+1,l} - \frac{1}{h_2^2} u_{k,l-1} - \frac{1}{h_2^2} u_{k,l+1} + f_{kl} = 0 \\ u_{0,l} = u_{N,l} = u_{k,0} = u_{k,M} = 0 \end{cases} \quad (15)$$



## Ծրագրային իրականացում

Պուասոնի հավասարման մոտավոր լուծումը իրականացնելու համար օգտվենք Python ծրագրավորման լեզվից, օգտագործելով Numpy գրադարանը, որը հարմար է բազմաչափ զանգվածների հետ մաթեմատիկական գործողություններ իրականացնելու համար: Վիզուալիզացիաները կառուցելու համար կօգտվենք Matplotlib գրադարանից:

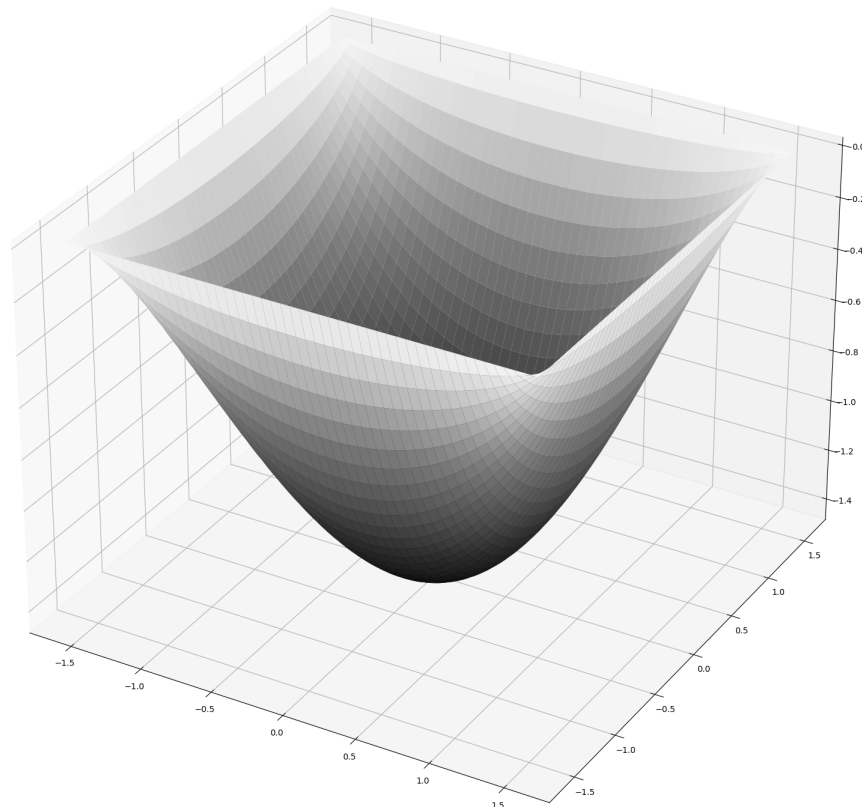
Ծրագրի սկզբում տրվում է ուղղանկյուն տիրույթի սահմանները և դրա տրոհման  $h_1$  և  $h_2$  քայլերը,  $f$  ֆունկցիան: Հաջորդիվ կազմվում է հավասարումների համակարգը, կանչվում այն լուծող ֆունկցիան: Այսնուհետև բազիսային ֆունկցիաների միջոցով կառուցվում է մոտարկող ֆունկցիան:

Օրինակ

$$\begin{cases} \Delta u = 2 \\ u|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

$$D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad h_1 = h_2 = \frac{\pi}{200}$$

Խնդրի համար ստացված լուծումը.



Նկար 4.1. Պուասոնի հավասարման լուծման գրաֆիկական ներկայացում:



վերցնենք (2.13)-ում ներկայացված ֆունկցիաները, և որոնելի ֆունկցիան կփնտրենք բազիսային ֆունկցիաների գծային կոմբինացիայի տեսքով.

$$u(x, y) = \frac{1}{S_n} \sum_{i=1}^3 u_{ni} p^{(ni)}(x, y) \quad (18)$$

որտեղ  $ni$ -ն  $n$ -րդ եռանկյան  $i$ -րդ գագաթի համապատասխան ինդեքսն է, իսկ  $p^{(ni)}(x, y)$ -ն այդ գագաթի համապատասխան բազիսային ֆունկցիան է: Ուստի ինտեգրալային ֆունկցիոնալը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$\frac{1}{2S_n^2} \iint_{\Delta_n} \left[ \left( \sum_{i=1}^3 u_{ni} p_x^{(ni)}(x, y) \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^3 u_{ni} p_y^{(ni)}(x, y) \right)^2 + 2S_n f(x, y) \left( \sum_{i=1}^3 u_{ni} p^{(ni)}(x, y) \right) \right] dx dy \quad (19)$$

Համաձայն էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանի.

$$\frac{\partial I}{\partial u_{nk}} = \frac{\partial}{\partial u_{nk}} I \left( \frac{1}{S_n} \sum_{i=1}^3 u_{ni} p^{(ni)}(x, y) \right) = 0 \quad (20)$$

Դիտարկենք (4.18) ինտեգրալի ենթահինտեգրալային արտահայտության ձախ մասի երկու մասերը.

