

ՀՅ : Տ1(075)

Ն-17

Յու. Ա. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

ԹՎԱՅԻՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ

II

Դասագիրք համալսարանների
ֆիզիկամաթեմատիկական
մասնագիտությունների համար

Երևան - 2007

Խ

ՀՏՌ 51(07)

ԳՄԴ 22 ս 73

Հ 177

Երաշխավորված է հրատարակության ԵՊՀ հնֆորմատիկայի
և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի խորհուրդի կողմից

Խմբագիր՝ Լ.Գ. Մանուկյան

Հակոբյան Յու.Ռ.

Հ 177 Թվային մեթոդներ,-մաս II.-Եր.: ՎՄՎ -Պրինտ, 2007.- 248 էջ:

Գրքում տրված է հանրահաշվի, մաթեմատիկական անալիզի և դիֆերենցիալ հավասարումների խնդիրների լուծման բայց մեթոդների հիմունքների համակարգված շարադրանքը: Որպես ուսումնամեթոդական ձեռնարկ դասագիրքը նախանշված է համալսարանների ֆիզիկամաթեմատիկական մասնագիտությունների և բարձրագույն տեխնիկական ուսումնական հաստատությունների ուսանողների և ասպիրանտների հսմար: Այն կարող է օգտակար լինել նաև թվային հաշվարկների հետ առնչվող մասնագետներին: Յուրաքանչյուր գլուխ եզրափակում է ինքնուրույն աշխատանքի համար նախատեսված խնդիրներով և վարժություններով:

Գրքի երկրորդ մասը ընդգրկում է նորմավորված տարածություններում մոտարկումների տեսությունը, թվային խնտեզրման, սովորական և նաև ակադեմիական ածանցյալներու դիֆերենցիալ հավասարումների բայց ին լուծման մեթոդները:

ԵՊՀ Գրադարան

Հ $\frac{1602010000}{0180(01) - 2007}$ 2007 թ.



ԳՄԴ 22 ս 73

ISBN 978-99941-53-35-0

© Յու.Ռ. Հակոբյան, 2007

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԱԽԱԲԱՆ	7
Գլուխ 5. ՄՈՏԱՐԿՈՒՄՆԵՐ ՆՈՐՄԱՎՈՐՎԱԾ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ	8
5.1 Լավագույն մոտարկման տարր	8
5.2 Հավասարաշափ մոտարկումներ	13
5.3 Լավագույն հավասարաշափ մոտարկման օրինակներ	22
5.4 Մոտարկումներ հիլբերտյան տարածոքյունում	25
5.5 Գրամ-Ըմիշտի օրթոգոնալացումը	32
5.6 Մլույն բառակուսային մոտարկումներ հանրահաշվական բազմանդամներով	35
5.7 Փոքրագույն բառակուսիների մեթոդ	44
Խնդիրներ և վարժություններ - 5	48
Գլուխ 6. ԹՎԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄ	52
6.1 Քառակուսացման բանաձևեր	52
6.2 Ուղղանկյունների և սեղանների բանաձևերը	54
6.3 Սիմպոնի բանաձևը	65
6.4 Սիսալանքի գնահատման Ռուսկեի կանոնը	69
6.5 Նյուտոն-Կոտսի բանաձևերը	75
6.6 Գառտի բառակուսացման բանաձևը	79
6.7 Չերիշեի բառակուսացման բանաձևը	86
6.8 Արապտիվ ալգորիթմներ	89
6.9 Անխական ինտեգրալների հաշվումը	91
Խնդիրներ և վարժություններ - 6	98
Գլուխ 7. ՍՈՎՈՐԱԿԱՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ	103
7.1 Կոչու խնդիրը	103
7.2 Անալիտիկ մոտավոր մեթոդներ	108
7.3 Էյերի մեթոդը	112
7.4 Էյերի անբացահայտ մեթոդը	119
7.5 Էյերի վերահաշվման մեթոդներ	122
7.6 Ռունգե-Կուտայի մեթոդը	128
7.7 Ռունգեի կանոնը և ճշգրտում ըստ Ռիշարդոնի	131

7.8	Աղամսի մեթոդը	134
7.9	Կայունության խնդիրը և կոշտ հավասարումներ	142
7.10	Եզրային խնդիրներ	151
7.11	Վերջավոր տարբերությունների մեթոդ	155
7.12	Տարբերական սխեմայի հետազոտությ մեկ եզրային խնդրի համար	159
	Խնդիրներ և վարժություններ - 7	163
Գլուխ 8.	ՏԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ՍԽԵՄԱՆԵՐ ՄԱՍՆԱԿԱՆ ԱԾՎԱՑՅԱԼՆԵՐՈՎ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՍԱՐ	167
8.1	Մաքեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումների մասին	167
8.2	Տարբերական սխեմաների տեսության հիմնական հասկացությունները	170
8.3	Տարբերական սխեմաներ տեղափոխման հավասարման համար	183
8.4	Կայունության սպեկտրալ հայտանիշը	187
8.5	Զերմահաղորդականության հավասարումը	192
8.6	Ֆուրիեի մեթոդը	201
8.7	Լարի տատանման հավասարումը	207
8.8	Դիրիխլի խնդիրը Պուասոնի հավասարման համար	212
8.9	Ցանցային հավասարումների համակարգերի լուծման մեթոդները	216
	Խնդիրներ և վարժություններ - 8	225
ՀԱՎԵԼՎԱԾ. ՀԱՍԱՌՈԾ ԿԵՆՍԱԳՐԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ	229	
ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ	244	

ՆԱԽԱԲԱՆ

Գրի երկրորդ մասը բաղկացած է չորս գլխուց և հավելվածից:

Հինգերորդ գլխում դիտարկվում են մոտարկումներ նորմավորված տարածություններում: Ներմուծվում է լավագույն մոտարկման տարրի հասկացությունը, քննարկվում են նրա գոյության և միակության հարցերը: Ուսումնասիրվում են ֆունկցիաների հավասարաշափ և միջին քառակուսային մոտարկումները հանրահաշվական բազմանդամներով: Շարադրվում են Գրամ-Ծմիդա օրբոգոնալացման ալգորիթմի դասական և վերափոխված տարրերակները: Գլխի վերջին պարագրաֆը նվիրված է լայն կիրառություն ունեցող փորձագույն քառակուսիների մեթոդին:

Վեցերորդ գլուխը վերաբերում է թվային խնտեգրման մեթոդներին: Դիտարկվում են ուղղանկյունների, սեղանների, Սիմպոնի, Գաուսի և Չերչիկի քառակուսացման բանաձևները: Արտածվում է սխալանքի գնահատման Ռունգեի կանոնը, ինչպես նաև մոտավոր խնտեգրման արդյունքի ճշգրտման Ռիշարդոնի մեթոդը: Վերջին պարագրաֆում շարադրվում են անհիսկական խնտեգրալների հաշվման որոշ եղանակներ:

Յոթերորդ գլուխը նվիրված է սովորական դիմերենցիալ հավասարումների համար Կոշու խնդրի և եզրային խնդիրների լուծման թվային մեթոդներին: Դիտարկվում են Եյերի մեթոդը և նրա վերափոխությունները, Ռունգե-Կուտայի և Աղամասի մեթոդները, Խետագոտվում է նրանց գուգամիտությունը: Հիմնավորվում է սխալանքի գործնական գնահատման Ռունգեի կանոնը և Ռիշարդոնի ճշգրտման մեթոդը: Հետագոտվում է մեթոդների կայունությունը լստ սկզբնական պայմանների: Երկրորդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համար եղանակով շարադրվում է վերջավոր տարրերությունների մեթոդի էությունը և պարզաբանվում են տարրերական սխեմաների տեսության հիմնական դրույթները:

Ութերորդ գլխում դիտարկվում են մասնական ածանցյալներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման տարրերական մեթոդները: Սահմանվում են տարրերական սխեմաների տեսության հիմնական հասկացությունները մոտարկում, կայունություն և գուգամիտություն: Կառուցվում են հետագոտվում են տարրերական սխեմաներ տեղափոխման, ջերմահաղորդականության, լարի տատանման և Պուասոնի հավասարումների համար:

Հավելվածում բերված են համառոտ կենսագրական տեղեկություններ դասագրքում հիշատակված գիտնականների մասին:

Հեղինակը շնորհակալություն է հայտնում

Ս.Լ. Սահակյանին և Է.Հ. Դանոյանին՝ դասագրի բազում քննարկումների ընթացքում եական դիտողությունների և առաջարկությունների համար,

Լ.Վ. Միքայելյանին՝ զրի հավելվածի ընթերցման և ճշգրտման համար,

Մ.Ա. Սիկիլյանին՝ աշխատանքը իրատարակության նախապատրաստելու ընթացքում անգնահատելի օգնության համար:

Յու.Ռ. Հակոբյան

Գլուխ 5

ՄՈՏԱՐԿՈՒՄՆԵՐ ՆՈՐՍԱՎՈՐՎԱԾ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ

5.1 Լավագույն մոտարկման տարր

Նախորդ գլխում մենք ծանոթացել ենք ֆունկցիաների մոտարկման որոշ եղանակներին, որոնց հիմքում ընկած է ինտերպոլացիա հանրահաշվական բազմանդամների միջոցով: Սակայն մի շարք դեպքերում տրված կետերում մոտարկվող և մոտարկող ֆունկցիաների համընկնան պահանջը նպատակահարմար չէ, օրինակ՝ եթե մենք առնչվում ենք փորձարարական տվյալների մշակման հետ, որոնք որպես օրենք, պարունակում են անձտուրյուններ: Ինտերպոլացիայի հետ մեկտեղ գոյուրյուն ունի ֆունկցիաների մոտակման խնդրի լուծման այլ մոտեցում, որի էուրյունը կայանում է ինչ-որ ֆունկցիոնալ տարածության մետրիկայում լավագույն մոտարկման կառուցման մեջ:

Հիշեցնենք նորմավորված տարածության սահմանումը:

Սահմանում 5.1.1 : L գծային տարածությունը (իրական կամ կոմպլեքս) կոչվում է նորմավորված տարածություն, եթե յուրաքանչյուր $x \in L$ տարրին համապատասխանության մեջ է դրված այդ տարրի նորմ անվանվող $\|x\|$ իրական թիվը այնպես, որ բավարարվում են

1. $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (եռանկյան անհավասարություն)

պայմանները կամայական $x, y \in L$ և λ (իրական կամ, համապատասխանաբար, կոմպլեքս) թվի համար:

Հետագայում մենք կսահմանափակվենք միայն իրական նորմավորված տարածությունների դիտարկմամբ:

‘Իցուք L -ը նորմավորված տարածություն է, իսկ L_n -ը՝ նրա ինչ-որ n -չափանի ենթատարածությունն է:

Սահմանում 5.1.2 : Կամայական $f \in L$ տարրի հեռավորությունը L_n ենթատարածությունից կոչվում է

$$\rho(f, L_n) \equiv \inf_{\varphi \in L_n} \|f - \varphi\| \quad (5.1.1)$$

մեծությունը:

Պայլ է, որ եթե $f \in L_n$, ապա $\rho(f, L_n) = 0$:

Սահմանում 5.1.3 : $\psi \in L_n$ տարր, որի համար

$$\|f - \psi\| = \rho(f, L_n), \quad (5.1.2)$$

կոչվում է լավագույն մոտարկման տարր $f \in L$ տարրի համար L_n ենթատարածության մեջ:

Ակնհայտ է, որ եթե $f \in L_n$, ապա նենց ինքն է իր համար միակ լավագույն մոտարկման տարրը:

5.1.1 Լավագույն մոտարկման տարրի գոյությունը

Տեղի ունի հետևյալ հիմնարար պնդումը:

Թեորեմ 5.1.1 : Կամայական $f \in L$ տարրի համար L_n ենթատարածությունում գոյություն ունի լավագույն մոտարկման տարր:

Ապացույց: Դիցուք $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ տարրերի համակարգը L_n ենթատարածության բազիսն է: Դրանով իսկ կամայական $\varphi \in L_n$ տարր միարժեքորեն ներկայացվում է

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$$

տեսքով: Այդ դեպքում

$$\|\varphi\| = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \right\| \equiv G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \geq 0 \quad (5.1.3)$$

և

$$\|f - \varphi\| = \left\| f - \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \right\| \equiv F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \geq 0 \quad (5.1.4)$$

նորմերը կարելի է դիտարկել որպես ոչ բացասական ֆունկցիաներ որոշված $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ կետերի n -չափանի \mathbf{R}^n թվաբանական տարածությունում: Հեշտ է տեսնել, որ F ֆունկցիայի ներմուծմամբ (5.1.1)-ում սահմանված $\rho(f, L_n)$ հեռավորությունը կարելի է գրել նաև հետևյալ կերպ.

$$\rho(f, L_n) = \inf_{\alpha \in \mathbf{R}^n} F(\alpha) : \quad (5.1.5)$$

Դժվար չէ համոզվել, որ G և F ֆունկցիաները անընդհատ են: Իրոք, \mathbf{R}^n -ի ցանկացած $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ և $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ կետերի համար ուսնենք

$$|G(\alpha) - G(\beta)| = \left| \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \right\| - \left\| \sum_{i=1}^n \beta_i \varphi_i \right\| \right| \leq \\ \left\| \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) \varphi_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i| \|\varphi_i\| \leq q \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|,$$

որտեղ $q \equiv \max_{1 \leq i \leq n} \|\varphi_i\|$: Ստացված անհավասարությունից հետևում է G ֆունկցիայի անընդհատությունը: Համանմանորեն ցույց է տրվում F ֆունկցիայի անընդհատությունը:

Լավագույն մոտարկման տարրի (5.1.2) և F ֆունկցիայի (5.1.4) սահմանումների համաձայն՝ բավարար է ապագուցել այնպիսի $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*) \in \mathbf{R}^n$ կետի գոյությունը, որի համար $F(\alpha^*) = \rho(f, L_n)$:

Դիտարկենք \mathbf{R}^n տարածության մեջ

$$S = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) : \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1 \right\}$$

Միավոր սփերան: Ինչպես հայտնի է, S -ը սահմանափակ փակ բազմություն է \mathbf{R}^n տարածությունում: Հայտնի է նաև, որ անընդհատ ֆունկցիան փակ սահմանափակ բազմության վրա ընդունում է իր նվազագույն արժեքը (տե՛ս, օրինակ, [45]): Այդ պատճառով գոյություն ունի այնպիսի $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in S$ կետ, որ

$$G(\xi) = \min_{\alpha \in S} G(\alpha) \equiv \mu : \quad (5.1.6)$$

Քանի որ G ֆունկցիան ոչ բացասական է, ապա $\mu \geq 0$: Դեռ ավելին, $\mu > 0$: Իրոք, եթե μ -ն հավասար լիներ զրոյի, ապա (5.1.6) և (5.1.3) -ից կհետևի, որ

$$\sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i = 0 :$$

Այդ դեպքում, քանի որ φ_i տարրերը զծորեն անկախ են, կստանայինք, որ $\xi_i = 0$ բոլոր $i = 1, 2, \dots, n$ արժեքների համար: Իսկ դա հակասում է $\xi \in S$ պայմանին: Այսպիսով, $\mu > 0$:

Վերցնենք

$$r = \frac{\rho(f, L_n) + \|f\| + 1}{\mu} \quad (5.1.7)$$

թիվը և տրոհենք \mathbf{R}^n տարածությունը երկու շիատվող ենթաբազմությունների.

$$R_1^n = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) : \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \leq r^2 \right\}$$

և

$$R_2^n = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) : \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 > r^2 \right\} :$$

Պարզ է, որ $R_1^n \cup R_2^n = \mathbf{R}^n$: Դիտարկենք F ֆունկցիան R_2^n բազմության վրա: Ցանկացած $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in R_2^n$ կետի համար ունենք՝

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \equiv \lambda^2 > r^2 \quad (5.1.8)$$

և, համապատասխանաբար,

$$F(\alpha) = \left\| f - \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \right\| \geq \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \right\| - \|f\| = |\lambda| \left\| \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{|\lambda|} \varphi_i \right\| - \|f\| : \quad (5.1.9)$$

Այսուհետև վերցնենք $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ կետը, որտեղ $\beta_i = \alpha_i/|\lambda|$, $i = 1, 2, \dots, n$: Ակնհայտ է, որ $\beta \in S$: Այդ դեպքում (5.1.9)-ից, հաշվի առնելով (5.1.6) և (5.1.8), կստանանք

$$F(\alpha) \geq |\lambda| \left\| \sum_{i=1}^n \beta_i \varphi_i \right\| - \|f\| = |\lambda| G(\beta) - \|f\| \geq |\lambda| \mu - \|f\| \geq r\mu - \|f\| :$$

Այստեղից՝ r թվի (5.1.7) ընտրության շնորհիվ, հետևում է

$$F(\alpha) \geq \rho(f, L_n) + 1 :$$

Վերջին անհավասարությունը տեղի ունի կամայական $\alpha \in R_2^n$ կետի համար: Այդ պատճառով, ելնելով (5.1.5)-ից, կարող ենք գրել, որ

$$\rho(f, L_n) = \inf_{\alpha \in \mathbf{R}^n} F(\alpha) = \inf_{\alpha \in R_1^n} F(\alpha) :$$

Իսկ քանի որ R_1^n -ը սահմանափակ փակ բազմություն է \mathbf{R}^n տարածության մեջ, ապա F անընդհատ ֆունկցիան ընդունում է այդ բազմության վրա իր փոքրագույն արժեքը: Այլ չոսքով, գոյություն ունի այնպիսի $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*) \in R_1^n$ կետ, որ

$$F(\alpha^*) = \inf_{\alpha \in R_1^n} F(\alpha) = \rho(f, L_n) :$$

Այսպիսով,

$$\psi = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* \varphi_i \in L_n$$

տարրը կլինի լավագույն մոտարկման տարր $f \in L$ տարրի համար: \square

5.1.2 Լավագույն մոտարկման տարրի միակության մասին

Մինչ լավագույն մոտարկման տարրի միակության հարցի քննարկումը՝ դիտարկենք մի օրինակ:

Օրինակ 5.1.1 : Դիցուք $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ վեկտորների \mathbf{R}^3 տարածության մեջ մտցված է $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq 3} |x_i|$ նորմը: Գտնենք լավագույն մոտարկման տարր $f = [1, 1, 1]^T$ վեկտորի համար $x = [x_1, x_2, 0]^T$ վեկտորների R_2^3 երկափանի ներատարածությունում:

Ցանկացած $x \in R_2^3$ վեկտորի համար ունենք՝

$$\|f - x\| = \max\{|1 - x_1|, |1 - x_2|, 1\} \geq 1 :$$

Ակնհայտ է, որ

$$\rho(f, R_2^3) = \inf_{x \in R_2^3} \|f - x\| = 1 :$$

Հեշտ է տեսնել, որ ցանկացած $x \in R_2^3$ վեկտոր, որի կոմպոնենտները բավարարում են $|1 - x_1| \leq 1, |1 - x_2| \leq 1$, այսինքն $0 \leq x_1, x_2 \leq 2$ պայմաններին, լավագույն մոտարկման տարրը է f վեկտորի հանար, քանի որ

$$\|f - x\| = 1 = \rho(f, R_2^3). \quad \clubsuit$$

Այսպիսով, դիտարկված օրինակը ցույց է տալիս, որ լավագույն մոտարկման տարրը միշտ չէ, որ միակն է:

Սահմանում 5.1.4 : L նորմավորված տարածությունը կոչվում է *խիստ նորմավորված, եթե*

$$\|f + g\| = \|f\| + \|g\|, \quad f, g \neq 0$$

պայմանից հետևում է, որ $f = \alpha g$, որտեղ $\alpha > 0$:

Թեորեմ 5.1.2 : Եթե L տարածությունը խիստ նորմավորված է, ապա լավագույն մոտարկման տարրը միակն է:

Ապացույց: Եթե $f \in L_n$, ապա, ինչպես վերև ասվեց, այն միակ լավագույն մոտարկման տարրն է ինքն իր համար: Հետևաբար ենթադրենք, որ $f \in L \setminus L_n$ և նրա համար L_n ներատարածության մեջ գոյություն ունեն երկու լավագույն մոտարկման տարր, այն է՝ ψ_1 և ψ_2 : Այդ դեպքում

$$\|f - \psi_1\| = \|f - \psi_2\| = \rho(f, L_n) : \quad (5.1.10)$$

Դիտարկենք

$$\psi_0 \equiv \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) \in L_n$$

տարրը: Հաշվի առնելով (5.1.10) հավասարությունները նրա համար ունենք

$$\|f - \psi_0\| = \|f - \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2)\| = \frac{1}{2}\|(f - \psi_1) + (f - \psi_2)\| \leq \frac{1}{2}(\|f - \psi_1\| + \|f - \psi_2\|) = \rho(f, L_n) :$$

Եթե

$$\|(f - \psi_1) + (f - \psi_2)\| \leq \|f - \psi_1\| + \|f - \psi_2\|$$

անհավասարության մեջ լիներ խիստ անհավասարություն, ապա մենք կստանայինք

$$||f - \psi_0|| < \rho(f, L_n).$$

ինչը կհակասեր $\rho(f, L_n)$ հեռավորության սահմանանը: Հետևաբար,

$$||(f - \psi_1) + (f - \psi_2)|| = ||f - \psi_1|| + ||f - \psi_2|| :$$

Իսկ բանի որ տարածությունը խիստ նորմավորված է, ապա

$$f - \psi_1 = \alpha(f - \psi_2), \quad \alpha \neq 0 :$$

Վերջին հավասարության մեջ α գործակիցը պետք է հավասար լինի մեկի: Իրոք, հակառակ դեպքում կունենայինք

$$f = \frac{1}{1-\alpha}(\psi_1 - \alpha\psi_2),$$

ինչը կհակասեր մեր ենթադրությանը, որ $f \notin L_n$: Այսպիսով, $\alpha = 1$ և $f - \psi_1 = f - \psi_2$ հավասարությունից հետևում է, որ $\psi_1 = \psi_2$: \square

Ինչպես կտեսնենք ստորև, տարածության խիստ նորմավորվածությունը լավագույն մոտարկման տարրի միակության անհրաժեշտ պայմանը չէ:

5.2 Հավասարաշափ մոտարկումներ

Որպես L նորմավորված տարածություն դիտարկենք $[a, b]$ հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիաների $C[a, b]$ տարածությունը

$$||f|| \equiv \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \tag{5.2.1}$$

նորմով:

Պարզ է, որ եթե $f, g \in C[a, b]$ ֆունկցիաների տարբերության նորմը, այսինքն՝

$$||f - g|| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$$

մեծությունը, հավասար է $[a, b]$ հատվածի վրա այդ ֆունկցիաների մեծագույն շեղմանը: Օրինակ, եթե $f(x) \in C[a, b]$ ֆունկցիան մոտարկվում է մեկ այլ $F(x)$ ֆունկցիայով նույն տարածությունից և $||f - F|| < \varepsilon$, ապա

$$|f(x) - F(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b] :$$

Դրանով իսկ $F(x)$ ֆունկցիան $[a, b]$ հատվածի վրա հավասարաշափ մոտարկում է $f(x)$ -ը ε ճշտությամբ: Այդ պատճառով մոտարկումները $C[a, b]$ տարածության մեջ կոչվում են հավասարաշափ մոտարկումներ:

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան $[a, b]$ հատվածի վրա վերլուծվում է հավասարաշափ գուգամետ աստիճանային շարքի, ապա որպես մոտարկող բազմանդամ կարելի է վերցնել այդ շարքի մասնակի գումարը: Այդպիսի մոտեցում է օգտագործվում, օրինակ, տարրական ֆունկցիաների արժեքների հաշվարկի ժամանակ:

Օրինակ 5.2.1 : Դիցուք պահանջվում է հաշվել $f(x) = \sin x$ ֆունկցիայի արժեքը $[0, \pi/4]$ հաստիքածի ինչոր կետում 10^{-7} ճշտությամբ: Վերլուծենք $\sin x$ ֆունկցիան

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

շարքի (անս, օրինակ, [45]): Սահմանափակվելով շարքի առաջին իինգ անդամներով՝ ունենք

$$\left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \right) \right| < \frac{1}{11!} \cdot \left(\frac{\pi}{4} \right)^{11} < 0.2 \cdot 10^{-8}: \quad (5.2.2)$$

Հետևաբար, տրված ճշտությամբ $[0, \pi/4]$ հաստիքածի վրա $\sin x$ ֆունկցիայի արժեքների փոխարեն կարելի է վերցնել

$$P_9(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \quad (5.2.3)$$

բազմանդամի համապատասխան արժեքները:

Ինն աստիճանից ոչ բարձր բազմանդամների միջև կառուցված բազմանդամը դրված խնդրի միակ լուծումը չէ: Առաջ ավելին, կարելի է կառուցել յոթերորդ աստիճանի բազմանդամ, որը $[0, \pi/4]$ հաստիքածի վրա կմուտարկի $\sin x$ ֆունկցիան 10^{-7} տրված ճշտությամբ: Այդ նպատակի համար օգտվենք Զեբիշելի $T_n(x)$ բազմանդամներից, որոնք բավականին մանրամասն դիտարկել ենք 4.3 պարագրաֆում:

Կիրառելով (4.3.7) անդրադարձ բանաձևերը՝ գրենք

$$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$$

բազմանդամը: Ինչպես հայտնի է, $x \in [-1, 1]$ արժեքների հանար $|T_n(x)| \leq 1$ (լեմմա 4.3.1): Ուստի դիտարկվող $[0, \pi/4]$ հաստիքածի համար ունենք

$$\left| x^9 - \frac{9}{4}x^7 + \frac{27}{16}x^5 - \frac{15}{32}x^3 + \frac{9}{256}x \right| = \frac{1}{2^8} |T_9(x)| \leq \frac{1}{2^8} \quad (5.2.4)$$

գնահատականը: $P_9(x)$ բազմանդամի (5.2.3) արտահայտության մեջ x^9 աստիճանը փոխարինենք

$$Q_7(x) = \frac{9}{4}x^7 - \frac{27}{16}x^5 + \frac{15}{32}x^3 - \frac{9}{256}x$$

բազմանդամով: Արդյունքում կստանանք յոթերորդ աստիճանի

$$\begin{aligned} P_7(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{1}{9!} Q_7(x) \\ &= -\frac{31}{161280}x^7 + \frac{597}{71680}x^5 - \frac{129023}{774144}x^3 + \frac{10321919}{10321920}x \end{aligned}$$

բազմանդամ: Այդ դեպքում

$$\begin{aligned} |\sin x - P_7(x)| &= \left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{1}{9!} Q_7(x) \right) \right| = \\ &= \left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \right) + \frac{1}{9!} (x^9 - Q_7(x)) \right| \leq \\ &\leq \left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \right) \right| + \frac{1}{9!} |x^9 - Q_7(x)| : \end{aligned}$$

Այստեղից, ունեցած (5.2.2) և (5.2.4) գնահատականների հիման վրա, կստանանք՝

$$|\sin x - P_7(x)| \leq 0.2 \cdot 10^{-8} + \frac{1}{9!} \cdot \frac{1}{2^8} < 0.2 \cdot 10^{-8} + 1.08 \cdot 10^{-8} < 0.13 \cdot 10^{-7} :$$

Այսպիսով, կառուցված $P_7(x)$ բազմանդամը հավասարաշափ մոտարկում է $\sin x$ ֆունկցիան $[0, \pi/4]$ հատվածի վրա տրված ճշտությամբ: ♦♦♦

Դիտարկենք հանրահաշվական բազմանդամները որպես մոտարկու ֆունկցիաներ: Նշանակենք H_n -ով n -ից ոչ բարձր աստիճանի իրական գոյածակիցներով բոլոր հանրահաշվական բազմանդամների դասը: Պարզ է, որ H_n -ը $C[a, b]$ տարածության $(n+1)$ -չափանի ենթատարածություն է:

Ֆունկցիաների մոտարկման տեսության մեջ կարևորագույն արդյունքներից է հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 5.2.1 (Կ.Վայերշտրաս): Եթե $f(x) \in C[a, b]$, ապա ցանկացած լրական ε -ի համար գոյություն ունի այնպիսի $\mathcal{P}(x)$ բազմանդամ, որ

$$||f - \mathcal{P}|| < \varepsilon : \quad (5.2.5)$$

Ինչպես կարելի է տեսնել թեորեմի ապացույցից (տե՛ս, օրինակ, [30]), որքան փոքր է ε -ը, այնքան բարձր է $\mathcal{P}(x)$ բազմանդամի աստիճանը (ինչը բնական է): Եթե n -ը $\mathcal{P}(x)$ բազմանդամի աստիճանն է, ապա, հիմնվելով (5.2.5) անհավասարության վրա, կստանանք՝

$$\rho(f, H_n) = \inf_{P_n(x) \in H_n} ||f - P_n|| < \varepsilon :$$

Այստեղից, քանի որ $\varepsilon > 0$ կամայական է, ապա

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f, H_n) = 0 : \quad (5.2.6)$$

Դեռ ավելին, $\rho(f, H_n)$ հաջորդականությունը մոնուսոն չածող է: Իրոք, ելնելով

$$H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_n \subset \cdots \subset C[a, b]$$

Ենթատարածությունների ներդրվածությունից և $\rho(f, H_n)$ հեռավորության սահմանումից, ունենք

$$\rho(f, H_0) \geq \rho(f, H_1) \geq \dots \geq \rho(f, H_n) \geq \dots \geq 0 :$$

Լավագույն մոտարկման տարրի գոյության 5.1.1 թեորեմի հիման վրա կարող ենք պնդել, որ ցանկացած $f(x) \in C[a, b]$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի այնպիսի $Q_n(x) \in H_n$ բազմանդամ, որ

$$\|f - Q_n\| = \rho(f, H_n) : \quad (5.2.7)$$

Այս $Q_n(x)$ բազմանդամը կոչվում է լավագույն հավասարաշափ մոտարկման բազմանդամ $f(x)$ ֆունկցիայի համար:

5.2.1 Ալտերնանսի մասին Չեբիշևի թեորեմը

Ստորև բերված հիմնարար պնդումը սահմանում է լավագույն հավասարաշափ մոտարկման բազմանդամ լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմանը:

Թեորեմ 5.2.2 (Պ.Լ.Չեբիշև): Որպեսզի $Q_n(x)$ բազմանդամը լինի լավագույն հավասարաշափ մոտարկման բազմանդամ $f(x) \in C[a, b]$ ֆունկցիայի համար, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենան առնվազն $n + 2$ կետ

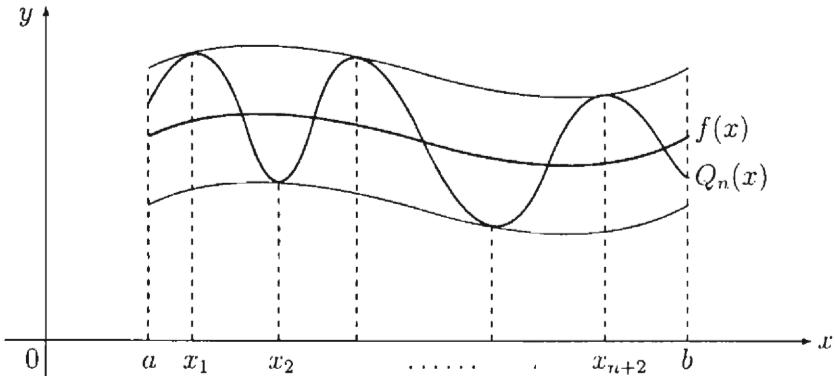
$$x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2} \in [a, b], \quad (5.2.8)$$

այնպիսիք, որ

$$f(x_i) - Q_n(x_i) = \alpha (-1)^i \|f - Q_n\|, \quad i = 1, 2, \dots, n + 2, \quad (5.2.9)$$

որտեղ $\alpha = 1$ ($\gammaամ \alpha = -1$) միաժամանակ բոլոր i -երի համար:

Թեորեմում նշված $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2}$ կետերը կոչվում են չեբիշևյան ալտերնանսի կետեր (նկ. 5.2.1):



Նկ. 5.2.1 Չեբիշևյան ալտերնանսի կետերը

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Սենք չենք դիտարկի այն տրիվիալ դեպքը, երբ $f(x)$ ֆունկցիան ինքը n -րդ աստիճանի բազմանդամ է: Դիցուք $Q_n(x)$ -ը լավագույն հավասարաշափ մոտարկման բազմանդամ է $f(x)$ ֆունկցիայի համար և

$$r(x) \equiv f(x) - Q_n(x) :$$

Այդ դեպքում, (5.2.7)-ի համաձայն

$$\|r\| = \rho(f, H_n) :$$

Մինչ ապացույցին անցնելը՝ տանք որոշ սահմանումներ:

Այն $x_0 \in [a, b]$ կետը, որի համար

$$|r(x_0)| = \|r\|.$$

Կանվանենք $Q_n(x)$ բազմանդամի $f(x)$ ֆունկցիայից մեծագույն շեղման կետ կամ e^+ -կետ: Ընդ որում, եթե $r(x_0) = \|r\|$, ապա x_0 կետը կանվանենք դրական մեծագույն շեղման կետ կամ e^+ -կետ: Իսկ եթե $r(x_0) = -\|r\|$, ապա այս կետը կանվանենք բացասական մեծագույն շեղման կետ կամ e^- -կետ:

Քանի որ $r(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է, ապա, $[a, b]$ հատվածի վրա գոյություն ունի գոնե մեկ e կետ: Ավելին, $[a, b]$ հատվածի վրա գոյություն ունեն ինչպես e^+ -կետեր, այնպես էլ e^- -կետեր: Իրոք, եթե, օրինակ, գոյություն չունենային e^- -կետեր, ապա կգտնվեր այնպիսի ε , $0 < \varepsilon < \|r\|$, որ

$$-\|r\| + \varepsilon \leq r(x) \leq \|r\| \quad \forall x \in [a, b] :$$

Այդ դեպքում, վերցնելով

$$Q_n^*(x) = Q_n(x) + \frac{\varepsilon}{2},$$

կստանայինք

$$-\|r\| + \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x) - Q_n^*(x) = r(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \|r\| - \frac{\varepsilon}{2}$$

կամ

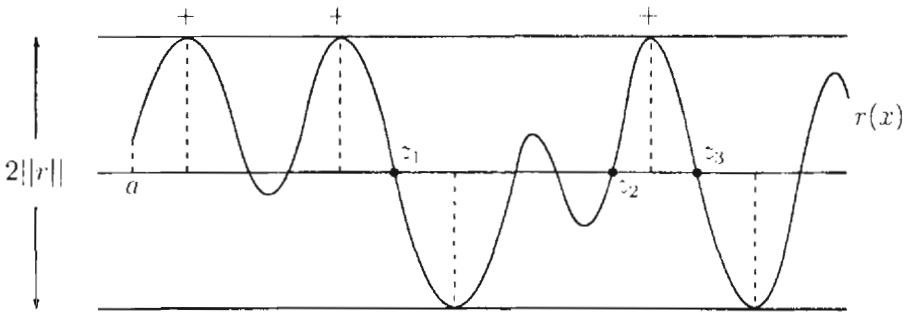
$$|f(x) - Q_n^*(x)| \leq \|r\| - \frac{\varepsilon}{2} = \rho(f, H_n) - \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in [a, b] :$$

Իսկ դա հակասում է $\rho(f, H_n)$ հեռավորության սահմանմանը: Համանմանորեն ապացուցվում է e^+ -կետերի գոյությունը:

Ապացուցենք, որ $[a, b]$ հատվածը կարելի է տրոհել վերջավոր թվով հատվածների՝

$$[a, z_1], [z_1, z_2], [z_2, z_3], \dots, [z_{m-1}, z_m], [z_m, b] \tag{5.2.10}$$

այնպես, որ նրանցից յուրաքանչյուրը հերթով պարունակի կամ միայն e^+ -կետեր, կամ միայն e^- -կետեր:



Նկ. 5.2.2 $[a, b]$ հատվածի տրոհումը

Տրոհումը կատարենք հետևյալ կերպ (նկ. 5.2.2): Որոշակիության համար ենթադրենք, որ $[a, b]$ հատվածով երկայնությամբ a -ից b շարժման ընթացքում առաջին e^- -կետը՝ e^+ -կետն է: Որպես z_1 վերցնենք $r(x)$ ֆունկցիայի ամենաաջ գրոն, որը գտնվում է a կետի և նրան հաջորդող առաջին e^- -կետի միջև: Որպես z_2 վերցնենք $r(x)$ ֆունկցիայի ամենաաջ գրոն, որը գտնվում է z_1 կետի և նրան հաջորդող առաջին e^+ -կետի միջև (եթե այդպիսինը գրոն, որը գտնվում է z_2 կետի և նրան հաջորդող առաջին e^- -կետի միջև (եթե այդպիսինը գրոն, որը գտնվում է z_2 կետի և նրան հաջորդող առաջին e^+ -կետի միջև): Որպես z_3 վերցնենք $r(x)$ ֆունկցիայի ամենաաջ գրոն, որը գտնվում է z_2 կետի և նրան հաջորդող առաջին e^- -կետի միջև (եթե այդպիսինը գրոն, որը գտնվում է z_2 կետի և նրան հաջորդող առաջին e^+ -կետի միջև):

Դիցուք z_m -ը z_i կետերի միջև b -ից տարբեր ամենավերջին կետն է: Ընդ որում, ըստ կառուցման $r(z_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$: Քանի որ (5.2.10) հատվածներից յուրաքանչյուրի վրա գտնվում են հերթով e^+ -կետեր և e^- -կետեր, ապա թերեմի պայմանի անհրաժեշտության համար բավական է ապացուել, որ $m + 1 \geq n + 2$:

Ենթադրենք հակառակը՝ $m + 1 \leq n + 1$, այսինքն $m \leq n$: Համաձայն $[a, b]$ հատվածի (5.2.10) տրոհմանը $[a, z_1]$ հատվածի վրա գոյություն չունեն e^- -կետեր, $[z_1, z_2]$ հատվածի վրա գոյություն չունեն e^+ -կետեր և այլն: Քանի որ $r(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է և (5.2.10) հատվածների թիվը վերցավոր է, ապա կըտնվի այնպիսի ε թիվ, $0 < \varepsilon < ||r||$, որ

$$\begin{aligned} -||r|| + \varepsilon &\leq r(x) \leq ||r||, \quad x \in [a, z_1], \\ -||r|| &\leq r(x) \leq ||r|| - \varepsilon, \quad x \in [z_1, z_2], \\ -||r|| + \varepsilon &\leq r(x) \leq ||r||, \quad x \in [z_2, z_3] \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

և այլն: Վերցնենք

$$d_m(x) = c(x - z_1)(x - z_2) \dots (x - z_m)$$

բազմանդամը, որտեղ c թիվն ընտրված է այնպես, որ

$$||d_m|| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.2.12}$$

և

$$d_m(x) > 0, \quad x \in [a, z_1] :$$

Այդ դեպքում $d_m(x)$ բազմանդամը, z_i կետերով անցնելիս, փոխում է իր նշանը: Հետևաբար այդ բազմանդամը միջակայթերում կունենա հերթափոխվող նշաններ, այսինքն՝

$$\begin{aligned} d_m(x) &< 0, \quad x \in (z_1, z_2), \\ d_m(x) &> 0, \quad x \in (z_2, z_3) \end{aligned}$$

և այլն: Վերցնենք

$$P_n(x) \equiv Q_n(x) + d_m(x)$$

(իլշեցնենք, որ համաձայն ենթադրությանը, $m \leq n$): Այդ դեպքում ցանկացած $x \in [a, z_1]$ կետի համար կունենանք

$$f(x) - P_n(x) = r(x) - d_m(x) < ||r|| : \quad (5.2.13)$$

Միաժամանակ, հաշվի առնելով (5.2.11) և (5.2.12) անհավասարությունները, $x \in [a, z_1]$ կետերի համար կստանանք

$$f(x) - P_n(x) = r(x) - d_m(x) \geq -||r|| + \varepsilon - ||d_m|| \geq -||r|| + \frac{\varepsilon}{2} > -||r|| : \quad (5.2.14)$$

Այսպիսով, (5.2.13) և (5.2.14)-ից հետևում է, որ

$$|f(x) - P_n(x)| < ||r||, \quad x \in [a, z_1] :$$

Այնուհետև, $x \in [z_1, z_2]$ ցանկացած կետի համար ունենք

$$f(x) - P_n(x) = r(x) - d_m(x) > -||r|| : \quad (5.2.15)$$

Միաժամանակ, դարձյալ հաշվի առնելով (5.2.11) և (5.2.12)-ը, $x \in [z_1, z_2]$ կետերի համար կստանանք

$$f(x) - P_n(x) = r(x) - d_m(x) \leq ||r|| - \varepsilon + ||d_m|| \leq ||r|| - \frac{\varepsilon}{2} < ||r|| : \quad (5.2.16)$$

Այսպիսով, (5.2.15) և (5.2.16)-ից հետևում է, որ

$$|f(x) - P_n(x)| < ||r||, \quad x \in [z_1, z_2] :$$

Ծարունակելով համանման դատողությունները՝ արդյունքում կստանանք

$$|f(x) - P_n(x)| < ||r|| \quad \forall x \in [a, b] :$$

Այսինքն՝

$$||f - P_n|| < ||r|| = \rho(f, H_n).$$

ինչը հակասում է $\rho(f, H_n)$ հեռավորության սահմանմանը: Սրանով ապացուցվում է թեորեմի պայմանի անհրաժեշտությունը:

Բավարարություն: Դիցուք թեորեմի պայմանը կատարված է: Ենթադրենք, որ $f(x)$ ֆունկցիայի հաճար լավագույն հավասարաշափ մոտարկման բազմանդամը ոչ թե $Q_n(x)$ -ն է, այլ մեկ ուրիշ բազմանդամ՝ $Q_n^*(x) \in H_n$: Այդ դեպքում ակնհայտ է, որ

$$||f - Q_n^*|| < ||f - Q_n|| : \quad (5.2.17)$$

Վերցնենք n -րդ աստիճանի բամանդամ

$$R_n(x) \equiv Q_n^*(x) - Q_n(x) = [f(x) - Q_n(x)] - [f(x) - Q_n^*(x)]$$

և դիտարկենք նրա արժեքները (5.2.8) չերիշեամ ալտերնանսի կետերում: Որոշակիության համար ենթադրենք, որ (5.2.9) պայմաններում $\alpha = 1$: Այդ դեպքում, հաշվի առնելով (5.2.17) անհավասարությունը, կունենանք

$$\begin{aligned} R_n(x_1) &= [f(x_1) - Q_n(x_1)] - [f(x_1) - Q_n^*(x_1)] = -||f - Q_n|| - [f(x_1) - Q_n^*(x_1)] \\ &\leq -||f - Q_n|| + ||f - Q_n^*|| < 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_n(x_2) &= [f(x_2) - Q_n(x_2)] - [f(x_2) - Q_n^*(x_2)] = ||f - Q_n|| - [f(x_2) - Q_n^*(x_2)] \\ &\geq ||f - Q_n|| - ||f - Q_n^*|| > 0, \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned} R_n(x_{n+2}) &= [f(x_{n+2}) - Q_n(x_{n+2})] - [f(x_{n+2}) - Q_n^*(x_{n+2})] = (-1)^{n+2}||f - Q_n|| - \\ &\quad [f(x_{n+2}) - Q_n^*(x_{n+2})] < 0 \text{ (եթե } n\text{-ը կենտ } \text{)} \\ &\quad > 0 \text{ (եթե } n\text{-ը զույգ } \text{)} : \end{aligned}$$

Ստացվեց, որ n աստիճանից ոչ բարձր $R_n(x)$ բամանդամը $[a, b]$ հատվածի վրա փոխում է իր նշանը առնվազն $n+1$ անգամ: Հետևաբար այդ բամանդամը պետք է ունենա առնվազն $n+1$ արմատ, ինչն անհնար է: \square

5.2.2 Լավագույն հավասարաշափ մոտարկման բազմանդամի միակությունը

$C[a, b]$ տարածությունը խիստ նորմավորված չէ: Դրանում հեշտ է համոզվել հետևյալ օրինակի վրա:

Դիտարկենք $[0, 1]$ հատվածի վրա երկու ֆունկցիա՝ $f(x) = x$ և $g(x) \equiv 1$: Ակնհայտ է, որ $||f|| = 1$, $||g|| = 1$ և $||f + g|| = 2$: Սակայն $||f + g|| = ||f|| + ||g||$ հավասարությունից չի բխում, որ $f(x) = \alpha g(x)$, որտեղ $\alpha \neq 0$:

Այդ պատճառով մենք չենք կարող հենվել 5.1.2 թեորեմի վրա, որը հաստատում է լավագույն մոտարկման տարրի միակությունը խիստ նորմավորված տարածություններում: Այնուամենայնիվ, ճիշտ է հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 5.2.3 : *Հավագույն հավասարաշափ մոտարկման բազմանդամը միակն է:*

Ապացույց: Ենթադրենք, որ $f(x) \in C[a, b]$ ֆունկցիայի համար H_n -ում գոյություն ունեն երկու լավագույն հավասարաշափ մոտարկման բազմանդամներ՝ $Q_n^{(1)}(x)$ և $Q_n^{(2)}(x)$: Այսինքն՝

$$\|f - Q_n^{(1)}\| = \|f - Q_n^{(2)}\| = \rho(f, H_n) : \quad (5.2.18)$$

Դիտարկենք

$$Q_n(x) \equiv \frac{1}{2} (Q_n^{(1)}(x) + Q_n^{(2)}(x)) \in H_n$$

բազմանդամը: Հաշվի առնելով (5.2.18)-ը, նրա համար ունենք

$$\|f - Q_n\| = \frac{1}{2} \|(f - Q_n^{(1)}) + (f - Q_n^{(2)})\| \leq \frac{1}{2} (\|f - Q_n^{(1)}\| + \|f - Q_n^{(2)}\|) = \rho(f, H_n) :$$

Այստեղից, ելեկով $\rho(f, H_n)$ հեռավորության սահմանումից, կստանանք

$$\|f - Q_n\| = \rho(f, H_n) :$$

Դրանով իսկ $Q_n(x)$ -ը նույնպես լավագույն հավասարաշափ մոտարկման բազմանդամ է $f(x)$ ֆունկցիայի համար: Այդ դեպքում, Զեբիշևի թեորեմի համաձայն, (5.2.8) ալտերնանսի կետերում տեղի ունեն

$$|f(x_i) - Q_n(x_i)| = \rho(f, H_n), \quad i = 1, 2, \dots, n+2$$

կամ

$$|(f(x_i) - Q_n^{(1)}(x_i)) + (f(x_i) - Q_n^{(2)}(x_i))| = 2\rho(f, H_n), \quad i = 1, 2, \dots, n+2 \quad (5.2.19)$$

հավասարությունները: Քանի որ

$$|f(x_i) - Q_n^{(1)}(x_i)| \leq \rho(f, H_n), \quad |f(x_i) - Q_n^{(2)}(x_i)| \leq \rho(f, H_n),$$

ապա (5.2.19) հավասարությունները հնարավոր են միայն այն դեպքում, եթե

$$f(x_i) - Q_n^{(1)}(x_i) = f(x_i) - Q_n^{(2)}(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n+2 :$$

Վերջին հավասարություններից հետևում է, որ

$$Q_n^{(1)}(x_i) = Q_n^{(2)}(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n+2 :$$

Այսպիսով, n -րդ աստիճանի $Q_n^{(1)}(x)$ և $Q_n^{(2)}(x)$ բազմանդամները համընկնում են $n+2$ կետերում: Ուստի նրանք նույնաբար հավասար են, այսինքն՝ $Q_n^{(1)}(x) \equiv Q_n^{(2)}(x)$: \square

5.3 Լավագույն հավասարաչափ մոտարկման օրինակներ

Հիմնվելով Չեբիշևի թեորեմի վրա՝ դիտարկենք լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամների կառուցման մի քանի օրինակ:

Օրինակ 5.3.1 : Կառուցել լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամ H_0 դասից $[a, b]$ հատվածի վրա որոշված $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիայի հանար:

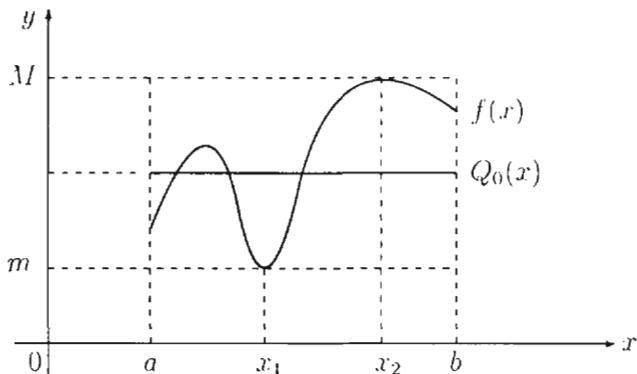
Դիցուք

$$m \equiv \min_{a \leq x \leq b} f(x) = f(x_1), \quad M \equiv \max_{a \leq x \leq b} f(x) = f(x_2);$$

Դժվար չէ համոզվել, որ

$$Q_0(x) = \frac{M+m}{2}$$

որոնելի բազմանդամն է:



Ակ. 5.3.1 Լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամ H_0 -ից

Իրոք,

$$\|f - Q_0\| = \frac{M-m}{2}$$

և

$$f(x_1) - Q_0(x_1) = m - \frac{M+m}{2} = -\frac{M-m}{2} = -\|f - Q_0\|,$$

$$f(x_2) - Q_0(x_2) = M - \frac{M+m}{2} = \frac{M-m}{2} = \|f - Q_0\|;$$

Չեբիշևան ալտերնանսի կետերն են՝ x_1 և x_2 (Ակ. 5.3.1): ♣

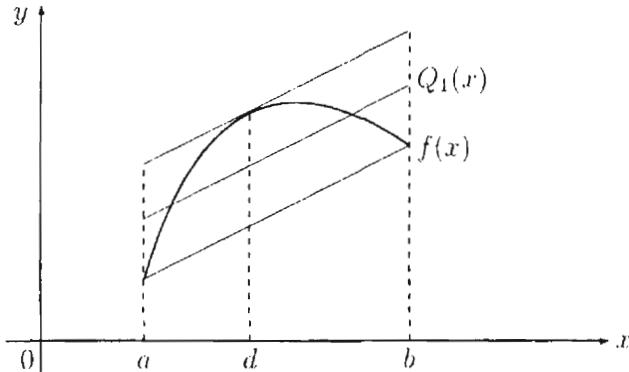
Օրինակ 5.3.2 : $[a, b]$ հատվածի վրա սրբած է $f(x)$ անընդհատ ուռուցիկ ֆունկցիա (**նկ. 5.3.2**): Պահանջվում է կառուցել լավագույն հավասարաշափ մոտարկման բազմանդամ H_1 դասից:

Տանենք հատող $(a, f(a))$ և $(b, f(b))$ կետերով: Հատողի թեքության անկյան տանգենսը հավասար է $(f(b) - f(a))/(b - a)$: Տանենք շոշափող $y = f(x)$ կորին, գուգահեռ այդ հատողին: Շոշափման կետի d արացիսը որոշվում է

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

հավասարումից: Այնուհետև տանենք հատողից և շոշափողից հավասարակեռ ուղիղ (**նկ. 5.3.2**): Կառուցված զծային ֆունկցիան կլինի որոնելի լավագույն հավասարաշափ մոտարկման բազմանդամը H_1 -ից: Իրոք, դիցուք $L \equiv ||f - Q_1||$: Այդ դեպքում

$$\begin{aligned} f(a) - Q_1(a) &= -L, \\ f(d) - Q_1(d) &= L, \\ f(b) - Q_1(b) &= -L : \end{aligned}$$



Նկ. 5.3.2 Լավագույն հավասարաշափ մոտարկման բազմանդամ H_1 -ից

Նշենք, որ $a < d < b$ կետերը չերիշեյան ալտերնանսի կետերն են: ♣

Օրինակ 5.3.3 : $f(x) = x^n$ ֆունկցիայի համար $[-1, 1]$ հատվածի վրա գտնել լավագույն հավասարաշափ մոտարկման բազմանդամ H_{n-1} դասից:

Դիտարկենք $(n-1)$ -րդ աստիճանի

$$Q_{n-1}(x) \equiv x^n - \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \quad (5.3.1)$$

բազմանդամ, որտեղ $T_n(x)$ -ը Չեբիչևի բազմանդամ է: Այսուղի մենք հաշվի ենք առել այն փաստը, որ $T_n(x)$ բազմանդամի ավագ գործակիցը հավասար է 2^{n-1} (տես (4.3.8)): Ցույց տանք, որ $Q_{n-1}(x)$ -ը որոնելի բազմանդամն է: Իրոք, (5.3.1)-ից ունենք

$$||x^n - Q_{n-1}|| = \frac{1}{2^{n-1}} ||T_n|| = \frac{1}{2^{n-1}} \max_{-1 \leq x \leq 1} |T_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}} :$$

Այնուհետև, դիցուք

$$1 = \theta_0 > \theta_1 > \cdots > \theta_{n-1} > \theta_n = -1 \quad (5.3.2)$$

կետերը $T_n(x)$ բազմանդամի էքստրեմումի կետերն են (լեմմա 4.3.3): Այդ կետերում՝

$$\begin{aligned} \theta_0^n - Q_{n-1}(\theta_0) &= \frac{1}{2^{n-1}} T_n(\theta_0) = \frac{1}{2^{n-1}}, \\ \theta_1^n - Q_{n-1}(\theta_1) &= \frac{1}{2^{n-1}} T_n(\theta_1) = -\frac{1}{2^{n-1}}, \\ &\vdots \\ \theta_n^n - Q_{n-1}(\theta_n) &= \frac{1}{2^{n-1}} T_n(\theta_n) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} : \end{aligned}$$

Դրանով իսկ $Q_{n-1}(x)$ -ը լավագույն հավասարաշափ մոտարկման բազմանդամ է, իսկ (5.3.2) կետերը չեթիշկյան ալտերնանսի կետերն են: ♣

Ենթադրելով, որ $f(x) \in C^{(n+1)}[a, b]$, տաճք $\rho(f, H_n)$ մեծության երկկողմանի գնահատականը:

Դասագրքի առաջին մասում (պարագրաֆ 4.3), քննարկելով ինտերպոլացիայի սխալանքի նվազեցման խնդիրը, մենք ցույց ենք տվել, որ եթե որպես հանգույցներ ընտրենք $T_{n+1}(x)$ բազմանդամի արմատների պատկերմները

$$x = \frac{b-a}{2} \xi + \frac{b+a}{2}, \quad -1 \leq \xi \leq 1$$

արտապատկերմամբ և կառուցենք այդ հանգույցներով $L_n(x)$ ինտերպոլացիոն բազմանդամ, ապա

$$\|f - L_n\| \leq \frac{\max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)! 2^{2n+1}} (b-a)^{n+1}$$

(տե՛ս (4.3.20) գնահատականը): Այստեղից անմիջապես բխում է

$$\rho(f, H_n) \leq \frac{\max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)! 2^{2n+1}} (b-a)^{n+1} \quad (5.3.3)$$

գնահատականը:

Ստանանք այժմ ստորին գնահատականը: Դիցուք $Q_n(x)$ -ը լավագույն հավասարաշափ մոտարկման բազմանդամ է H_n -ից $f(x)$ ֆունկցիայի համար: Քանի որ, համաձայն Չեթիշենի թեորեմի, $f(x) - Q_n(x)$ տարբերությունը ալտերնանսի մեկ կետից մյուսը անցնելիս փոխում է իր նշանը (տե՛ս (5.2.8) և (5.2.9)), ապա այն դառնում է զրո $[a, b]$ հատվածի առնվազն $(n+1)$ կետում՝ z_0, z_1, \dots, z_n : Այսինքն՝

$$Q_n(z_i) = f(z_i), \quad i = 0, 1, \dots, n :$$

Ուստի $Q_n(x)$ բազմանդամը կարելի է դիտել որպես ինտերպոլացիոն բազմանդամ $f(x)$ ֆունկցիայի համար՝ կառուցված z_0, z_1, \dots, z_n հանգույցներով: Օգտվելով ինտերպոլացիայի սխալանքի համար (4.3.4) արտահայտությունից՝ ունենք

$$f(x) - Q_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

որտեղ $\omega_{n+1}(x) \equiv (x - z_0)(x - z_1) \dots (x - z_n)$ և $\xi = \xi(x) \in [a, b]$: Դիցուք

$$\|\omega_{n+1}\| = \max_{a < x < b} |\omega_{n+1}(x)| = |\omega_{n+1}(\alpha)|, \quad \alpha \in [a, b]:$$

Այդ դեպքում

$$\begin{aligned} \rho(f, H_n) &= \|f - Q_n\| \geq |f(\alpha) - Q_n(\alpha)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi(\alpha))|}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(\alpha)| \\ &\geq \frac{\min_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \|\omega_{n+1}\| : \end{aligned}$$

Վերը մենք ստացել ենք

$$\|\omega_{n+1}\| \geq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

գնահատականը (տես (4.3.15),(4.3.16) և (4.3.19)): Հետևաբար,

$$\rho(f, H_n) \geq \frac{\min_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)! 2^{2n+1}} (b-a)^{n+1} : \quad (5.3.4)$$

Համեմատելով (5.3.3) և (5.3.4) վերին և ստորին գնահատականները, հանգույն ենք այն եզրակացության, որ եթե $f^{(n+1)}(x)$ ածանցյալը պահպանում է իր նշանը $[a, b]$ հատվածի վրա և շատ չի փոփոխվում. ապա լավագույն հավասարաշափ մոտարկման բազմանդամի սխալանքի և Չեբիչևի բազմանդամի արմատներով կառուցված ինտերպոլացիոն բազմանդամի սխալանքի միջև տարբերությունը շնչին է:

Նշենք, որ ցանկացած անընդհատ ֆունկցիայի համար լավագույն հավասարաշափ մոտարկման բազմանդամի կառուցման վերջավոր ալգորիթմ գոյություն չունի: Գոյություն ունեն միայն լավագույնին մոտիկ բազմանդամի կառուցման իտերացիոն ալգորիթմներ (տես, օրինակ, [4]): Նրանց էությունը կայանում է չեբիչևյան ալտերնանսի կետերին հաջորդական մոտարկումների և այդ կետերին համապատասխանող բազմանդամների կառուցման մեջ, որոնք գուգամիտում են լավագույն հավասարաշափ մոտարկման բազմանդամին:

5.4 Մոտարկումներ հիլբերտյան տարածությունում

Ֆունկցիոնալ անալիզի կարևորագույն հասկացություններից մեկը հիլբերտյան տարածության գաղափարն է, որն առաջինը ներմուծել է գերմանացի մաթեմատիկոս Դ. Հիլբերտը:

Սահմանում 5.4.1 : L իրական գծային տարածությունը կոչվում է էվկլիդյան, եթե յուրաքանչյուր $x, y \in L$ տարրերի գույզին համապատասխանության մեջ է դրված (x, y) իրական թիվ, որը կոչվում է այդ տարրերի սկալյար արտադրյալ, այնպէս որ բավարարվում են

1. $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. $(x, y) = (y, x)$,
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$,
4. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

պայմանները կանայական $x, y, z \in L$ և λ իրական թվի համար:

Էվկլիդյան տարածությունում ճշշտ է Կոշի-Բուճյակովսկու անհավասարությունը.

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \sqrt{(y, y)} \quad \forall x, y \in L : \quad (5.4.1)$$

Այն ապացուցվում է բավականին պարզ եղանակով (թողնում ենք դա ընթերցողին որպես վարժություն):

Հիշեցնենք օրբովնալության հասկացությունը էվկլիդյան տարածությունում:

Սահմանում 5.4.2 : L էվկլիդյան տարածության x և y տարրերը կոչվում են օրբովունակ, եթե $(x, y) = 0$:

Էվկլիդյան տարածությունը կարելի է դարձնել նորմավորված՝ սահմանելով $x \in L$ տարրի նորմը հետևյալ կերպ.

$$\|x\| \equiv \sqrt{(x, x)} : \quad (5.4.2)$$

Դժվար չէ համոզվել, որ նորմի 5.1.1 սահմանման մեջ բվարկված բոլոր հատկությունները բավարարվում են: Նշենք միայն, որ եռանկյան անհավասարության ապացույցի ժամանակ պետք է օգտվել (5.4.1) անհավասարությունից:

Սահմանում 5.4.3 : Էվկլիդյան տարածությունը, որում նորմը ներմուծված է (5.4.2) առնչության միջոցով, կոչվում է ունիտար տարածություն:

Սահմանում 5.4.4 : Լրիվ, անվերջ չափանի ունիտար տարածությունը կոչվում է հիլբերտյան տարածություն:

Դիտողություն 5.4.1 : Երբեմն հիլբերտյան տարածությունը սահմանելիս պահանջում են, որ այն լինի սեպարաբել, այսինքն, նրանում գոյություն ունենա ամենուրեք իսկու հաշվելի բազմություն:

Որպես հիլբերտյան տարածության օրինակ կարող է ծառայել l_2 տարածությունը, որի տարրերն են իրական թվերի $x = (x_1, x_2, \dots)$ անվերջ հաջորդականությունները, որոնք բավարարում են

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$$

պայմանին: Սկալյար արտադրյալը և նորմը այդ տարածության մեջ որոշվում են համապատասխանաբար

$$(x, y) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \quad \text{և} \quad \|x\| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$$

բանաձևերով:

5.4.1 Լավագույն մոտարկման տարրի որոշումը

Նախ և առաջ նշենք հիլբերտյան տարածության մեջ կարևոր հատկություն:

Թեորեմ 5.4.1 : «Հիլբերտյան տարածությունը իսկան մորմակորված է»:

Ապացույց: Դիցուք հիլբերտյան տարածության f և g ոչ զրոյական տարրերը այնպիսին են, որ

$$\|f + g\| = \|f\| + \|g\| :$$

Մի կողմից, օգտվելով (5.4.2) առնչությունից, ունենք

$$\|f + g\|^2 = (f + g, f + g) = (f, f) + 2(f, g) + (g, g) = \|f\|^2 + 2(f, g) + \|g\|^2 :$$

Մյուս կողմից,

$$(\|f\| + \|g\|)^2 = \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 :$$

Հավասարեցնելով վերջին երկու հավասարությունների աջ մասերը՝ կստանանք

$$(f, g) = \|f\|\|g\| : \tag{5.4.3}$$

Վերցնենք $\alpha = \|f\|/\|g\|$: Ակնհայտ է, որ $\alpha > 0$: Հաշվի առնելով (5.4.3) հավասարությունը՝ ստանում ենք

$$(f - \alpha g, f - \alpha g) = (f, f) - 2\alpha(f, g) + \alpha^2(g, g) = \|f\|^2 - 2\alpha\|f\|\|g\| + \alpha^2\|g\|^2 =$$

$$\|f\|^2 - 2\frac{\|f\|}{\|g\|}\|f\|\|g\| + \frac{\|f\|^2}{\|g\|^2}\|g\|^2 = 0 :$$

Այստեղից, սկալյար արտադրյալի հատկությունից՝ $f - \alpha g = 0$, այսինքն՝ $f = \alpha g$: \square

Այսպիսով, 5.1.2 թեորեմի հիման վրա կարող ենք պնդել, որ հիլբերտյան տարածությունում լավագույն մոտարկման տարրը միակն է:

Թեորեմ 5.4.2 : Եթե $\psi \in L_n$ լավագույն մոտարկման տարրն է $f \in L$ տարրի համար, ապա

$$(f - \psi, \varphi) = 0$$

կամայական $\varphi \in L_n$ տարրի համար:

Ապացույց: Ենթադրենք հակառակը, այսինքն՝ գոյություն ունի այնպիսի $g \in L_n$, տարր, որի համար

$$\mu \equiv (f - v, g) \neq 0 : . \quad (5.4.4)$$

Առանց ընդհանրությունը սահմանափակելու՝ կարող ենք ենթադրել, որ g տարրը նորմավորված է, այսինքն՝ $\|g\| = 1$: Վերցնենք $v = \psi + \mu g \in L_n$: Ուստի

$$\begin{aligned} \|f - v\|^2 &= (f - v, f - v) = (f - \psi - \mu g, f - \psi - \mu g) = \\ &= (f - \psi, f - \psi) - 2\mu(f - \psi, g) + \mu^2(g, g) = \|f - \psi\|^2 - 2\mu^2 + \mu^2 = \\ &= \|f - \psi\|^2 - \mu^2 < \|f - \psi\|^2 : \end{aligned}$$

Այսպիսով ստացանք, որ $\|f - v\| < \|f - \psi\|$: Իսկ դա հակասում է նրան, որ v -ն լավագույն մոտարկման տարրն է: \square

Ապացուցած թեորեմի վրա հիմնված է լավագույն մոտարկման տարրի որոշման եղանակը: Դիցուք L_n ենթատարածությունը ծնվում է $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ տարրերի գծորեն անկախ համակարգով: Պարզ է, որ

$$\psi = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i \in L_n \quad (5.4.5)$$

լավագույն մոտարկման տարրը գտնելու համար պետք է որոշել c_1, c_2, \dots, c_n գործակիցները: Այդ գործակիցները, (5.4.4)-ի համաձայն, կարող են ստացվել

$$\left(f - \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j, \varphi_i \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

պայմաններից, որոնք հանգում են

$$\sum_{j=1}^n (\varphi_j, \varphi_i) c_j = (f, \varphi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.4.6)$$

գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի: Այս համակարգը կոչվում է նորմալ համակարգ: Բնականաբար հայդ է ծագում այդ համակարգի միարժեք լուծելիության մասին: Նախապես մտցնենք մի կարևոր հասկացություն:

Սահմանում 5.4.5 : Սկալյար արտադրյալներից կազմված

$$G = \begin{bmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_1) & \dots & (\varphi_n, \varphi_1) \\ (\varphi_1, \varphi_2) & (\varphi_2, \varphi_2) & \dots & (\varphi_n, \varphi_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_1, \varphi_n) & (\varphi_2, \varphi_n) & \dots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{bmatrix}, \quad (5.4.7)$$

մատրիցը կոչվում է $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ տարրերի համակարգի գրամի մատրից: Այդ մատրիցի որոշիչը կոչվում է գրամի որոշիչ:

Կամայական $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$ վեկտորի համար ուսենք

$$(Gx, x) = \sum_{i,j=1}^n (\varphi_j, \varphi_i) x_i x_j = \left(\sum_{j=1}^n x_j \varphi_j, \sum_{i=1}^n x_i \varphi_i \right) = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \varphi_i \right\|^2 : \quad (5.4.8)$$

Լեմմա 5.4.1 : Գրամի մատրիցը վերասերված է այն և միայն այն դեպքում, եթե $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ տարրերի համակարգը գծորեն կախված է:

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Դիցուք (5.4.7) մատրիցը վերասերված է: Ուրեմն գոյություն ունի այնպիսի ոչ զրոյական վեկտոր $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$, որ $Gx = 0$: Այդ վեկտորի համար, համաձայն (5.4.8) հավասարության, ունենք՝

$$0 = (Gx, x) = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \varphi_i \right\|^2 :$$

Այստեղից հետևում է, որ $\sum_{i=1}^n x_i \varphi_i = 0$: Իսկ դա նշանակում է, որ $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ համակարգը գծորեն կախված է: Անհրաժեշտությունը ապացուցված է:

Բավարարություն: Դիցուք $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ համակարգը գծորեն կախված է: Այսինքն, գոյություն ունեն այնպիսի x_1, x_2, \dots, x_n թվեր, որոնք միաժամանակ հավասար չեն զրոյի և

$$x_1 \varphi_1 + x_2 \varphi_2 + \cdots + x_n \varphi_n = 0 :$$

Այստեղից ստանում ենք

$$\begin{aligned} x_1(\varphi_1, \varphi_1) + x_2(\varphi_2, \varphi_1) + \cdots + x_n(\varphi_n, \varphi_1) &= 0, \\ x_1(\varphi_1, \varphi_2) + x_2(\varphi_2, \varphi_2) + \cdots + x_n(\varphi_n, \varphi_2) &= 0. \end{aligned}$$

.....,

$$x_1(\varphi_1, \varphi_n) + x_2(\varphi_2, \varphi_n) + \cdots + x_n(\varphi_n, \varphi_n) = 0$$

հավասարությունների համակարգը: Այսպիսով, G Գրամի մատրիցով գծային հանրահաշվական հավասարումների համասեռ համակարգը ունի ոչ զրոյական լուծում: Հետևաբար, G մատրիցը վերասերված է: \square

Այսպիսով, քանի որ $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ տարրերը կազմում են L_n ենթատարածության թագիս, ապա (5.4.6) նորմալ համակարգը միարժեք լուծելի է: Խնչակն երևում է (5.4.7) սահմանումից, Գրամի մատրիցը սիմետրիկ է: Ավելին, ճիշտ է հետևյալ պնդումը:

Լեմմա 5.4.2 : Եթե $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ տարրերի համակարգը գծորեն անկախ է, ապա Գրամի մատրիցը դրական որոշյալ է:

Ապացույց: Վերցնենք կամայական $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$ ոչ զրոյական վեկտոր: Այդ դեպքում $\sum_{i=1}^n x_i \varphi_i \neq 0$ և, խնչակն հետևում է (5.4.8)-ից, $(Gx, x) > 0$: \square

Թվում է, թե իիլրերության տարածությունում լավագույն մոտարկման տարրի որոշման խնդիրը լիովին լուծված է: Սակայն գործնականում այստեղ ի հայտ են

գալիս լուրջ դժվարություններ: Նախ և առաջ, պետք է գգուշորեն բնարկել $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ բազմային տարրերը: Բազիսի անհաջող ընտրության դեպքում հաշվարկային սխալանըները կարող են անշափ մեծանալ, և արդյունքում ստացվող ”լավագույն” մոտարկումը իրականից շատ հեռու կլինի: Պատճառը այն է, որ Գրամի մատրիցը կարող է լինել համարյա վերատերված և շատ վատ պայմանավորված: Այլ կերպ ասած, այդ մատրիցի որոշիչը կարող է լինել զրոյին մոտ, իսկ պայմանավորվածության թիվը շատ մեծ:

Օրինակ 5.4.1 (Հիլբերտի մատրիցը): Մոցները $[0, 1]$ հատվածի վրա անընդհանուր ֆունկցիաների տարածությունում

$$(f, g) \equiv \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

սկալյար արտադրյալը:

Դիտարկենք

$$\varphi_0(x) \equiv 1, \varphi_1(x) = x, \dots, \varphi_n(x) = x^n$$

գծորեն անկախ ֆունկցիաների համակարգը: Սկալյար արտադրյալները հեշտությամբ հաշվում են՝

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^1 x^{i+j} dx = \frac{1}{i+j+1}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n :$$

Արյունքում կստանանք

$$H = [h_{i,j}]_{i,j=0}^n, \quad h_{ij} = \frac{1}{i+j+1} \tag{5.4.9}$$

Գրամի մատրիցը, որը կոչվում է *Հիլբերտի մատրից*: Այս մատրիցը հաշվողական մաթեմատիկայում հայտնի է որպես վատ պայմանավորված մատրիցի դասական օրինակ: Մատրիցի պայմանավորվածության թիվը շատ արագ աճում է n -ի մեծացմանը զուգընթաց, այն է՝ $\kappa(H) \sim e^{3.5n}$ (սեւ, օրինակ, [53]): Սիամամանակ, n -ի մեծացման հետ միասին՝ Հիլբերտի մատրիցի որոշիչը շատ արագ ձգուում է զրոյի: Տեղի ունի հետևյալ բանաձևը (տես [48]).

$$\det(H) = \frac{[1! 2! 3! \dots (n-1)!]^3}{n! (n+1)! \dots (2n-1)!} :$$

Դիտարկենք գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը

$$Hx = b, \tag{5.4.10}$$

որտեղ $b = [b_0, b_1, \dots, b_n]^T$ վեկտորի կոմպոնենտները տրվում են հետևյալ կերպ.

$$b_i = \sum_{j=0}^n \frac{1}{i+j+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n :$$

Համակարգի լուծումն է $x = [1, 1, \dots, 1]^T$: Կատարվել են հաշվարկներ MATHLAB փաթեթի միջոցով: Արդյունքում, $n = 13$ դեպքում ստացվել է (5.4.10) համակարգի հետևյալ “լուծումը”.

$$\begin{aligned} x_0 &= 1.0000, & x_1 &= 1.0000, & x_2 &= 1.0006, & x_3 &= 0.9916, \\ x_4 &= 1.0519, & x_5 &= 0.8693, & x_6 &= 0.8092, & x_7 &= 3.3755, \\ x_8 &= -6.8166, & x_9 &= 15.3612, & x_{10} &= -15.2629, & x_{11} &= 12.2917, \\ x_{12} &= -3.4253, & x_{13} &= 1.7506. \end{aligned}$$

Ընդ որում պարզվում է, որ $\det(H) = 3.9220 \cdot 10^{-107}$ և $\kappa_2(H) = 1.5570 \cdot 10^{18}$: ♣

Դիտողություն 5.4.2 : Նշենք, որ այս բաժնում շարադրված արդյունքները ճիշտ են նաև ունիտար տարածությունների համար:

5.4.2 Օրթոնորմալ բազիսի օգտագործումը

Հատուկ հետաքրքրություն է ներկայացնում այն դեպքը, եթե $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ համակարգը օրթոնորմալ է, այսինքն՝ $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$, որտեղ δ_{ij} -ն Կրոմեկերի նշանն է: Այդ դեպքում, ինչպես հետևում է (5.4.6) համակարգից, լավագույն մոտարկման տարրի c_i գործակիցները հաշվվում են անմիջապես.

$$c_i = (f, \varphi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n : \quad (5.4.11)$$

Այդ գործակիցները կոչվում են f տարրի ֆորմակիցներ լստ $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ օրթոնորմալ համակարգի: Ընդ որում, լավագույն մոտարկման (5.4.5) տարրը գրվում է հետևյալ տեսքով.

$$\psi = \sum_{i=1}^n (f, \varphi_i) \varphi_i : \quad (5.4.12)$$

Հեշտությամբ որոշվում է նաև արտահայտությունը $\rho(f, L_n)$ մեծության համար: Իրոք, հաշվի առնելով (5.4.11)-ը, ստանում ենք

$$\rho^2(f, L_n) = \|f - \psi\|^2 = (f - \psi, f - \psi) = (f, f) - 2(f, \psi) + (\psi, \psi) =$$

$$\|f\|^2 - 2 \left(f, \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i \right) + \left(\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i, \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j \right) =$$

$$\|f\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n c_i (f, \varphi_i) + \sum_{i=1}^n c_i^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^n c_i^2 :$$

Այսպիսով,

$$\rho(f, L_n) = \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{i=1}^n c_i^2} : \quad (5.4.13)$$

Այստեղից ակնհայտորեն հետևում է այսպես կոչված Բեսելի անհավասարությունը.

$$\sum_{i=1}^n c_i^2 \leq \|f\|^2 : \quad (5.4.14)$$

Եթե L -ը սեպարատել հիլբերտյան տարածություն է, ապա նրանում գոյություն ունի

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots \quad (5.4.15)$$

տարրերի հաշվելի լրիվ օրբոնորմալ համակարգ (տես, օրինակ, [18],[20]): Ընդ որում, կամայական $f \in L$ տարրը ներկայացվում է

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i \quad (5.4.16)$$

տեսքով, որտեղ $c_i = (f, \varphi_i)$ ։ Ֆուրիեի գործակիցներն են: (5.4.16) շարքը կոչվում է f տարրի ֆուրիեի շարք։ Դժվար չէ տեսնել, որ

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = \|f\|^2 : \quad (5.4.17)$$

Վերջին հավասարությունը կոչվում է *Պարսևալի հավասարություն*:

Դիցուք L_n -ը ենթատարածություն է՝ ծնված (5.4.15) համակարգի առաջին $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ տարրերով։ Ինչպես վերև ասվեց, $\psi \in L_n$ լավագույն մոտարկման տարրը ներկայացվում է (5.4.12) տեսքով, այսինքն՝ (5.4.16) ֆուրիեի շարքի հատվածն է։ Ընդ որում, (5.4.13) և (5.4.17)-ից հետևում է, որ

$$\rho(f, L_n) = \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{i=1}^n c_i^2} = \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} c_i^2} \longrightarrow 0 \quad \text{եթե } n \rightarrow \infty :$$

Վերջինը նշանակում է, որ կամայական $f \in L$ տարր ցանկացած ճշտությամբ կարելի է մոտարկել վերջափոր չափանի ենթատարածությունների տարրերով։

Վերը շարադրածը նշանակում է, որ անհամեմատ ավելի գերադասելի է օգտագործել օրբոնորմալ բազիսներ։ Սակայն նրանք ոչ միշտ են կարող միանգամից նշվել։ Դրա հետ միասին գոյություն ունի օրբոգոնալացման մեթոդ, որը բույլ է տալիս կամայական զծորեն անկախ համակարգից անցում կատարել օրբոնորմալ համակարգի։ Այդ հարցին է նվիրված հաջորդ պարագրաֆը։