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^3 u_{ni} p_x^{(ni)}(x, y) \right)^2 &= (u_{nk} p_x^{(nk)})^2 + 2u_{nk} u_{nl} p_x^{(nk)} p_x^{(nl)} + 2u_{nk} u_{nm} p_x^{(nk)} p_x^{(nm)} \\ \left( \sum_{i=1}^3 u_{ni} p_y^{(ni)}(x, y) \right)^2 &= (u_{nk} p_y^{(nk)})^2 + 2u_{nk} u_{nl} p_y^{(nk)} p_y^{(nl)} + 2u_{nk} u_{nm} p_y^{(nk)} p_y^{(nm)} \end{aligned} \quad (21)$$

որտեղ  $k, l, m$ -ը գագաթների հաջորդականությունն է լոկալ համարակալման մեջ:

Այսպիսով ավելի պարզեցված տեսքով համակարգը ունի հետևյալ տեսքը.

$$\iint_{\Delta_n} \left[ u_{nk} \left( (p_x^{(nk)})^2 + (p_y^{(nk)})^2 \right) + u_{nl} (p_x^{(nk)} p_x^{(nl)} + p_y^{(nk)} p_y^{(nl)}) + u_{nm} (p_x^{(nk)} p_x^{(nm)} + p_y^{(nk)} p_y^{(nm)}) + S_n u_{nk} p^{(nk)} \right] dx dy = 0 \quad (22)$$

Քանի որ

$$p_x^{(nk)} = (y_{nl} - y_{nm})$$

$$p_y^{(nk)} = -(x_{nl} - x_{nm})$$

ապա

$$\begin{aligned}
\iint_{\Delta_n} 2u_{nk} (p_x^{(nk)})^2 dx dy &= 2u_{nk} S_n (y_{nl} - y_{nm})^2 \\
\iint_{\Delta_n} 2u_{nl} p_x^{(nk)} p_x^{(l)} dx dy &= 2u_{nl} S_n (y_{nl} - y_{nm}) (y_{nm} - y_{nk}) \\
\iint_{\Delta_n} 2u_{nm} p_x^{(nk)} p_x^{(nm)} dx dy &= 2u_{nm} S_n (y_{nl} - y_{nm}) (y_{nk} - y_{nl}) \\
\iint_{\Delta_n} 2u_{nk} (p_y^{(nk)})^2 dx dy &= 2u_{nk} S_n (x_{nl} - x_{nm})^2 \\
\iint_{\Delta_n} 2u_{nl} p_y^{(nk)} p_y^{(nl)} dx dy &= 2u_{nl} S_n (x_{nl} - x_{nm}) (x_{nm} - x_{nk}) \\
\iint_{\Delta_n} 2u_{nm} p_y^{(nk)} p_y^{(nm)} dx dy &= 2u_{nm} S_n (x_{nl} - x_{nm}) (x_{nk} - x_{nl}) \\
\iint_{\Delta_n} 2S_n f(x, y) p^{(nk)} dx dy &\approx \frac{2}{3} u_{nk} S_n^2 f_{nk}
\end{aligned} \tag{23}$$

Նշանակենք

$$y_{ni} - y_{nj} = y_{nij}$$

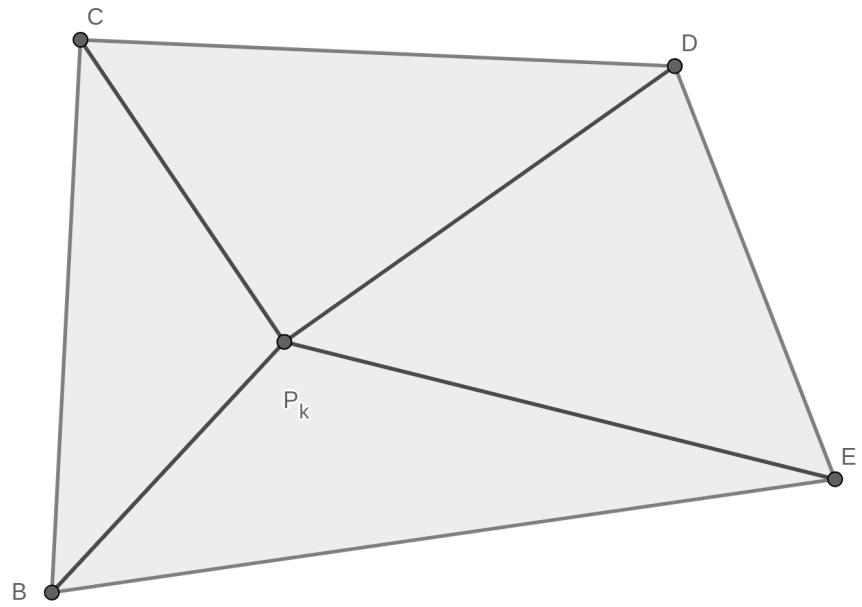
$$x_{ni} - x_{nj} = x_{nij}$$

Այսպիսով,  $\Delta_n$  եռանկյան համար ստացանք հետևյալ հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} 2u_{nk} S_n (y_{nlm}^2 + x_{nlm}^2) + 2u_{nl} S_n (y_{nlm} y_{nmk} + x_{nlm} x_{nmk}) + 2u_{nm} S_n (y_{nlm} y_{nkl} + x_{nlm} x_{nkl}) = -\frac{2}{3} u_{nk} S_n^2 f_{nk} \\ u_{nk} = 0, \text{ եթե } u_{nk} \text{-ն տիրույթի եզրի գագաթ է} \end{cases} \tag{24}$$