5.5 Գրամ-Շմիդտի օրբոգոնալացումը

Դիցուք L ունիտար տարածությունում տրված է գծորեն անկախ տարրերի

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \quad (5.5.1)$$

համակարգը։ Նկարագրենք Գրամ-Շմիդտի օրբոգոնալացման մեթոդը, որն այս համակարգը ձևափոխում է

$$q_1, q_2, \dots, q_n \quad (5.5.2)$$

օրբոնորմալ համակարգի։ Այստեղ մենք կդիտարկենք այդ մեթոդի երկու տարբերակ։

5.5.1 Օրթոգոնալացման ալգորիթմի դասական տարրերակը

Ալգորիթմի առաջին քայլում կառուցվում է

$$q_1 = \frac{1}{\|\varphi_1\|} \varphi_1$$

տարրը: Ակնհայտ է, որ $\|q_1\| = 1$:

Անցնենք երկրորդ քայլին: Դիտարկենք

$$\tilde{q}_2 = \alpha_{12} q_1 + \varphi_2$$

տարրը: Քանի որ φ_1 և φ_2 տարրերը գծողեն անկախ են, ապա \tilde{q}_2 -ը տարրեր է զրոյից կամայական α_{12} գործակցի դեպքում: Պահանջենք, որ

$$(\tilde{q}_2, q_1) = 0 :$$

Դրանով իսկ

$$\alpha_{12} (q_1, q_1) + (\varphi_2, q_1) = 0$$

հավասարությունից կստանանք, որ

$$\alpha_{12} = -(\varphi_2, q_1) :$$

Այնուհետև հաշվենք

$$q_2 = \frac{1}{\|\tilde{q}_2\|} \tilde{q}_2 :$$

Վեկտորը: Պարզ է, որ $\|q_2\| = 1$:

Ենթադրենք, որ արդեն կառուցել ենք

$$q_1, q_2, \dots, q_{k-1}$$

տարրերի օրթոնորմալ համակարգ, որտեղ $k \leq n$: Ալգորիթմի հաջորդ k -րդ քայլն իրականացվում է նման ձևով: Դիտարկենք հետևյալ տարրը.

$$\tilde{q}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{ik} q_i + \varphi_k :$$

Նորից, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ տարրերի գծային անկախությունից հետևում է, որ \tilde{q}_k տարրը տարրեր է զրոյից կամայական α_{ik} , $i = 1, 2, \dots, k-1$ գործակիցների դեպքում: Պահանջենք, որ

$$(\tilde{q}_k, q_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k-1 :$$

Արդյունքում

$$\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{jk} (q_j, q_i) + (\varphi_k, q_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k-1$$

հավասարություններից գործակիցների համար կստանանք հետևյալ արտահայտությունները.

$$\alpha_{ik} = -(\varphi_k, q_i), \quad i = 1, 2, \dots, k-1 :$$

Այնուհետև հաշվում է

$$q_k = \frac{1}{\|\tilde{q}_k\|} \tilde{q}_k$$

տարրը:

Ծարտանակելով ընթացքը՝ կստանանք (5.5.2) տարրերի որոնելի օրթոնորմալ համակարգը: Գրենք մեթոդի ալգորիթմը:

```
Pseudocode GRAM – SCHMIDT/Classic
input n, ( $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ )
 $q_1 = \varphi_1 / \|\varphi_1\|$ 
for  $k = 2, 3, \dots, n$  do
     $\tilde{q}_k = \varphi_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\varphi_k, q_i) q_i$ 
     $q_k = \tilde{q}_k / \|\tilde{q}_k\|$ 
end
output ( $q_1, q_2, \dots, q_n$ )
```

Ցավոք, Գրամ-Շմիդտի նկարագրված ալգորիթմը, իր դասակական տարրերակով, կայուն չէ կլորացման սխալանքների նկատմամբ (տես, օրինակ, [35],[53]): Արդյունքում (5.5.2) «օրթոնորմալ» համակարգը կարող է ամենին էլ օրթոգոնալ չլինել: Այդպիսի երևույթի կարելի է հանդիպել, մասնավորապես, այն դեպքում, եթե (5.5.1) տարրերի համակարգը համարյա գծորեն կախված է:

Օրինակ 5.5.1 : Դիտարկենք

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

գծորեն անկախ վեկտորները: Վերցնենք $\varepsilon = 10^{-8}$: Հաշվումների արդյունքում կստանանք՝

$$q_1 = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}, \quad q_2 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -0.7071 \\ 0.7071 \\ 0.0000 \end{bmatrix}, \quad q_3 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -0.7071 \\ 0.0000 \\ 0.7071 \end{bmatrix}:$$

Այսեղ $(q_2, q_3) \approx 0.5$: ♣

5.5.2 Գրամ-Շմիդտի վերափոխված ալգորիթմը

Օրբոգոնալացման դասական մեթոդի անկայունությունը ի հայտ է գալիս, երբ, կորուացման սխալանքների կուտակման հետևանքով, հաջորդաբար ստացվող գետարրերը կարող են օրբոգոնալ չինել: Ընդ որում, կորուացման սխալանքների աղավաղող ազդեցությունը արտահայտվում է հատկապես այն դեպքում, երբ քելակետային տարրերը համարյա գծորնն կախված են: Նշված թերությունից զուրկ է մի ալգորիթմ, որի կառուցման ժամանակ չի օգտագործվում արդեն հաշված տարրերի օրբոգոնալությունը: Այդ դեպքում q_1, q_2, \dots, q_k տարրերի ստացման ընթացքում առաջացած սխալանքները արդեն էապես չեն ազդում q_k -ի հաշվման վրա: Ստորև բերվող ալգորիթմը դասականից տարբերվում է հաշվումների կատարման այլ հաջորդականությամբ:

Pseudocode GRAM – SCHMIDT/Modified

```

input  $n$ , ( $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ )
for  $k = 1, 2, \dots, n$  do
     $\varphi_k = \varphi_k / \|\varphi_k\|$ 
    for  $j = k + 1, k + 2, \dots, n$  do
         $\varphi_j = \varphi_j - (\varphi_j, \varphi_k) \varphi_k$ 
    end
end
output ( $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ )
```

Նշենք, որ օրբոգոնալացման մեթոդի այս տարրերակում ձևափոխված տարրերը հաշվվում և տեղադրվում են ճիշտ այն տեղերում, որ գրադեմում էին համապատասխան ելակետային տարրերը:

Օրինակ 5.5.2 : Դիտարկենք 5.5.1 օրինակի ելակետային վեկտորները: Ինչպես և այնտեղ, վերցնենք $\varepsilon = 10^{-8}$: Վերափոխված ալգորիթմով հաշվումների արդյունքում կստանանք

$$q_1 = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}, \quad q_2 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -0.7071 \\ 0.7071 \\ 0.0000 \end{bmatrix}, \quad q_3 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -0.4082 \\ -0.4082 \\ 0.8165 \end{bmatrix}:$$

Անմիջական ստուգումով համոզվում ենք, որ ստացված համակարգը օրբոնորմալ է (համենայն դեպքում, հաշվարկների ճշտության շրջանակներում): ♣

5.6 Միջին քառակուսային մոտարկումներ հանրահաշվական քազմանդամներով

Դիտարկենք $[a, b]$ հատվածի վրա քառակուսով ինտեգրելի ֆունկցիաների $L_2[a, b]$ հիմքերայան տարածությունը: Այսինքն՝ այն ֆունկցիաների տարածությունը, որոնց

համար

$$\int_a^b f^2(x) dx < +\infty$$

(սեն [18],[20],[30]): Սկալյար արտադրյալը և նորմը այդ տարածությունում սահմանվում են հետևյալ կերպ:

$$(f, g) \equiv \int_a^b f(x)g(x) dx, \quad \|f\| \equiv \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} :$$

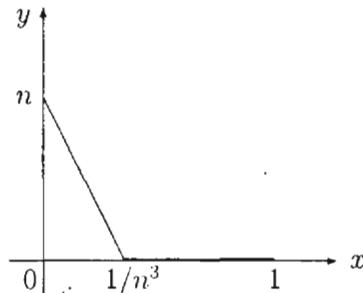
Դժվար չէ ստուգել, որ սկալյար արտադրյալի և նորմի բոլոր հատկությունները տեղի ունեն, եթե իրարից ոչ ավելի քան զրո չափի բազմության վրա տարբերվող ֆունկցիաները համարենք հավասար:

Մոտարկումները $L_2[a, b]$ տարածության մեջ կոչվում են **միջին քառակուսային մոտարկումներ**: Համապատասխանաբար, $\|f - g\|$ նորմը $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաների միջին քառակուսային շեղումն է:

Հարկ է նշել, որ երկու անընդհատ ֆունկցիաների մոտիկությունը $L_2[a, b]$ տարածության նորմի իմաստով չի երաշխավորում նրանց մեծագույն շեղման փոքրությունը: Օրինակ, $L_2[0, 1]$ տարածության մեջ դիտարկենք $g(x) \equiv 0$ և

$$f(x) = \begin{cases} -n^4x + n, & \text{եթե } 0 \leq x \leq \frac{1}{n^3}, \\ 0, & \text{եթե } \frac{1}{n^3} < x \leq 1 \end{cases}$$

ֆունկցիաները (նկ. 5.6.1):



Նկ. 5.6.1 $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը

Ուսե՞նք

$$\|f - g\| = \sqrt{\int_0^1 f^2(x) dx} = \sqrt{\int_0^{1/n^3} f^2(x) dx} \leq \sqrt{n^2 \frac{1}{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{n}} :$$

Այսպիսով, n -ի ընտրության հաշվին $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաների միջին քառակուսային շեղումը կարելի է դարձնել որքան ասես փոքր. մինչ դեռ $\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|$ մեծությունը կարող է լինել որքան ասես մեծ:

$L_2[a, b]$ տարածության հետ մեկտեղ կոդտարկենք նաև $L_2[a, b; p]$ այն ֆունկցիաների տարածությունը, որոնց համար

$$\int_a^b p(x) f^2(x) dx < +\infty,$$

որտեղ $p(x) \geq 0$ ինչ-որ ֆիբած ֆունկցիա է, որն ինտեգրելի է $[a, b]$ հատվածում և այդտեղ ընդունում է զրո արժեք ոչ ավելի, քան զրո չափի բազմության վրա (տես, օրինակ, [18],[20],[30]): $p(x)$ ֆունկցիան կոչվում է կշռային ֆունկցիա կամ ուղղակի կշիռ: Սկայար արտադրյալը և նորմը $L_2[a, b; p]$ տարածությունում որոշվում են հետևյալ կերպ.

$$(f, g) \equiv \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx, \quad \|f\| \equiv \sqrt{\int_a^b p(x) f^2(x) dx} :$$

Պարզ է, որ $L_2[a, b]$ տարածությունը կարելի է դիտարկել որպես $L_2[a, b; p]$ տարածության մասնավոր դեպք, եթե $p(x) \equiv 1$:

5.6.1 Լավագույն միջին քառակուսային մոտարկման բազմանդամ

Ինչպես և 5.2 պարագրաֆում, H_n -ով նշանակենք իրական գործակիցներով n աստիճանից ոչ բարձր բոլոր հանրահաշվական բազմանդամների դասը: H_n դասը $L_2[a, b; p]$ տարածության $(n+1)$ -չափանի ենթատարածությունն է:

Համաձայն այս զիսում արդեն ներմուծված գաղափարների $P_n(x) \in H_n$ բազմանդամը, որի համար

$$\|f - P_n\| = \rho(f, H_n) = \inf_{R_n(x) \in H_n} \|f - R_n\|,$$

կանվանենք լավագույն միջին քառակուսային մոտարկման բազմանդամ $f(x) \in L_2[a, b; p]$ ֆունկցիայի համար: 5.4 պարագրաֆում շարադրած ընդիւնութեանության հիման վրա այդ բազմանդամը գոյություն ունի և միակն է:

Եթե H_n տարածության մեջ որպես բազիս վերցնենք աստիճանային ֆունկցիաների գծորեն անկախ համակարգ՝

$$\varphi_0(x) \equiv 1, \varphi_1(x) = x, \dots, \varphi_n(x) = x^n, \tag{5.6.1}$$

ապա n աստիճանից ոչ բարձր բազմանդամի ստանդարտ գրառումը, ըստ եռթյան, այդ բազմանդամի վերլուծումն է ըստ (5.6.1) ֆունկցիաների համակարգի: Դիցուք

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

լավագույն միջին քառակուսային մոտարկման բազմանդամ է $f(x) \in L_2[a, b; p]$ ֆունկցիայի համար: Նրա գործակիցների ոլոշման համար, համաձայն 5.4 պարագրաֆի արդյունքների, այնոր է լուծել

$$\sum_{j=0}^n (\varphi_j, \varphi_i) a_j = (f, \varphi_i), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (5.6.2)$$

նորմալ համակարգը, որտեղ

$$(\varphi_j, \varphi_i) = \int_a^b p(x) x^{i+j} dx, \quad i, j = 0, 1, \dots, n,$$

$$(f, \varphi_i) = \int_a^b p(x) f(x) x^i dx, \quad i = 0, 1, \dots, n :$$

Օրինակ 5.6.1 :Պահանջվում է գտնել $[0, 1]$ հատվածում $P_1(x) = a_0 + a_1 x$ լավագույն միջին քառակուսային մոտարկման բամանդամ $f(x) = \sqrt{x}$ ֆունկցիայի համար (կշունչը $p(x) \equiv 1$):

Կառուցենք հավասարումների նորմալ համակարգ: Ունենք՝

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \int_0^1 1^2 dx = 1, \quad (\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

$$(\varphi_1, \varphi_0) = (\varphi_0, \varphi_1) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

$$(f, \varphi_0) = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}, \quad (f, \varphi_1) = \int_0^1 \sqrt{x} x dx = \frac{2}{5} :$$

Հետևաբար, նորմալ համակարգը այսպիսին է.

$$\begin{cases} a_0 + \frac{1}{2} a_1 = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{3} a_1 = \frac{2}{5} \end{cases}:$$

Լուծելով այն՝ կստանանք՝ $a_0 = 4/15$, $a_1 = 4/5$ և, համապատասխանաբար, $P_1(x) = \frac{4}{15} + \frac{4}{5} x$: Ընդ որում

$$\|f - P_1\| = \sqrt{\int_0^1 \left(\sqrt{x} - \frac{4}{15} - \frac{4}{5} x \right)^2 dx} = \frac{\sqrt{2}}{30} : \quad \clubsuit$$

Սակայն այդ ճանապարհը n -ի մեծ արժեքների դեպքում գործնականորեն պիտանի չէ՝ 5.4 պարագրաֆում բերված պատճառություն: Օրինակ, եթշտ է տեսնել, որ $L_2[0, 1]$ տարածության դեպքում (5.6.2) նորմալ համակարգի մատրիցը մեզ արդեն հայտնի (5.4.9) Հիլբերտի մատրիցն է: Ինչպես ցույց էր տրված 5.4 պարագրաֆում, խնդիրը էապես կապրպի, եթե H_n ենթատարածությունում օգտագործենք օրթոգոնալ բազմանդամների համակարգ:

5.6.2 Բազմանդամների օրթոգոնալ համակարգեր

Նախորդ պարագրաֆում նկարագրված Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման մեթոդը թույլ է տալիս կամայական n -ի համար աստիճանային ֆունկցիաների (5.6.1) գծորեն անկախ համակարգը ձևափոխել

$$Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_n(x)$$

բազմանդամների օրթոնորմալ համակարգի: Ընդ որում, ինչպես դժվար չէ նկատել սույն մեթոդի ալգորիթմից, $Q_k(x)$ -ը ճիշտ k -րդ աստիճանի բազմանդամ է:

Դիտարկենք $L_2[a, b; p]$ տարածությունում

$$Q_0(x), Q_1(x), Q_2(x), \dots, \quad (5.6.3)$$

բազմանդամների օրթոգոնալ համակարգը, որտեղ $Q_k(x)$ -ը ճիշտ k -րդ աստիճանի բազմանդամ է ($k = 0, 1, 2, \dots$):

Տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

Լեմմա 5.6.1 : Բազմանդամների (5.6.3) օրթոգոնալ համակարգը միակն է հաստատուն բազմապատկիշների ծառաթյամբ:

Ապացույց: Դիցուք (5.6.3) համակարգի հետ մեկտեղ գոյություն ունի մեկ այլ

$$R_0(x), R_1(x), R_2(x), \dots$$

օրթոգոնալ բազմանդամների համակարգ, որտեղ $R_k(x)$ -ը ճիշտ k -րդ աստիճանի բազմանդամ է: Նախ ցույց տանք, որ $(Q_k, R_m) = 0$, եթե $k \neq m$: Առանց ընդհանրությունը սահմանափակելու կարելի է համարել, որ $k > m$: $R_m(x)$ բազմանդամը միարժեքորեն ներկայացվում է

$$R_m(x) = \sum_{j=0}^m \alpha_j Q_j(x) \quad (5.6.4)$$

տեսքով: Այդ դեպքում

$$(Q_k, R_m) = \left(Q_k, \sum_{j=0}^m \alpha_j Q_j \right) = \sum_{j=0}^m \alpha_j (Q_k, Q_j) = 0 :$$

Այժմ ապացուցենք, որ (5.6.4) ներկայացման մեջ α_j գործակիցները, եթե $j < m$, հավասար են զրոյի: Եթոք,

$$0 = (Q_j, R_m) = \left(Q_j, \sum_{i=0}^m \alpha_i Q_i \right) = \sum_{i=0}^m \alpha_i (Q_j, Q_i) = \alpha_j (Q_j, Q_j) :$$

Իսկ բանի որ $(Q_j, Q_j) \neq 0$, ապա $\alpha_j = 0$: Այսպիսով,

$$R_m(x) = \alpha_m Q_m(x) :$$

Ինչը և պահանջվում էր ապացուցել: \square

Դիտողություն 5.6.1: Եթե օրորդունալ բազմանդամների վրա դնենք լրացուցիչ պայմաններ, պահանջելով, օրինակ, որ ավագ անդամի գործակիցը հավասար լինի մեկի կամ, որ ավագ անդամի գործակիցը լինի դրական, իսկ բազմանդամի նորմը հավասար լինի մեկի, ապա օրորդունալ բազմանդամների համակարգը $[a, b]$ հատվածում տրված $p(x)$ կշռի դեպքում միակը կլինի բառիս բուն իմաստով:

Եթե բազմանդամների (5.6.3) օրորդունալ համակարգը կառուցված է, ապա $P_n(x) \in H_n$ լավագույն միջին քառակուսային բազմանդամը $f(x) \in L_2[a, b; p]$ ֆունկցիայի համար կգրվի

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k Q_k(x) \quad (5.6.5)$$

տեսքով, որտեղ c_k գործակիցները, 5.4 պարագրաֆում շարադրած ընդհանուր տեսության հիման վրա, հաշվում են

$$c_k = \frac{(f, Q_k)}{(Q_k, Q_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (5.6.6)$$

բանաձևերով: Դժվար չէ ստանալ նաև

$$\rho(f, H_n) = \|f - P_n\| = \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{k=0}^n c_k^2 (Q_k, Q_k)} \quad (5.6.7)$$

արտահայտությունը $f(x) - \Phi_{n+1}(x)$ ֆունկցիայի H_n ենթատարածությունից միջին քառակուսային շեղման համար, որը համանման է (5.4.13) արտահայտությանը:

Նշենք օրորդունալ բազմանդամների և երկու կարևոր հատկություն:

Լեմմա 5.6.2: (5.6.3) համակարգի $Q_n(x)$ բազմանդամը, եթե $n \geq 1$, օրորդունալ է H_{n-1} ենթատարածության ցանկացած բազմանդամի:

Ապացույց: Կամայական $R_{n-1}(x) \in H_{n-1}$ բազմանդամ ներկայացվում է

$$R_{n-1}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j Q_j(x)$$

տեսքով: Հետևաբար,

$$(Q_n, R_{n-1}) = \left(Q_n, \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j Q_j \right) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j (Q_n, Q_j) = 0,$$

ինչը և պահանջվում էր ապացուցել: \square

Լեմմա 5.6.3 : (5.6.3) օրթոգոնալ համակարգի $Q_n(x)$ բազմանդամը, եթե $n \geq 1$, (a, b) միջակայքում ունի ծիշտ ու հատ իրարից տարբեր արմատներ:

Ապացույց: Քանի որ

$$(Q_n, Q_0) = \int_a^b p(x) Q_n(x) Q_0(x) dx = 0,$$

ապա $Q_n(x)$ բազմանդամը (a, b) միջակայքում ունի կենտ պատիկության գոնե մեկ արմատ: Դիցուք $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ կետերը $Q_n(x)$ բազմանդամի (a, b) միջակայքին պատկանող կենտ պատիկության տարբեր արմատներ են: Պարզ է, որ $m \leq n$: Դիտարկենք

$$R_m(x) \equiv (x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_m)$$

բազմանդամը: Այդ դեպքում $Q_n(x)R_m(x)$ բազմանդամի (a, b) միջակայքին պատկանող բոլոր արմատները ունեն զույգ պատիկություն: Ուստի

$$\int_a^b p(x) Q_n(x) R_m(x) dx \neq 0 :$$

Հետևաբար 5.6.2 լեմմայից հետևում է, որ $m \geq n$: Այսպիսով, $m = n$: \square

5.6.3 Անդրադարձ առնչություններ օրթոգոնալ բազմանդամների համար

Ինչպես արդեն նշվել է, (5.6.3) բազմանդամների օրթոգոնալ համակարգը կարելի է կառուցել՝ օգտագործելով Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացումը: Սակայն այդ համակարգը կարելի է ստանալ մի այլ եղանակով: Պարզվում է, որ օրթոգոնալ բազմանդամները բավարարում են բավականաչափ պարզ անդրադարձ առնչությունների:

$x Q_n(x)$ բազմանդամի աստիճանը հավասար է $(n + 1)$ -ի: Հետևաբար, այդ բազմանդամը կարելի է գրել

$$x Q_n(x) = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j Q_j(x) \tag{5.6.8}$$

տեսքով: Վերջին նույնության երկու կողմը բազմապատկենք $p(x)Q_i(x)$ -ով, որտեղ $i = 0, 1, \dots, n - 2$, և ինտեգրենք a -ից b սահմաններում: Կատանանք՝

$$\int_a^b p(x)Q_n(x)[xQ_i(x)] dx = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j (Q_j, Q_i) dx$$

կամ

$$(Q_n, xQ_i) = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j (Q_j, Q_i) :$$

Քանի որ $xQ_i(x)$ բազմանդամի աստիճանը չի գերազանցում $(n - 1)$ -ը, ապա համաձայն 5.6.2 լեմմայի՝ $(Q_n, xQ_i) = 0$: Այնուհետև,

$$0 = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j (Q_j, Q_i) = \alpha_i (Q_i, Q_i) :$$

Այսանուից հետևում է, որ $i = 0, 1, \dots, n - 2$ արժեքների համար $\alpha_i = 0$: Այսպիսով, (5.6.8)-ից ստանում ենք

$$xQ_n(x) = \alpha_{n-1}Q_{n-1}(x) + \alpha_nQ_n(x) + \alpha_{n+1}Q_{n+1}(x)$$

կամ

$$\alpha_{n+1}Q_{n+1}(x) + (\alpha_n - x)Q_n(x) + \alpha_{n-1}Q_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots : \quad (5.6.9)$$

Արտահայտությունները $\alpha_{n-1}, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ գործակիցների համար կարելի է ստանալ (5.6.9) առնչությունը սկայլարորեն բազմապատկելով հաջորդաբար $p(x)Q_i(x)$ ֆունկցիաներով, որտեղ $i = n - 1, n, n + 1$, և ինտեգրելով a -ից b սահմաններում.

$$\alpha_{n-1} = \frac{(xQ_n, Q_{n-1})}{(Q_{n-1}, Q_{n-1})}, \quad \alpha_n = \frac{(xQ_n, Q_n)}{(Q_n, Q_n)}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{(xQ_n, Q_{n+1})}{(Q_{n+1}, Q_{n+1})} : \quad (5.6.10)$$

Ստացված (5.6.9) անդրադարձ առնչությունները կարելի է օգտագործել բազմանդամների օրթոգրանալ համակարգի կառուցման համար: Օրինակ, $p(x) \equiv 1$ դեպքում օրթոգրանալ բազմանդամները, որոնց ավագ անդամի գործակիցը հավասար է մեկի, կարելի է ստանալ

$$Q_0(x) \equiv 1, \quad Q_1(x) = x - \frac{a+b}{2}, \quad (5.6.11)$$

$$Q_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)Q_n(x) - \alpha_{n-1}Q_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

բանաձևներով, որտեղ համաձայն (5.6.10)-ի՝

$$\alpha_{n-1} = \frac{(xQ_n, Q_{n-1})}{(Q_{n-1}, Q_{n-1})}, \quad \alpha_n = \frac{(xQ_n, Q_n)}{(Q_n, Q_n)} :$$

Բազմանդամների օրթոնորմալ համակարգը կարելի է կառուցել հետևյալ կերպ.

$$\begin{aligned} Q_0(x) &\equiv \frac{1}{\sqrt{b-a}}, \quad Q_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{(b-a)^{3/2}}(2x - b - a), \\ Q_{n+1}^*(x) &= (x - \beta_n)Q_n(x) - \beta_{n-1}Q_{n-1}(x), \\ \beta_{n-1} &= (x Q_n, Q_{n-1}), \quad \beta_n = (x Q_n, Q_n), \\ Q_{n+1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{(Q_{n+1}^*, Q_{n+1}^*)}}Q_{n+1}^*(x), \quad n = 1, 2, \dots : \end{aligned} \tag{5.6.12}$$

5.6.4 Բազմանդամների օրթոգոնալ համակարգերի օրինակներ

Պարագրաֆի վերջում քերենք որոշ, իածախ իամիապող օրթոգոնալ համակարգերի օրինակներ: Այս համակարգերի օրթոգոնալության ապացույցները, ինչպես նաև անդրադարձ առնչությունների դուրսքերումները բողնում ենք ընթերցողին որպես վարժություն:

- Լեժանդրի բազմանդամներ, որոնք տրվում են

$$\mathcal{L}_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, \dots \tag{5.6.13}$$

Ռուրիգի բանաձևով, $[-1, 1]$ հատվածում կազմում են $p(x) \equiv 1$ կշռով օրթոգոնալ համակարգ: Լեժանդրի բազմանդամների համար (5.6.9) անդրադարձ առնչությունները ընդունում են հետևյալ տեսքը.

$$(n+1)\mathcal{L}_{n+1}(x) - (2n+1)x\mathcal{L}_n(x) + n\mathcal{L}_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots : \tag{5.6.14}$$

- Առաջին սերի Չեբիշևի բազմանդամները, որոնք տրվում են

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, \dots \tag{5.6.15}$$

բանաձևով, $[-1, 1]$ հատվածում կազմում են $p(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ կշռով օրթոգոնալ համակարգ: Այս բազմանդամներն մենք նախկինում հանդիպել ենք 4.3 պարագրաֆում, որտեղ նրանք սահմանվել են

$$\begin{aligned} T_0(x) &\equiv 1, \quad T_1(x) = x, \\ T_{n+1}(x) &= 2x T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{5.6.16}$$

անդրադարձ առնչություններով:

- Երկրորդ սերի Չեբիշևի բազմանդամները, որոնք որոշվում են

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.6.17)$$

բանաձևերով, $[-1, 1]$ հատվածում կազմում են օրթոգոնալ համակարգ $p(x) = \sqrt{1-x^2}$ կշռով: Այդ բազմանդամների համար (5.6.9) անդրադարձ առնչությունները գրվում են հետևյալ տեսքով.

$$U_{n+1}(x) = 2x U_n(x) - U_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots : \quad (5.6.18)$$

- Յերմիտի բազմանդամները, որոնք տրվում են

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.6.19)$$

բանաձևով, $(-\infty, \infty)$ ամբողջ թվային առանցքի վրա կազմում են օրթոգոնալ համակարգ $p(x) = e^{-x^2}$ կշռով: Նրանք բավարարում են

$$H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.6.20)$$

անդրադարձ առնչություններին:

5.7 Փոքրագույն քառակուսիների մեթոդ

Ենթադրենք, որ $f(x)$ մոտարկվող ֆունկցիան տրված է աղյուսակով, այսինքն՝ հայտնի են այդ ֆունկցիայի արժեքները ինչ-որ x_0, x_1, \dots, x_N կետերում, որոնք կանվանենք *հաճգույցներ*.

$$y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N :$$

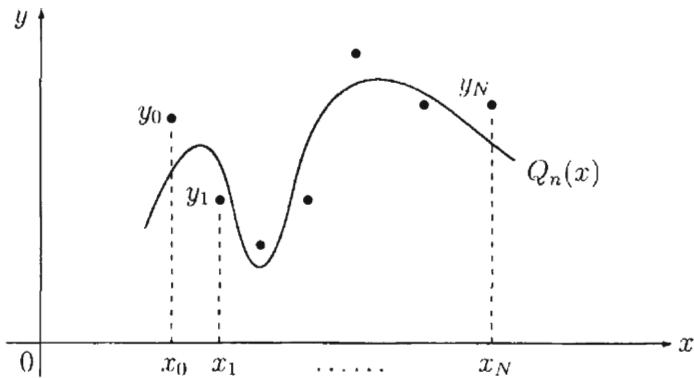
Այս կամ այն նպատակով երբեմն անհրաժեշտ է լինում գտնել. թեկուզ մոտավոր, այդ ֆունկցիայի անալիտիկ ներկայացումը: Մեթոդներից մեկը, ինչպես ցույց է տրվել շորորորդ գլխում, ինտերպոլացիան է: Սակայն այդ մեթոդը չի կարելի համարել առավել հաջող հետևյալ երկու պատճառով: Առաջին, եթե հաճգույցների թիվը մեծ է, համապատասխանաբար մեծ կլինի նաև ինտերպոլացիոն բազմանդամի աստիճանը և, որպես հետևանք, մեծածավալ կլինի այդ բազմանդամի արտահայտությունը: Երկրորդ, եթե ֆունկցիայի արժեքները պարունակում են պատահական սխալանքներ, օրինակ, չափման սխալանքներ, ապա հարթության (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, N$ կետերով կորի ճշգրիտ անցնելու պահանջը իմաստագրկվում է:

Զնակերպենք հետևյալ խնդիրը. գտնել այնպիսի $Q_n(x) \in H_n$ բազմանդամ, որ

$$\sum_{i=0}^N \omega_i [y_i - Q_n(x_i)]^2 = \min_{P_n(x) \in H_n} \sum_{i=0}^N \omega_i [y_i - P_n(x_i)]^2, \quad (5.7.1)$$

որտեղ $\omega_i > 0$ կշիռն է x_i հաճգույցում:

Աղյուսակով տրված ֆունկցիաների մոտարկման այդպիսի եղանակը կոչվում է *փոքրագույն քառակուսիների մեթոդ*:



Նկ. 5.7.1 Մոտարկում ըստ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի

Ներմուծենք

$$\Phi(a_0, a_1, \dots, a_n) \equiv \sum_{i=0}^N \omega_i [y_i - P_n(x_i)]^2 \quad (5.7.2)$$

Փունկցիան, որտեղ a_0, a_1, \dots, a_n փոփոխականները

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k :$$

բազմանդամի գործակիցներն են: Դրանով իսկ (5.7.1) խնդիրը հանգում է $\Phi(a_0, a_1, \dots, a_n)$ փունկցիայի մինիմումի որոշմանը: Այսինքն, պետք է գտնել այնպիսի $(a_0^*, a_1^*, \dots, a_n^*)$ կետ, որ

$$\Phi(a_0^*, a_1^*, \dots, a_n^*) = \min_{a_0, a_1, \dots, a_n} \Phi(a_0, a_1, \dots, a_n) : \quad (5.7.3)$$

Գրառումների պարզեցման համար (a_0, a_1, \dots, a_n) կետը կդիտարկենք որպես \mathbf{R}^{n+1} վեկտորական տարածության տարր՝ ենթադրենով $a = [a_0, a_1, \dots, a_n]^T$: Այդ դեպքում (5.7.3) պայմանը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\Phi(a^*) = \min_{a \in \mathbf{R}^{n+1}} \Phi(a) \equiv \Phi_{min} : \quad (5.7.4)$$

Եթե $n = N$, ապա (5.7.1) խնդիրի լուծումն է $L_N(x)$ ինտերպոլացիոն բազմանդամը, որի համար

$$L_N(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, N :$$

Պարզ է, որ այս դեպքում $\Phi_{min} = 0$: Այսինքն՝ մեր խնդիրը, փաստորեն, ձևափոխվում ինտերպոլացիայի խնդիրի, ինչի մասին արդեն խոսվել է այս պարագրաֆի սկզբում: Ավելին, իմաստ չունի վերցնել $n > N$: Ուստի հետագայում կննթադրենք, որ $n < N$:

Եթե x_0, x_1, \dots, x_N հանգույցների բազմության վրա որոշված ֆունկցիաների տարածությունում ներմուծնք սկալյար արտադրյալ և նորմ՝

$$(f, g) \equiv \sum_{i=0}^N \omega_i f(x_i)g(x_i), \quad \|f\| \equiv \sqrt{\sum_{i=0}^N \omega_i f^2(x_i)}. \quad (5.7.5)$$

ապա (5.7.1) (կամ (5.7.4)) խնդիրը կարելի է լուծել 5.6 պարագրաֆում ներկայացրված ընդհանուր մեթոդների կիրառմամբ (տե՛ս, օրինակ, [4],[7]): Սակայն այստեղ մենք կը նուրբենք ուրիշ ճանապարհ և ցույց կտանք, թե այլ դատողությունների միջոցով ինչպես կարելի է գալ հավասարումների նորմալ համակարգի:

Նախ և առաջ ստանանք (5.7.2)-ում որոշված $\Phi(a)$ ֆունկցիայի բացահայտ արտահայտությունը: Ունենք՝

$$\begin{aligned} \Phi(a) &= \sum_{i=0}^N \omega_i \left[y_i - \sum_{k=0}^n a_k x_i^k \right]^2 = \sum_{i=0}^N \omega_i \left[y_i^2 - 2y_i \sum_{k=0}^n a_k x_i^k + \sum_{k,m=0}^n a_k a_m x_i^{k+m} \right] \\ &= \sum_{k,m=0}^n \left(\sum_{i=0}^N \omega_i x_i^{k+m} \right) a_k a_m - 2 \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0}^N \omega_i y_i x_i^k \right) a_k + \sum_{i=0}^N \omega_i y_i^2 : \end{aligned}$$

Կատարենք հետևյալ նշանակումները՝

$$s_{km} \equiv \sum_{i=0}^N \omega_i x_i^{k+m}, \quad t_k \equiv \sum_{i=0}^N \omega_i y_i x_i^k, \quad r \equiv \sum_{i=0}^N \omega_i y_i^2 : \quad (5.7.6)$$

Այդ դեպքում

$$\Phi(a) = \sum_{k,m=0}^n s_{km} a_k a_m - 2 \sum_{k=0}^n t_k a_k + r = (Sa, a) - 2(t, a) + r, \quad (5.7.7)$$

որտեղ $S = [s_{km}]_{k,m=0}^n$ սիմետրիկ մատրից է, իսկ $t = [t_0, t_1, \dots, t_n]^T$: Ակնհայտ է, որ $\Phi(a)$ ոչ բացասական և ըստ իր արգումենտների անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիա է:

$\Phi(a)$ ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը գտնելու համար հաշվենք նրա մասնակի ածանցյալները: Ելնելով այդ ֆունկցիայի (5.7.7) արտահայտությունից՝

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = 2 \sum_{m=0}^n s_{km} a_m - 2t_k, \quad k = 0, 1, \dots, n :$$

Վերջին հավասարությունների աջ մասերը հավասարեցնելով զրոյի (տե՛ս [45], էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը), կստանանք

$$\sum_{m=0}^n s_{km} a_m = t_k, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (5.7.8)$$

հավասարումների նորմալ համակարգը, որը կարելի է գրել նաև

$$Sa = t \quad (5.7.9)$$

տեսքով:

Լեմմա 5.7.1 : Նորմալ համակարգի S մատրիցը դրական որոշյալ է:

Ապացույց: Վերցնենք կամայական ոչ զրոյական $a = [a_0, a_1, \dots, a_n]^T$ վեկտոր: Օգտվելով S մատրիցի s_{km} տարրերի համար (5.7.6) արտահայտությունից ունենք

$$\begin{aligned} (Sa, a) &= \sum_{k,m=0}^n s_{km} a_k a_m = \sum_{k,m=0}^n \left(\sum_{i=0}^N \omega_i x_i^{k+m} \right) a_k a_m = \\ &\sum_{i=0}^N \omega_i \left(\sum_{k=0}^n a_k x_i^k \right) \left(\sum_{m=0}^n a_m x_i^m \right) = \sum_{i=0}^N \omega_i P_n^2(x_i) : \end{aligned}$$

Քանի որ $n < N$, ապա $P_n(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$ արժեքները չեն կարող միաժամանակ հավասար լինել զրոյի: Հետևաբար, $(Sa, a) > 0$: \square

Այսպիսով, քանի որ S մատրիցը դրական որոշյալ է, ապա (5.7.8) (կամ (5.7.9)) նորմալ համակարգը միարժեքորեն լուծելի է: Դիցուք $a^* = [a_0^*, a_1^*, \dots, a_n^*]^T$ վեկտորը (5.7.9) համակարգի լուծումն է: Հեշտ է տեսնել, որ a^* -ն $\Phi(a)$ ֆունկցիայի մինիմումի կետն է: Իրոք, a^* -ից տարրեր կամայական $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ վեկտորի համար, ելնելով $\Phi(a)$ ֆունկցիայի (5.7.7) ներկայացումից, կստանանք

$$\begin{aligned} \Phi(a) - \Phi(a^*) &= (Sa, a) - 2(t, a) - (Sa^*, a^*) + 2(t, a^*) \\ &= (Sa, a) - 2(Sa^*, a) - (Sa^*, a^*) + 2(Sa^*, a^*) = \\ &= (Sa, a) - 2(Sa^*, a) + (Sa^*, a^*) = (S(a - a^*), (a - a^*)) > 0 : \end{aligned}$$

Ընդ որում,

$$\Phi_{min} = \Phi(a^*) = -(t, a^*) + r :$$

Այսպիսով,

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k^* x^k$$

բազմանդամը (5.7.1) խնդրի միակ լուծումն է:

Գրենք (5.7.9) հավասարումների նորմալ համակարգը այլ տեսքով: Գրա համար ներմուծենք

$$U = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^n \end{bmatrix} \quad \text{և} \quad D = \begin{bmatrix} \omega_0 & & & \\ & \omega_1 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \omega_N \end{bmatrix}$$

մատրիցները՝ համապատասխանաբար $(N+1) \times (n+1)$ և $(N+1) \times (N+1)$ չափսերի: Հաջող առնելով (5.7.6)-ը՝ կստանանք

$$S = U^T D U, \quad t = U^T D y.$$

որտեղ $y = [y_0, y_1, \dots, y_N]^T$: Դրանով իսկ (5.7.9) համակարգը կգրվի հետևյալ տեսքով.