Համախմբելով բոլոր եռանկյունների համար ստացված հավասարումները, կստանանք գլխավոր համակարգը, և յուրաքանչյուր  $n$ -րդ գագաթի համար կունենանք.

$$\begin{cases} \sum_{r: P_n \in \Delta_r} u_{nk} S_r (y_{rlm}^2 + x_{rlm}^2) + u_{nl} S_r (y_{rlm} y_{rmk} + x_{rlm} x_{rmk}) + u_{nm} S_r (y_{rlm} y_{rkl} + x_{rlm} x_{rkl}) = -\frac{1}{3} \sum_{r: P_n \in \Delta_r} u_{nk} S_r^2 f_{nk} \\ u_{nk} = 0, \text{ եթե } u_{nk} \text{-ն տիրույթի եզրի գագաթ է} \end{cases} \tag{25}$$



Նկար 4.3. Գլխավոր համակարգի համախմբում:

## Ծրագրային իրականացում

Ինչպես ուղղանկյուն տիրույթի դեպքում, այնպես էլ այս դեպքում կօգտվենք նույն գործիքներից: Տիրույթի եռանկյունացման համար կօգտվենք Python ծրագրավորման լեզվի triangle գրադարանից:

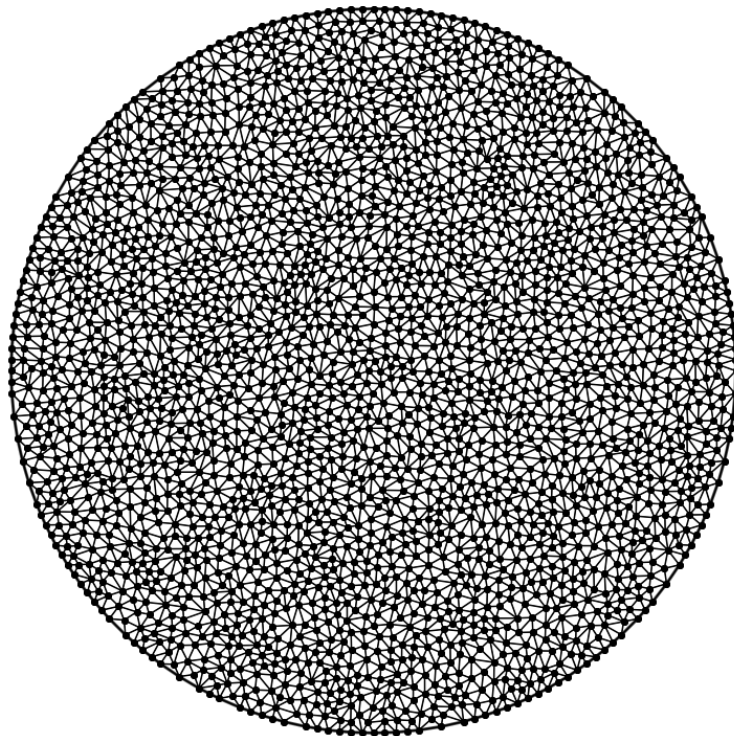
Ծրագրի սկզբում տրվում է տիրույթի եզրագծի կետերը, եզրագծերի կետերի միացման հաջորդականությունը, եռանկյունացման պարամետրերը և  $f$  ֆունկցիան: Հաջորդիվ յուրաքանչյուր եռանկյան համար կազմվում է հավասարումների համակարգը, հընթացս կառուցելով գլխավոր հավասարումների համակարգը: Այնուհետև կանչվում այն լուծող ֆունկցիան: Այնուհետև բազիսային ֆունկցիաների միջոցով կառուցվում է մոտարկող ֆունկցիան:

Օրինակ

$$\begin{cases} \Delta u = 2 \\ u|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