$$U^T D U a = U^T D y : \quad (5.7.10)$$

Նշենք, որ (5.7.9) նորմալ համակարգի լուծման ժամանակ այստեղ նույնական է ծանրական դաշտում բարդություններ, կապված հաշվողական անկայունության հետ, որոնց մասին խոսվում է 5.4 և 5.6 պարագրաֆներում: Դա բնական է, քանի որ փորրագույն քառակուսիների մեթոդով մոտարկումը, ըստ էության, միջին քառակուսային մոտարկման դիսկրետ նմանակն է: Օրինակ, եթե $\omega_i = 1, i = 0, 1, \dots, N$, ապա $[0, 1]$ հատվածում հանգույցների հավասարաշափ բաշխման դեպքում, այսինքն, եթե $x_i = i/N, i = 0, 1, \dots, N$, համաձայն (5.7.6) բանաձևերի, կունենանք

$$s_{km} = \sum_{i=0}^N x_i^{k+m} \approx N \int_0^1 x^{k+m} dx = N \cdot \frac{1}{k+m+1} :$$

Դրանով իսկ, N -ի աճման հետ զուգընթաց (5.7.9) նորմալ համակարգի S մատրիցը ասիմպոտուրեն (N բազմապատկիշի ճշտությանը) կմոտենա $n+1$ կարգի Հիլբերտի (5.4.9) մատրիցին:

Նորմալ համակարգի լուծման հետ կապված բարդությունները, որոնք առաջանաւում են n -ի մեծ արժեքների դեպքում, կարելի է շրջանցել, եթե օգտագործենք (5.7.5) սկալյար արտադրյալի իմաստով օրբողությանը բազմանդամների համակարգը (տես, օրինակ, [4],[7],[31]): Այդպիսի համակարգի կառուցման մեթոդը համանման է 5.6 պարագրաֆում շարադրված մեթոդին, որը հիմնված է անդրադարձ առնչությունների վրա (տես [31]):

Փորրագույն քառակուսիների մեթոդը գործնականում լայնորեն կիրառվում է փորձարարական տվյալների մշակման համար: Այն դեպքերում, եթե y_i մեծությունները ունեն տարբեր ճշտություն, համապատասխան ω_i կշիռները հաճախ կապում են ε_i չափման ճշտության հետ (օրինակ, վերցնում են $\omega_i = \varepsilon_i^{-2}$): Այդ դեպքում մոտարկող կորը կանցնի ավելի մոտ այն կետերին, որոնց կշիռն ավելի մեծ է:

Խնդիրներ և վարժություններ - 5

1. Ապացուցել, որ $f \in L$ տարրի համար $L_n \subset L$ ենթատարածության մեջ լավագույն մոտարկման տարրերի համախմբությունը ուռուցիկ բազմություն է:
2. Ապացուցել, որ $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ վեկտորների $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$ նորմով \mathbf{R}^n տարածությունը խիստ նորմավորված չէ:
3. $y = \sin x$ ֆունկցիայի համար $[0, \pi/2]$ հատվածում գտնել լավագույն հավասարաշափ մոտարկումը $y = ax$ տեսքի գծային ֆունկցիաների դասում:
4. $y = \cos x$ ֆունկցիայի համար $[0, \pi/2]$ հատվածում գտնել լավագույն հավասարաշափ մոտարկումը $y = ax$ տեսքի գծային ֆունկցիաների դասում:

5. Գտնել լավագույն հավասարաշափ մոտարկման բազմանդամները H_1 -ից հետևյալ ֆունկցիաների համար.

$$\begin{array}{ll} 1) y = x^2, \quad x \in [0, 1], & 2) y = x^3, \quad x \in [0, 1]. \\ 3) y = x^4, \quad x \in [-1, 1], & 4) y = |x|, \quad x \in [-1, 3]. \\ 5) y = 3x^2 + 2x - 1, \quad x \in [-1, 1/3], & 6) y = \sqrt{1 + x^2}, \quad x \in [0, 1] : \end{array}$$

Նշել չերիշեյան ալտերնանսի կետերը:

6. Կառուցել խզվող ֆունկցիայի օրինակ, որի համար լավագույն հավասարաշափ մոտարկման բազմանդամը չի բավարարում ալտերնանսի մասին Զերիշեի թեորեմի պայմանին:

7. Գտնել լավագույն հավասարաշափ մոտարկման բազմանդամները H_2 -ից հետևյալ ֆունկցիաների համար.

$$\begin{array}{ll} 1) y = x^3, \quad x \in [-1, 1], & 2) y = 2x^2 + 3x + 5, \quad x \in [1, 7], \\ 3) y = x^4, \quad x \in [-1, 1], & 4) y = \sin 2x, \quad x \in [0, 2\pi] : \end{array}$$

Նշել չերիշեյան ալտերնանսի կետերը:

8. Կառուցել $f(x) \in C[a, b]$ ֆունկցիա և համապատասխան լավագույն հավասարաշափ մոտարկման բազմանդամ H_1 -ից այնպես, որ ալտերնանսը չպարունակի a և b կետերը:

9. Ապացուցել, որ $f(x) \in C[-1, 1]$ գույգ ֆունկցիայի լավագույն հավասարաշափ մոտարկման բազմանդամը նույնպես գույգ է:

10. Ապացուցել, որ $f(x) \in C[-1, 1]$ կենտ ֆունկցիայի լավագույն հավասարաշափ մոտարկման բազմանդամը նույնպես կենտ է:

11. Գտնել լավագույն հավասարաշափ մոտարկման բազմանդամները H_3 -ից հետևյալ ֆունկցիաների համար.

$$\begin{array}{ll} 1) y = \cos 2x, \quad x \in [0, 2\pi], & 2) y = |x^2 - 7x + 10|, \quad x \in [3, 4], \\ 3) y = e^{x^2}, \quad x \in [-1, 1], & 4) y = 3 \sin^2 10x + |x^2 - 7x + 10|, \quad x \in [3, 4] : \end{array}$$

Նշել չերիշեյան ալտերնանսի կետերը:

12. Բոլոր

$$ax^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$$

տեսքի բազմանդամների մեջ, որտեղ a -ն զրոյից տարբեր տրված թիվ է, գտնել $[-1, 1]$ հատվածում զրոյից ամենաքիչ շեղվող բազմանդամը:

13. Բոլոր $P_n(x) \in H_n$ բազմանդամների մեջ, որոնք $\xi \notin [-1, 1]$ կետում լրիշտում են դարձեցը, գտնել $[-1, 1]$ հատվածում գրույից ամենաքիչ շեղփոյի բազմանդամը:
Պատասխան. $P_n(x) = \eta T_n(x)/T_n(\xi)$, որտեղ $T_n'(x) - 2\pi\delta_{n+1}^2$ բազմանդամն է:
14. $y = \sin 100x$ ֆունկցիայի համար $[0, \pi]$ հատվածում գտնել լավագույն հավասարաշափ մոտարկման բազմանդամ H_{90} -ից:
15. $f(x) = 1/(x + 9)$ ֆունկցիան $[-1, 1]$ հատվածում մոտարկվում է առաջին աստիճանի բազմանդամով հետևյալ նորմալի նորմաներով.
- 1) Թեյլորի շարքի հատվածը $x = 0$ կետում,
 - 2) ինտերպոլացիա $x_0 = -2^{-1/2}$, $x_1 = 2^{-1/2}$ օպտիմալ հանգույցներով,
 - 3) լավագույն հավասարաշափ մոտարկում:
- Կառուցել այդ բազմանդամները և գնահատել սխալանքների նորմերը $C[-1, 1]$ տարածությունում:
16. Գտնել լավագույն միջին քառակուսային մոտարկման բազմանդամները H_1 -ից հետևյալ ֆունկցիաների համար.
- 1) $y = |x|$, $x \in [-1, 1]$,
 - 2) $y = x^3$, $x \in [-1, 1]$,
 - 3) $y = 1/x$, $x \in [1, 2]$,
 - 4) $y = \ln(1 + x)$, $x \in [0, 1]$:
- Գնահատել միջին քառակուսային շեղումները:
17. Գտնել լավագույն միջին քառակուսային մոտարկման բազմանդամները H_2 -ից հետևյալ ֆունկցիաների համար.
- 1) $y = x^3$, $x \in [-1, 1]$,
 - 2) $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$:
- Գնահատել միջին քառակուսային շեղումները:
18. $y = x^3$ ֆունկցիայի համար $[0, 2]$ հաստվածում գտնել լավագույն միջին քառակուսային մոտարկման բազմանդամ H_3 -ից: Գնահատել միջին քառակուսային շեղումը:
19. $f(x) = \sin x$ ֆունկցիայի համար $L_2[0, \pi/2]$ տարածությունում գտնել լավագույն միջին քառակուսային մոտարկումը $y = ax$ տեսքի ֆունկցիաների մեջ:
20. $f(x) = \cos x$ ֆունկցիայի համար $L_2[0, \pi/2]$ տարածությունում գտնել լավագույն միջին քառակուսային մոտարկումը $y = ax$ տեսքի ֆունկցիաների մեջ:
21. Ապացուցել, որ $f(x) \in L_2[-1, 1]$ գույգ ֆունկցիայի լավագույն միջին քառակուսային մոտարկման բազմանդամը նույնպես գույգ է:
22. Ապացուցել, որ $f(x) \in L_2[-1, 1]$ կենտ ֆունկցիայի լավագույն միջին քառակուսային մոտարկման բազմանդամը նույնպես կենտ է:

23. $f(x) = e^{-x}$ ֆունկցիան $[-1, 1]$ հատվածում մոտարկվում է առաջին աստիճանի բազմանդամով հետևյալ եղանակներով.

1) Թեյլորի շարքի հատվածը $x = 0$ կետում.

2) իմտերպոլացիա $x_0 = -1, x_1 = 1$ հանգույցներով,

3) իմտերպոլացիա $x_0 = -2^{-1/2}, x_1 = 2^{-1/2}$ օպտիմալ հանգույցներով,

4) լավագույն հավասարաշափ մոտարկում,

5) լավագույն միջին քառակուսային մոտարկում $L_2[-1, 1]$ տարածությունում:

Կառուցել այդ քավմանդամները և գնահատել նորմերի սխալանքները $C[-1, 1]$ տարածությունում:

24. Կիրառելով փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը $y = \sin x$ ֆունկցիայի համար և օգտվելով նրա արժեքներից $-1, -0.5, 0, 0.5, 1$ կետերում գտնել լավագույն մոտարկումը H_3 -ից:

25. Կիրառելով փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը $y = \frac{1}{1+x}$ ֆունկցիայի համար և օգտվելով նրա արժեքներից $x = 0, 1, 2, \dots, 8$ կետերում, գտնել լավագույն մոտարկումը H_4 -ից:

26. Հարթության վրա տրված են իրարից տարբեր արացիսներով $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^N$ կետեր: Որոշել ըստ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի $y_i, i = 0, 1, \dots, N$ արժեքները մոտարկող $y = ax + b$ ուղիղ գծի a և b պարամետրերը: Այնուհետև, դիցուք x^* -ը և y^* -ը նշված կետերի կոորդինատների միջին արժեքներն են, որոնք հաշվվում են

$$x^* = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N x_i \quad \text{և} \quad y^* = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N y_i$$

բանաձևերով: Ապացուցել, որ (x^*, y^*) կետը գտնվում է $y = ax + b$ ուղիղ գծի վրա:

27. Դիցուք հարթության վրա տրված են իրարից տարբեր արացիսներով $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^N$ կետեր: Որոշել ըստ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի $y_i, i = 0, 1, \dots, N$ արժեքները մոտարկող $y = ax^n$ կորի a պարամետրը:

28. Դիցուք հարթության վրա տրված են իրարից տարբեր արացիսներով $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^N$ կետերը: Որոշել ըստ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի $y_i, i = 0, 1, \dots, N$ արժեքները մոտարկող հետևյալ կորերի a և b պարամետրերը.

$$1) y = ax^b, \quad 2) y = ae^{bx}, \quad 3) y = a + \frac{b}{x}, \quad 4) y = \frac{1}{a + bx} :$$

Գլուխ 6

ԹՎԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄ

6.1 Քառակուսացման բանաձևեր

Դիտարկենք $[a, b]$ հատվածի վրա անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիայի

$$I(f) \equiv \int_a^b f(x) dx \quad (6.1.1)$$

որոշյալ ինտեգրալի հաշվման խնդիրը: Մաթեմատիկական անալիզի դասընթացում արտածվում է *Նյուտոն-Լայբնիցի հայտնի*

$$I(f) = F(b) - F(a) \quad (6.1.2)$$

բանաձևը, որտեղ $F(x)$ -ը $f(x)$ ֆունկցիայի նախնականն է (տե՛ս, օրինակ, [45]): Ցավոք, գործնականում միշտ չէ, որ հնարավոր է գտնել $F(x)$ նախնական ֆունկցիան: Օրինակ, (6.1.2) բանաձևը պիտանի չէ

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int_a^b \frac{dx}{\ln x}, \quad \int_a^b e^{-x^2} dx$$

ինտեգրալների հաշվման համար: Բացի դրանից, որոշ դեպքերում ենթայնտեղրալային $f(x)$ ֆունկցիան չի տրվում բացահայտ տեսքով, այլ հայտնի են միայն նրա արժեքները $[a, b]$ հատվածի որոշ կետերում: Այդ դեպքում նախնականի որոշման հարցն ընդհանրապես կորցնում է իր իմաստը:

Վերը նշված պատճառներով մեծ կիրառական նշանակություն ունեն ինտեգրալների հաշվման մոտավոր մեթոդները: Այդպիսի մեթոդների թվում ամենից հաճախ օգտագործվում են

$$I(f) \approx Q_n(f) \equiv \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) \quad (6.1.3)$$

տեսքի թվային ինտեգրման բանաձևերը, որոնք կոչվում են **քառակուսացման բանաձևեր**: $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ կետերը կոչվում են **քառակուսացման բանաձևի հանգույցներ**, իսկ A_0, A_1, \dots, A_n թվերը՝ **քառակուսացման բանաձևի գործակիցներ**:

Նշենք, որ (6.1.3) տեսքի հաշվարկային բանաձևերի օգտագործումը լիովին համաձայնեցվում է (6.1.1) ինտեգրալի սահմանման հետ՝ որպես ինտեգրալային գումարների հաջորդականության սահման (տես օրինակ, [45]):

Դիտողություն 6.1.1 : *Մաթեմատիկայում քառակուսացում տերմինը ճշանակում է տրված պատկերի մակերեսին հավասարամեծ քառակուսու կառուցումը: Ինչպես հայտնի է, (6.1.1) որոշյալ ինտեգրալը հավասար է այն կորագիծ սեղանի մակերեսին, որը սահմանափակված է $y = f(x)$ կորով և $y = 0$, $x = a$, $x = b$ ուղիղներով (տես օրինակ, [45]):*

Քառակուսացման (6.1.3) բանաձևի սխալանք կոչվում է

$$R_n(f) \equiv I(f) - Q_n(f) \quad (6.1.4)$$

տարրերությունը:

Սերմուծենք ևս մեկ գաղափար:

Սահմանում 6.1.1 : Կասենք, որ (6.1.3) քառակուսացման բանաձևը **ճշգրիտ** է ֆունկցիաների որոշ \mathcal{K} դասում, եթե

$$R_n(f) = 0 \quad \forall f(x) \in \mathcal{K} : \quad (6.1.5)$$

Ինչպես արդեն գիտենք, հանրահաշվական բազմանդամներով բավականաչափ լավ կարելի է մոտարկել անընդիմա ֆունկցիաները (ինտերպոլացիա, հավասարաչափ և միջին քառակուսային մոտարկումներ): Ուստի, որպես քառակուսացման բանաձևի բնութագրիչ, կդիտարկենք ամենաբարձր կարգի այն հանրահաշվական բազմանդամները, որոնց համար այդ բանաձևը ճշգրիտ է: Որպես հիմք կարող են ծառայել հետևյալ դատողությունները:

Դիցուք (6.1.3) քառակուսացման բանաձևը ճշգրիտ է իրական գործակիցներով ու աստիճանից ոչ բարձր հանրահաշվական բազմանդամների H_m դասում: Այդ դեպքում ցանկացած $P_m(x) \in H_m$ բազմանդամի համար, համաձայն (6.1.5) պայմանի, ճիշտ է

$$R_n(f) = R_n(f - P_m) + R_n(P_m) = R_n(f - P_m) \quad (6.1.6)$$

հավասարությունը: Կամայական $\Phi(x) \in C[a, b]$ ֆունկցիայի համար ունենք՝

$$\begin{aligned} |R_n(\Phi)| &= |I(\Phi) - Q_n(\Phi)| \leq |I(\Phi)| + |Q_n(\Phi)| \leq \int_a^b |\Phi(x)| dx + \sum_{k=0}^n |A_k| |\Phi(x_k)| \\ &\leq \left[(b-a) + \sum_{k=0}^n |A_k| \right] \max_{a \leq x \leq b} |\Phi(x)| : \end{aligned}$$

Այսպիսով,

$$|R_n(\Phi)| \leq C_n \|\Phi\|, \quad (6.1.7)$$

որտեղ $\|\cdot\|$ -ը (5.2.1) նորմն է $C[a, b]$ տարածության մեջ, իսկ

$$C_n \equiv (b - a) + \sum_{k=0}^n |A_k| : \quad (6.1.8)$$

Այնուհետև, (6.1.6) և (6.1.7)-ից ստանում ենք

$$|R_n(f)| = |R_n(f - P_m)| \leq C_n \|f - P_m\| \quad \forall P_m(x) \in H_m$$

անհավասարությունը: Այստեղից հետևում է

$$|R_n(f)| \leq C_n \rho(f, H_m) \quad (6.1.9)$$

գնահատականը, որտեղ $\rho(f, H_m)$ մեծությունը $f(x)$ ֆունկցիայի հեռավորությունն է $H_m \subset C[a, b]$ ենթատարածությունից (տես (5.1.1)): Իսկ քանի որ $\rho(f, H_m)$ մեծությունը մոնուուն ձգուում է զրոյի m -ի՝ մեծացմանը զուգընթաց (տես (5.2.6)), ապա որոշ վերապահումով կարելի է համարել, որ բառակուսացման բանաձևի սխալանքը այնքան ավելի փոփք է, որքան որ բարձր է հանրահաշվական բազմանդամների աստիճանը, որոնց համար այդ բանաձևը ճշգրիտ է: Վերապահումը կայանում է նրանում, որ (6.1.8)-ի C_n մեծությունը կախված է կոնկրետ բառակուսացման բանաձևից և, խիստ ասած, կարող է նաև աճել m -ի աճմանը զուգընթաց: Սակայն զործնականում օգտագործվող բառակուսացման բանաձևների մեծամասնության համար և մասնավորապես մեր դասընթացում դիտարկվելիք բանաձևների համար նկատվում է նշված համապատասխանությունը բանաձևի սխալանքի և որոշակի աստիճանի բազմանդամների դասում նրա ճշգրտության միջև, ինչի մասին խոսվել էր վերև:

6.2 Ուղղանկյունների և սեղանների բանաձևերը

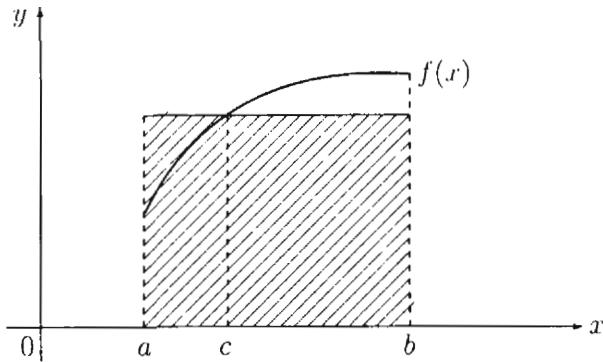
Պարզագույն բառակուսացման բանաձևներ կարելի է ստանալ որոշյալ ինստրումենտարական համապատասխան իմաստից բխող ակնառու դատողություններից:

6.2.1 Ուղղանկյունների բանաձևերը

Դիտարկենք

$$I(f) \equiv \int_a^b f(x) dx \approx Q_R(f) \equiv (b - a)f(c) \quad (6.2.1)$$

տեսքի բառակուսացման բանաձևը, որտեղ c -ն $[a, b]$ հատվածի կետ է: Երկրաչափորեն դա նշանակում է, որ կորագիծ սեղանի մակերեսը, որը հավասար է $I(f)$ -ի, փոխարինվում է $b - a$ հիմքով և $f(c)$ բարձրությամբ ուղղանկյան մակերեսով (նկ. 6.2.1): Այդ պատճառով (6.2.1) բանաձևն անվանում են ուղղանկյունների բանաձև:



Նկ. 6.2.1 Ուղղանկյունների բանաձևի երկրաչափական մեկնաբանությունը

Գործնականում, որպես կանոն, օգտագործվում են (6.2.1) բանաձևի հետևյալ մասնավոր դեպքերը:

- Զախ ուղղանկյունների բանաձևը ($c = a$) .

$$I(f) \approx Q_R^-(f) \equiv (b - a)f(a) : \quad (6.2.2)$$

- Աջ ուղղանկյունների բանաձևը ($c = b$) .

$$I(f) \approx Q_R^+(f) \equiv (b - a)f(b) : \quad (6.2.3)$$

- Միջին ուղղանկյունների բանաձևը ($c = (a + b)/2$) .

$$I(f) \approx Q_R^\circ(f) \equiv (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) : \quad (6.2.4)$$

Այժմ դիտարկենք ուղղանկյունների բառակուսացման բանաձևերի սխալանքների զնահատման հարցը: Սկսենք ձախ ուղղանկյունների բանաձևից: Ենթադրենք, որ $f(x) \in C^1[a, b]$: Դիցուք

$$R_R^-(f) \equiv I(f) - Q_R^-(f) : \quad (6.2.5)$$

Սահմանենք

$$\Phi(\tau) \equiv \int_a^{a+\tau} f(x) dx - \tau f(a), \quad 0 \leq \tau \leq \Delta$$

ֆունկցիան, որտեղ $\Delta \equiv b - a$: Ակնհայտ է, որ $\Phi(\Delta) = R_R^-(f)$ և $\Phi(0) = 0$: Ներմուծենք

$$F(\tau) \equiv \Phi(\tau) - \left(\frac{\tau}{\Delta}\right)^2 \Phi(\Delta). \quad 0 \leq \tau \leq \Delta$$

օժանդակ ֆունկցիան: Հեշտ է տեսնել, որ $F(0) = F(\Delta) = 0$: Այդ դեպքում, ըստ Ռոլլի թեորեմի (տես, օրինակ, [45]), կգտնվի այնպիսի $\tau_1 \in (0, \Delta)$, որ $F'(\tau_1) = 0$: Հաշվենք $F(\tau)$ ֆունկցիայի ածանցյալը: Ունենք՝

$$F'(\tau) = \Phi'(\tau) - \frac{2\tau}{\Delta^2} \Phi(\Delta) = f(a + \tau) - f(a) - \frac{2\tau}{\Delta^2} \Phi(\Delta) :$$

Վերջին հավասարությունում վերցնելով $\tau = \tau_1$ ՝ կստանանք

$$f(a + \tau_1) - f(a) - \frac{2\tau_1}{\Delta^2} \Phi(\Delta) = 0 :$$

Այստեղից, կիրառելով Լագրանժի միջին արժեքի մասին բեռնեմը (տես, օրինակ, [45]), կստանանք

$$\tau_1 \left[f'(\xi) - \frac{2}{\Delta^2} \Phi(\Delta) \right] = 0, \quad \xi \in (a, a + \tau_1) : \quad .$$

Հետևաբար՝

$$\Phi(\Delta) = \frac{f'(\xi)}{2} \Delta^2 :$$

Այսպիսով, զայխ ենք

$$R_{\mathcal{R}}^-(f) = \frac{f'(\xi)}{2} (b-a)^2, \quad \xi \in (a, b) \quad (6.2.6)$$

արտահայտությանը (6.2.2) ծախս ուղղանկյունների բանաձևի սխալանքի համար: Այստեղից հեշտությամբ հետևում է

$$|R_{\mathcal{R}}^-(f)| \leq \frac{M_1}{2} (b-a)^2, \quad M_1 \equiv \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \quad (6.2.7)$$

գնահատականը:

Նման եղանակով գնահատվում է աջ ուղղանկյունների բանաձևի

$$R_{\mathcal{R}}^+(f) \equiv I(f) - Q_{\mathcal{R}}^+(f) \quad (6.2.8)$$

սխալանքը: Այն հետևյալն է՝

$$R_{\mathcal{R}}^+(f) = -\frac{f'(\eta)}{2} (b-a)^2, \quad \eta \in (a, b) : \quad (6.2.9)$$

Այս արտահայտության արտածումը թողնում ենք ընթերցողին որպես վարժություն: Նշենք միայն, որ այստեղ պետք է օգտագործել

$$F(\tau) \equiv \Phi(\tau) - \left(\frac{\tau}{\Delta} \right)^2 \Phi(\Delta), \quad 0 \leq \tau \leq \Delta$$

օժանդակ ֆունկցիան, որտեղ

$$\Phi(\tau) \equiv \int_{b-\tau}^b f(x) dx - \tau f(b)$$

և $\Delta \equiv b-a$: (6.2.9)-ից հետևում է

$$|R_{\mathcal{R}}^+(f)| \leq \frac{M_1}{2} (b-a)^2, \quad M_1 \equiv \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \quad (6.2.10)$$

գնահատականը, որը համանման է (6.2.7) գնահատականին:

Ինչպես երևում է (6.2.7) և (6.2.10) գնահատականներից, ձևին և ազ ուղղանկյունների բանաձևերը ճշգրիտ են զրո աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների H_0 դասում, այսինքն՝ հաստատում ֆունկցիաների դասում:

Արտածենք այժմ արտահայտություն (6.2.4) միջին ուղղանկյունների բանաձևի

$$R_{\mathcal{R}}^o(f) \equiv I(f) - Q_{\mathcal{R}}^o(f) \quad (6.2.11)$$

սխալանքի համար: Ենթադրենք, որ $f(x) \in C^2[a, b]$: Սահմանենք

$$\Phi(\tau) \equiv \int_{c-\tau}^{c+\tau} f(x) dx - 2\tau f(c). \quad 0 \leq \tau \leq \Delta$$

Ֆունկցիան, որտեղ $c = (a + b)/2$ և $\Delta \equiv (b - a)/2$: Ակնհայտ է, որ $\Phi(\Delta) = R_{\mathcal{R}}^o(f)$ և $\Phi(0) = 0$: Այնուհետև ներմուծենք

$$F(\tau) \equiv \Phi(\tau) - \left(\frac{\tau}{\Delta}\right)^3 \Phi(\Delta). \quad 0 \leq \tau \leq \Delta$$

օժանդակ ֆունկցիան: Պարզ է, որ $F(0) = F(\Delta) = 0$: Ըստ Ռոլլի թեորեմի՝ գոյություն ունի այնպիսի $\tau_1 \in (0, \Delta)$, որ $F'(\tau_1) = 0$: Հաշվենք $F(\tau)$ ֆունկցիայի ածանցյալը

$$F'(\tau) = \Phi'(\tau) - \frac{3\tau^2}{\Delta^3} \Phi(\Delta) = f(c + \tau) + f(c - \tau) - 2f(c) - \frac{3\tau^2}{\Delta^3} \Phi(\Delta) :$$

Հեշտ է տեսնել, որ $F'(0) = 0$: Ուստի, կրկին համաձայն Ռոլլի թեորեմի, կգտնվի այնպիսի $\tau_2 \in (0, \tau_1)$, որ $F''(\tau_2) = 0$: Հաշվենք $F(\tau)$ ֆունկցիայի երկրորդ ածանցյալը

$$F''(\tau) = f'(c + \tau) - f'(c - \tau) - \frac{6\tau}{\Delta^3} \Phi(\Delta) :$$

Վերջին հավասարությունում վերցնելով $\tau = \tau_2$ ՝ կստանանք

$$f'(c + \tau_2) - f'(c - \tau_2) - \frac{6\tau_2}{\Delta^3} \Phi(\Delta) = 0 :$$

Այստեղից, կիրառելով Լազրանժի միջին արժեքի մասին թեորեմը, կունենանք

$$2\tau_2 \left[f''(\mu) - \frac{3}{\Delta^3} \Phi(\Delta) \right] = 0, \quad \mu \in (c - \tau_2, c + \tau_2)$$

հավասարությունը: Հետևաբար՝

$$\Phi(\Delta) = \frac{f''(\mu)}{3} \Delta^3 :$$

Ազ մասում տեղադրելով Δ -ի փոխարեն $(b - a)/2$, կստանանք

$$R_{\mathcal{R}}^o(f) = \frac{f''(\mu)}{24} (b - a)^3, \quad \mu \in (a, b) \quad (6.2.12)$$

արտահայտությունը (6.2.4) միջին ուղղանկյունների բանաձևի (6.2.11) սխալանքի համար: Այստեղից հեշտությամբ հետևում է հետևյալ գնահատականը.

$$|R_R^o(f)| \leq \frac{M_2}{24} (b-a)^3, \quad M_2 \equiv \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| : \quad (6.2.13)$$

Վերջին գնահատականից հետևում է, որ միջին ուղղանկյունների բանաձևը ճշգրիտ է առաջին կարգի համրահաշվական բազմանդամների H_1 դասում, այսինքն՝ գծային ֆունկցիաների դասում:

Ուղղանկյունների բանաձևների սխալանքները սովորաբար բավականաշափ մեծ են: Այդ սխալանքները կարելի է եապես փորբացնել, եթե քառակուսացման բանաձևները կիրառենք ոչ թե ամբողջ $[a, b]$ հատվածի վրա, այլ այն նախապես տրոհենք մասերի:

Բաժանենք $[a, b]$ հատվածը n հավասար մասերի

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{b-a}{n} \quad (6.2.14)$$

տրոհման կետերով: Համապատասխանաբար, $I(f)$ ինտեգրալը ներկայացնենք

$$I(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \quad (6.2.15)$$

ինտեգրալների գումարի տեսքով: Կառուցելով յուրաքանչյուր $[x_k, x_{k+1}]$ հատվածում, որտեղ $k = 0, 1, \dots, n-1$, ճախ, աջ կամ միջին ուղղանկյունների բանաձևերը, և գումարելով ըստ բոլոր հատվածների, կստանանք հետևյալ քառակուսացման բանաձևերը.

- Զախ ուղղանկյունների ընդհանրացված բանաձևը.

$$I(f) \approx Q_R^-(f) \equiv h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) : \quad (6.2.16)$$

- Աջ ուղղանկյունների ընդհանրացված բանաձևը.

$$I(f) \approx Q_R^+(f) \equiv h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) : \quad (6.2.17)$$

- Միջին ուղղանկյունների ընդհանրացված բանաձևը.

$$I(f) \approx Q_R^o(f) \equiv h \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k), \quad c_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} : \quad (6.2.18)$$

Ընդհանրացված բանաձևների սխալանքների գնահատականները ստանալիս մենք բազմիցս կօգտագործենք հետևյալ պնդումը:

Լեմմա 6.2.1 : Դիցուք $f(x) \in C[a, b]$ և $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \in [a, b]$ կամայական կետեր են: Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի $\xi \in [a, b]$ կետ, որ

$$\frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots + f(\xi_m)}{m} = f(\xi) :$$

Պնդումը հեշտությամբ բխում է

$$\min_{a \leq x \leq b} f(x) \leq \frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots + f(\xi_m)}{m} \leq \max_{a \leq x \leq b} f(x)$$

ակնհայտ անհավասարություններից և անընդհատ ֆունկցիայի միջանկյալ արժեքների մասին Բոլցանո-Կոչու թեորեմից (տե՛ս, օրինակ, [45]):

Գնահատենք ձախ ուղղանկյունների ընդհանրացված բանաձևի

$$\mathbf{R}_{\mathcal{R}}^-(f) \equiv I(f) - \mathbf{Q}_{\mathcal{R}}^-(f) \quad (6.2.19)$$

սխալանքը: Ելնելով (6.2.15) և (6.2.16)-ից՝ սխալանքը գրենք հետևյալ տեսքով.

$$\mathbf{R}_{\mathcal{R}}^-(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - hf(x_k) \right) :$$

Զախ ուղղանկյունների սովորական բանաձևի սխալանքի համար վերն ստացված (6.2.6) արտահայտությունից ունենք

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - hf(x_k) = \frac{f'(\xi_k)}{2} h^2, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

որտեղ $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$: Հետևաբար՝

$$\mathbf{R}_{\mathcal{R}}^-(f) = \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f'(\xi_k) :$$

Այնուհետև, կիրառելով 6.2.1 լեմման, կստանանք

$$\mathbf{R}_{\mathcal{R}}^-(f) = \frac{h^2}{2} nf'(\xi) = \frac{f'(\xi)}{2} (b-a)h, \quad \xi \in (a, b)$$

(նշենք, որ $nh = b - a$, համաձայն $[a, b]$ հատվածի (6.2.14) տրոհմանը): Այսպիսով,

$$\mathbf{R}_{\mathcal{R}}^-(f) = \frac{f'(\xi)}{2} (b-a)h, \quad \xi \in (a, b) : \quad (6.2.20)$$

Այստեղից ստանում ենք սխալանքի գնահատականը՝

$$|\mathbf{R}_{\mathcal{R}}^-(f)| \leq \frac{M_1}{2} (b-a)h, \quad M_1 \equiv \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| : \quad (6.2.21)$$

Ծիշտ նոյն կերպ արտածվում են արտահայտություններ (6.2.17) և (6.2.18) բառակուսացման բանաձևերի

$$\mathbf{R}_{\mathcal{R}}^+(f) \equiv I(f) - \mathbf{Q}_{\mathcal{R}}^+(f) \quad (6.2.22)$$

և

$$\mathbf{R}_{\mathcal{R}}^\circ(f) \equiv I(f) - \mathbf{Q}_{\mathcal{R}}^\circ(f) \quad (6.2.23)$$

սխալանքների համար: Դրանք են՝

$$\mathbf{R}_{\mathcal{R}}^+(f) = -\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)h, \quad \eta \in (a, b) \quad (6.2.24)$$

և

$$\mathbf{R}_{\mathcal{R}}^\circ(f) = \frac{f''(\mu)}{24}(b-a)h^2, \quad \mu \in (a, b) : \quad (6.2.25)$$

Այստեղից ակնհայտորեն հետևում են

$$|\mathbf{R}_{\mathcal{R}}^+(f)| \leq \frac{M_1}{2}(b-a)h, \quad M_1 \equiv \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \quad (6.2.26)$$

և

$$|\mathbf{R}_{\mathcal{R}}^\circ(f)| \leq \frac{M_2}{24}(b-a)h^2, \quad M_2 \equiv \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \quad (6.2.27)$$

գնահատականները:

Օրինակ 6.2.1 : Գնահատել հանգույցների քանակը միջին ուղղանկյունների ընդհանրացված բանաձևում, որը բավարար է

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

ինտեգրալը 10^{-4} ճշտությամբ հաշվելու համար:

Համաձայն (6.2.27) գնահատականի՝ n թիվը կարելի է որոշել

$$\frac{M_2}{24} h^2 = \frac{M_2}{24 n^2} < 10^{-4} \quad (6.2.28)$$

պայմանից: Հաշվենք M_2 մեծությունը: Ունենք՝

$$(e^{-x^2})'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2} :$$

Այստեղից գտնում ենք $M_2 = 2$: Այսպիսով, (6.2.28)-ից հետևում է, որ (6.2.18) բանաձևում բավարար է վերցնել

$$n > \frac{50\sqrt{3}}{3} \approx 28.87,$$

այսինքն՝ $n = 29$: Դրանով իսկ կստանանք ինտեգրալի 0.74686 մոտավոր արժեքը պահանջվող ճշտությամբ: ♣

Եթե $f'(x)$ ածանցյալը պահպանում է նշանը (a, b) միջակայրում, ապա ձախ և աջ ուղանկյունների բանաձևերը տակս են $I(f)$ ինտեգրալի երկողմանի մոտարկումներ: Իրոք, եթե, օրինակ, $f'(x) > 0$, ապա, ինչպես հետևում է (6.2.20) և (6.2.24) արտահայտություններից, $R_{\mathcal{R}}^-(f) > 0$ և $R_{\mathcal{R}}^+(f) < 0$: Ուստի, համաձայն (6.2.19) և (6.2.22)-ի, ունենք

$$Q_{\mathcal{R}}^- < I(f) < Q_{\mathcal{R}}^+ : \quad (6.2.29)$$

Այսպիսով, (6.2.16) բանաձևը տակս է ինտեգրալի մոտավոր արժեքը պակասորդով, իսկ (6.2.17)-ը՝ հավելորդով: Այդ դեպքում կարող ենք օգտագործել ուղանկյունների համակցված բանաձևը.

$$I(f) \approx Q_{\mathcal{R}}^*(f) \equiv \frac{Q_{\mathcal{R}}^-(f) + Q_{\mathcal{R}}^+(f)}{2} : \quad (6.2.30)$$

Ընդ որում, (6.2.29) և (6.2.30)-ից հեշտ է ստանալ, որ

$$|I(f) - Q_{\mathcal{R}}^*(f)| < \frac{Q_{\mathcal{R}}^+(f) - Q_{\mathcal{R}}^-(f)}{2} : \quad (6.2.31)$$

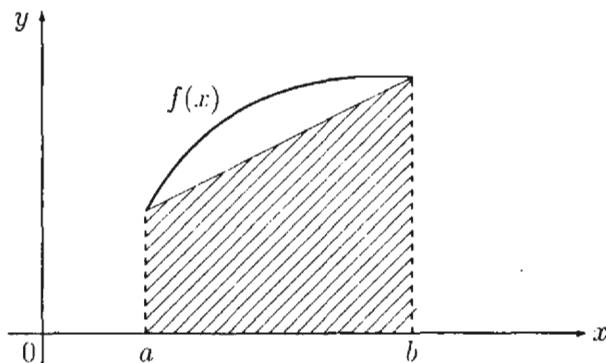
Դրանով իսկ ուղանկյունների համակցված (6.2.30) բանաձևի սխալանքը գնահատվում է հենց ինտեգրալի մոտավոր արժեքների միջոցով:

6.2.2 Սեղանների բանաձևը

Թվային ինտեգրման այդ բանաձևն ունի հետևյալ տեսքը.

$$I(f) \equiv \int_a^b f(x) dx \approx Q_T(f) \equiv \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) : \quad (6.2.32)$$

Այստեղ $I(f)$ ինտեգրալի արժեքը մոտավորապես փոխարինվում է նկ. 6.2.2-ում պատկերված զծապատված սեղանի մակերեսով:



Նկ. 6.2.2 Սեղանների բանաձևի երկրաչափական մեկնաբանությունը

Գնահատենք սեղանների բանաձևի

$$R_T(f) \equiv I(f) - Q_T(f) \quad (6.2.33)$$

սխալանքը, ենթադրելով, որ $f(x) \in C^2[a, b]$: Սահմանենք

$$\Phi(\tau) \equiv \int_{c-\tau}^{c+\tau} f(x) dx - \tau [f(c-\tau) + f(c+\tau)], \quad 0 \leq \tau \leq \Delta.$$

ֆունկցիան, որտեղ $c = (a+b)/2$ և $\Delta \equiv (b-a)/2$: Ակնհայտ է, որ $\Phi(\Delta) = R_T(f)$ և $\Phi(0) = 0$: Ներմուծենք հետևյալ օժանդակ ֆունկցիան.

$$F(\tau) \equiv \Phi(\tau) - \left(\frac{\tau}{\Delta}\right)^3 \Phi(\Delta), \quad 0 \leq \tau \leq \Delta :$$

Պարզ է, որ $F(0) = F(\Delta) = 0$: Հետևաբար, համաձայն Ռոլի թեորեմի, կգտնվի այնպիսի $\tau_1 \in (0, \Delta)$, որ $F'(\tau_1) = 0$: $F(\tau)$ ֆունկցիայի ածանցյալն է:

$$F'(\tau) = \Phi'(\tau) - \frac{3\tau^2}{\Delta^3} \Phi(\Delta) = -\tau [f'(c+\tau) - f'(c-\tau)] - \frac{3\tau^2}{\Delta^3} \Phi(\Delta) :$$

Վերցնելով վերջին հավասարությունում $\tau = \tau_1$, կստանանք

$$\tau_1 [f'(c+\tau_1) - f'(c-\tau_1)] + \frac{3\tau_1^2}{\Delta^3} \Phi(\Delta) = 0 :$$

Այստեղից, կիրառելով Լագրանժի միջին արժեքի մասին թեորեմը, կունենանք՝

$$2\tau_1^2 \left[f''(\xi) + \frac{3}{2\Delta^3} \Phi(\Delta) \right] = 0, \quad \xi \in (c-\tau_1, c+\tau_1) :$$

Այսպիսով,

$$\Phi(\Delta) = -\frac{2}{3} f''(\xi) \Delta^3 :$$

Ազ մասում տեղադրելով Δ -ի փոխարեն $(b-a)/2$ -ը՝ կստանանք

$$R_T(f) = -\frac{f''(\xi)}{12} (b-a)^3, \quad \xi \in (a, b) \quad (6.2.34)$$

արտահայտությունը սեղանների բանաձևի (6.2.33) սխալանքի համար: Այստեղից ստանում ենք հետևյալ գնահատականը.

$$|R_T(f)| \leq \frac{M_2}{12} (b-a)^3, \quad M_2 \equiv \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| : \quad (6.2.35)$$

Ինչպես հետևում է այդ գնահատականից, սեղանների բանաձևը ճշգրիտ է առաջին աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների H_1 դասում:

Այժմ կառուցենք ընդհանրացված բանաձևը: Դիցուք ունենք $[a, b]$ հատվածի (6.2.14) տրոհումը n հավասար մասերի: Յուրաքանչյուր մասը՝ $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$ հատվածում կիրառենք սեղանների (6.2.32) բանաձևը:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_k) + f(x_{k+1})] :$$

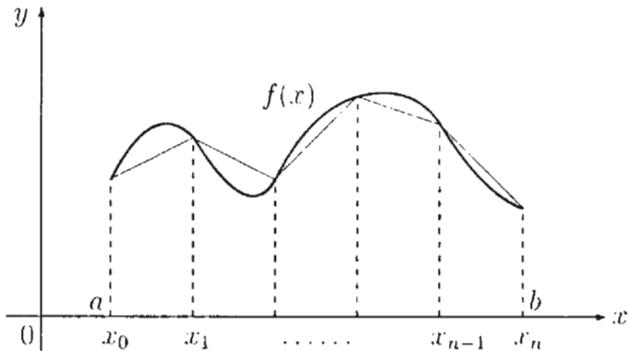
Դրանով իսկ (6.2.15)-ից կստանանք քառակուսացման բանաձևները:

$$I(f) \approx \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})] \quad (6.2.36)$$

Կամ

$$I(f) \approx Q_T(f) \equiv \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(x_n) \right], \quad (6.2.37)$$

որը կրում է սեղանների ընդհանրացված բանաձևները (նկ. 6.2.3):



Նկ. 6.2.3 Սեղանների ընդհանրացված բանաձևի երկրաչափական մեկնաբանությունը

Արտածենք սեղանների ընդհանրացված բանաձևի:

$$R_T(f) \equiv I(f) - Q_T(f) \quad (6.2.38)$$

սխալանքի գնահատականը: Ելնելով (6.2.15) և (6.2.36)-ից՝ սխալանքը գրենք հետևյալ տեսքով.

$$R_T(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - \frac{h}{2} (f(x_k) + f(x_{k+1})) \right) :$$

Համաձայն սեղանների սովորական բանաձևի սխալանքի համար (6.2.34) արտահայտության՝ ունենք

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - \frac{h}{2} [f(x_k) + f(x_{k+1})] = -\frac{f''(\xi_k)}{12} h^3, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

որտեղ $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$: Այնուհետև, օգտվելով 6.2.1 լեմմայից, կստանանք

$$R_T(f) = -\frac{h^3}{12} \sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k) = -\frac{h^3}{12} n f''(\xi) = -\frac{f''(\xi)}{12} (b-a) h^2,$$

որտեղ $\xi \in (a, b)$: Այսպիսով,

$$R_T(f) = -\frac{f''(\xi)}{12} (b-a) h^2, \quad \xi \in (a, b) : \quad (6.2.39)$$

Այստեղից հետևում է

$$|R_T(f)| \leq \frac{M_2}{12} (b-a) h^2, \quad M_2 \equiv \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \quad (6.2.40)$$

գնահատականը:

6.2.3 Ուղղանկյունների և սեղանների համակցված բանաձևեր

Եթե $f''(x)$ երկրորդ կարգի ածանցյալը չի փոխում իր նշանը (a, b) միջակայքում, ապա միջին ուղղանկյունների և սեղանների բանաձևերը տալիս են $I(f)$ ինտեգրալի երկողմանի մոտարկումներ: Դիցուք, օրինակ, $f''(x) > 0$: Այդ դեպքում, համաձայն (6.2.25) և (6.2.39)-ի, համապատասխանաբար $R_R^\circ(f) > 0$ և $R_T(f) < 0$: Ուստի (6.2.23) և (6.2.38)-ից հետևում է, որ

$$Q_R^\circ(f) < I(f) < Q_T(f) : \quad (6.2.41)$$

Այդ իրավիճակում կարելի է օգտագործել ուղղանկյունների և սեղանների համակցված հետևյալ բանաձևերը.

$$I(f) \approx Q_{RT}(f) \equiv \frac{Q_R^\circ(f) + Q_T(f)}{2} : \quad (6.2.42)$$

Այս բանաձևը լավ է նրանով, որ

$$|I(f) - Q_{RT}(f)| < \frac{Q_T(f) - Q_R^\circ(f)}{2}. \quad (6.2.43)$$

այսինքն՝ բանաձևի սխալանքը գնահատվում է ինտեգրալի մոտավոր արժեքների միջոցով:

Ուղղանկյունների և սեղանների բանաձևերի հիման վրա կարելի է ստանալ ինտեգրալների ճշգրտված արժեքները, եթե հաշվի առնենք այդ բանաձևերի սխալանքների բնույթը: Համեմատելով (6.2.25) և (6.2.39) արտահայտությունները՝ տեսնում ենք, որ սեղանների բանաձևի սխալանքը մոտավորապես երկու անգամ ավելի մեծ է, և արտահայտությունները ունեն հակադիր նշաններ: Դրա հիման վրա կարելի է գրել ուղղանկյունների և սեղանների համակցված հետևյալ բանաձևը.

$$I(f) \approx Q_{RT}^*(f) \equiv \frac{2Q_R^\circ(f) + Q_T(f)}{3} : \quad (6.2.44)$$

Այդ դեպքում

$$\begin{aligned} I(f) - Q_{RT}^*(f) &= \frac{2}{3} [I(f) - Q_R^\circ(f)] + \frac{1}{3} [I(f) - Q_T(f)] = \frac{2}{3} R_R^\circ(f) + \frac{1}{3} R_T(f) \\ &= \frac{1}{36} [f''(\mu) - f''(\xi)](b-a)h^2, \quad \mu, \xi \in (a, b) : \end{aligned}$$

Ուստի, եթե $f''(x)$ ածանցյալը $[a, b]$ հատվածում դանդաղ է փոփոխվում, ապա կիրառելով (6.2.44) բանաձևը՝ կարելի է ստանալ ինտեգրալի առավել ճշգրիտ արժեքը:

Օրինակ 6.2.2 :Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը.

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} :$$

Այս ինտեգրալը հեշտությամբ հաշվվում է Նյուտոն-Լայբնիցի (6.1.2) բանաձևով.

$$I = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398 :$$

Օգտվենք այժմ միջին ուղղանկյունների և սեղանների ընդհանրացված բանաձևերից: Վերցնենք $n = 10$: Արդյունքում կստանանք $Q_R^\circ = 0.785606$ և $Q_T = 0.784981$ (կլորացման սխալանքների ճշտությամբ): Այնուհետև, լստ (6.2.44) բանաձևի գտնում ենք $Q_{RT}^* = 0.785398$:



Այսպիսով, որոշ դեպքերում համակցված բանաձևերի օգտագործումը կարող է էական լավացնել հաշվարկների արդյունքները:

6.3 Սիմպոնի բանաձևը

Այս պարագրաֆում կարտածենք քառակուսացման մի բանաձև, որն ունի ճշտության ավելի բարձր աստիճան, քան ուղղանկյունների և սեղանների բանաձևերը:

Ենթախնտեգրալային $f(x)$ ֆունկցիայի համար կառուցենք ինտերպոլացիոն բազմանդամ՝ որպես հանգույցներ վերցնելով a, b և $c = (a+b)/2$ կետերը: Օգտվելով (4.2.4) Լագրանժի ինտերպոլացիոն բանաձևից՝ ոչ բարդ ձևափոխություններից հետո կստանանք.

$$f(x) \approx L_2(x) = f(c) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-c) + 2 \frac{f(b) - 2f(c) + f(a)}{(b-a)^2}(x-c)^2 : \quad (6.3.1)$$

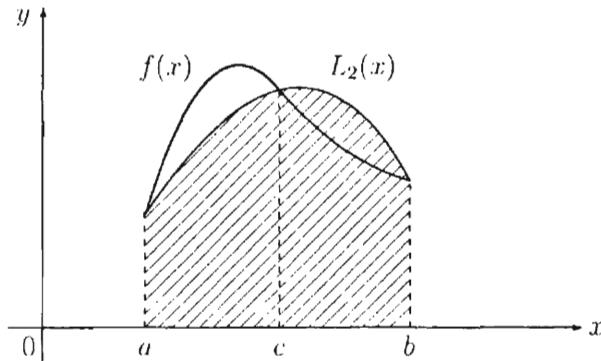
Այնուհետև, վերցնենք

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_2(x) dx : \quad (6.3.2)$$

Երկրաչափորեն դա նշանակում է, որ $I(f)$ ինտեգրալի արժեքը մոտավորապես փոխարինվում է $y := L_2(x)$ պարաբոլի սահմանափակված կորագիծ սեղանի մակերևույթով (նկ. 6.3.1): Տեղադրելով $L_2(x)$ -ի համար (6.3.1) արտահայտությունը (6.3.2) մոտավոր հավասարության մեջ կստանանք քառակուսացման բանաձև:

$$I(f) \approx Q_S(f) \equiv \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(c) + f(b)] . \quad (6.3.3)$$

Որը կոչվում է *Սիմպոնի բանաձև* (նրան անվանում են նաև *պարաբոլիերի բանաձև*):



Նկ. 6.3.1 Սիմպոնի բանաձևի երկրաչափական մեկնաբանությունը

Գնահատենք Սիմպոնի բանաձևի

$$R_S(f) \equiv I(f) - Q_S(f) \quad (6.3.4)$$

սխալանքը: Ենթադրենք, որ $f(x) \in C^4[a, b]$: Ինչպես ուղանկյունների և սեղանների բանաձևում, սահմանենք

$$\Phi(\tau) \equiv \int_{c-\tau}^{c+\tau} f(x) dx - \frac{\tau}{3} [f(c-\tau) + 4f(c) + f(c+\tau)] , \quad 0 \leq \tau \leq \Delta$$

ֆունկցիան, որտեղ $\Delta \equiv (b-a)/2$: Դժվար չէ համոզվել, որ $\Phi(\Delta) = R_S(f)$ և $\Phi(0) = 0$: Ներմուծենք հետևյալ օժանդակ ֆունկցիան.

$$F(\tau) \equiv \Phi(\tau) - \left(\frac{\tau}{\Delta} \right)^5 \Phi(\Delta) , \quad 0 \leq \tau \leq \Delta :$$

Պարզ է, որ $F(0) = F(\Delta) = 0$: Հետևաբար, ըստ Ռոլլի թեորեմի, գոյություն ունի $\tau_1 \in (0, \Delta)$ այնպիսին, որ $F'(\tau_1) = 0$: Հաշվենք $F(\tau)$ ֆունկցիայի ածանցյալը.

$$F'(\tau) = \frac{2}{3} [f(c+\tau) + f(c-\tau) - 2f(c)] - \frac{\tau}{3} [f'(c+\tau) - f'(c-\tau)] - \frac{5\tau^4}{\Delta^5} \Phi(\Delta) : \quad (6.3.5)$$

Հեշտ է տեսնել, որ $F'(0) = 0$: Ուստի, կրկին ըստ Ռոլլի թեորեմի, կգտնվի $\tau_2 \in (0, \tau_1)$ այնպիսին, որ $F''(\tau_2) = 0$: Ածանցելով, (6.3.5)-ից կստանանք՝

$$F''(\tau) = \frac{1}{3} [f'(c + \tau) - f'(c - \tau)] - \frac{\tau}{3} [f''(c + \tau) + f''(c - \tau)] - \frac{20\tau^3}{\Delta^5} \Phi(\Delta) : \quad (6.3.6)$$

Քանի որ $F''(0) = 0$, ապա ըստ Ռոլլի թեորեմի գոյություն ունի $\tau_3 \in (0, \tau_2)$ այնպիսին, որ $F'''(\tau_3) = 0$: Ելնելով (6.3.6)-ից, հաշվենք $F(\tau)$ ֆունկցիայի երրորդ ածանցյալը.

$$F'''(\tau) = -\frac{\tau}{3} [f'''(c + \tau) - f'''(c - \tau)] - \frac{60\tau^2}{\Delta^5} \Phi(\Delta) :$$

Վերցնելով $\tau = \tau_3$, կստանանք

$$\frac{\tau_3}{3} [f'''(c + \tau_3) - f'''(c - \tau_3)] + \frac{60\tau_3^2}{\Delta^5} \Phi(\Delta) = 0$$

հավասարությունը: Այնուհետև, կիրառելով միջին արժեքի մասին Լագրանժի թեորեմը, կստանանք՝

$$\frac{2\tau_3^2}{3} \left[f^{(4)}(\xi) + \frac{90}{\Delta^5} \Phi(\Delta) \right] = 0, \quad \xi \in (c - \tau_3, c + \tau_3) :$$

Դրանով իսկ

$$\Phi(\Delta) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90} \Delta^5 :$$

Ազ մասում վերցնելով Δ -ի փոխարեն $(b - a)/2$ -ը՝ կգանք

$$R_S(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{2880} (b - a)^5, \quad \xi \in (a, b) \quad (6.3.7)$$

արտահայտությանը Սիմպոնի բանաձևի (6.3.4) սխալանքի համար: Այստեղից ստանում ենք հետևյալ գնահատականը.

$$|R_S(f)| \leq \frac{M_4}{2880} (b - a)^5, \quad M_4 \equiv \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| : \quad (6.3.8)$$

Ինչպես երևում է ստացված գնահատականից, Սիմպոնի բանաձևը ճշգրիտ է երրորդ կարգի հաճրահաշվական բազմանդամների H_3 դասում:

Այժմ կառուցենք Սիմպոնի ընդհանրացված բանաձևը: Դրա համար $[a, b]$ հատվածը տրուինք $n = 2m$ հավասար մասերի

$$x_j = a + jh, \quad j = 0, 1, \dots, 2m, \quad h = \frac{b - a}{2m}$$

Կետերով: Ներկայացնենք $I(f)$ ինտեգրալը

$$I(f) = \sum_{k=1}^m \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx \quad (6.3.9)$$

գումարի տեսքով: Յուրաքանչյուր $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, $k = 1, 2, \dots, m$ հատվածում կիրառենք Սիմպոնի (6.3.3) բանաձևը՝

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})] :$$

Տեղադրելով (6.3.9)-ի մեջ՝ կստանանք

$$I(f) \approx \frac{h}{3} \sum_{k=1}^m [f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})] \quad (6.3.10)$$

կամ

$$I(f) \approx S_S(f) \equiv \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{k=1}^m f(x_{2k-1}) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k}) + f(x_{2m}) \right] \quad (6.3.11)$$

բառակուտացման բանաձևը, որը կոչվում է Սիմպոնի ընդհանրացված բանաձև:

Արտածենք բանաձևի

$$R_S(f) \equiv I(f) - Q_S(f) \quad (6.3.12)$$

սխալանքի գնահատականը: Ելնելով (6.3.9) և (6.3.10)-ից՝ սխալանքը գրենք հետևյալ տեսքով.

$$R_S(f) = \sum_{k=1}^m \left(\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx - \frac{h}{3} [f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})] \right) :$$

Սիմպոնի սովորական բանաձևի սխալանքի համար վերն ստացված (6.3.7) արտահայտությունից ունենք

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx - \frac{h}{3} [f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})] = -\frac{f^{(4)}(\xi_k)}{90} h^5, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

որտեղ $\xi_k \in (x_{2k-2}, x_{2k})$: Այնուհետև, կիրառելով 6.2.1 լեմման, կստանանք

$$R_S(f) = -\frac{h^5}{90} \sum_{k=1}^m f^{(4)}(\xi_k) = -\frac{h^5}{90} m f^{(4)}(\xi) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{180} (b-a) h^4,$$

որտեղ $\xi \in (a, b)$: Այսպիսով,

$$R_S(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{180} (b-a) h^4, \quad \xi \in (a, b) : \quad (6.3.13)$$

Այստեղից հետևում է

$$|R_S(f)| \leq \frac{M_4}{180} (b-a) h^4, \quad M_4 \equiv \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| \quad (6.3.14)$$

գնահատականը:

Օրինակ 6.3.1 : Գնահատել հանգույցների քանակը Սիմպոնի ընդհանրացված բանաձևում, որը բավարար է

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

իմտեզրալը 10^{-4} ճշտությամբ հաշվելու համար:

Համաձայն (6.3.14) գնահատականի՝ $n = 2m$ թիվը կարելի է որոշել

$$\frac{M_4}{180} h^4 = \frac{M_4}{180 n^4} < 10^{-4} \quad (6.3.15)$$

պայմանից: Հաշվենք M_4 մեծությունը: Ուսենք

$$(e^{-x^2})^{(4)} = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2} :$$

Այստեղից գտնում ենք $M_4 = 12$ և (6.3.15)-ից ստանում, որ (6.3.11) բանաձևում բավարար է վերցնել

$$n > \frac{10}{\sqrt[4]{15}} \approx 5.0813,$$

այսինքն՝ $n = 6$ (համեմատության համար տես 6.2.1 օրինակը): Դրանով իսկ կստանանք իմտեզրալի 0.74683 մոտավոր արժեքը պահանջվող ճշտությամբ: ♣

Սիմպոնի քանաձևը, ինչպես նաև նախորդ պարագրաֆում դիտարկված ուղղանկյունների և սեղանների բանաձևերը, գործնականում ամենից հաճախ օգտագործվող բանաձևերն են:

6.4 Սխալանքի գնահատման Ռունգեի կանոնը

Հաճախ մոտավոր իմտեզրման սխալանքի գնահատումը, իիմնված վերը ստացված անալիտիկ արտահայտությունների վրա, լինում է բավականին բարդ: Ինչպես երևում է (6.2.21), (6.2.26), (6.2.27), (6.2.40) և (6.3.14) գնահատականներից, այն պահանջում է $M_p \equiv \max_{a \leq x \leq b} |f^{(p)}(x)|$ մեծությունների հաշվումը, ինչը միշտ չէ որ հնարավոր է: Ուստի գործնականում հաճախ օգտագործվում է մեկ այլ եղանակ. որի հիմքում ընկած է ընտրված քառակուսացման բանաձևով իմտեզրալի կրկնակի վերահաշվումը՝ սկզբից ի քայլով, իսկ հետո՝ $h/2$ քայլով:

6.4.1 Ռունգեի կանոնը

Դիցուք

$$I(f) \equiv \int_a^b f(x) dx$$

ինտեգրալի հաշվման համար կիրառվում է վերը դիտարկված ընդհանրացված քառակուսացման բանաձևերից մեկը՝

$$I(f) \approx Q(f, h) \equiv \sum_{k=0}^n A_k^{(h)} f(x_k^{(h)}) , \quad (6.4.1)$$

որտեղ $h = (b - a)/n$ ։ Դիտարկենք այդ բանաձևի սխալանքը՝

$$R(f, h) \equiv I(f) - Q(f, h) : \quad (6.4.2)$$

Համաձայն սխալանքի համար ստացված (6.2.20), (6.2.24), (6.2.25), (6.2.39) և (6.3.13) արտահայտությունների, ունենք

$$R(f, h) = Cf^{(p)}(\xi)(b - a)h^p, \quad \xi \in (a, b) , \quad (6.4.3)$$

որտեղ C -ն ոչ զրոյական հաստատուն է՝ կախված ընտրված քառակուսացման բանաձևից: Բերված (6.4.3) արտահայտության մեջ՝ $p = 1$ ճախ և աջ ուղղանկյունների բանաձևերի համար, $p = 2$ միջին ուղղանկյունների և սեղանների բանաձևերի համար, $p = 4$ Սիմպոնի բանաձևի համար: Եթե $[a, b]$ հատվածում $f^{(p)}(x)$ ածանցյալը դանդաղ է փոփոխվում, ապա

$$R(f, h) \approx Mh^p , \quad (6.4.4)$$

որտեղ M -ը որոշակի մեծություն է, որը տրված ենթախնդիրավային $f(x)$ ֆունկցիայի համար կիամարենք հաստատուն $[a, b]$ ինտեգրման հատվածում: Ավելին, նշենք, որ եթե $f^{(p)}(x)$ ածանցյալը սահմանափակ է, ապա քավականաչափ փոքր h -երի համար նույնայեն կարելի է օգտվել (6.4.4) առնչությունից:

Փոքրացնենք (6.4.1) քառակուսացման բանաձևի քայլը երկու անգամ, այսինքն՝ վերցնենք քայլը հավասար $h/2$: Դա հավասարագոր է հանգույցների բանակի կրկնապատկմանը: Կստանանք ինտեգրալի նոր մոտավոր արժեք՝

$$I(f) \approx Q(f, h/2) \equiv \sum_{k=0}^{2n} A_k^{(h/2)} f(x_k^{(h/2)}) : \quad (6.4.5)$$

Համաձայն (6.4.4)-ի՝

$$R(f, h/2) \equiv I(f) - Q(f, h/2) \quad (6.4.6)$$

սխալանքի համար ունենք

$$R(f, h/2) \approx M \left(\frac{h}{2} \right)^p : \quad (6.4.7)$$

Համեմատելով (6.4.4) և (6.4.7)-ը՝ տեսնում ենք, որ

$$R(f, h/2) \approx \frac{1}{2^p} R(f, h) : \quad (6.4.8)$$

Այսինքն՝ կես քայլին անցման արդյունքում սխալանքը փոքրանում է մոտավորապես 2^p անգամ: Այնուհետև, (6.4.2) և (6.4.6)-ից հետևում է

$$R(f, h/2) = R(f, h) + Q(f, h) - Q(f, h/2)$$

հավասարությունը: Այստեղից, հաշվի առնելով (6.4.8)-ը, ստանում ենք

$$R(f, h/2) \approx \frac{Q(f, h/2) - Q(f, h)}{2^p - 1} \quad (6.4.9)$$

մոտավոր արտահայտությունը (6.4.5) բառակուսացման բանաձևի սխալանքի համար: Սխալանքի գործնական գնահատման նկարագրված մեթոդը կրում է Ռունգեի կանոն անվանումը:

Պարզվում է, որ (6.4.9) բանաձևի աջ մասում գտնվող

$$E(f, h/2) \equiv \frac{Q(f, h/2) - Q(f, h)}{2^p - 1} \quad (6.4.10)$$

մեծությունը կարող է օգտագործվել ոչ միայն մոտավոր ինտեգրման սխալանքի գնահատման համար, այլ նաև բավականին ողորկ ֆունկցիաների դեպքում, ինտեգրալի արժեքի ճշգրտման համար:

6.4.2 Ինտեգրալի մոտավոր արժեքի ճշգրտումն ըստ Ռիչարդսոնի

Այժմ ենթադրենք, որ $f(x)$ ենթախնտեգրալային ֆունկցիան ունի ավելի բարձր կարգի ողորկություն, քան պահանջվում էր 6.2 և 6.3 պարագրաֆներում՝ բառակուսացման բանաձևերի սխալանքների արտահամար ժամանակ: Ամենից առաջ ավելի հանգամանալից հետազոտենք քառակուսացման բանաձևերի սխալանքների տեսքը, ենթադրելով, որ ևնթախնտեգրալային ֆունկցիան ունի լրացուցիչ ողորկություն:

Հիտարկենք սեղանների (6.2.37) ընթիանացված բանաձևը: Ենթադրենք, որ $f(x) \in C^4[a, b]:$ Ներկայացնենք $I(f)$ ինտեգրալը

$$I(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx$$

տեսքով: Յուրաքանչյուր $[x_k, x_{k+1}]$ հատվածում, որտեղ $0 \leq k \leq n-1$, գրենք $f(x)$ ֆունկցիայի թեյլորի վերլուծությունը.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2!} (x - x_k)^2 + \frac{f'''(x_k)}{3!} (x - x_k)^3 + \\ &\quad \frac{f^{(4)}(\xi_k)}{4!} (x - x_k)^4, \quad \xi_k \in (x_k, x_{k+1}): \end{aligned}$$

Ինտեգրելով վերջին հավասարությունը՝ կստանանք

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = hf(x_k) + \frac{h^2}{2} f'(x_k) + \frac{h^3}{6} f''(x_k) + \frac{h^4}{24} f'''(x_k) + O(h^5) : \quad (6.4.11)$$

Համանմանորեն ուսենք

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_{k+1}) + f'(x_{k+1})(x - x_{k+1}) + \frac{f''(x_{k+1})}{2!} (x - x_{k+1})^2 + \\ &\quad \frac{f'''(x_{k+1})}{3!} (x - x_{k+1})^3 + \frac{f^{(1)}(\eta_k)}{4!} (x - x_{k+1})^4, \quad \eta_k \in (x_k, x_{k+1}) \end{aligned}$$

հավասարությունը, որն ինտեգրելով կստանանք

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = hf(x_{k+1}) - \frac{h^2}{2} f'(x_{k+1}) + \frac{h^3}{6} f''(x_{k+1}) - \frac{h^4}{24} f'''(x_{k+1}) + O(h^5) : \quad (6.4.12)$$

Անդամ առ անդամ գումարենք (6.4.11) և (6.4.12) հավասարությունները.

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx &= \frac{h}{2} [f(x_k) + f(x_{k+1})] + \frac{h^2}{4} [f'(x_k) - f'(x_{k+1})] + \\ &\quad \frac{h^3}{12} [f''(x_k) + f''(x_{k+1})] + \frac{h^4}{48} [f'''(x_k) - f'''(x_{k+1})] + O(h^5) : \end{aligned}$$

Ըստ Լագրանժի միջին արժեքի մասին թեորեմի (տե՛ս, օրինակ, [45]), ուսենք՝

$$f'''(x_k) - f'''(x_{k+1}) = -hf^{(1)}(\nu_k), \quad \nu_k \in (x_k, x_{k+1}).$$

Այսպիսով,

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx &= \frac{h}{2} [f(x_k) + f(x_{k+1})] + \frac{h^2}{4} [f'(x_k) - f'(x_{k+1})] + \\ &\quad \frac{h^3}{12} [f''(x_k) + f''(x_{k+1})] + O(h^5) : \end{aligned} \quad (6.4.13)$$

Գումարելով ստացված հավասարություններն ըստ k -ի՝ կստանանք

$$I(f) = \mathbf{Q}_T(f) + \frac{h^2}{4} \sum_{k=0}^{n-1} [f'(x_k) - f'(x_{k+1})] + \frac{h^2}{6} \mathbf{Q}_T(f'') + O(h^4) : \quad (6.4.14)$$

Զնափոխենք (6.4.14) հավասարության աջ մասի

$$J \equiv \frac{h^2}{4} \sum_{k=0}^{n-1} [f'(x_k) - f'(x_{k+1})]$$

մեծությունը: Համաձայն Թեյլորի բանաձևի՝ ուսենք

$$f'(x_k) = f'(c_k) - \frac{h}{2} f''(c_k) + \frac{h^2}{8} f'''(c_k) + O(h^3),$$

$$f'(x_{k+1}) = f'(c_k) + \frac{h}{2} f''(c_k) + \frac{h^2}{8} f'''(c_k) + O(h^3).$$

որտեղ $c_k = (x_k + x_{k+1})/2$: Վերջին երկու հավասարություններից հետևում է, որ

$$f'(x_k) - f'(x_{k+1}) = -h f''(c_k) + O(h^3) :$$

Այսպիսով,

$$J = -\frac{h^3}{4} \sum_{k=0}^{n-1} f''(c_k) + O(h^4) = -\frac{h^2}{4} \mathbf{Q}_R^\circ(f'') + O(h^4) :$$

Դրանով իսկ (6.4.14) հավասարությունն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$I(f) = \mathbf{Q}_T(f) - \frac{h^2}{4} \mathbf{Q}_R^\circ(f'') + \frac{h^2}{6} \mathbf{Q}_T(f'') + O(h^4) : \quad (6.4.15)$$

Այսուհետև, (6.2.23), (6.2.25) և (6.2.38), (6.2.39)-ից ունենք

$$\mathbf{Q}_R^\circ(f'') = I(f'') - \frac{f^{(4)}(\mu)}{24} (b-a)h^2, \quad \mu \in (a, b)$$

և

$$\mathbf{Q}_T(f'') = I(f'') + \frac{f^{(4)}(\nu)}{12} (b-a)h^2, \quad \nu \in (a, b) :$$

Տեղադրելով $\mathbf{Q}_R^\circ(f'')$ և $\mathbf{Q}_T(f'')$ -ի համար ստացված արտահայտությունները (6.4.15) հավասարության մեջ՝ կստանանք

$$I(f) = \mathbf{Q}_T(f) + c_T h^2 + O(h^4)$$

հավասարությունը, որտեղ

$$c_T \equiv -\frac{1}{12} \int_a^b f''(x) dx :$$

Այսպիսով, ստանում ենք

$$\mathbf{R}_T(f) = c_T h^2 + O(h^4), \quad (6.4.16)$$

որտեղ $c_T h^2$ մեծությունը կոչվում է սեղանների ընդհանրացված բանաձեկի սիւլանքի գլխակիր մաս: Կարող է պատահել այնպես, որ $c_T = 0$: Այդ դեպքում սիւլանքի գլխավոր մասը հավասար է զրոյի, և սեղանների բանաձեկի սիւլանքը կինդի արդեն h^4 կարգի մեծություն:

Համանմանորեն, ենթադրելով, որ $f(x)$ ֆունկցիան ունի ավելի բարձր աստիճանի ողորկություն, կարելի է ստանալ մյուս քառակուսացման բանաձեկի սիւլանքների հետևյալ ներկայացումները.

- Եթե $f(x) \in C^2[a, b]$, ապա

$$\mathbf{R}_R^-(f) = c_R^- h + O(h^2), \quad c_R^- = \frac{1}{2} \int_a^b f'(x) dx, \quad (6.4.17)$$

- Եթե $f(x) \in C^2[a, b]$, ապա

$$\mathbf{R}_R^+(f) = c_R^+ h + O(h^2), \quad c_R^+ = -\frac{1}{2} \int_a^b f'(x) dx, \quad (6.4.18)$$

- Եթե $f(x) \in C^4[a, b]$, ապա

$$\mathbf{R}_R^\circ(f) = c_R^\circ h^2 + O(h^4), \quad c_R^\circ = \frac{1}{24} \int_a^b f''(x) dx, \quad (6.4.19)$$

- Եթե $f(x) \in C^6[a, b]$, ապա

$$\mathbf{R}_S(f) = c_S h^4 + O(h^6), \quad c_S = -\frac{1}{180} \int_a^b f^{(4)}(x) dx : \quad (6.4.20)$$

Վերը բերված (6.4.17) – (6.4.20) առնչությունների արտածումը բողնում նմաք ընթերցողին՝ որպես վարժություն:

Այսայսուպ, դիցուք $f(x) \in C^{p+m}[a, b]$, որտեղ $p = 1, m = 1$ ճական և աջ ուղղանկյունների բանաձևերի համար, $p = 2, m = 2$ միջին ուղղանկյունների և սեղանների բանաձևերի համար, $p = 4, m = 2$ Սիմպոնի բանաձևի համար: Սիավորենք (6.4.16) – (6.4.20) առնչությունները մեկում՝

$$R(f, h) = ch^p + O(h^{p+m}), \quad (6.4.21)$$

որտեղ c -ն h -ից անկախ հաստատուն է, որը որոշվում է ընտրված քառակուսացման բանաձևով և ենթահնտեղրալային ֆունկցիայով: Այդ դեպքում, ինչպես հետևում է (6.4.2) և (6.4.21)-ից,

$$I(f) = Q(f, h) + ch^p + O(h^{p+m}) : \quad (6.4.22)$$

Փոքրացնելով քառակուսացման բանաձևի քայլը երկու անգամ (այսինքն՝ վերցնելով քայլը հավասար $h/2$), կստանանք՝

$$I(f) = Q(f, h/2) + c \left(\frac{h}{2}\right)^p + O(h^{p+m}) : \quad (6.4.23)$$

Այնուհետև, բազմապատկելով 2^p -ով (6.4.23) հավասարությունը և նրանից հանելով (6.4.22) հավասարությունը՝ կստանանք՝

$$I(f) = Q^*(f, h/2) + O(h^{p+m}), \quad (6.4.24)$$

որտեղ

$$Q^*(f, h/2) \equiv \frac{2^p Q(f, h/2) - Q(f, h)}{2^p - 1} : \quad (6.4.25)$$

Ստացված $Q^*(f, h/2)$ մեծությունը կոչվում է ինտեգրալի ըստ Ռիշարդոնի ճշգրտված (կամ էքսպրասողացված) մոտավոր արժեք (տես ստորև 6.4.1 դիտողությունը):

Այսպիսով, համաձայն (6.4.24)-ի՝

$$R^*(f, h/2) \equiv I(f) - Q^*(f, h/2) = O(h^{p+m})$$

այն ժամանակ, երբ

$$R(f, h/2) \equiv I(f) - Q(f, h/2) = O(h^p)$$

(բնականաբար, եթե $c \neq 0$): Ընդ որում, ինչպես հետևում է (6.4.10) և (6.4.25)-ից՝

$$Q^*(f, h/2) = Q(f, h/2) + E(f, h/2) : \quad (6.4.26)$$

Այդ իսկ պատճառով $E(f, h/2)$ մեծությունը (6.4.10)-ից կոչվում է $I(f)$ ինտեգրալի $Q(f, h/2)$ մոտավոր արժեքի ճշգրտում ըստ Ռիշարդոնի:

Դիտողություն 6.4.1 : Պարզվում է, որ եթե $Q(f, h/2) \neq Q(f, h)$, ապա ինտեգրալի ըստ Ռիշարդոնի ճշգրտված $Q^*(f, h/2)$ արժեքը, որը հաշվվում է (6.4.25) բանաձևով, ընկած է $Q(f, h/2)$ և $Q(f, h)$ մեծությունները պարունակող ամենափոքր հատվածից դուրս (այդ հեշտությամբ ստուգվող պահումը թողնում ենք ընթերցողին՝ որպես վարժություն): Այդ իսկ պատճառով $Q^*(f, h/2)$ մեծությունը կոչվում է նաև ինտեգրալի էքսպրասողացված մոտավոր արժեք:

6.5 Նյուտոն-Կոտսի քանածերը

Հնդիանացներով 6.2 և 6.3 պարագրաֆների արդյունքները՝ ձևակերպենք քառակուսացման քանածերի կառուցման եղանակներից մեկը, որը հիմնված է ենթահնտեգրալային ֆունկցիան ինտերպոլացիոն բազմանդամով փոխարինման վրա:

6.5.1 Ինտերպոլացիոն քառակուսացման քանածեր

Հնտրենք $[a, b]$ հատվածում զույգ առ զույգ իրարից տարբեր x_0, x_1, \dots, x_n հանգույցներ և ենթահնտեգրալային $f(x)$ ֆունկցիայի համար կառուցենք $L_n(x)$ ինտերպոլացիոն բազմանդամ: Կարող ենք գրել, որ

$$f(x) = L_n(x) + R_n(x),$$

որտեղ $R_n(x)$ -ը ինտերպոլացիայի սխալանքն է: Ինտեգրելով ըստ x -ի վերջին հավասարությունը՝ կստանանք

$$I(f) = \int_a^b L_n(x) dx + \int_a^b R_n(x) dx : \quad (6.5.1)$$

Այստեղից գալիս ենք ինտեգրալի մոտավոր հաշվման հետևյալ եղանակին.

$$I(f) \approx \int_a^b L_n(x) dx : \quad (6.5.2)$$

Ինտերպոլացիոն բազմանդամը գրենք (4.2.6) Լագրանժի տեսքով, այն է՝

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k) \omega'_{n+1}(x_k)},$$

որտեղ $\omega_{n+1}(x) \equiv (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$: Այդ դեպքում

$$\int_a^b L_n(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k), \quad (6.5.3)$$

որտեղ

$$A_k = \int_a^b \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k) \omega'_{n+1}(x_k)} dx, \quad k = 0, 1, \dots, n : \quad (6.5.4)$$

Դրանվ իսկ (6.5.2) և (6.5.3)-ից ստանում ենք ինտերպոլացիոն բառակուսացման բանածեղ

$$I(f) \approx Q_n(f) \equiv \sum_{k=0}^n A_k f(x_k), \quad (6.5.5)$$

որի գործակիցները որոշվում են ըստ (6.5.4)-ի:

Համաձայն (6.5.1) հավասարության (6.5.5) բառակուսացման բանածեղ սխալանքն է՝

$$R_n(f) = \int_a^b R_n(x) dx : \quad (6.5.6)$$

Մասնավորապես, եթե $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$, ապա օգտվելով (4.3.4) ինտերպոլացիայի սխալանքի արտահայտությունից՝ կստանանք

$$R_n(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) \omega_{n+1}(x) dx : \quad (6.5.7)$$

Այսպիսով, ինտերպոլացիոն բառակուսացման բանածեղ կառուցման ծամանակ կամայականությունը վերաբերում է միայն $[a, b]$ հատվածում համգույցների ընտրությանը: Իսկ գործակիցները հաշվում են ըստ (6.5.4) բանածեղի:

Թեորեմ 6.5.1 : Որպեսզի (6.5.5) բառակուսացման բանածեղը լինի ինտերպոլացիոն, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի ճշգրիտ հանրահաշվական բազմանդամների H_n դասում:

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Դիցուք (6.5.5) քառակուսացման բանաձևը ինտերպոլացիոն է: Եթե $f(x) \in H_n$, ապա ակնհայտ է, որ $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$: Այդ դեպքում, ինչպես հետևում է (6.5.7)-ից, $R_n(f) = 0$: Անհրաժեշտությունն ապացուցված է:

Բավարարություն: Դիցուք (6.5.5) քառակուսացման բանաձևը ճշգրիտ է H_n դասում: Մասնավորապես, այն ճշգրիտ է կամայական

$$l_n^{(m)}(x) \equiv \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_m) \omega'_{n+1}(x_m)} \in H_n, \quad m = 0, 1, \dots, n$$

բազմանդամի համար (տես (4.2.1)-ը): Ուստի, հաշվի առնելով այդ բազմանդամների (4.2.2) հատկությունը, այն է՝ $l_n^{(m)}(x_k) = \delta_{mk}$ (Կրոնեկերի սիմվոլ), կստանանք

$$\int_a^b l_n^{(m)}(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k l_n^{(m)}(x_k) = A_m$$

բոլոր $m = 0, 1, \dots, n$ արժեքների համար: Իսկ դա նշանակում է, որ (6.5.5) քառակուսացման բանաձևը ինտերպոլացիոն է: \square

Եթե ինտեղուման a և b սահմանները ինտերպոլացիայի հանգույցներն են, ապա (6.5.5) քառակուսացման բանաձևը կոչվում է *փակ տիպի* բանաձև, հակառակ դեպքում՝ *բաց տիպի*:

Ինտերպոլացիոն քառակուսացման բանաձևի A_k գործակիցները կարեիլ է գտնել այլ եղանակով՝ շեաշվելով (6.5.4) ինտեղումները: Դրա եռությունը հետևյալն է: Խնդրեամ 6.5.1-ի հիման վրա ունենք

$$\sum_{k=0}^n A_k x_k^m = \int_a^b x^m dx, \quad m = 0, 1, \dots, n$$

հավասարությունները: Կատարեամբ հետևյալ նշանակումները.

$$\mu_m \equiv \int_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}, \quad m = 0, 1, \dots, n : \quad (6.5.8)$$

Այսպիսով, հանգում ենք հանրահաշվական հավասարումների հետևյալ համակարգին.