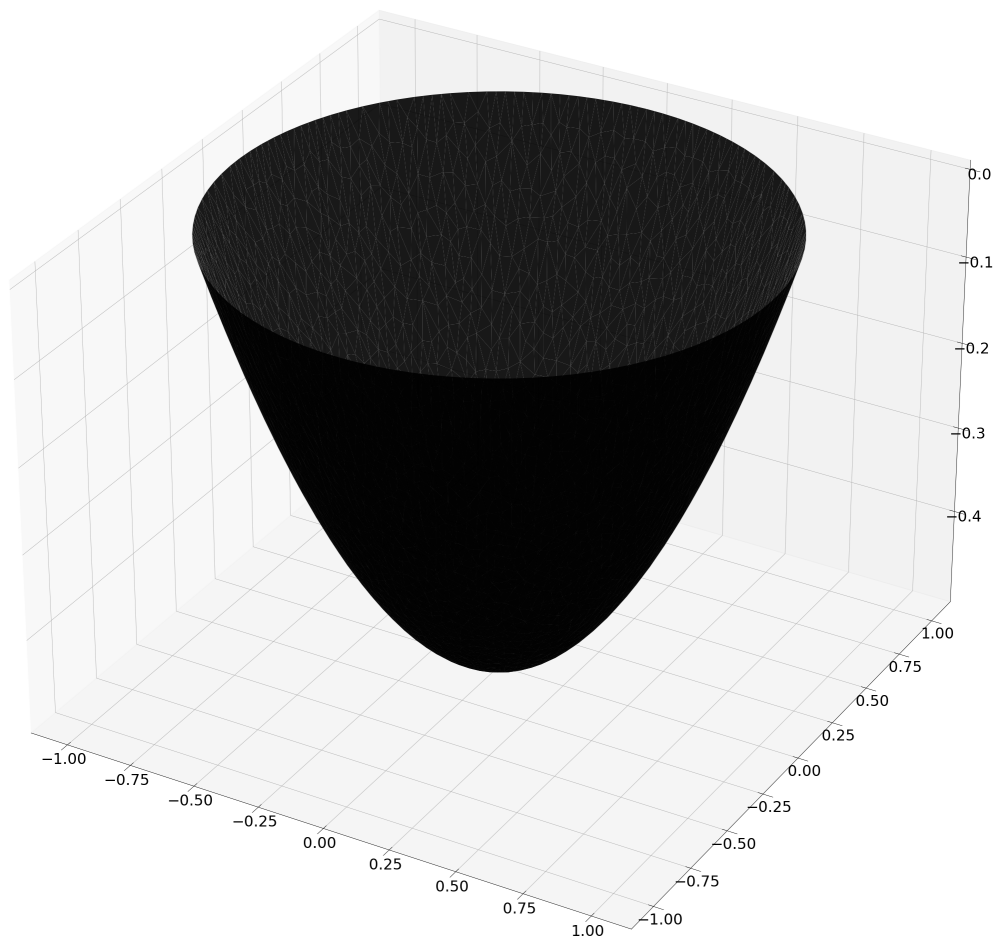
$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Տիրույթի եռանկյունացումը



Նկար 4.4. Շրջանաձև տիրույթի եռանկյունացման գրաֆիկական ներկայացում:

Խնդրի համար ստացված լուծումը.



Նկար 4.4. Պուասոնի հավասարման լուծման գրաֆիկական ներկայացում:

### 4.3 Բիհարմոնիկ հավասարման լուծում ուղղանկյուն տիրույթում

Դիտարկենք հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f \\ u|_{\partial D} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = 0 \end{cases} \quad (26)$$

որտեղ  $D = [x_0, x_N] \times [y_0, y_M]$ : Այս դիֆերենցիալ հավասարման համապատասխան վարիացիոն խնդիրը կլինի.

$$I(u) = \frac{1}{2} \iint_D [u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2] dx dy - \iint_D f u dx dy \longrightarrow \min \quad (27)$$

$D$  տիրույթը տրոհենք ուղղանկյունների  $h_1$  և  $h_2$  քայլերով համապատասխանաբար ըստ  $x$  և  $y$  կոորդինատների: Որոնելի ֆունկցիան կփնտրենք (2.9) ում ներկայացված բազիսային ֆունկցիաների գծային կոմբինացիայի տեսքով.

$$u(x, y) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi^{(ij)}(x, y) \quad (28)$$

Հետևաբար ինտեգրալ ֆունկցիոնալը կունենք հետևյալ տեսքը.

$$\frac{1}{2} \iint_D \left[ \left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_{xx}^{(ij)}(x, y) \right)^2 + 2 \left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_{xy}^{(ij)}(x, y) \right)^2 + \left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_{yy}^{(ij)}(x, y) \right)^2 - 2f(x, y) \left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi^{(ij)}(x, y) \right) \right] dx dy \quad (29)$$

Համաձայն էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանի.

$$\frac{\partial I}{\partial u_{kl}} = \frac{\partial}{\partial u_{kl}} I \left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi^{(ij)}(x, y) \right) = 0 \quad (30)$$

Դիտարկենք (18)-ի առաջին կրկնակի գումարը.

$$\left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_{xx}^{(ij)}(x, y) \right)^2 = [u_{kl} \varphi_{xx}^{(kl)}(x, y)]^2 + 2u_{kl} \varphi_{xx}^{(kl)}(x, y)[\dots] + [\dots]^2$$



որտեղ բազմակետերով արտահայտությունը իր մեջ չի պարունակում  $u_{kl}$  ը: Հանգումորեն երկրորդ կրկնակի գումարի համար.

$$\left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_{xy}^{(ij)}(x, y) \right)^2 = [u_{kl} \varphi_{xy}^{(kl)}(x, y)]^2 + 2u_{kl} \varphi_{xy}^{(kl)}(x, y)[\dots] + [\dots]^2$$

Հանգումորեն երրորդ կրկնակի գումարի համար.

$$\left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_{yy}^{(ij)}(x, y) \right)^2 = [u_{kl} \varphi_{yy}^{(kl)}(x, y)]^2 + 2u_{kl} \varphi_{yy}^{(kl)}(x, y)[\dots] + [\dots]^2$$

Այսպիսով ավելի պարզեցված տեսքով համակարգը ունի հետևյալ տեսքը.

$$2 \iint_D \left[ u_{kl} \{ \varphi_{xx}^{kl}(x, y) \}^2 + \varphi_{xx}^{kl}(x, y)[\dots] + 2u_{kl} \{ \varphi_{xy}^{kl}(x, y) \}^2 + 2\varphi_{xy}^{kl}(x, y)[\dots] + \{ \varphi_{yy}^{kl}(x, y) \}^2 + u_{kl} \varphi_{yy}^{kl}(x, y)[\dots] + f(x, y) \varphi_{kl}(x, y) \right] dxdy = 0 \quad (31)$$

Քանի որ տրված են Դիրիխլեի և Նեյմանի եզրային պայմանները, կոփտարկենք միայն  $2 \leq k \leq M-2, 2 \leq l \leq N-2$  դեպքերը: (19) ինտեգրալը հաշվենք անդամ առ անդամ:

$$\iint_D 2u_{kl} \{ \varphi_{xx}^{(kl)}(x, y) \}^2 dxdy = 2u_{kl} \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} \left\{ B_k''(x) B_l(y) \right\}^2 dxdy = 2u_{kl} \cdot \frac{6}{h_1^3} \cdot \frac{151}{140} h_2 \quad (32)$$

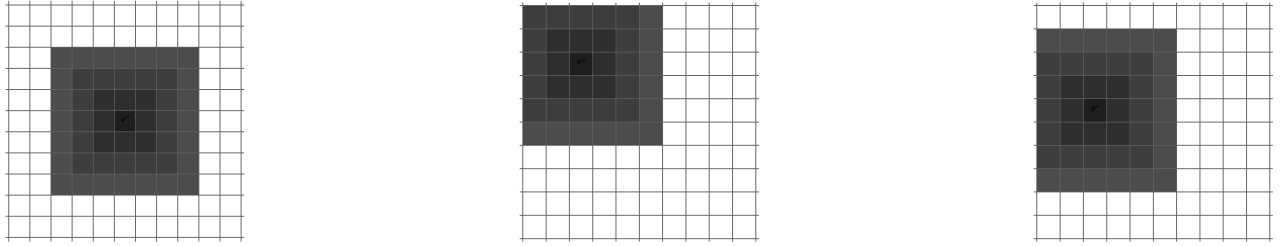
$$\iint_D 4u_{kl} \{ \varphi_{xy}^{(kl)}(x, y) \}^2 dxdy = 4u_{kl} \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} \left\{ B_k'(x) B_l'(y) \right\}^2 dxdy = 4u_{kl} \cdot \frac{3}{2h_1} \cdot \frac{3}{2h_2} \quad (33)$$

$$\iint_D 2u_{kl} \{ \varphi_{yy}^{(kl)}(x, y) \}^2 dxdy = 2u_{kl} \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} \left\{ B_k(x) B_l''(y) \right\}^2 dxdy = 2u_{kl} \cdot \frac{151}{140} h_2 \cdot \frac{6}{h_1^3} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \iint_D 2f(x, y) \varphi^{(kl)}(x, y) dxdy &= 2 \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} f(x, y) B_k(x) B_l(y) dxdy \approx \\ &\approx \frac{2}{9} h_1 h_2 [f_{k-1,l} + 2f_{k,l} + f_{k+1,l}] [f_{k,l-1} + 2f_{k,l} + f_{k,l+1}] \end{aligned} \quad (35)$$

Դիտարկենք մյուս ինտեգրալները: Քանի որ  $\varphi^{(ij)}$  բազիսային ֆունկցիաները ունեն լոկալ կրողներ  $4 \times 4 = 16$  ուղղանկյուն էլեմենտներում, ապա տրված  $\varphi^{kl}$  ֆունկցիան հատվում է 49 այլ բազիսային ֆունկցիաների հետ: Բացառություն են կազմում  $i = 2, M-2, j = 2, N-2$  դեպքերը, որոնց համար լոկալ կրողը  $6 \times 7 = 42$  է եզրին հարող հանգույցների համար, և  $6 \times 6 = 36$  անկյուններին հարող հանգույցների համար: Ստորև ներկայացվում է երեք

հնարավոր դեքերը (արտակատկերման համար ներկված հանգույցները պատկերված են ուղղանկյունների տեսքով):



Նկար 4.2. Բազիսային ֆունկցիաների հատումների ներկայացում տիրույթի ներսում, անկյունի վրա և եզրի վրա:

$$\iint_D 2\varphi_{xx}^{(kl)}(x, y)[\dots]dxdy, \iint_D 4\varphi_{xy}^{(kl)}(x, y)[\dots]dxdy, \iint_D 2\varphi_{yy}^{(kl)}(x, y)[\dots]dxdy$$

ինտեգրալները ներկայացնենք կրկնակի ինտեգրալների տեսքով:

$$\iint_D 2\varphi_{xx}^{(kl)}(x, y)[\dots]dxdy = 2 \sum_{\substack{i=k-3 \\ i \neq k}}^{k+3} \sum_{\substack{j=l-3 \\ j \neq l}}^{l+3} u_{ij} \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k''(x) B_i''(x) dx \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y) B_j(y) dy \quad (36)$$

$$\iint_D 4\varphi_{xy}^{(kl)}(x, y)[\dots]dxdy = 4 \sum_{\substack{i=k-3 \\ i \neq k}}^{k+3} \sum_{\substack{j=l-3 \\ j \neq l}}^{l+3} u_{ij} \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k'(x) B_i'(x) dx \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l'(y) B_j'(y) dy \quad (37)$$

$$\iint_D 2\varphi_{yy}^{(kl)}(x, y)[\dots]dxdy = 2 \sum_{\substack{i=k-3 \\ i \neq k}}^{k+3} \sum_{\substack{j=l-3 \\ j \neq l}}^{l+3} u_{ij} \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x) B_i(x) dx \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l''(y) B_j''(y) dy \quad (38)$$

Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը.