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n A_k &= \mu_0 \\ \sum_{k=0}^n A_k x_k &= \mu_1 \\ \dots &\dots \\ \sum_{k=0}^n A_k x_k^n &= \mu_n \end{cases} : \quad (6.5.9)$$

Այս համակարգը ունի միարժեք լուծում, քանի որ նրա որոշիչը Վանդերմոնդի որոշիչն է, որը հավասար չէ զրոյի: Ինտերպոլացիոն քառակուսացման բանաձևի գործակիցների որոշման շարադրված եղանակը կոչվում է *անորոշ գործակիցների մեթոդ*:

Նշենք, որ (6.5.9) համակարգի առաջին հավասարումը, այն է՝

$$\sum_{k=0}^n A_k = b - a, \quad (6.5.10)$$

բացահայտում է ինտերպոլացիոն քառակուսացման բանաձևի գործակիցների կարևոր մի հատկություն:

6.5.2 Նյուտոն-Կոտսի բանաձևերը

Փակ տիպի ինտերպոլացիոն քառակուսացման բանաձևերը՝ կառուցված ըստ հավասարահեռ հանգույցների, կոչվում են Նյուտոն-Կոտսի բանաձևեր:

Վերցնենք $[a, b]$ հատվածում հավասարահեռ հանգույցներ.

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{b - a}{n} :$$

Ինչպես ցույց է տրված 4.5 պարագրաֆում, Հազրանմի ինտերպոլացիոն բանաձևը հավասարահեռ հանգույցների դեպքում կարելի է գրել

$$L_n(x_0 + th) = \sum_{k=0}^n f(x_k)(-1)^{n-k} \frac{C_n^k}{n!} \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-k}$$

տեսքով, որտեղ

$$t = \frac{x - x_0}{h} :$$

Այդ դեպքում

$$\int_a^b L_n(x) dx = h \int_0^n L_n(x_0 + th) dt = h \sum_{k=0}^n f(x_k)(-1)^{n-k} \frac{C_n^k}{n!} \int_0^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-k} dt :$$

Այսպիսով, ստանում ենք արտահայտություններ՝ քառակուսացման բանաձևի գործակիցների համար՝

$$A_k = h \frac{(-1)^{n-k} C_n^k}{n!} \int_0^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-k} dt, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (6.5.11)$$

որոնք կոչվում են Նյուտոն-Կոտսի գործակիցներ:

Բացի վերը նշված (6.5.10) հատկությունից, Նյուտոն-Կոտսի գործակիցներն ունեն մեկ կարևոր հատկություն ևս, այն է՝

$$A_k = A_{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n : \quad (6.5.12)$$

Այդ առնչությունն ապացուցվում է ամմիջական ստուգումով՝ օգտվելով (6.5.11) արտահայտությունից:

Ինչ վերաբերում է Նյուտոն-Կոտսի բանաձևի սխալանքին, ապա, համաձայն (6.5.6)-ի, ունենք

$$R_n(f) = \int_a^b R_n(x) dx = h \int_0^n R_n(x_0 + th) dt :$$

Այստեղից, օգտվելով (4.5.4) արտահայտությունից, կստանանք

$$R_n(f) = \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^n f^{(n+1)}(\xi) t(t-1)\dots(t-n) dt : \quad (6.5.13)$$

Նյուտոն-Կոտսի բանաձևերի մասնավոր դեպքերն են սեղանների բանաձևը ($n=1$) և Սիմպոնի բանաձևը ($n=2$):

Դիտողություն 6.5.1 : Համաձայն (6.5.13) ընդհանուր արտահայտությամբ՝ Սիմպոնի բանաձևը ճշգրիտ է հանրահաշվական բազմանդամների H_2 դասում: Սակայն, ինչպես ցոյց է տրվել 6.3 պարագրաֆում, այդ բանաձևերը իրականում օժտված է ավելի լավ հատկություններով, այն է՝ ճշգրիտ է հանրահաշվական բազմանդամների H_3 դասում: Ավելին, ապացուցված է, որ կենտ n -երի համար Նյուտոն-Կոտսի բանաձևերը ճշգրիտ են H_n դասում. իսկ զոյզ ու -երի համար՝ H_{n+1} դասում (տես ս [4]):

6.6 Գառւսի քառակուսացման բանաձևեր

Նախորդ պարագրաֆում, փոխարինելով ենթահնտեղրալային ֆունկցիան ինտերպոլացիոն բազմանդամով, մենք արտածել ենք

$$I(f) \equiv \int_a^b f(x) dx \approx Q_n(f) \equiv \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) \quad (6.6.1)$$

քառակուսացման բանաձևեր: Ընդ որում, $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ հանգույցների կամայական ընտրության դեպքում այդ բանաձևը ճշգրիտ է H_n դասում: Պարզվում է, որ հանգույցների հատուկ ընտրության դեպքում կարենի է ստանալ քառակուսացման բանաձևեր, որոնք ճշգրիտ են ավելի բարձր աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների համար:

Դեմք հետևյալ խնդիրը. տրված n -ի համար կառուցել (6.6.1) քառակուսացման բանաձևեր, որը ճշգրիտ լինի հնարավորին չափով բարձր աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների համար:

Նախ և առաջ զշտենք՝ n -ր աստիճանի բազմանդամների համար այդ բանաձևը ճշգրիտ լինել չի կարող:

Լեմմա 6.6.1 : Կամայական (6.6.1) բառակուսացման բանաձևը չի կարող ճշգրիտ լինել հանրահաշվական բազմանդամների H_{2n+2} դասում:

Ապացույց: Իրոք, դիտարկենք

$$P_{2n+2}(x) = (x - x_0)^2(x - x_1)^2 \dots (x - x_n)^2 \in H_{2n+2}$$

բազմանդամը: Ակնհայտ է, որ այս բազմանդամի համար (6.6.1) բանաձևը չի կարող ճշգրիտ լինել, քանի որ

$$\int_a^b P_{2n+2}(x) dx > 0, \quad \text{իսկ} \quad \sum_{k=0}^n A_k P_{2n+2}(x_k) = 0. \quad \square$$

Ինչպես ցույց է տվել Կ.Գառուսը, հանրահաշվական բազմանդամների ամենաբարձր աստիճանը, որոնց համար (6.6.1) բանաձևը ճշգրիտ է, հավասար է $(2n+1)$ -ի: Այդպիսի բառակուսացման բանաձևը կոչվում է ճշտության բարձրագույն հանրահաշվական աստիճանի բանաձև կամ Գառուսի բանաձև:

Նախքան բանաձևի կառուցմանն անցնելը՝ իիշեցնենք մեկ հասկացություն, որին մենք ալրեն հանդիպել ենք 5.4 և 5.6 պարագրաֆներում:

Սահմանում 6.6.1 : Կասենք, որ $\varphi(x)$ և $\psi(x)$ ֆունկցիաները օրորոգունալ են $[a, b]$ հատվածում, եթե

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx = 0 :$$

Զեակերպենք և ապացուցենք պնդում, որի հիման վրա կառուցվում է Գառուսի բանաձևը:

Թեորեմ 6.6.1 : Որպեսզի (6.6.1) բառակուսացման բանաձևը լինի ճշգրիտ H_{2n+1} բազմության վրա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի ինտերպոլացիոն և $\omega_{n+1}(x) \equiv (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \in H_{n+1}$ բազմանդամը $[a, b]$ հատվածում լինի օրորոգունալ կամայական բազմանդամի H_n դասից:

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Դիցուք (6.6.1) բառակուսացման բանաձևը ճշգրիտ է H_{2n+1} դասում: Դրանով իսկ այն կլինի ճշգրիտ նաև H_n դասում: Հետևաբար, ըստ 6.5.1 թեորեմի, այն ինտերպոլացիոնն է:

Վերցնենք ցանկացած $P_n(x) \in H_n$ բազմանդամ: Համաձայն ենթադրության՝

$$S_{2n+1}(x) \equiv \omega_{n+1}(x)P_n(x) \in H_{2n+1}$$

բազմանդամի համար (6.6.1) բանաձևը ճշգրիտ է, այսինքն՝

$$\int_a^b S_{2n+1}(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k S_{2n+1}(x_k) :$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$\int_a^b \omega_{n+1}(x) P_n(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k \omega_{n+1}(x_k) P_n(x_k) = 0 :$$

Անիրաժեշտությունն ապացուցված է:

Բավարարություն: Դիցուք (6.6.1) բառակուսացման բանաձևը ինտերպոլացիոն է և $\omega_{n+1}(x)$ բազմանդամը օրթոգոնալ է H_n դասի կամայական բազմանդամի: Վերցնենք ցանկացած $S_{2n+1}(x) \in H_{2n+1}$ բազմանդամ: Բաժանելով այդ բազմանդամը $\omega_{n+1}(x)$ -ի վրա՝ կստանանք

$$S_{2n+1}(x) = \omega_{n+1}(x) P_n(x) + r_n(x), \quad (6.6.2)$$

որտեղ $P_n(x), r_n(x) \in H_n$: Ինտեգրենք այդ հավասարությունը.

$$\int_a^b S_{2n+1}(x) dx = \int_a^b \omega_{n+1}(x) P_n(x) dx + \int_a^b r_n(x) dx :$$

Ըստ Ենթադրության՝ աջ մասի առաջին ինտեգրալը հավասար է զրոյի, իսկ երկրորդ ինտեգրալը, համաձայն 6.5.1 թեորեմի, հավասար է բառակուսացման գումարին: Հետևաբար,

$$\int_a^b S_{2n+1}(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k r_n(x_k) :$$

Ինչպես հետևում է (6.6.2)-ից, $r_n(x_k) = S_{2n+1}(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$: Ուստի

$$\int_a^b S_{2n+1}(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k S_{2n+1}(x_k) :$$

Իսկ դա նշանակում է, որ (6.6.1) բանաձևը ճշգրիտ է H_{2n+1} դասում: \square

Այսպիսով, H_{2n+1} դասում ճշգրիտ բառակուսացման բանաձևի գոյության հարցը հանգում է $(n+1)$ -րդ աստիճանի այնպիսի բազմանդամի գոյության հարցին, որն օրթոգոնալ է բոլոր բազմանդամներին H_n դասից և որի արժատներն իրական են, իրարից տարբեր են և պատկանում են $[a, b]$ հատվածին: Այդ բազմանդամի արժատներն ել կլինեն որոնելի բառակուսացման բանաձևի հանգույցներ:

Պարագրաֆ 5.6 -ում, բազմանդամների օրթոգոնալ համակարգերի դիտարկման ժամանակ, ասվել է (առանց ապացույցի), որ

$$\mathcal{L}_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (6.6.3)$$

Լեժամակարգի բազմանդամները կազմում են օրթոգոնալ համակարգ $[-1, 1]$ հատվածում: Այստեղ մենք կապացուցենք հետևյալ պնդումը:

Լեմմա 6.6.2 : $\mathcal{L}_{n+1}(x)$ բազմանդամը $[-1, 1]$ հատվածում օրբոգոնալ է կամայական բազմանդամի H_n դասից:

Ապացույց: Նշանակենք՝

$$\varphi(x) \equiv (x^2 - 1)^{n+1} :$$

Ինչպես հետևում է Լեժանդրի բազմանդամները սահմանող (6.6.3) բանաձևից, պետք է ցույց տալ, որ այդ ֆունկցիայի $(n + 1)$ -րդ ածանցյալը օրբոգոնալ է կամայական բազմանդամի H_n դասից:

Վերցնենք ցանկացած բազմանդամ $P_n(x) \in H_n$: Հաջորդաբար օգտագործենով մասերով ինտեգրում՝ կստանանք

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \varphi^{(n+1)}(x) P_n(x) dx &= \varphi^{(n)}(x) P_n(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \varphi^{(n)}(x) P'_n(x) dx \\ &= - \int_{-1}^1 \varphi^{(n)}(x) P'_n(x) dx = -\varphi^{(n-1)}(x) P'_n(x) \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \varphi^{(n-1)}(x) P''_n(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \varphi^{(n-1)}(x) P''_n(x) dx = \dots \\ &= (-1)^n \varphi(x) P_n^{(n)}(x) \Big|_{-1}^1 + (-1)^{n+1} \int_{-1}^1 \varphi(x) P_n^{(n+1)}(x) dx = 0 : \quad \square \end{aligned}$$

Այժմ դիտարկենք $[a, b]$ կամայական հատվածը: Արտապատկերենք այդ հատվածը $[-1, 1]$ հատվածի վրա.

$$x = \frac{b-a}{2} \xi + \frac{b+a}{2}, \quad \xi \in [-1, 1] : \quad (6.6.4)$$

Սահմանենք

$$\hat{\mathcal{L}}_{n+1}(x) \equiv \mathcal{L}_{n+1} \left(\frac{2}{b-a} x - \frac{b+a}{b-a} \right) \in H_{n+1} \quad (6.6.5)$$

բազմանդամը, որտեղ $\mathcal{L}_{n+1}(\xi)$ -ը Լեժանդրի բազմանդամն է:

Լեմմա 6.6.3 : $\hat{\mathcal{L}}_{n+1}(x)$ բազմանդամը $[a, b]$ հատվածում օրբոգոնալ է ցանկացած բազմանդամի H_n դասից:

Ապացույց: Իրոք, կատարելով փոփոխականի փոխարինում ինտեգրալի նշանի տակ՝ ցանկացած $P_n(x) \in H_n$ բազմանդամի համար ունենք

$$\begin{aligned} \int_a^b \hat{\mathcal{L}}_{n+1}(x) P_n(x) dx &= \int_a^b \mathcal{L}_{n+1} \left(\frac{2}{b-a} x - \frac{b+a}{b-a} \right) P_n(x) dx = \\ &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \mathcal{L}_{n+1}(\xi) P_n \left(\frac{b-a}{2} \xi + \frac{b+a}{2} \right) d\xi = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \mathcal{L}_{n+1}(\xi) \hat{P}_n(\xi) d\xi . \end{aligned}$$

որտեղ $\hat{P}_n(\xi) \equiv P_n((b-a)\xi/2 + (b+a)/2)$: Վերջին ինտեգրալը, համաձայն 6.6.2 լեմմայի, հավասար է զրոյի: \square

Այսպիսով, $(n+1)$ -րդ աստիճանի այս բազմանդամի գոյությունը, որն օրբոգոնալ է բոլոր բազմանդամներին H_n դասից, ապացուցված է:

Լեմմա 6.6.4 : $\hat{\mathcal{L}}_{n+1}(x)$ բազմանդամի արմատներն իրական են, տարրեր են իրարից և պատկանում են (a, b) միջակայքին:

Ապացույց: Այստեղ մենք, ըստ Էության, կկրկնենք 5.6.3 լեմմայի ապացույցը: Քանի որ

$$\int_a^b \hat{\mathcal{L}}_{n+1}(x) dx = 0,$$

ապա $\hat{\mathcal{L}}_{n+1}(x)$ բազմանդամն (a, b) միջակայքում ունի կենտ պատիկության գոնե մեկ արմատ: Դիցուք $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ կետերը $\hat{\mathcal{L}}_{n+1}(x)$ բազմանդամի (a, b) միջակայքին պատկանող իրարից տարրեր կենտ պատիկության արմատներն են: Պարզ է, որ $m \leq n+1$: Դիտարկենք

$$R_m(x) \equiv (x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_m)$$

բազմանդամը: $\hat{\mathcal{L}}_{n+1}(x)R_m(x)$ բազմանդամի (a, b) միջակայքին պատկանող բոլոր արմատները ունեն զույգ պատիկություն: Ուստի՝

$$\int_a^b \hat{\mathcal{L}}_{n+1}(x)R_m(x) dx \neq 0 :$$

Հետևաբար, ըստ 6.6.3 լեմմայի կարող ենք եզրակացնել, որ $m > n$: Այսպիսով, $m = n+1$: \square

Լեմմա 6.6.5 : $(n+1)$ -րդ աստիճանի բազմանդամը, որին $[a, b]$ հաստվածում օրբոգոնալ է

կամայական բազմանդամի P_n դասից, միակն է հաստատում բազմապատկշի ջշտությամբ:

Ապացույց: Ենթադրենք, որ գոյություն ունեն երկու բազմանդամ՝

$$\omega_{n+1}(x) = x^{n+1} + a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

և

$$\tilde{\omega}_{n+1}(x) = x^{n+1} + \tilde{a}_n x^n + \dots + \tilde{a}_1 x + \tilde{a}_0,$$

որոնք օրբոգոնալ են կամայական բազմանդամի H_n դասից: Այդ դեպքում $P_n(x) \equiv \omega_{n+1}(x) - \tilde{\omega}_{n+1}(x)$ տարրերությունը կլինի n աստիճանից ոչ բարձր բազմանդամ: Հստ ենթադրության՝

$$\int_a^b \omega_{n+1}(x)P_n(x) dx = 0 \quad \text{և} \quad \int_a^b \tilde{\omega}_{n+1}(x)P_n(x) dx = 0 :$$

Ուստի՝

$$\int_a^b P_n^2(x) dx = \int_a^b (\omega_{n+1}(x) - \tilde{\omega}_{n+1}(x)) P_n(x) dx = 0 :$$

Հետևաբար, $P_n(x) \equiv 0$ և դրանով իսկ $\omega_{n+1}(x) \equiv \tilde{\omega}_{n+1}(x)$: \square

Այսպիսով, որպես (6.6.1) քառակուսացման բանաձևի հանգույցները կվերցնենք

$$x_k = \frac{b-a}{2} \xi_k + \frac{b+a}{2}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (6.6.6)$$

որտեղ $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n \in [-1, 1]$ կետերը Լեժանդրի L_{n+1} բազմանդամի արմատներն են: Այսինքն՝ x_0, x_1, \dots, x_n հանգույցներն ընտրվում են որպես Լեժանդրի բազմանդամի արմատների պատկերներ (6.6.4) գծային արտապատկերման դեպքում: Այնուհետև, քանի որ քառակուսացման բանաձևը ինտերպոլացիոն է, նրա գործակիցները հաշվում են ըստ (6.5.4) օրենքի:

Կամայական $[a, b]$ և $[-1, 1]$ հատվածների համար Գաուսի բանաձևների գործակիցների միջև գոյություն ունի բավականին պարզ առնչություն, այն է՝

$$A_k^{[a,b]} = \frac{b-a}{2} A_k^{[-1,1]}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (6.6.7)$$

(այդ փաստի ապացույցը թողնում ենք ընթերցողին որպես վարժություն): Արդյունքում Գաուսի քառակուսացման բանաձևը կարող ենք գրել նաև

$$I(f) \equiv \int_a^b f(x) dx \approx Q_n(f) \equiv \frac{b-a}{2} \sum_{k=0}^n A_k^{[-1,1]} f(x_k) \quad (6.6.8)$$

տեսքով, որտեղ հանգույցները որոշվում են համաձայն (6.6.6)-ի, իսկ գործակիցները՝ ըստ

$$A_k^{[-1,1]} = \int_{-1}^1 \frac{\omega_{n+1}(\xi)}{(\xi - \xi_k) \omega'_{n+1}(\xi_k)} d\xi, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (6.6.9)$$

բանաձևի (այստեղ $\omega_{n+1}(\xi) \equiv (\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1) \dots (\xi - \xi_n)$):

Դիտողություն 6.6.1 : Քանի որ Գաուսի բանաձևն ինտերպոլացիոն է, ապա նրա գործակիցների որոշման համար կարելի է օգտվել նաև անորոշ գործակիցների մերողից, որի մասին խոսվել է 6.5 պարագրաֆում:

Օրինակ 6.6.1 : $[-1, 1]$ հատվածում ստանալ Գաուսի քառակուսացման բանաձևը $n = 2$ դեպքի համար:

Երրորդ աստիճանի Լեժանդրի բազմանդամն է՝

$$L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) :$$

Այս բազմանդամի արմատներն են՝

$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}} :$$

A_0, A_1, A_2 գործակիցների որոշման համար օգտվենք անորոշ գործակիցների մեթոդից:
Համաձայն (6.5.9)-ի՝ ունենք

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 2 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}}A_0 + \sqrt{\frac{3}{5}}A_2 = 0 \\ \frac{3}{5}A_0 + \frac{3}{5}A_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

համակարգը: Լուծելով այն՝ կստանանք

$$A_0 = \frac{5}{9}, \quad A_1 = \frac{8}{9}, \quad A_2 = \frac{5}{9} :$$

Այսպիսով,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) :$$

Այս բանաձևը ճշգրիտ է բազմանդամների H_5 բազմության վրա: ♣

Նշենք Գառուսի բանաձևի գործակիցների մեկ հատկություն ևս:

Լեմմա 6.6.6 : Գառուսի քառակուսացման բանաձևի գործակիցները դրական են:

Ապացույց: Դիցուք x_0, x_1, \dots, x_n կետերը Գառուսի բանաձևի հանգույցներն են: Բոլոր $k = 0, 1, \dots, n$ արժեքների համար դիտարկենք

$$P_{2n}^{(k)}(x) \equiv (x - x_0)^2 \dots (x - x_{k-1})^2 (x - x_{k+1})^2 \dots (x - x_n)^2 \in H_{2n}$$

բազմանդամները: Ունեն՝

$$0 < \int_a^b P_{2n}^{(k)}(x) dx = \sum_{m=0}^n A_m P_{2n}^{(k)}(x_m) = A_k P_{2n}^{(k)}(x_k) :$$

Քանի որ $P_{2n}^{(k)}(x_k) > 0$, ուստի և $A_k > 0$: □

Վերջում բերենք (առանց արտածման) արտահայտություն Գառուսի բանաձևի

$$R_n(f) \equiv I(f) - Q_n(f)$$

սխալանքի համար (տես, օրինակ, [4],[12],[27]): Եթե $f(x) \in C^{2n+2}[a, b]$, ապա

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi) [(n+1)!]^4}{[(2n+2)!]^3 (2n+3)} (b-a)^{2n+3}, \quad \xi \in (a, b) : \quad (6.6.10)$$

6.7 Չերիշելի քառակուսացման բանաձևը

Ականավոր ոուս մաթեմատիկոս Պ.Լ.Չերիշելի հետազոտել է ինտեգրալ հարցը. կառուցել հավասար գործակիցներով քառակուսացման բանաձև:

$$I(f) \equiv \int_a^b f(x) dx \approx Q_n(f) \equiv A \sum_{k=1}^n f(x_k), \quad (6.7.1)$$

որը կլիներ ճշգրիտ հանրահաշվական բազմանդամների H_n դասում:

Վերը նշված (6.7.1) բանաձևում նաև անհայտ պարամետրեր՝ x_1, x_2, \dots, x_n հանգույցները և A գործակիցը: Այդ անհայտները սրոշվում են այն պայմանից, որ (6.7.1) բանաձևը պետք է լինի ճշգրիտ:

$$f(x) = x^m, \quad m = 0, 1, \dots, n$$

ֆունկցիաների համար, այսինքն՝

$$A \sum_{k=1}^n x_k^m = \mu_m, \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad (6.7.2)$$

որտեղ

$$\mu_m \equiv \int_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} : \quad (6.7.3)$$

Վերցնելով $m = 0$, (6.7.2) և (6.7.3)-ից կստանանք

$$An = b - a$$

հավասարությունը, որտեղից Լլ գտնում նաք

$$A = \frac{b - a}{n} : \quad (6.7.4)$$

Այնուհետև, $m = 1, 2, \dots, n$ արժեքների համար (6.7.2) և (6.7.4)-ից ունենք՝

$$\sum_{k=1}^n x_k^m = \frac{\mu_m}{A} = \frac{n}{b - a} \mu_m :$$

Այսպիսով, հանգույցների որոշման համար ստանում ենք ոչ զծային հավասարումների համակարգ.

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n x_k &= \frac{n}{b - a} \mu_1 \\ \sum_{k=1}^n x_k^2 &= \frac{n}{b - a} \mu_2 \\ \dots &\dots \\ \sum_{k=1}^n x_k^n &= \frac{n}{b - a} \mu_n \end{cases} : \quad (6.7.5)$$

Դիտողություն 6.7.1 : Պ.Լ.Չերիշև ցոյց է տվել, որ (6.7.5) համակարգի լուծումը հանգում է որպակի ո՞ր աստիճանի հանրահաշվական հավասարման արմատների որոշմանը (տես [4],[27],[34]):

Ինչպես ապացուցել է Ս.Ն.Բեռնշտեյնը, $n = \delta$ և $n \geq 10$ արժեքների համար (6.7.5) համակարգը չունի իրական լուծումներ: Այսինքն, n -ի նշանը արժեքների դեպքում Չերիշևի բառակուսացման բանաձև գոյություն չունի: Այդ փաստի ապացույցը կարելի է գտնել [21]-ում: Հենց սա է Չերիշևի բանաձևի սկզբունքային թերությունը:

Օրինակ 6.7.1 : $[-1, 1]$ հատվածում արտածել Չերիշևի բանաձևը $n = 3$ դեպքի համար:

Ըստ (6.7.4) բանաձևի՝ $A = 2/3$: Հանգույցների որոշման համար, համաձայն (6.7.5)-ի, ունենք հետևյալ հավասարումների համակայություն:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0 \end{cases} : \quad (6.7.6)$$

Խնդիրը բերենք երրորդ կարգի հանրահաշվական բազմանդամի արմատների որոշմանը (տես դիտողություն 6.7.1): Դրա համար ներմուծենք հետևյալ մեծությունները.

$$\begin{aligned} C_2 &= x_1 + x_2 + x_3, \\ C_1 &= x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1, \\ C_0 &= x_1 x_2 x_3 : \end{aligned}$$

Այդ դեպքում, ինչպես հայտնի է, x_1, x_2, x_3 -ը

$$x^3 - C_2 x^2 + C_1 x - C_0 = 0 \quad (6.7.7)$$

հանրահաշվական հավասարման արմատներն են (տես, օրինակ, [23]): Օգտվելով (6.7.6) առնչություններից՝ կգտնենք

$$C_2 = 0, \quad C_1 = \frac{1}{2} [(x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)] = -\frac{1}{2},$$

$$C_0 = \frac{1}{6} [(x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)] = 0 :$$

Դրանով իսկ (6.7.7) հավասարումը կը նդունի

$$x^3 - \frac{1}{2} x = 0$$

տեսքը: Լուծելով այն, կգտնենք

$$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} :$$

Այսպիսով, ստանում ենք

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{2}{3} \left(f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right)$$

քառակուսացման բանաձևը, որը ճշգրիտ է քազմանդամների H_3 դասում: ♣

Բերենք $[-1, 1]$ հատվածի համար Զեբիչեի քառակուսացման բանաձևի հանգույցների թվային արժեքները (տես [4],[27]).

n = 1	n = 6
$x_1 = 0$	$-x_1 = x_6 = 0.8662468181$
n = 2	$-x_2 = x_5 = 0.4225186538$
$-x_1 = x_2 = 0.5773502691$	$-x_3 = x_4 = 0.2666354015$
n = 3	n = 7
$-x_1 = x_3 = 0.7071067812$	$-x_1 = x_7 = 0.8838617008$
$x_2 = 0$	$-x_2 = x_6 = 0.5296567753$
n = 4	$-x_3 = x_5 = 0.32391118105$
$-x_1 = x_4 = 0.7946544723$	$x_4 = 0$
$-x_2 = x_3 = 0.1875924741$	n = 9
n = 5	$-x_1 = x_9 = 0.9115893077$
$-x_1 = x_5 = 0.8324974870$	$-x_2 = x_8 = 0.6010186554$
$-x_2 = x_4 = 0.3745414096$	$-x_3 = x_7 = 0.5287617831$
$x_3 = 0$	$-x_4 = x_6 = 0.1679061842$
	$x_5 = 0$

Կամայական $[a, b]$ հատվածի համար Զեբիչեի բանաձևի հանգույցները հեշտ է ստանալ, եթե օգտվենք արդեն քազմաթիվ անգամ օգտագործված այդ հատվածի արտապատկերումից $[-1, 1]$ հատվածի վրա.

$$x = \frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}, \quad \xi \in [-1, 1] :$$

Ստորև բերված են արտահայտություններ Զեբիչեի քառակուսացման բանաձևների

$$R_n(f) \equiv I(f) - Q_n(f)$$

սխալանքների համար.

$$\begin{aligned} R_1(f) &= \frac{1}{3} f^{(2)}(\eta_1), & R_2(f) &= \frac{1}{135} f^{(4)}(\eta_2), \\ R_3(f) &= \frac{1}{360} f^{(4)}(\eta_3), & R_4(f) &= \frac{2}{42525} f^{(6)}(\eta_4), \\ R_5(f) &= \frac{13}{544320} f^{(6)}(\eta_5), & R_6(f) &= \frac{1}{3969000} f^{(8)}(\eta_6), \\ R_7(f) &= \frac{281}{1959552000} f^{(8)}(\eta_7), & R_9(f) &= \frac{74747}{11200 \cdot 9 \cdot 11!} f^{(10)}(\eta_9), \end{aligned}$$

որտեղ $\eta_i \in [a, b]$ ($i = 1, 2, \dots, 7, 9$) (տես [4]):

6.8 Աղապտիվ ալգորիթմներ

Թվային ինտեգրման սխալանըների բանաձևերի արտահայտություններից երեսում է, որ ստացվելիք արդյունքների ճշտությունը կախված է ինչպես ենթախնտեգրալային ֆունկցիայի փոփոխման բնույթից, այնպես էլ քառակուսացման բանաձևի քայլից: Պարզ է, որ քաղցածելի ճշտության հասնելու համար կտրուկ փոփոխվող ֆունկցիայի ինտեգրման ժամանակ քայլը պետք է ընտրել ավելի փոքր, քան դանդաղ փոփոխվող ֆունկցիայի ինտեգրման դեպքում: Գործնականում հաճախ լինում են դեպքեր, երբ ենթախնտեգրալային ֆունկցիան ինտեգրման միջակայքի առանձին մասերում փոփոխվում է տարրեր ձևով: Դրա հետ կապված, անհրաժեշտություն է ծագել կառուցել հատուկ տիպի ալգորիթմներ, որոնք ավտոմատ կերպով հարմարվում են ֆունկցիայի փոփոխման բնույթին: Թվային ինտեգրման այդպիսի ալգորիթմները կոչվում են **աղապտիվ**: Նրանք թույլ են տալիս օգտագործել քառակուսացման բանաձևեր, որոնք ինտեգրման միջակայքի առանձին մասերում ունեն տարրեր քայլեր: Դա հնարավորություն է տալիս նվազեցնել մեքենայական ժամանակը առանց հաշվարկների ճշտության կորստի: Ընդգծենք, որ այդպիսի մոտեցումը ենթադրում է, որ ենթախնտեգրալային ֆունկցիան տրվում է անալիտիկորեն և ոչ թե աղյուսակի տեսքով:

Աղապտիվ ալգորիթմներ իրականացնող ծրագրերը սովորաբար մտնում են համակարգչի մաքենատիպական ապահովման մեջ՝ ստանդարտ ենթածրագրերի տեսքով: Օգտագործողը տալիս է ինտեգրման հատվածի սահմանները (*a* և *b*), պահանջվող ճշտությունը ($\varepsilon > 0$) և կազմում է ծրագրի բլոկ՝ ներախնտեգրալային $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքները հաշվելու համար: Ծրագիլը հաշվում է

$$I(f) \equiv \int_a^b f(x) dx$$

ինտեգրալի $Q(f)$ մոտավոր արժեքը տրված ε ճշտությամբ, այսինքն՝

$$|Q(f) - I(f)| < \varepsilon :$$

Դիտողություն 6.8.1 : Գործնականում ոչ բոլոր ֆունկցիաների համար է հնարավոր հաշվել ինտեգրալը տրված ճշտությամբ: Ուստի ծրագրում սովորաբար նախատեսված է լինում հաղորդագրություն օգտագործողին՝ պահանջվող ճշտության անհասանելիության վերաբերյալ: Այդ դեպքում ինտեգրալը հաշվում է հնարավոր նվազագույն սխալանքով:

Դիտարկենք համառոտակի աղապտիվ ալգորիթմի աշխատանքի սկզբունքը: Նախ $[a, b]$ հատվածը տրոհվում է m մասերի

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b \quad (6.8.1)$$

բաժանման կետերի միջոցով: Դիցուք $h_i \equiv x_i - x_{i-1}$: Յուրաքանչյուր $[x_{i-1}, x_i]$ հատվածում

$$I_i(f) \equiv \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx$$

ինտեգրալը հաշվվում է δ_i լոկալ սխալանքով, որտեղ

$$|\delta_i| < \frac{h_i}{b-a} \varepsilon : \quad (6.8.2)$$

Այդ դեպքում, եթե $Q_i(f)$ -ը $I_i(f)$ ինտեգրալի մոտավոր արժեքն է՝ հաշված δ_i ճշտությամբ, ապա

$$I(f) = \sum_{i=1}^m I_i(f) = \sum_{i=1}^m [Q_i(f) + \delta_i] = \sum_{i=1}^m Q_i(f) + \sum_{i=1}^m \delta_i : \quad (6.8.3)$$

Եթե վերցնենք

$$Q(f) \equiv \sum_{i=1}^m Q_i(f)$$

մեծությունը որպես $I(f)$ ինտեգրալի մոտավոր արժեք, ապա կստանանք պահանջվող ճշտությունը: Իբրոք, (6.8.2) և (6.8.3)-ից ունենք

$$|I(f) - Q(f)| \leq \sum_{i=1}^m |\delta_i| < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^m h_i = \varepsilon :$$

Դիտողություն 6.8.2 : Աղասիովի ալգորիթմները, որպես կանոն, կատարում են $[a, b]$ հատվածի (6.8.1) տրոհումը ավտոմատ կերպով:

Յուրաքանչյուր $[x_{i-1}, x_i]$ տարրական հատվածում, $I_i(f)$ ինտեգրալի հաշվման համար կիրառվում է որոշակի քառակուսացման բանաձև: Դիցուք դա լինի, օրինակ, Սիմպոնի բանաձևը: Նախ հաշվվում է $Q_i^{(1)}(f)$ մոտավոր արժեքը $h_i/2$ քայլով.

$$Q_i^{(1)}(f) = \frac{h_i}{6} \left[f(x_{i-1}) + 4f\left(x_{i-1} + \frac{h_i}{2}\right) + f(x_i) \right] :$$

Այնուհետև կատարվում են հաշվարկներ $h_i/4$ քայլով, այսինքն՝

$$Q_i^{(2)}(f) = \frac{h_i}{12} \left[f(x_{i-1}) + 4f\left(x_{i-1} + \frac{h_i}{4}\right) + 2f\left(x_{i-1} + \frac{h_i}{2}\right) + 4f\left(x_{i-1} + \frac{3h_i}{4}\right) + f(x_i) \right]$$

և այլն: Այս ընթացքը շարունակվում է այնքան, քանի դեռ չի ապահովվել δ ճշտությունը: Այդ նպատակի համար կարելի է կիրառել, օրինակ, սխալանքի գործնական զնահատման Ռուսկեի կանոնը (տես (6.4.9) բանաձևը), այն է՝ որպես ընթացքի ավարտման չափանիշ օգտագործել

$$\frac{|Q_i^{(k)}(f) - Q_i^{(k-1)}(f)|}{2^p - 1} < |\delta_i|$$

պայմանը (Սիմպոնի բանաձևի համար $p = 4$): Հենց որ նշված պայմանը քավարարվում է, ընթացքը դադարեցվում է և վերցվում է $Q_i(f) \equiv Q_i^{(k)}(f)$:

Հատուկ ուշադրություն դարձնենք այն բանի վրա, որ բառակուսացման բանաձևի քայլի հաջորդական փոքրացումը երկու անգամ հնարավորություն է տալիս օգտագործել $f(x)$ ֆունկցիայի արդեն հաշված արժեքները $\{x_{i-1}, x_i\}$ հատվածի նախորդ տրոհման հանգույցներում: Դա եապես տնտեսում է մերենայական ժամանակը:

Վերջում մեկ անգամ ևս նշենք, որ այստեղ մենք նկարագրեցինք աղապտիվ ալգորիթմների կառուցման միայն հիմնական սկզբունքները շնունդով մանրամասնությունների մեջ: Այդ հարցերի ավելի մանրամասն և ամբողջական շարադրանքը կարելի է գտնել հատուկ գրականության մեջ (տե՛ս նաև [2],[28],[46],[53] գրքերը):

6.9 Անխկական ինտեգրալների հաշվումը

Գործնականում հաճախ են հանդիպում խնդիրներ՝ կապված *անխկական ինտեգրալների* հաշվման հետ: Դրանք անվերջ սահմաններով կամ անսահմանափակ ֆունկցիաներից ինտեգրալներ են:

6.9.1 Անխկական ինտեգրալների մոտավոր հաշվման ընդհանուր սկզբունքը

Դիտարկենք

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (6.9.1)$$

ինտեգրալի հաշվումը, որտեղ $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է, եթե $a \leq x < +\infty$: Այս ինտեգրալը կոչվում է *զուգամետ*, եթե գոյություն ունի ինտեյալ վերջավոր սահմանը.