1. Երբ  $3 \leq k \leq M-3$ ,  $3 \leq l \leq N-3$

Առաջին ինտեգրալի համար

$$\begin{aligned}
 \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k''(x) B_{k-3}''(x) dx &= \frac{3}{8h_1^3}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k''(x) B_{k-2}''(x) dx = 0, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k''(x) B_{k-1}''(x) dx = -\frac{27}{8h_1^3} \\
 \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k''(x) B_{k+1}''(x) dx &= -\frac{27}{8h_1^3}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k''(x) B_{k+2}''(x) dx = 0, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k''(x) B_{k+3}''(x) dx = \frac{3}{8h_1^3} \\
 \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y) B_{l-3}(y) dy &= \frac{h_2}{2240}, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y) B_{l-2}(y) dy = \frac{3h_2}{56}, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y) B_{l-1}(y) dy = \frac{1991h_2}{2240} \\
 \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y) B_{l+1}(y) dy &= \frac{1991h_2}{2240}, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y) B_{l+2}(y) dy = \frac{3h_2}{56}, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y) B_{l+3}(y) dy = \frac{h_2}{2240}
 \end{aligned} \tag{39}$$

Երկրորդ ինտեգրալի համար

$$\begin{aligned}
 \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k'(x) B_{k-3}'(x) dx &= \frac{-3}{160h_1}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k'(x) B_{k-2}'(x) dx = \frac{-9}{20h_1}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k'(x) B_{k-1}'(x) dx = \frac{-9}{32h_1} \\
 \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k'(x) B_{k+1}'(x) dx &= \frac{-9}{32h_1}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k'(x) B_{k+2}'(x) dx = \frac{-9}{20h_1}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k'(x) B_{k+3}'(x) dx = \frac{-3}{160h_1} \\
 \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l'(y) B_{l-3}'(y) dy &= \frac{-3}{160h_2}, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l'(y) B_{l-2}'(y) dy = \frac{-9}{20h_2}, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l'(y) B_{l-1}'(y) dy = \frac{-9}{32h_2} \\
 \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l'(y) B_{l+1}'(y) dy &= \frac{-9}{32h_2}, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l'(y) B_{l+2}'(y) dy = \frac{-9}{20h_2}, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l'(y) B_{l+3}'(y) dy = \frac{-3}{160h_2}
 \end{aligned} \tag{40}$$

## Երրորդ ինտեգրալի համար

$$\begin{aligned}
 \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x) B_{k-3}(x) dx &= \frac{h_1}{2240}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x) B_{k-2}(x) dx = \frac{3h_1}{56}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x) B_{k-1}(x) dx = \frac{1991h_1}{2240} \\
 \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x) B_{k+1}(x) dx &= \frac{1991h_1}{2240}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{l+2}} B_k(x) B_{k+2}(x) dx = \frac{3h_1}{56}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x) B_{k+3}(x) dx = \frac{h_1}{2240} \\
 \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l''(y) B_{l-3}''(y) dy &= \frac{3}{8h_2^3}, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l''(y) B_{l-2}''(y) dy = 0, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l''(y) B_{l-1}''(y) dy = -\frac{27}{8h_2^3} \\
 \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l''(y) B_{l+1}''(y) dy &= -\frac{27}{8h_2^3}, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l''(y) B_{l+2}''(y) dy = 0, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l''(y) B_{l+3}''(y) dy = \frac{3}{8h_2^3}
 \end{aligned} \tag{41}$$

2.  $k = 2, l = 2$

## Առաջին ինտեգրալի համար

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^{x_4} B_2''(x) B_0''(x) dx &= \frac{3}{8h_1^3}, \quad \int_{x_0}^{x_4} B_2''(x) B_1''(x) dx = -\frac{27}{8h_1^3} \\
 \int_{x_0}^{x_4} B_2''(x) B_3''(x) dx &= -\frac{27}{8h_1^3}, \quad \int_{x_0}^{x_4} B_2''(x) B_4''(x) dx = 0, \quad \int_{x_0}^{x_4} B_2''(x) B_5''(x) dx = \frac{3}{8h_1^3} \\
 \int_{y_0}^{y_4} B_2(y) B_0(y) dy &= \frac{121h_2}{2240}, \quad \int_{y_0}^{y_4} B_2(y) B_1(y) dy = \frac{1991h_2}{2240} \\
 \int_{y_0}^{y_4} B_2(y) B_3(y) dy &= \frac{1991h_2}{2240}, \quad \int_{y_0}^{y_4} B_2(y) B_4(y) dy = \frac{3h_2}{56}, \quad \int_{y_0}^{y_4} B_2(y) B_5(y) dy = \frac{h_2}{2240}
 \end{aligned} \tag{42}$$

Երկրորդ ինտեգրալի համար

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_4} B_2'(x) B_0'(x) dx &= -\frac{15}{32h_1}, \quad \int_{x_0}^{x_4} B_2'(x) B_1'(x) dx = -\frac{9}{32h_1} \\
\int_{x_0}^{x_4} B_2'(x) B_3'(x) dx &= \frac{-9}{32h_1}, \quad \int_{x_0}^{x_4} B_2'(x) B_4'(x) dx = \frac{-9}{20h_1}, \quad \int_{x_0}^{x_4} B_2'(x) B_5'(x) dx = \frac{-3}{160h_1} \\
\int_{y_0}^{y_4} B_2'(y) B_0'(y) dy &= -\frac{9}{32h_2}, \quad \int_{y_0}^{y_4} B_2'(y) B_1'(y) dy = -\frac{9}{32h_2} \\
\int_{y_0}^{y_4} B_2'(y) B_3'(y) dy &= \frac{-9}{32h_2}, \quad \int_{y_0}^{y_4} B_2'(y) B_4'(y) dy = \frac{-9}{20h_2}, \quad \int_{y_0}^{y_4} B_2'(y) B_5'(y) dy = \frac{-3}{160h_2}
\end{aligned} \tag{43}$$