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx : \quad (6.9.2)$$

Այդ դեպքում, ըստ սահմանման՝

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx : \quad (6.9.3)$$

Եթե (6.9.2) սահմանը անվերջ է կամ գոյություն չունի, ապա (6.9.1) ինտեգրալը կոչվում է *տարամետ* (տե՛ս օրինակ, [45]):

Որպեսզի հաշվենք (6.9.1) գուգամետ անխսկական ինտեգրալը ε ճշտությամբ, ներկայացնենք այն ինտեղալ գումարի տեսքով.

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^A f(x) dx + \int_A^{+\infty} f(x) dx : \quad (6.9.4)$$

Քանի որ ինտեգրալը գուգամետ է, ապա A թիվը կարելի է ընտրել այնքան մեծ, որ

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} : \quad (6.9.5)$$

Այնուհետև,

$$\int_a^A f(x) dx \quad (6.9.6)$$

ինտեգրալը հաշվում է որևէ քառակուսացման քանածելով: Դիցուք $Q(f)$ -ը (6.9.6) ինտեգրալի մոտավոր արժեքն է $\varepsilon/2$ ճշտությամբ, այսինքն՝

$$\left| \int_a^A f(x) dx - Q(f) \right| < \frac{\varepsilon}{2} : \quad (6.9.7)$$

Այդ դեպքում (6.9.4),(6.9.5) և (6.9.7)-ից կստանանք՝

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x) dx - Q(f) \right| \leq \left| \int_a^A f(x) dx - Q(f) \right| + \left| \int_A^{+\infty} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon :$$

Այսպիսով, $Q(f)$ -ը (6.9.1) ինտեգրալի մոտավոր արժեքն է ε ճշտությամբ:

Օրինակ 6.9.1 : Դիցուք պահանջվում է հաշվել $\varepsilon > 0$ ճշտությամբ

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x+\sin^2 x} dx \quad (6.9.8)$$

ինտեգրալը:

Գրենք այդ ինտեգրալը ինտեղալ գումարի տեսքով.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x+\sin^2 x} dx = \int_0^A \frac{e^{-x}}{1+x+\sin^2 x} dx + \int_A^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x+\sin^2 x} dx :$$

Օգտվենք

$$\left| \int_A^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x+\sin^2 x} dx \right| \leq \int_A^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_A^{+\infty} = \frac{1}{e^A}$$

զնահատականից: Այստեղից հետևում է, որ պահանջվող ճշտությամբ (6.9.8) ինտեգրալի հաշվման համար բավական է վերցնել

$$A > \ln \frac{2}{\varepsilon} : \quad \clubsuit$$

Այժմ դիտարկենք

$$\int_a^b f(x) dx \quad (6.9.9)$$

ինտեգրալը, որտեղ $f(x)$ ֆունկցիան $[a, b]$ հատվածի ինչ-որ c ներքին կետում ունի երկրորդ սեռի խզում: Ըստ սահմանման՝

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\delta_1 \rightarrow +0 \\ \delta_2 \rightarrow +0}} \left\{ \int_a^{c-\delta_1} f(x) dx + \int_{c+\delta_2}^b f(x) dx \right\}, \quad (6.9.10)$$

և եթե գոյություն ունի վերջավոր սահման, ինտեգրալը կոչվում է *գուգամետ*, իսկ հակառակ դեպքում՝ *տարամետ* (տե՛ս, օրինակ, [45]):

Տրված $\varepsilon > 0$ ճշտությամբ գուգամետ (6.9.9) անիսկական ինտեգրալի հաշվման համար ընտրում են δ_1 և δ_2 դրական թվերը այնքան փոքր, որ տեղի ունենա

$$\left| \int_{c-\delta_1}^{c+\delta_2} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (6.9.11)$$

անհավասարությունը: Այնուհետև, մոտավոր ինտեգրման բանաձևերով հաշվում են

$$\int_a^{c-\delta_1} f(x) dx \quad \text{և} \quad \int_{c+\delta_2}^b f(x) dx \quad (6.9.12)$$

ինտեգրալները: Դիցուք $Q^{(1)}(f)$ և $Q^{(2)}(f)$ -ը համապատասխանաբար (6.9.12) ինտեգրալների մոտավոր արժեքներն են $\varepsilon/4$ ճշտությամբ, այսինքն՝

$$\left| \int_a^{c-\delta_1} f(x) dx - Q^{(1)}(f) \right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{և} \quad \left| \int_{c+\delta_2}^b f(x) dx - Q^{(2)}(f) \right| < \frac{\varepsilon}{4} : \quad (6.9.13)$$

Վերցնենք $Q(f) = Q^{(1)}(f) + Q^{(2)}(f)$: Ունենալով (6.9.11) և (6.9.13)-ը՝ կստանանք

$$\left| \int_a^b f(x) dx - Q(f) \right| \leq \left| \int_a^{c-\delta_1} f(x) dx - Q^{(1)}(f) \right| + \left| \int_{c+\delta_2}^b f(x) dx - Q^{(2)}(f) \right| +$$

$$\left| \int_{c+\delta_2}^b f(x) dx - Q^{(2)}(f) \right| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon :$$

Այսախով, $Q(f)$ -ն էլ հենց կլինի (6.9.9) ինտեգրալի մոտավոր արժեքը տրված ճշտությամբ:

Նույն կերպ որոշվում է (6.9.9) անիսկական ինտեգրալի գուգամիտուրյունն այն դեպքում, եթե $f(x)$ ենրախինտեգրալային ֆունկցիայի c խզման կետը համընկնում է $[a, b]$, հատվածի որևէ ծայրակետի հետ: Այդ դեպքում հաշվման եղանակը ակնհայտորեն ձևափոխվում է:

Օրինակ 6.9.2 : Դիցուք պահանջվում է $\varepsilon > 0$ ճշտությամբ հաշվել

$$\int_0^1 \frac{g(x)}{\sqrt{x}} dx \quad (6.9.14)$$

ինտեգրալը, որտեղ $g(x)$ -ը անընդիատ ֆունկցիա է $[0, 1]$ հատվածում:

Ներկայացնենք (6.9.14) ինտեգրալը հետևյալ գումարի տեսքով.

$$\int_0^1 \frac{g(x)}{\sqrt{x}} dx = \int_0^\delta \frac{g(x)}{\sqrt{x}} dx + \int_\delta^1 \frac{g(x)}{\sqrt{x}} dx, \quad 0 < \delta < 1 : \quad (6.9.15)$$

Դիցուք $M \equiv \max_{0 \leq x \leq 1} |g(x)|$: Ունենք

$$\left| \int_0^\delta \frac{g(x)}{\sqrt{x}} dx \right| \leq M \int_0^\delta \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2M\sqrt{\delta}$$

գնահատականը: Ընտրենք δ մեծությունը այնպես, որ

$$2M\sqrt{\delta} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

այսինքն՝

$$\delta < \frac{\varepsilon^2}{16M^2} :$$

Այնուհետև (6.9.15) հավասարության աջ մասում գտնվող ելլիրորդ ինտեգրալը հաշվվում է $\varepsilon/2$ ճշտությամբ որևէ քառակուսացման բանաձևով: ♣

Մեկ անգամ ևս ընդգծենք, որ վերը մենք շարադրել ենք անիսկական ինտեգրալների հաշվման միայն ընդհանուր սկզբունքը՝ իիմնված գուգամեատ անիսկական ինտեգրալների հենց տականման վրա: Դրա հետ մեկտեղ գոյություն ունեն հատուկ եղանակներ, որոնք ուղղ դեպքերում բավականին արդյունավետ են:

6.9.2 Անիսկական ինտեգրալների հաշվման հատուկ եղանակները

Անվերջ սահմաններով ինտեգրալների հաշվման եղանակներից մեկը հարմար փոփոխականի փոխարինումն է, որի դեպքում ինտեգրման սահմանները դառնում են վերջավոր:

Օրինակ 6.9.3 : Դիտարկենք

$$I \equiv \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

անիսկական ինտեգրալը: Կատարելով $t = 1/(1+x)$ տեղադրումը, այն կարելի է բերել հետևյալ ինտեգրալին

$$I = \int_0^1 t^{-2} e^{-\left(\frac{1}{t}-1\right)^2} dt : \quad \clubsuit$$

Նշենք, որ փոփոխականի փոխարինման ժամանակ պետք է զգուշ լինել, որպեսզի ենթադրած փոփոխականի ֆունկցիայի մեջ չմտցվի անցանկայի եզակիություն:

Օրինակ 6.9.4 : Կատարենք

$$I \equiv \int_0^{+\infty} (1+x^2)^{-4/3} dx$$

ինտեգրալում $t = 1/(1+x)$ փոփոխականի փոխարինում: Արդյունքում կստանանք

$$I = \int_0^1 (t^2 + (1-t)^2)^{-4/3} t^{2/3} dt :$$

Սակայն այս ինտեգրալում, ինչպես դժվար չէ ստուգել, ենթադրած փոփոխականի ֆունկցիայի ածանցյալը սահմանափակ չէ $t = 0$ կետում: Դա կարող է բերել մեծ սխալամբների նույնիսկ պարզագույն քառակուսացման բանաձևերի կիրառման ժամանակ: Նշված բերությունից կարելի է ազատվել $t = z^3$ տեղադրմամբ: Իրոք,

$$I = \int_0^1 3z^4(z^6 + (1-z^3)^2)^{-4/3} dz :$$

Այսուղ արդեն ենթադրած փոփոխականի ածանցյալը անընդիատ է: ♣

Փոփոխականի հարմար փոխարինումը հաճախ օգտակար է լինում նաև անսահմանափակ փոփոխականներից ինտեգրալների հաշվման ժամանակ:

Օրինակ 6.9.5 : Հեշտությամբ կարելի է ցույց տալ, որ

$$I \equiv \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$$

անհսկական ինտեգրալը $x = t^2$ տեղադրմամբ բերվում է հետևյալ ինտեգրալին.

$$I = \int_0^1 2e^{t^2} dt : \quad \clubsuit$$

Որոշ դեպքերում անհսկական ինտեգրալը մասերով ինտեգրման միջոցով բերվում է որոշյալ ինտեգրալի:

Օրինակ 6.9.6 : Դիտարկենք նախորդ օրինակի ինտեգրալը.

$$I \equiv \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx :$$

Կատարելով մասերով ինտեգրում կստանանք

$$I = 2 \int_0^1 (\sqrt{x})' e^x dx = 2e - 2 \int_0^1 \sqrt{x} e^x dx :$$

Ազ մասում մնացած ինտեգրալը արդեն որոշյալ ինտեգրալ է, և նրա նկատմամբ կարելի է կիրառել որևէ քառակուսացման քանածել: Սակայն ենթախնտեգրալային ֆունկցիայի ածանցյալը սահմանափակ չէ $x = 0$ կետում (այդ կապակցությամբ տես 6.9.4 օրինակի դատողությունները): Ծարունակենք մասերով ինտեգրումը.

$$I = 2e - \frac{4}{3} \int_0^1 (x^{3/2})' e^x dx = \frac{2}{3} e + \frac{4}{3} \int_0^1 x^{3/2} e^x dx :$$

Այժմ արդեն վերջին ինտեգրալում ենթախնտեգրալային ֆունկցիայի ածանցյալը անընդհատ է $[0, 1]$ հաստիվում: Սակայն երկրորդ կարգի ածանցյալը դեռ սահմանափակ չէ $x = 0$ կետում: Ուստի, եթե ուզում ենք կիրառել ավելի քարձր կարգի ճշտություն ունեցող քառակուսացման քանածեներ, քան ծախս կամ ազ ուղղանկյունների քանածեները, ապա մասերով ինտեգրման լնթացքը կարելի է շարունակել: ♣

Անսահմանափակ ֆունկցիաներից ինտեգրալների մոտավոր հաշվման համար հաճախ օգտակար է լինում եզակիության գումարային առանձնացման մեթոդը: Այդ մեթոդի հորիզոնը, որն առաջարկել է Լ.Վ.Կանտորովիչը, հետևյալն է: Ենթախնտեգրալային ֆունկցիան ներկայացվում է

$$f(x) = S(x) + g(x) \tag{6.9.16}$$

տեսքով, որտեղ $S(x)$ ֆունկցիան ունի նույն եզակիությունը, ինչ $f(x)$ ֆունկցիան, սակայն այդ ֆունկցիայի ինտեգրալը կարելի է հաշվել ճշգրիտ, իսկ $g(x)$ -ը $[a, b]$ հատվածում քավականացակի ողորկ ֆունկցիա է:

Օրինակ 6.9.7 : Դիցուք պահանջվում է հաշվել

$$I \equiv \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx$$

իմտեգրալը: Դժվար չէ տեսնել, որ $x = 0$ կետը ենթայնտեղի այս ֆունկցիայի խզման կետն է: Ունենք՝

$$\ln \sin x = \ln x + \ln \frac{\sin x}{x} :$$

Այստեղ $\ln x$ ֆունկցիան նույնպես խզվող է $x = 0$ կետում, սակայն այն ճշգրիտ իմտեգրվում է՝

$$\int_0^{\pi/2} \ln x \, dx = x(\ln x - 1) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \left(\ln \frac{\pi}{2} - 1 \right) :$$

Իսկ անընդհատ $\ln \frac{\sin x}{x}$ ֆունկցիայի իմտեգրալը արդեն կարելի է հաշվել որևէ բառակուսացման բանաձևով: ♣

Վերջում դիտարկենք եզակիության գումարային առանձնացման մեթոդի կիրառությունը

$$I \equiv \int_a^b \frac{\varphi(x)}{(x - c)^\alpha} \, dx$$

տիպի իմտեգրալի հաշվման համար, որտեղ $c \in [a, b]$, $0 < \alpha < 1$ և $\varphi(x) \in C^{m+1}[a, b]$:

Հաստ թեյլորի բանաձևի ունենք

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^m \frac{\varphi^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k + \psi(x),$$

որտեղ

$$\psi(x) = \frac{\varphi^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x - c)^{m+1}, \quad \xi \in (a, b) : \quad (6.9.17)$$

Այստեղից՝

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=0}^m \frac{\varphi^{(k)}(c)}{k!} \int_a^b (x - c)^{k-\alpha} \, dx + \int_a^b \frac{\psi(x)}{(x - c)^\alpha} \, dx \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{\varphi^{(k)}(c)}{k!(k+1-\alpha)} [(b-c)^{k+1-\alpha} - (a-c)^{k+1-\alpha}] + \int_a^b \frac{\psi(x)}{(x - c)^\alpha} \, dx : \end{aligned} \quad (6.9.18)$$

Այսուհետև, (6.9.17)-ից հետևում է, որ

$$\frac{\psi(x)}{(x - c)^\alpha} \in C^m[a, b] .$$

(դրանում համոզվել ինքնուրույն): Ուստի (6.9.18) հավասարության աջ մասում գտնվող իմտեգրալը կարելի է հաշվել համապատասխան բառակուսացման բանաձևի օգնությամբ:

ԽՄԴՀՐՄԵՐ և ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ - 6

1. Տրված են հետևյալ ինտեգրալները.

$$1) \int_0^1 \sin x^2 dx, \quad 2) \int_0^1 \exp(x^2) dx :$$

Գնահատել համգույցների թիվը, որը բավարար է միջին ուղղանկյունների և սեղանների ընդհանրացված բանաձևերում այդ ինտեգրալները 10^{-4} ճշտությամբ հաշվելու համար:

2. Արտածել աջ ուղղանկյունների բանաձևի (6.2.9) սխալանքը:

3. Գտնել

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

ինտեգրալի հաշվման սխալանքն ըստ

$$Q(f) = [f(0) + 2f(0.1) + 2f(0.2) + \dots + 2f(0.9) + f(1.0)]/20$$

բառակուսացման բանաձևի:

4. Դիցուք

$$\int_0^1 f(x) dx$$

ինտեգրալի հաշվման համար օգտագործվում է սեղանների ընդհանրացված բանաձևը: Գնահատել համգույցների բանակը, որն ապահովում է $0.5 \cdot 10^{-4}$ ճշտությունը $\max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)| \leq 1$ պայմանին բավարարող $f(x)$ ֆունկցիաների դասում:

5. Դիցուք

$$\int_0^2 f(x) dx$$

ինտեգրալի հաշվման համար օգտագործվում է Սիմպոնի ընդհանրացված բանաձևը: Գնահատել համգույցների բանակը, որն ապահովում է $0.5 \cdot 10^{-4}$ ճշտությունը $\max_{0 \leq x \leq 2} |f^{(1)}(x)| \leq 1$ պայմանին բավարարող $f(x)$ ֆունկցիաների դասում:

6. Սիմպոնի ընդհանրացված բանաձևում քանի³ հանգույց պետք է վերցնել

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$$

ինտեգրալը 10^{-4} ճշտությամբ հաշվելու համար:

7. Գտնել

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

ինտեգրալի հաշվման սխալանքն ըստ

$$Q(f) = [f(0) + 4f(0.1) + 2f(0.2) + 4f(0.3) + \cdots + 4f(0.9) + f(1.0)]/30$$

բառակուսացման բանաձևի:

8. Որոշել՝ ինչ ճշտությամբ կարելի է հաշվել

$$\int_0^1 \sin(e^x) dx$$

ինտեգրալը միջին ուղղանկյունների, սեղանների և Սիմպոնի լոնդիանրացված բանաձևների օգնությամբ, վերցնելով ինը հանգույց:

9. Ստանալ (6.4.17) արտահայտությունը ձախ ուղղանկյունների բանաձևի սխալանքի համար:

10. Ստանալ (6.4.18) արտահայտությունը աջ ուղղանկյունների բանաձևի սխալանքի համար:

11. Ստանալ (6.4.19) արտահայտությունը միջին ուղղանկյունների բանաձևի սխալանքի համար:

12. Ստանալ (6.4.20) արտահայտությունը Սիմպոնի բանաձևի սխալանքի համար:

13. Ապացուցել, որ

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{90} \left[7f(0) + 32f\left(\frac{1}{4}\right) + 12f\left(\frac{1}{2}\right) + 32f\left(\frac{3}{4}\right) + 7f(1) \right]$$

բառակուսացման բանաձևը ճշգրիտ է չորրորդ կարգի հանրահաշվական բազմանդամների համար:

14. Արտածել ինտերպոլացիոն բառակուսացման բանաձև

$$\int_0^1 f(x) dx$$

ինտեգրալը հաշվելու համար, վերցնելով որպես հանգույցներ՝ $-2, -1$ և 0 կետերը: Հաշվել այդ բանաձևի օգնությամբ $f(x) = \sin \pi x$ ֆունկցիայի ինտեգրալը:

15. Կիրառելով անորոշ գործակիցների մեթոդ՝ արտածել սեղանների և Սիմպոնի բանաձևերը:

16. Ելնելով

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$$

հավասարությունից, գտնել π թվի մոտավորությունները:

17. Կառուցել երկրորդ աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների համար ճշգրիտ

$$\int_1^3 f(x) dx \approx Af(0) + Bf(2) + Cf(4)$$

բառակուսացման բանաձևը:

18. Կառուցել

$$\int_0^1 f(x) dx \approx A_0 f(0) + A_1 f\left(\frac{2}{3}\right),$$

բառակուսացման բանաձևը, որը ճշգրիտ է հնարավորին բարձր աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների համար:

19. Կառուցել

$$\int_0^1 f(x) dx \approx A_0 f\left(\frac{1}{2}\right) + A_1 f\left(\frac{2}{3}\right)$$

բառակուսացման բանաձևը, որը ճշգրիտ է հնարավորին բարձր աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների համար:

20. Կառուցել

$$\int_0^2 f(x) dx \approx A_0 f(0) + A_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + A_2 f(2)$$

բառակուսացման բանաձևը, որը ճշգրիտ է հնարավորին բարձր աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների համար:

21. Գտնել $f(x) = ae^x + b \cos(\pi x/2)$ տեսքի ֆունկցիաների դասում ճշգրիտ

$$\int_0^1 f(x) dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1)$$

բառակուսացման բանաձևի գործակլիցները:

22. Գտնել $f(x) = a + b \cos x$ տեսքի ֆունկցիաների դասում ճշգրիտ

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx \approx A_1 f(0) + A_2 f(\pi)$$

քառակուսացման բանաձևի գործակիցները: Ապացուցել, որ այս բանաձևը ճշգրիտ կլինի նաև

$$f(x) = \sum_{k=0}^n [a_k \cos((2k+1)x) + b_k \sin kx]$$

տեսքի ֆունկցիաների դասում:

23. Դիցուք T -ն եռանկյուն է $x = (x_1, x_2)$ հարթության վրա և A, B, C կետերը նրա կողմերի միջնակետերն են: Ցույց տալ, որ

$$\int_T f(x) dx \approx \frac{mes(T)}{3} [f(A) + f(B) + f(C)]$$

քառակուսացման բանաձևը ճշգրիտ է

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$$

տեսքի երկրորդ աստիճանի բազմանդամների համար:

24. Դիցուք R -ը ուղղանկյուն է $x = (x_1, x_2)$ հարթության վրա և A, B, C, D կետերը նրա կողմերի միջնակետերն են, իսկ E -ն նրա կենտրոնն է: Ցույց տալ, որ

$$\int_R f(x) dx \approx \frac{mes(R)}{6} [f(A) + f(B) + f(C) + f(D) + 2f(E)]$$

քառակուսացման բանաձևը ճշգրիտ է երկու փոփոխականի երրորդ աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների համար:

25. $[-1, 1]$ հատվածում դրս բերել Գաուսի քառակուսացման բանաձևը $n = 3$ համար:

26. Հաշվել Գաուսի բանաձևի $R_n(f)$ սխալանը $f(x) = x^{2n+2}$ ֆունկցիայի համար: Ցույց տալ, որ

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [2^{2n+2} R_n(f)] = \pi :$$

27. Ապացուցել, որ ցանկացած անընդիւստ ֆունկցիայի համար Գաուսի բանաձևի սխալանը $R_n(f) \rightarrow 0$, եթե $n \rightarrow \infty$:

28. $[-1, 1]$ հատվածում կառուցել Զերիշևի քառակուսացման բանաձևը $n = 2$ և $n = 3$ համար:

29. $[0, 2]$, $[0, 1]$ և $[-1, 0]$ հատվածներում կառուցել երեք հանգույցներով Չեբիչևի քառակուսացման բանաձևերը:

30. α -ի ինչպիսի՞ արժեքների համար

$$\int_0^2 f(x) dx \approx f(\alpha) + f(2 - \alpha)$$

քառակուսացման բանաձևը ճշգրիտ է երրորդ աստիճանի հանրահաշվական քազմանդամների դասում:

31. Դիցուք պահանջվում է հաշվել

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

ինտեգրալը: Կիրառելով $x = 1/z$ փոփոխականի փոխարինումը և հաջորդող մասերով ինտեգրումը՝ հանգեցնել որոշյալ ինտեգրալի հաշվմանը:

32. Առաջարկել հետևյալ ինտեգրալների հաշվման եղանակները.

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{\arctgx}{1+x^3} dx, \quad 2) \int_1^{+\infty} \frac{xe^{-x^2}}{2+\sin x} dx, \quad 3) \int_5^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^5}}, \quad 4) \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{2+x} dx :$$

33. Կիրառելով եզակիության գումարային առանձնացման մեթոդ՝ առաջարկել հետևյալ ինտեգրալների հաշվման եղանակները.

$$1) \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx, \quad 2) \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} :$$

34. Կիրառելով եզակիության գումարային առանձնացման մեթոդ՝ հաշվել 10^{-4} ճշտությամբ հետևյալ ինտեգրալները.

$$1) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)^{3/4}}, \quad 2) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)},$$

$$3) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}(e^{x/2}+3)}, \quad 4) \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx :$$

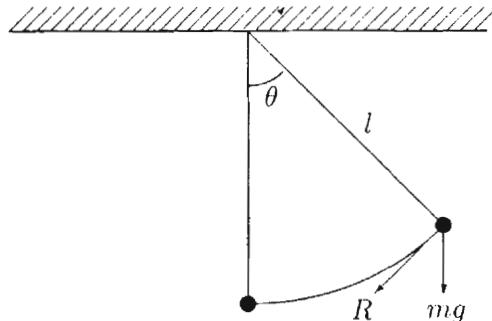
Գլուխ 7

ՍՈՎՈՐԱԿԱՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ

7.1 Կոշու խնդիրը

Մեխանիկայի, ֆիզիկայի, քիմիայի, գիտության և տեխնիկայի այլ բնագավառների շատ խնդիրներ նարեմատիկական մոդելավորման ժամանակ հանգում են սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների: Ուստի այդ հավասարումների լուծումը կարևոր տեղ է գրադեցնում կիրառական մաթեմատիկայում: Բերենք սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներով նկարագրվող խնդիրների մի քանի օրինակ:

Օրինակ 7.1.1 (ճոճանակի ազատ տատանումներ): Դիցուք l երկարության ծովի վրա ամրացված m զանգվածի նյութական մարմինը ծանրության ուժի ազդեցության տակ կատարում է ազատ տատանումներ դիմադրող միջավայրում (նկ. 7.1.1): Ենթադրվում է, որ ծովի կշիռը m -ի համեմատությամբ աննշան փոքր է: Այդպիսի ֆիզիկական համակարգը կոչվում է **ճոճանակ**:



Նկ. 7.1.1 ճոճանակի ազատ տատանումներ

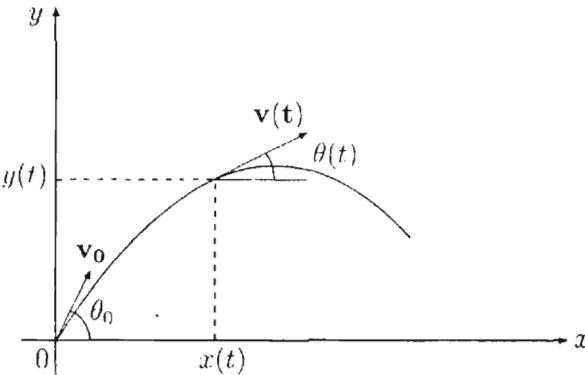
Ծնոճանակի շեղման $\theta(t)$ անկյունը ուղղաձիգ առանցքից ժամանակի t պահին որոշվում է

$$\theta''(t) + a\theta'(t) + b \sin \theta(t) = 0$$

դիֆերենցիալ հավասարումից, որտեղ a -ն և b -ն դրական հաստատումներ են, որոնք կախված են t -ից, m -ից, ազատ անկման g արագությունից և միջավայրի R դիմաքրությունից: Ընդ որում, ժամանակի $t = t_0$ սկզբնական պահին տրվում են սկզբնական շեղումը և սկզբնական անկյունային արագությունը.

$$\theta(t_0) = \theta_0, \quad \theta'(t_0) = \omega_0 : \quad \clubsuit$$

Օրինակ 7.1.2 (Հետագծի խնդիրը): Դիտարկվում է արկի շարժումը, որն արձակվում է երկրագնդի մակերևույթին որոշ անկյան տակ: Մաթեմատիկական մոդելի պարզեցման համար ենթադրվում է, որ արկը տեղափոխվում է այնպիսի հեռավորություն, որի դեպքում, առանց ճշտության կորստի, երկրագնդի մակերևույթը կարելի է համարել տափակ: Ենթադրվում է նաև, որ արկի հետագիծը գտնվում է մի հարթության մեջ. այսինքն՝ ենթադրվում է կողմնական քամու և այլ արգելքների բացակայությունը: Հաշվի առնելով կատարված ենթադրությունները՝ ընտրվում է երկափանի կոռորդինատական համակարգ, որի սկզբնակետը համընկնում է արձակման կետի հետ: Արկի հետագիծը պատկերված է նկ. 7.1.2 -ում:



Նկ. 7.1.2 Արկի հետագիծը

Դիցուք $x(t)$ -ն և $y(t)$ -ն՝ արկի կոռորդինատներն են ժամանակի t պահին: Համարելով, որ արկը արձակված է $t = 0$ պահին, ունենք

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0 \quad (7.1.1)$$

սկզբնական պայմանները: Ժամանակի t պահին արկի արագության վեկտորն է՝ $v(t) = (x'(t), y'(t))$: Նշանակենք արագության վեկտորի մեծությունը $v(t)$ -ով, իսկ

նյա անկյունը հորիզոնի հետ՝ $\theta(t)$ -ով, ինչպես ցույց է տրված նկ. 7.1.2-ում: Այդ մեծությունները որոշվում են

$$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}, \quad \theta(t) = \arctg \frac{y'(t)}{x'(t)} \quad (7.1.2)$$

արտահայտություններից: Արկի շարժման հավասարումները գրվում են

$$x''(t) = -\frac{c\rho s}{2m} v^2(t) \cos \theta(t), \quad y''(t) = -\frac{c\rho s}{2m} v^2(t) \sin \theta(t) - g \quad (7.1.3)$$

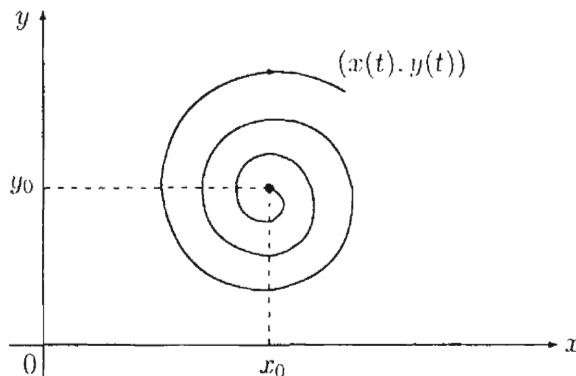
տեսքով, որտեղ m -ը արկի զանգվածն է, s -ը արկի լայնական հատույքն է, c -ն դիմադրության գործակիցն է, ρ -ն օդի խտությունն է, իսկ g -ն՝ ազատ անկման արագացումը: Այսպիսով, ունենք երկու ոչ զծային ((7.1.2) առնչությունների պատճառավ) դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ: (7.1.3) համակարգի լուծումը պետք է բավարարի (7.1.1) սկզբնական պայմաններին: Այլ երկու պայմանները տրվում են

$$v(0) = v_0, \quad \theta(0) = \theta_0 \quad (7.1.4)$$

հավասարություններով, որտեղ v_0 -ն արկի մեկնարկային արագությունն է, իսկ θ_0 -ն՝ արձակման անկյունը: Պարզ է, որ այս երկու պարամետրերի փոփոխությունը կրերի հետագծի փոփոխությանը:



Օրինակ 7.1.3 (Գիշատիչ-զոհ մոդելը): Դիտարկվում է երկու կենսաբանական տեսակ-ների պոպուլյացիայի դինամիկան, որոնք միմյանց վրա փոխազդում են զիշատիչ-զոհ սկզբունքով: Ընդ որում, ենթադրվում է, որ զոհը կարող է հայթայթել բավարար սնունդ, բայց զիշատչի հետ ամեն մի հանդիպման ժամանակ վերջինս սպանում է զոհին:



Նկ. 7.1.3 Գիշատիչների և զոհերի պոպուլյացիայի դինամիկա

Գիցուք $x(t)$ -ն և $y(t)$ -ն համապատասխանաբար զոհերի և գիշատիչների քանակներն են ժամանակի t պահին: Որոշ պարզեցումներից հետո դիֆերենցիալ հավասարումները այդ ֆունկցիաների նկատմամբ գրվում են

$$\begin{aligned} x'(t) &= \alpha x(t) + \beta x(t)y(t), \\ y'(t) &= \gamma y(t) + \delta x(t)y(t) \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

տեսքով, որտեղ $\alpha > 0, \beta < 0, \gamma < 0, \delta > 0$ որոշ հաստատումներ են: Ժամանակի $t = 0$ սկզբնական պահին տրվում են

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad (7.1.6)$$

պայմանները: Վերը բերված (7.1.5) հավասարումներն առաջին անգամ արտածվել են 1925 թ. և հայտնի են որպես *Lոտկա-Վլյուերայի հավասարումներ*:

Ինչպես ցոյց են տալիս հետազոտումները, զոհերի և գիշատիչների պոպուլյացիայի դիմամիկան (x, y) հարթության մեջ գրաֆիկորեն բնութագրվում է բացվող պարուրագծով, որը հեռանում է (x_0, y_0) կետից (Ակ. 7.1.3): ♣

Մի շարք հավասարումների համար (օրինակ, անջատվող փոփոխականներով հավասարումներ, հաստատուն գործակիցներով գծային հավասարումներ և այլն) հաջողվում է ստանալ լուծումը բացահայտ տեսքով: Սակայն այն հավասարումների դասերը, որոնց համար մշակված են ճշգրիտ լուծումների ստացման մեթոդներ, համեմատարար նեղ են և ընդգրկում են գործնականում հանդիպող խնդիրների միայն փոքր մասը: Օրինակ, բավականաշափ պարզ

$$u'(x) = x^2 + u^2(x) \quad (7.1.7)$$

հավասարման լուծումը չի ներկայացվում տարրական ֆունկցիաների միջոցով: Ուստի այդպիսի հավասարումների լուծման համար օգտագործվում են մոտավոր մեթոդներ:

Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման մոտավոր մեթոդները տրոհվում են հիմնականում երկու խմբի՝ անալիտիկ և թվային:

Անալիտիկ սովորաբար անվանում են մեթոդները, որոնց միջոցով կառուցվում է $u(x)$ ճշգրիտ լուծմանը ձգտող $u_n(x)$ ֆունկցիաների հիմ-որ հաջորդականություն: Ընդ որում, $u_n(x)$ ֆունկցիաները արտահայտվում են տարրական ֆունկցիաներով կամ ինտեգրալ միջոցով: Սահմանափակվելով n վերջավոր թվով՝ ստանում են մոտավոր արտահայտություն $u(x)$ լուծման համար: Սակայն անալիտիկ մեթոդները հարմար են միայն այն դեպքում, եթե միջանկյալ հաշվարկների մեծ մասը հաջողվում է կատարել ճշգրիտ: Դա իրագործելի է համեմատարար պարզ հավասարումների համար, ինչը խիստ սահմանափակում է կիրառման տիրույթը: Անալիտիկ մեթոդներում երբեմն օգտագործվում են նաև հավասարումների պարզեցումներ, որոնք էապես չեն ազդում լուծման վրա: Որոշ խնդիրներում հաջողվում է լուծումը ներկայացնել երկու բաղադրիչների գումարի տեսքով, որոնցից առաջինը տալիս է հիմնական մեթոդը լուծման մեջ, իսկ երկրորդը փոքր հավելում է, որը կարելի է անտեսել:

Թվային մեթոդները իրենցից ներկայացնում են ալգորիթմներ, որոնց միջոցով հաշվում են որոնելի լուծման արժեքները արգումենտի արժեքների որոշ դիմուլուտ բազության վրա: Առավել տարածված և համակողմանի թվային մեթոդը վերջավոր տարրերությունների կամ տարրերակամ մեթոդն է: Նրա էությունը կայանում է նրանում, որ դիֆերենցիալ հավասարման մեջ գտնվող ածանցյալները փոխարինվում են վերջավոր-տարրերակամ առնչություններով (տես պարագրաֆ 4.6): Տարբերական մեթոդները կիրառելի են խնդիրների շատ լայն դասի համար: Ուստի բավականաշափ

մեծ օպերատիվ հիշողության ծավալ ունեցող արագագործ համակարգիչների երևան գալու հետ մեկտեղ այդ մեթոդները դարձել են դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման հիմնական գործիքներից մեկը:

Սկսենք մոտավոր մեթոդների ուսումնասիրումը Կոչու խնդրից:

Դիտարկենք n -րդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարում

$$u^{(n)}(x) = f(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}) : \quad (7.1.8)$$

Կոչու խնդիրը (7.1.8) հավասարման համար ձևակերպվում է հետևյալ կերպ. գտնել (7.1.8) հավասարման լուծումը, որը $x = x_0$ կետում բավարարում է

$$u(x_0) = u_0, u'(x_0) = u_0^{(1)}, \dots, u^{(n-1)}(x_0) = u_0^{(n-1)} \quad (7.1.9)$$

պայմաններին, որտեղ $u_0, u_0^{(1)}, \dots, u_0^{(n-1)}$ ՝ տրված արժեքներն են: (7.1.9) պայմանները կոչվում են սկզբնակամ պայմաններ:

Սույն դասընթացում մենք կուսումնասիրենք

$$u'(x) = f(x, u), \quad u(x_0) = u_0 \quad (7.1.10)$$

Կոչու խնդրի լուծման մոտավոր մեթոդները:

Ձևակերպենք (7.1.10) խնդրի լուծման գոյության և միակության բավարար պայմանները (տե՛ս, օրինակ, [26],[40],[50]):

Դիցուք $f(x, u)$ ֆունկցիան սահմանված է և անընդիատ

$$D = \{(x, u) : |x - x_0| \leq a, |u - u_0| \leq b\} \quad (7.1.11)$$

փակ սահմանափակ տիրույթում, որտեղ a -ն և b -ն ինչ-որ դրական թվեր են: Ուստի այն սահմանափակ է D տիրույթում, այսինքն՝ գոյություն ունի այնպիսի $M > 0$ թիվ, որ

$$|f(x, u)| \leq M \quad \forall (x, u) \in D : \quad (7.1.12)$$

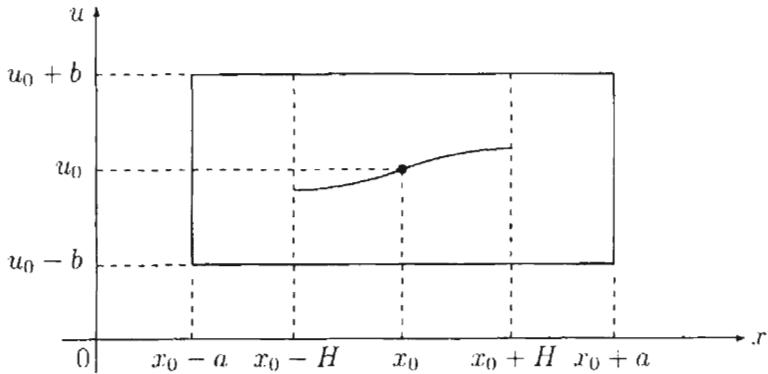
Այնուհետև, դիցուք $f(x, u)$ ֆունկցիան D տիրույթում բավարարում է *Lիպշչիցիալ պայմանին* և փոփոխականի նկատմամբ, այսինքն՝ գոյություն ունի այնպիսի $L > 0$ թիվ, որ

$$|f(x, u_1) - f(x, u_2)| \leq L |u_1 - u_2| \quad \forall (x, u_1), (x, u_2) \in D : \quad (7.1.13)$$

Այդ դեպքում x_0 կետի $|x - x_0| \leq H$ շրջակայքում, որտեղ

$$H \equiv \min \left(a, \frac{b}{M} \right), \quad (7.1.14)$$

գոյություն ունի (7.1.10) խնդրի միակ լուծում (նկ. 7.1.4):



Նկ. 7.1.4 Լուծումը սկզբնական կետի շրջակայքում

Նշենք, որ եթե $f(x, u)$ ֆունկցիան D տիրույթում ունի սահմանափակ $f'_u(x, u)$ մասնակի ածանցյալ, այսինքն՝ գոյություն ունի այնպիսի $L > 0$ թիվ, որ

$$|f'_u(x, u)| \leq L \quad \forall (x, u) \in D. \quad (7.1.15)$$

ապա այն բավարարում է Լիպշչցի պայմանին: Իրոք, լսու Լազրանժի միջյան արժեքի թեորեմի ունենք

$$f(x, u_1) - f(x, u_2) = f'_u(x, \theta u_1 + (1 - \theta)u_2)(u_1 - u_2), \quad 0 < \theta < 1 :$$

Այստեղից ակնհայտորեն հետևում է (7.1.13) անհավասարությունը:

7.2 Անալիտիկ մոտավոր մեթոդներ

Սույն պարագրաֆում մենք կդիտարկենք

$$u'(x) = f(x, u), \quad u(x_0) = u_0 \quad (7.2.1)$$

Կոչու խնդրի լուծման երկու անալիտիկ մեթոդ: Ենթադրենք, որ տեղի ունեն վերը բերված (7.2.1) խնդրի լուծման գոյության և միակության (7.1.11)–(7.1.14) բավարար պայմանները:

7.2.1 Պիկարի մեթոդը

Կառուցենք մոտավոր լուծումներ $x \geq x_0$ արժեքների համար: ($x \leq x_0$ դեպքը լիովին համանման է): Ինտեգրելով (7.2.1) հավասարումը x_0 -ից x սահմաններում կստանանք

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(t, u(t)) dt : \quad (7.2.2)$$

Վերջին հավասարության մեջ փոխարինելով ինտեգրալի նշանի տակ գտնվող և անհայտ ֆունկցիան առժեքով՝ կստանանք որոնելի լուծման առաջին մոտարկումը.

$$u_1(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(t, u_0) dt :$$

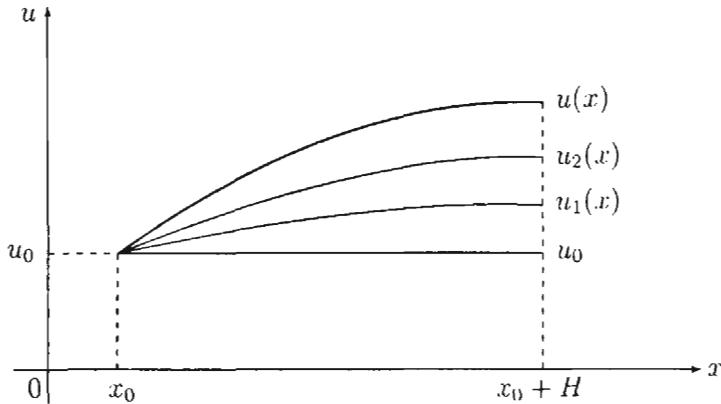
Այնուհետև, տեղադրելով (7.2.2) հավասարության աջ մասում u -ի փոխարեն գտնված u_1 ֆունկցիան, կստանանք երկրորդ մոտարկումը.

$$u_2(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(t, u_1(t)) dt :$$

Հնդիանրապես, հաջորդող մոտարկումները կատացվում են

$$u_n(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(t, u_{n-1}(t)) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.2.3)$$

բանաձևով (այսուղ սպառելով $u_0(x) \equiv u_0$): Գրաֆիկորեն $u_n(x)$ հաջորդական մոտարկումները, որտեղ $n = 0, 1, 2, \dots$, իրենցից ներկայացնում են $M_0(x_0, u_0)$ կետով անցնող կորեր (նկ. 7.2.1):



Նկ. 7.2.1 Մոտարկումներ ըստ Պիկարի մեթոդի

Ապացուցենք, որ (7.2.3) բանաձևով հաշվով $u_n(x)$ մոտավոր լուծումները $[x_0, x_0 + H]$ հատվածում, որտեղ H մեծությունը որոշվում է համաձայն (7.1.14)-ի, հավասարաշափ զուգամիտում են (7.2.1) խնդրի ճշգրիտ լուծմանը:

Ակզերից ցույց տանք, որ բոլոր $n = 0, 1, 2, \dots$ արժեքների համար $(x, u_n(x))$ կետերը, որտեղ $x \in [x_0, x_0 + H]$, պատկանում են D փակ ուղղանկյուն տիրույթին (7.1.11)-ից: Իրոք, $n = 0$ արժեքի համար դա ակնհայտ է:

Դիցուք պնդումը ճիշտ է՝ $n = 1$ -ի համար: Այդ դեպքում (7.1.12) և (7.1.14)-ի հիման վրա (7.2.3)-ից կստանաք

$$|u_n(x) - u_0| \leq \int_{x_0}^x |f(t, u_{n-1}(t))| dt \leq M(x - x_0) \leq MH \leq b,$$

ինչը և ապացուցում է պնդումը:

Դիտարկենք $n = 0, 1, \dots$ արժեքների համար

$$\varepsilon_n(x) \equiv |u(x) - u_n(x)|, \quad x_0 \leq x \leq x_0 + H \quad (7.2.4)$$

սխալանքները: Եթե $n = 0$, օգտվելով Լագրանժի միջին արժեքի բեռնմանց, կստանաք

$$\varepsilon_0(x) = |u(x) - u_0| = |u(x) - u(x_0)| = |u'(\xi)|(x - x_0),$$

որտեղ $x_0 < \xi < x$: Իսկ քանի որ, համաձայն (7.1.12) գնահատականի, $|u'(\xi)| = |f(\xi, u(\xi))| \leq M$, ապա

$$\varepsilon_0(x) \leq M(x - x_0) : \quad (7.2.5)$$

Դիցուք այժմ $n \geq 1$: (7.2.2) և (7.2.3)-ից հետևում է, որ

$$u(x) - u_n(x) = \int_{x_0}^x [f(t, u(t)) - f(t, u_{n-1}(t))] dt :$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (7.2.4) նշանակումները, կստանաք

$$\varepsilon_n(x) \leq \int_{x_0}^x |f(t, u(t)) - f(t, u_{n-1}(t))| dt$$

անհավասարությունը: Լիաշիցի (7.1.13) պայմանի համաձայն ունենք

$$|f(t, u(t)) - f(t, u_{n-1}(t))| \leq L |u(t) - u_{n-1}(t)| = L \varepsilon_{n-1}(t) :$$

Ուստի

$$\varepsilon_n(x) \leq L \int_{x_0}^x \varepsilon_{n-1}(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots : \quad (7.2.6)$$

Օգտվելով (7.2.6) անոյադարձ առնչություններից և (7.2.5) սկզբնական գնահատականից՝ հաջորդաբար գտնում ենք

$$\varepsilon_1(x) \leq L \int_{x_0}^x \varepsilon_0(t) dt \leq LM \int_{x_0}^x (t - x_0) dt = LM \frac{(x - x_0)^2}{2!},$$

$$\varepsilon_2(x) \leq L \int_{x_0}^x \varepsilon_1(t) dt \leq L^2 M \int_{x_0}^x \frac{(t - x_0)^2}{2!} dt = L^2 M \frac{(x - x_0)^3}{3!}$$

և այլն: Արդյունքում՝

$$\varepsilon_n(x) \leq L^n M \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots : \quad (7.2.7)$$

Այս գնահատականից հետևում է, որ $[x_0, x_0 + H]$ հատվածում $\varepsilon_n(x)$ սխալանը հավասարաշափ ձգտում է զրոյի, եթե $n \rightarrow \infty$:

Պիկարի մեթոդը հարմար է կիրառել, եթե (7.2.3) բանաձևի աջ մասի ինտեգրալները հաջողվում է արտահայտել տարրական ֆունկցիաների միջոցով: Իսկ եթե (7.2.1) հավասարման աջ մասը այնքան բարդ է, որ ինտեգրալները ստիպված ենք հաշվել մոտավոր, ապա մեթոդը դառնում է գործնականորեն քիչ ալիտանի:

Օրինակ 7.2.1 : Կիրառենք Պիկարի մեթոդը

$$u'(x) = x^2 + u^2, \quad u(0) = 0$$

հավասարման համար, որի լուծումը, ինչպես արդեն ասվել է նախորդ պարագուածում, չի արտահայտվում տարրական ֆունկցիաների միջոցով:

Այս դեպքում ինտեգրալները (7.2.3)-ում հաշվում են ճշգրիտ, և մենք հեշտությամբ ստանում ենք

$$\begin{aligned} u_0(x) &\equiv 0, \\ u_1(x) &= \frac{x^3}{3}, \\ u_2(x) &= \frac{x^3}{3} \left(1 + \frac{x^4}{21}\right), \\ u_3(x) &= \frac{x^3}{3} \left(1 + \frac{x^4}{21} + \frac{2x^8}{693} + \frac{x^{12}}{19845}\right) \end{aligned} \quad (7.2.8)$$

և այլն: Դժվար չէ տեսնել, որ $x \leq 1$ արժեքների համար այս մոտարկումները արագ գուգամիտում են և թույլ են տալիս հաշվել լուծումը բարձր ճշտությամբ: ♣

Պիկարի մեթոդը հեշտությամբ ընդհանրացվում է ավելի բարձր կարգի հավասարումների համար: Սակայն, ինչքան բարձր է հավասարման կարգը, այնքան ավելի հազվադեպ է հաջողվում ճշգրիտ հաշվել ինտեգրալները (7.2.3)-ում, ինչը սահմանափակում է մեթոդի կիրառումը այս դեպքում:

7.2.2 Աստիճանային շարքերի մեթոդը

Նկարագրենք մեկ այլ անալիտիկ մեթոդ, որը իմանված է լուծման աստիճանային շարքի վերլուծման գաղափարի վրա: Հաճախ այդ նպատակով օգտագործվում են թեյլորի շարքերը: Ենթադրելով, որ (7.2.1) Կոշու խնդրի $u(x)$ լուծումը բավականաշափ ողորկ է, կինոտենք մոտավոր լուծումը

$$u_n(x) = u_0 + \sum_{k=1}^n \frac{u^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (7.2.9)$$

տեսքով: $u^{(k)}(x_0)$ ածանցյալները արտահայտվում են (7.2.1) հավասարման աջ մասի մասնական ածանցյալների միջոցով: Իրոք, ունենք

$$\begin{aligned} u'(x_0) &= f(x_0, u_0), \\ u''(x_0) &= f'_r(x_0, u_0) + f'_u(x_0, u_0) f(x_0, u_0), \\ u'''(x_0) &= f''_{rr}(x_0, u_0) + 2f''_{ru}(x_0, u_0) f(x_0, u_0) + f''_{uu}(x_0, u_0) f^2(x_0, u_0) + \\ &\quad f'_u(x_0, u_0)[f''_r(x_0, u_0) + f''_u(x_0, u_0) f(x_0, u_0)] \end{aligned} \quad (7.2.10)$$

և այլն:

Այս մեթոդը x_0 -ի շրջակայքում բավականաչափ մեծ n -ի համար տալիս է (7.2.1) խնդրի $u(x)$ ճշգրիտ լուծման լավ մոտարկում: Սակայն, հեռանալով x_0 սկզբնական կետից՝ վիսալանքը, ընդհանրապես ասած, աճում է: Դեռ ավելին, մեթոդը դառնում է անրնդունելի, եթե x -ը դուրս է գալիս $u(x)$ ֆունկցիայի թելլորի շարքի գուգամիտուրյան տիրույթից: Չարքի գուգամիտուրյան շառավիղի գնահատման հարցը բավականին բարդ է (տե՛ս ս, օրինակ, [33]). և այստեղ մենք այն չենք քննարկի:

Օրինակ 7.2.2 : Դիտարկենք Կոշու հետևյալ խնդիրը.

$$u'(x) = x^2 + u^2, \quad u(0) = 0 :$$

Ըստ (7.2.10) բանաձևերի՝ գտնում ենք $u'(0) = 0, u''(0) = 0, u'''(0) = 2$: Այդ դեպքում, համաձայն (7.2.9)-ի, կստանանք

$$u_3(x) = \frac{x^3}{3}$$

(համեմատել 7.2.1 օրինակում Պիկարի մեթոդով ստացված (7.2.8) մոտավոր լուծումների հետ): ♣

Աստիճանային շարքերի մեթոդի թերություններից է (7.2.10) բանաձևերի մեծածավալությունը, քանի որ նրանք պահանջում են $f(x, u)$ ֆունկցիայի մասնական ածանցյալների հաշվում:

7.3 Էյլերի մեթոդը

Դիտարկենք

$$u'(x) = f(x, u), \quad x_0 \leq x \leq x_0 + H \quad (7.3.1)$$

դիֆերենցիալ հավասարումը

$$u(x_0) = u_0 \quad (7.3.2)$$

սկզբնական պայմանով: Ուսումնասիրենք այս խնդրի լուծման տարբերական մեթոդները: Ինչպես և նախորդ պարագրաֆում, կենթաղբենք, որ (7.3.1), (7.3.2) խնդրի

համար կատարված են լուծման գոյության և միակության բավարար պայմանները: Ներմուծենք որոշ հասկացություններ և տերմիններ:

Դիցուք $[x_0, x_0 + H]$ հատվածում ընտրված է կետերի ($հանգույցների$) ինչ-որ բազմություն

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = x_0 + H. \quad (7.3.3)$$

որոշ կանվանենք *ցանց*: Դիսկրետ արգումենտի $w = \{w_n\}_{n=0}^N$ ֆունկցիան, որոշված ցանցի հանգույցների վրա, կանվանենք *ցանցային ֆունկցիա*: Պարզ է, որ ցանցային ֆունկցիաների բազմությունը կազմում է գծային տարածություն: Սահմանենք այդ տարածությունում նորմ հետևյալ կերպ.

$$\|w\| \equiv \max_{0 \leq n \leq N} |w_n| : \quad (7.3.4)$$

7.3.1 Տարբերական մեթոդների դասակարգումը

Տարբերական մեթոդները թույլ են տալիս հաջորդաբար գտնել (7.3.1), (7.3.2) խնդրի մոտավոր լուծման $v_n \equiv v(x_n)$ արժեքները (7.3.3) ցանցի հանգույցներում ըստ

$$v_{n+1} = F(v_{n-p}, v_{n-p+1}, \dots, v_n, v_{n+s}) \quad (7.3.5)$$

օրենքի, որտեղ F -ը նշված արգումենտների որոշ հայտնի ֆունկցիա է: Այդ ֆունկցիայի տեսքը կախված է մեթոդի կառուցման եղանակից և (7.3.1) հավասարման աջ մասից: (7.3.5)-ում p պարամետրը ոչ բացասական ամրող թիվ է (սովորաբար $p \ll N$), իսկ s մեծությունը կարող է ընդունել երկու արժեք՝ 0 կամ 1: Եթե $p = 0$, ապա մեթոդը կոչվում է *սիարայլ*, իսկ եթե $p \geq 1$ ՝ *բազմաքայլ*: Ինչպես միարայլ, այնպես էլ բազմաքայլ մեթոդները կոչվում են *բացահայտ*, եթե $s = 0$, և *անբացահայտ*, եթե $s = 1$: Այսպիսով, ունեն՝

- միաքայլ բացահայտ մեթոդ

$$v_{n+1} = F(v_n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (7.3.6)$$

- միաքայլ անբացահայտ մեթոդ

$$v_{n+1} = F(v_n, v_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (7.3.7)$$

- բազմաքայլ բացահայտ մեթոդ

$$v_{n+1} = F(v_{n-p}, \dots, v_n), \quad n = p, p+1, \dots, N-1, \quad (7.3.8)$$

- բազմաքայլ անբացահայտ մեթոդ

$$v_{n+1} = F(v_{n-p}, \dots, v_n, v_{n+1}), \quad n = p, p+1, \dots, N-1 : \quad (7.3.9)$$

Բոլոր (7.3.6) - (7.3.9) մեթոդներում վերցվում է $v_0 = u_0$: Բացի դրանից, (7.3.8) և (7.3.9) բազմաքայլ մեթոդներում օգտագործվում են առաջին p արժեքներ՝ v_1, v_2, \dots, v_p , որոնք որոշվում են այլ մեթոդների միջոցով կամ ինչ-որ լրացուցիչ նկատառումներից:

Թեև $[x_0, x_0 + H]$ հատվածի (7.3.3) անհավասարաշափ տրուկումը վերջավոր քիչ մասերի չի առաջացնում հատուկ դժվարություններ, գործնականում հաճախ օգտագործվում է

$$x_n = x_0 + nh, \quad n = 0, 1, \dots, N; \quad h = \frac{H}{N} \quad (7.3.10)$$

հավասարաշափ ցանց, որտեղ h մեծորյունը կոչվում է ցանցի *քայլ*:

7.3.2 Էյլերի մեթոդը

Ցանցի x_n համգույցում, որտեղ $0 \leq n \leq N - 1$, ունենք

$$u'(x_n) = f(x_n, u(x_n)) \quad (7.3.11)$$

հավասարությունը: Փոխարինենք $u'(x_n)$ ածանցյալը

$$u'(x_n) \approx \frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h}$$

տարբերական հարաբերությունով: Ենթադրենով, որ $u(x) \in C^2[x_0, x_0 + H]$, և օգտագործելով Թեյլորի վերլուծությունը հեշտությամբ ստանում ենք

$$u'(x_n) = \frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} - \frac{h}{2} u''(x_n + \theta h), \quad 0 < \theta < 1$$

հավասարությունը (տես 4.6.1 լեմմայի ապացույցը): Վերջին հավասարությունից և (7.3.11)-ից հետևում է, որ $n = 0, 1, \dots, N - 1$ արժեքների համար

$$\frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} = f(x_n, u(x_n)) + \varepsilon_n, \quad (7.3.12)$$

որտեղ

$$\varepsilon_n \equiv \frac{h}{2} u''(x_n + \theta h), \quad 0 < \theta < 1 : \quad (7.3.13)$$

Դեռ մետեղով (7.3.12) հավասարություններում $O(h)$ մեծության ε_n անդամները զալիս ենք

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{h} = f(x_n, v_n), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1; \quad v_0 = u_0 \quad (7.3.14)$$

հավասարումների համակարգի Կոշու խնդրի $v = \{v_n\}_{n=0}^N$ մոտավոր լուծման որոշման համար: Այս մեթոդը կոչվում է *Էյլերի մեթոդ*: Սկսած $v_0 = u_0$ -ից, v_n մեծությունները հաջորդաբար գտնվում են ըստ

$$v_{n+1} = v_n + h f(x_n, v_n), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (7.3.15)$$

բանաձևի: Այսպիսով, Էյլերի մեթոդը միաբայլ բացահայտ մեթոդ է: Համեմատության համար, (7.3.12)-ից ունենք

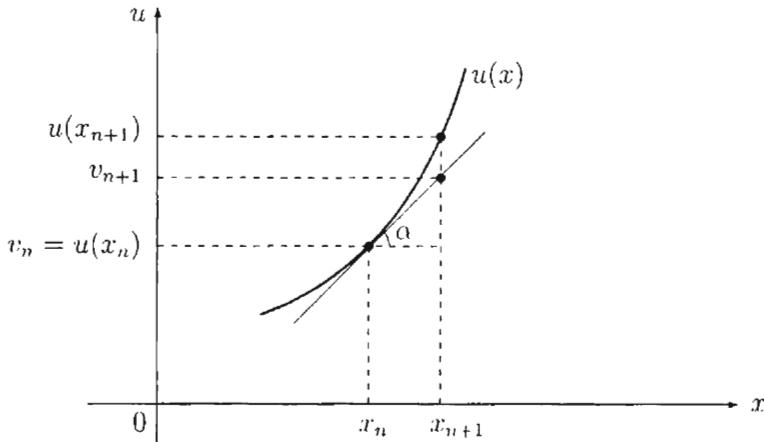
$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + h f(x_n, u(x_n)) + h \varepsilon_n, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 : \quad (7.3.16)$$

ε_n մեծությունը (7.3.13)-ից կանվանենք (7.3.14) մերողի անկապակցություն կամ մոտարկման սխալանք: Նկատի ունենալով $\varepsilon_n = O(h)$ առնչությունը ասում են, որ Եյլերի մեթոդը ունի մոտարկման առաջին կարգ:

Տաճք Եյլերի մեթոդի երկրաշափական մեկնաբանությունը: Ենթադրենք, որ x_n հանգույցում, որտեղ $0 \leq n \leq N - 1$, մոտավոր և ճշգրիտ լուծումները համընկնում են, այսինքն՝ $v_n = u(x_n)$: Այդ դեպքում, ինչպես հետևում է (7.3.11) և (7.3.15)-ից,

$$v_{n+1} = u(x_n) + h f(x_n, u(x_n)) = u(x_n) + h u'(x_n) : \quad (7.3.17)$$

Համաձայն (7.3.17) հավասարության, v_n -ից v_{n+1} անցումը ($O(h^2)$ ճշտությամբ) երկրաշափորեն պատկերված է նկ. 7.3.1-ում: Հիշեցնենք, որ Եթե α -ն շոշափողի թերության անկյունն է Ox առանցքին, ապա $\tan \alpha = u'(x_n)$:



Նկ. 7.3.1 Եյլերի մեթոդի քայլը

Ընդ որում, (7.3.15) և (7.3.16)-ից գտնում ենք ճշգրիտ և մոտավոր լուծումների տարբերությունը x_{n+1} հանգույցում, այն է՝

$$u(x_{n+1}) - v_{n+1} = h \varepsilon_n :$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (7.3.13)-ը, կստանանք

$$|u(x_{n+1}) - v_{n+1}| \leq \frac{M_2}{2} h^2, \quad (7.3.18)$$

որտեղ $M_2 \equiv \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |u''(x)|$: Այս մեծությունը, ունենալով

$$u''(x) = f'_x(x, u) + f'_u(x, u)f(x, u)$$

հավասարությունը, կարելի է գնահատել հետևյալ կերպ.

$$M_2 \leq \max_D |f'_x(x, u)| + LM$$

(տե՛ս (7.1.12) և (7.1.15)): (7.3.18) գնահատականի հիման վրա ասում են, որ Եյլերի մեթոդի տեղային սխալանքը $O(h^2)$ մեծություն է:

7.3.3 Եյլերի մեթոդի գուգամիտությունը

Նախ և առաջ ապացուցենք հետևյալ օժանդակ պնդումը:

Լեմմա 7.3.1 : $\forall h \neq 0 \quad z = \{z_n\}_{n=0}^N$ ցանցային ֆունկցիան այնպիսին է, որ

$$|z_{n+1}| \leq (1 + hL)|z_n| + hE, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (7.3.19)$$

որտեղ $L \geq 0$ և $E \geq 0$ որոշ հաստատութեան են: Այդ դեպքում

$$\|z\| \leq e^{hL}|z_0| + \frac{E}{L} (e^{hL} - 1) : \quad (7.3.20)$$

Մասնավորապես, եթե $z_0 = 0$, ապա

$$\|z\| \leq \frac{E}{L} (e^{hL} - 1) : \quad (7.3.21)$$

Ապացույց: Կամայական n -ի համար, որտեղ $n = 1, 2, \dots, N$, հաջորդաբար օգտագործելով (7.3.19) անհավասարությունները, կստանանք

$$\begin{aligned} |z_n| &\leq (1 + hL)|z_{n-1}| + hE \leq (1 + hL)[(1 + hL)|z_{n-2}| + hE] + hE = \\ &= (1 + hL)^2|z_{n-2}| + [1 + (1 + hL)]hE \leq \dots \leq (1 + hL)^n|z_0| + \sum_{k=0}^{n-1} (1 + hL)^k \cdot hE : \end{aligned}$$

Այնուհետև,

$$|z_n| \leq (1 + hL)^n|z_0| + \frac{E}{L} ((1 + hL)^n - 1)$$

և

$$\|z\| \leq (1 + hL)^N|z_0| + \frac{E}{L} ((1 + hL)^N - 1) :$$

Այստեղից, քանի որ

$$(1 + hL)^N = \left(1 + \frac{hL}{N}\right)^N \leq e^{hL}$$

(տես, օրինակ, [45]), կստանանք (7.3.20) գնահատականը, որի ակնհայտ հետևանքն է (7.3.21) գնահատականը: \square

Այժմ անցնենք անմիջականորեն Եյլերի մեթոդի սխալանքի գնահատականին: Ներմուծենք

$$z_n \equiv u(x_n) - v_n, \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (7.3.22)$$

ցանցային սխալանքի ֆունկցիան, որտեղ u -ն կոչու խնդրի ճշգրիտ լուծումն է, իսկ $v = \{v_n\}_{n=0}^N$ -ն՝ (7.3.14)-ով որոշվող մոտավոր լուծումը: $z = \{z_n\}_{n=0}^N$ սխալանքի ֆունկցիայի (7.3.4) նորմի արժեքը կանվանենք Եյլերի մեթոդի զլորակ սխալանք:

Ընդհանրապես, պետք է տարբերել զլորակ սխալանքի հետևյալ երկու բաղադրիչները.

1) մոտարկման սխալանքը, որն առաջանում է (7.3.1) դիֆերենցիալ հավասարումը (7.3.14) տարրերական հավասարումներով փոխարինելու արդյունքում,

2) կրորացման սխալանքները, որոնք առաջանում են $f(x, u)$ ֆունկցիայի արժեքների հաշվման ընթացքում և ըստ (7.3.15) բանաձևերի թվաբանական գործողությունների կատարման ժամանակ:

Մենք կրննարկենք կրորացման սխալանքների ազդեցությունը ավելի ուշ, իսկ այժմ գնահատենք միայն մոտարկման սխալանքով պայմանավորված գլոբալ սխալանքը: Այլ կերպ ասած, կհամարենք, որ v_{n+1} արժեքները, որտեղ $n = 0, 1, \dots, N - 1$, հաշվում են ըստ (7.3.15) բանաձևերի ճշգրիտ, առանց կրորացումների:

Ելնելով (7.3.15), (7.3.16) և (7.3.22)-ից՝ բոլոր $n = 0, 1, \dots, N - 1$ արժեքների համար գրենք

$$z_{n+1} = z_n + h[f(x_n, u(x_n)) - f(x_n, v_n)] + h\varepsilon_n$$

հավասարությունները և, համապատասխանաբար,

$$|z_{n+1}| \leq |z_n| + h|f(x_n, u(x_n)) - f(x_n, v_n)| + h|\varepsilon_n|$$

անհավասարությունները: Համաձայն (7.1.13) Լիպչիցի պայմանի՝ ունենք

$$|f(x_n, u(x_n)) - f(x_n, v_n)| \leq L|z_n| :$$

Ուստի

$$|z_{n+1}| \leq (1 + hL)|z_n| + h|\varepsilon_n| :$$

Այնուհետև, հաշվի առնելով (7.3.13) արտահայտությունը ε_n անկապակցության համար, կստանանք

$$|z_{n+1}| \leq (1 + hL)|z_n| + hE, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (7.3.23)$$

Որտեղ

$$E \equiv \frac{M_2}{2}h \quad \text{և} \quad M_2 \equiv \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |u''(x)| : \quad (7.3.24)$$

Դրանով իսկ z սխալանքի ֆունկցիան բավարարում է 7.3.1 լեմմայի պայմաններին: Իսկ քանի որ $z_0 = 0$, ապա, համաձայն (7.3.21) անհավասարությանը, կստանանք Էյլերի մեթոդի գլոբալ սխալանքի

$$\|z\| \leq \frac{M_2}{2L}(e^{HL} - 1)h \quad (7.3.25)$$

գնահատականը: Այսպիսով, գլոբալ սխալանքը $O(h)$ մեծություն է: Ուստի ասում են, որ Էյլերի մեթոդն ունի առաջին կարգի ճշտություն:

Օրինակ 7.3.1 : Կիրառենք Էյլերի մեթոդը

$$u' = \frac{1}{2}(x - u), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0) = 1$$

Կոշու խնդրի լուծման համար: Այդ խնդրի ճշգրիտ լուծումը $u(x) = 3e^{-x/2} + x - 2$ ֆունկցիան է: Համեմատենք մոտավոր լուծումները $h = 0.5, 0.25, 0.125$ և 0.0625 քայլորի համար: Հաշված արդյունքները բերված են հետևյալ աղյուսակում.

x_n	v_n				ճշգրիտ լուծում
	$h = 0.5$	$h = 0.25$	$h = 0.125$	$h = 0.0625$	
0.000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000000
0.125			0.9375	0.9404	0.9432392
0.250		0.8750	0.8867	0.8922	0.8974907
0.375			0.8469	0.8547	0.8620873
0.500	0.7500	0.7969	0.8174	0.8271	0.8364023
0.625			0.7976	0.8089	0.8198469
0.750		0.7598	0.7868	0.7996	0.8118678
0.875			0.7845	0.7985	0.8119456
1.000	0.6875	0.7585	0.7902	0.8051	0.8195920

Ինչպես տեսնում ենք, քայլի փոքրացման հետ մեկտեղ ճշտությունն աճում է: ♣

Հետազոտենք այժմ կլորացման սխալանքների ազդեցությունը գլոբալ սխալանքի վրա: Ենթադրենք, որ (7.3.15) բանաձևի աջ մասի հաշվման ժամանակ քույլ է տրվում $ինչ$ -որ δ_n սխալանք: Դրանով իսկ փաստորեն հաշված v_{n+1} մոտարկումների համար ունենք

$$v_{n+1} = v_n + h f(x_n, v_n) + \delta_n, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 :$$

Այդ դեպքում (7.3.22) սխալանքի ֆունկցիայի համար տեղի ունեն

$$z_{n+1} = z_n + h[f(x_n, u(x_n)) - f(x_n, v_n)] + h\delta_n - \delta_n \quad (7.3.26)$$

հավասարությունները, որտեղ $n = 0, 1, \dots, N-1$: Ենթադրենք, որ կլորացման սխալանքները բացարձակ արժեքով չեն գերազանցում $ինչ$ -որ Δ , այսինքն՝

$$|\delta_n| \leq \Delta, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 :$$

Ելնելով (7.3.26)-ից և կրկնելով վերը բերված դատողությունները՝ (7.3.23) անհավասարությունների փոխարեն կստանանք

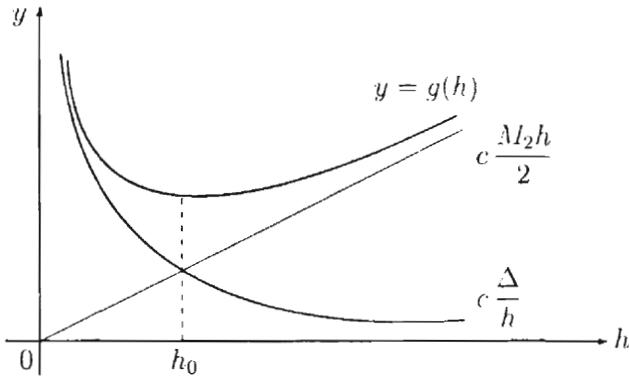
$$|z_{n+1}| \leq (1 + hL)|z_n| + h \left(E + \frac{\Delta}{h} \right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

անհավասարությունները, որտեղ E մեծությունը որոշված է (7.3.24)-ում: Այնուհետև կիրառենք 7.3.1 լեմման՝ կստանանք

$$\|z\| \leq \frac{e^{hL} - 1}{L} \left(\frac{M_2}{2} h + \frac{\Delta}{h} \right) \equiv g(h) \quad (7.3.27)$$

գնահատականը:

Այսպիսով, Եյլերի մեթոդի $y(h)$ գլոբալ սխալանքը իր մեջ ներառում է երկու բաղադրիչ. մոտարկման սխալանքով պայմանավորված $c \cdot M_2 h / 2$ մեթոդի սխալանքը և կլորացման սխալանքների կոտակումից առաջացած $c \cdot \Delta / h$ հաշվողական սխալանքը (այստեղ $c \equiv (e^{HL} - 1) / L$): Ընդ որում, h քայլի փոքրացման հետ մեկտեղ մեթոդի սխալանքը գծորեն նվազում է, սակայն աճում է հաշվողական սխալանքը: Այս իրավիճակը գրաֆիկորեն պատկերված է նկ. 7.3.2-ում: Համանման երեույթի հետ առնչվել ենք 4.6 պարագրաֆում բվային դիֆերենցման բանաձևերը դիտարկելիս:



Նկ. 7.3.2 Գլոբալ սխալանքի վարքը Եյլերի մեթոդում

Դժվար չէ ստանալ արտահայտություն h_0 օպտիմալ քայլի համար, որի դեպքում (7.3.27) անհավասարության աջ մասը ընդունում է փոքրագոյն արժեքը:

$$h_0 = \sqrt{\frac{2\Delta}{M_2}} :$$

Միաժամանակ նշենք, որ գործնականորեն չի հաջողվում ստանալ օպտիմալ քայլի արժեքը: Սակայն օգտագործվող քայլը, որպես օրենք, ավելի մեծ է, քան թե h_0 -ն և հիմնական ներդրում գլոբալ սխալանքի մեջ կատարում է մոտարկման սխալանքը (ժամանակակից համակարգի ներով հաշվարկելիս Δ մեծությունը շատ փոքր է):

7.4 Եյլերի անքացահայտ մեթոդը

Այստեղ մենք կդիտարկենք (7.3.1), (7.3.2) Կոշու խնդրի լուծման Եյլերի մեթոդի մեջ վերափոխում: Ունենալով

$$u'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, u(x_{n+1})) \quad (7.4.1)$$

հավասարությունը՝ փոխարինենք $u'(x_{n+1})$ ածանցյալը ծախակողմյան տարբերական ածանցյալով (տես (4.6.2)): Ընդ որում, եթե $u(x) \in C^2[x_0, x_0 + H]$, ապա

$$u'(x_{n+1}) = \frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} - \varepsilon_{n+1}. \quad (7.4.2)$$

որտեղ

$$\varepsilon_{n+1} \equiv -\frac{h}{2} u''(x_{n+1} - \theta h), \quad 0 < \theta < 1 : \quad (7.4.3)$$

(7.4.1) և (7.4.2)-ից հետևում է, որ բոլոր $n = 0, 1, \dots, N - 1$ արժեքների համար

$$\frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} = f(x_{n+1}, u(x_{n+1})) + \varepsilon_{n+1} : \quad (7.4.4)$$

Դեռ նետելով (7.4.4) հավասարություններում $O(h)$ մեծության ε_{n+1} անդամները՝ ստանում ենք

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{h} = f(x_{n+1}, v_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1; \quad v_0 = u_0 \quad (7.4.5)$$

հավասարությունների համակարգը (7.3.1), (7.3.2) խնդրի $v = \{v_n\}_{n=0}^N$ մոտավոր լուծման որոշման համար: Այս ներողը կոչվում է Ելերի անքացահայտ մեթոդ, քանի որ v_{n+1} անհայտը գտնելու համար պահանջվում է լուծել

$$v_{n+1} = v_n + h f(x_{n+1}, v_{n+1}) \quad (7.4.6)$$

հավասարումը, որն ընդհանուր դեպքում ոչ գծային է: Սովորաբար այդ նպատակի համար օգտագործվում են իտերացիոն մեթոդներ: Ընդ որում, ընդհանուր սխալանքի մեջ կմտնի նաև իրականորեն հաշված v_{n+1} արմեքի սխալանքը: Ուստի (7.4.5) Ելերի անքացահայտ մեթոդի կիրառումը պահանջում է (7.3.14) բացահայտ մեթոդի համեմատությամբ ավելի շատ հաշվողական աշխատանք: Սակայն, չնայած դրան, (7.4.5) մեթոդը լայնորեն կիրառվում է հաշվարկներում, քանի որ որոշ խնդիրների համար այն ունի էական առավելություն բացահայտ մեթոդի համեմատությամբ հաշվողական ընթացքի կայունության տեսակետից (տե՛ս 7.9 պարագրաֆը):

Ինչպես և Ելերի (7.3.14) բացահայտ մեթոդում, անվանենք ε_{n+1} մեծությունը (7.4.3)-ից (7.4.5) մեթոդի անկազմակցություն կամ մոտարկման սխալանքը: Ընդ որում, քանի որ $\varepsilon_{n+1} = O(h)$, ասում են, որ մեթոդն ունի մոտարկման առաջին կարգ:

Գնահատենք այժմ մոտարկման սխալանքով պայմանավորված մեթոդի գլոբալ սխալանքը: Կենթաղրենք, որ v_{n+1} մոտավոր լուծման արժեքները որոշվում են (7.4.6) հավասարումից ճշգրիտ, առանց կլորացումների:

Դիտարկենք

$$z_n \equiv u(x_n) - v_n, \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (7.4.7)$$

ցանցային սխալանքի ֆունկցիան: (7.4.4), (7.4.6) և (7.4.7)-ից ունենք

$$z_{n+1} = z_n + h[f(x_{n+1}, u(x_{n+1})) - f(x_{n+1}, v_{n+1})] + h\varepsilon_{n+1}$$

հավասարությունները բոլոր $n = 0, 1, \dots, N - 1$ արժեքների համար: Այստեղից հետևում են

$$|z_{n+1}| \leq |z_n| + h|f(x_{n+1}, u(x_{n+1})) - f(x_{n+1}, v_{n+1})| + h|\varepsilon_{n+1}|$$

անհավասարությունները: Համաձայն Լիպշիցի (7.1.