Երրորդ ինտեգրալի համար

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_4} B_2(x) B_0(x) dx &= \frac{121h_1}{2240}, \quad \int_{x_0}^{x_4} B_2(x) B_1(x) dx = \frac{1991h_1}{2240} \\
\int_{x_0}^{x_4} B_2(x) B_3(x) dx &= \frac{1991h_1}{2240}, \quad \int_{x_0}^{x_4} B_2(x) B_4(x) dx = \frac{3h_1}{56}, \quad \int_{x_0}^{x_4} B_2(x) B_5(x) dx = \frac{h_1}{2240} \\
\int_{y_0}^{y_4} B_2''(y) B_0''(y) dy &= -\frac{3}{8h_1^2}, \quad \int_{y_0}^{y_4} B_2''(y) B_1''(y) dy = -\frac{27}{8h_2^3} \\
\int_{y_0}^{y_4} B_2''(y) B_3''(y) dy &= -\frac{27}{8h_2^3}, \quad \int_{y_0}^{y_4} B_2''(y) B_4''(y) dy = 0, \quad \int_{y_0}^{y_4} B_2''(y) B_5''(y) dy = \frac{3}{8h_2^3}
\end{aligned} \tag{44}$$

3.  $k = M - 2, l = N - 2$  Քանի որ բազիսային ֆունկցիաները սիմետրիկ են, ապա այդ դեպքում կատարվում են նույն հաշվարկները, ինչ նախորդ կետում:

Հաշվի առնելով նախորդիվ հաշվարկված ինտեգրալները, ինչպես նաև Դիրիխլեի և Նեյմանի եզրային պայմանները, կստանանք հետևյալ հավասարումների համակարգը. Դիրիխլեի եզրային պայմաններ.

$$\begin{cases} u_{00} + \frac{5}{16}(u_{01} + u_{10}) + \frac{1}{16}u_{11} &= 0 \\ u_{M0} + \frac{5}{16}(u_{M1} + u_{M-1,0}) + \frac{1}{16}u_{M-1,1} &= 0 \\ u_{0N} + \frac{5}{16}(u_{1N} + u_{0,N-1}) + \frac{1}{16}u_{N-1,1} &= 0 \\ u_{MN} + \frac{5}{16}(u_{M-1,N} + u_{M,N-1}) + \frac{1}{16}u_{M-1,N-1} &= 0 \end{cases} \tag{45}$$

Նեյմանի եզրային պայմաններ.

$$\begin{cases} \frac{3}{4h_2}(u_{i1} - u_{i0}) + \frac{3}{16h_2}(u_{i-1,0} + u_{i+1,0} + u_{i-1,1} + u_{i+1,1}) & = 0 \\ \frac{3}{4h_2}(u_{iN} - u_{i,N-1}) + \frac{3}{16h_2}(u_{i-1,N-1} + u_{i+1,N-1} + u_{i-1,N-1} + u_{i+1,N-1}) & = 0 \\ \frac{3}{4h_1}(u_{1j} - u_{0j}) + \frac{3}{16h_1}(u_{0,j-1} + u_{0,j+1} + u_{1,j-1} + u_{1,j+1}) & = 0 \\ \frac{3}{4h_1}(u_{Mj} - u_{M-1,j}) + \frac{3}{16h_1}(u_{M-1,j-1} + u_{M-1,j+1} + u_{M-1,j-1} + u_{M-1,j+1}) & = 0 \end{cases} \quad (46)$$

Մինիմումի պայմաններ.

$$\begin{aligned} & \left( \begin{bmatrix} 3/8h_1^2 \\ 0 \\ -27/8h_1^3 \\ 6/h_1^3 \\ -27/8h_1^3 \\ 0 \\ 3/8h_1^2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} h_2/2240 \\ 3h_2/56 \\ 1991h_2/2240 \\ 151h_2/140 \\ 1991h_2/2240 \\ 3h_2/56 \\ h_2/2240 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3/160h_1 \\ -9/20h_1 \\ -9/32h_1 \\ 3/2h_1 \\ -9/32h_1 \\ -9/20h_1 \\ -3/160h_1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3/160h_1 \\ -9/20h_1 \\ -9/32h_1 \\ 3/2h_1 \\ -9/32h_1 \\ -9/20h_1 \\ -3/160h_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_2/2240 \\ 3h_2/56 \\ 1991h_2/2240 \\ 151h_2/140 \\ 1991h_2/2240 \\ 3h_2/56 \\ h_2/2240 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3/8h_1^2 \\ 0 \\ -27/8h_1^3 \\ 6/h_1^3 \\ -27/8h_1^3 \\ 0 \\ 3/8h_1^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_{k-3,l-3} & u_{k-2,l-3} & u_{k-1,l-3} & u_{k,l-3} & u_{k+1,l-3} & u_{k+2,l-3} & u_{k+3,l-3} \\ u_{k-3,l-2} & u_{k-2,l-2} & u_{k-1,l-2} & u_{k,l-2} & u_{k+1,l-2} & u_{k+2,l-2} & u_{k+3,l-2} \\ u_{k-3,l-1} & u_{k-2,l-1} & u_{k-1,l-1} & u_{k,l-1} & u_{k+1,l-1} & u_{k+2,l-1} & u_{k+3,l-1} \\ u_{k-3,l} & u_{k-2,l} & u_{k-1,l} & u_{k,l} & u_{k+1,l} & u_{k+2,l} & u_{k+3,l} \\ u_{k-3,l+1} & u_{k-2,l+1} & u_{k-1,l+1} & u_{k,l+1} & u_{k+1,l+1} & u_{k+2,l+1} & u_{k+3,l+1} \\ u_{k-3,l+2} & u_{k-2,l+2} & u_{k-1,l+2} & u_{k,l+2} & u_{k+1,l+2} & u_{k+2,l+2} & u_{k+3,l+2} \\ u_{k-3,l+3} & u_{k-2,l+3} & u_{k-1,l+3} & u_{k,l+3} & u_{k+1,l+3} & u_{k+2,l+3} & u_{k+3,l+3} \end{bmatrix} = \\ & = \frac{2}{9} h_1 h_2 [f_{k-1,l} + 2f_{k,l} + f_{k+1,l}] [f_{k,l-1} + 2f_{k,l} + f_{k,l+1}] \end{aligned} \quad (47)$$

$k = 2, M-2$ , ինչպես նաև  $l = 2, N-2$  -ի համար կազմվում է նույն հավասարումը, փոխելով միայն համապատասխան գործակիցները և դրանց քանակը:

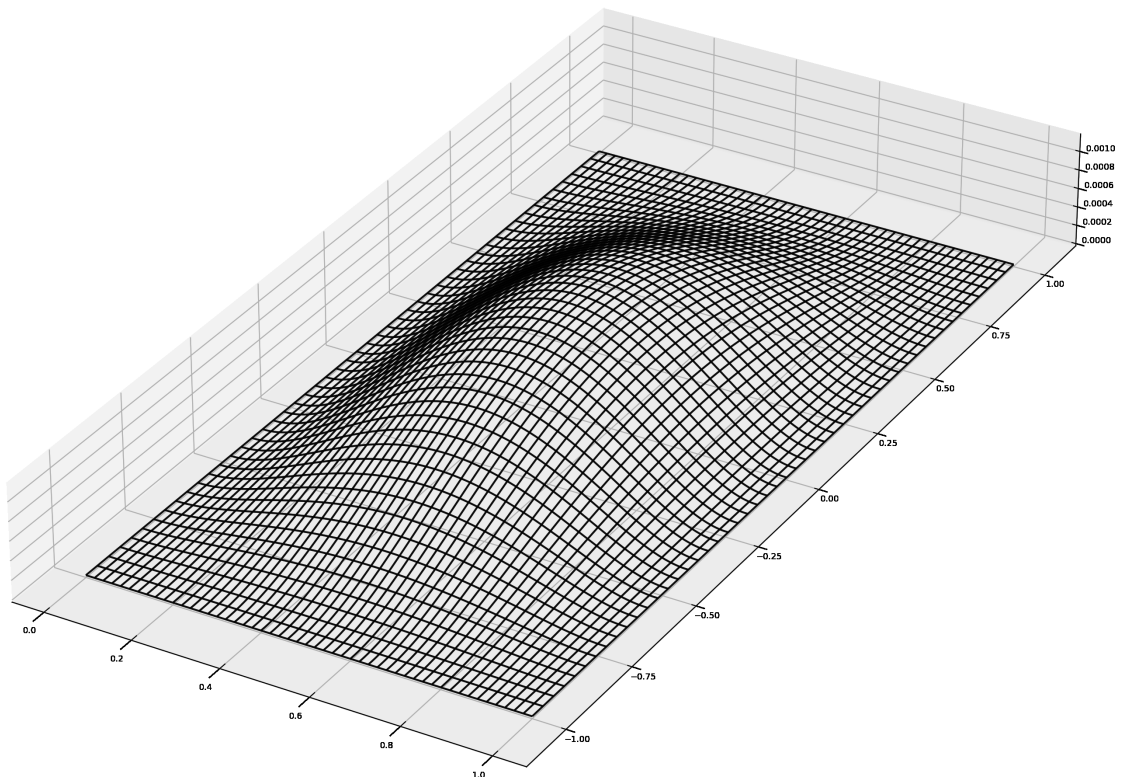
## Ծրագրային իրականացում

Ինչպես Պուասոնի հավասարման դեպքում, այնպես էլ այս դեպքում կօգտվենք նույն գործիքներից: Որպես օրինակ լուծենք հետևյալ հավասարումը տրված կոնկրետ տիրույթով և  $f$  ֆունկցիայով:

$$\begin{cases} \Delta^2 u &= 1 \\ u|_{\partial D} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} &= 0 \end{cases}$$

որտեղ  $D = [0, 1] \times [-1, 1]$ ,  $h_1 = 0.01$ ,  $h_2 = 0.02$ :

Խնդրի համար ստացված լուծումը.



Նկար 4.3. Բիհարմոնիկ հավասարման լուծման գրաֆիկական ներկայացում: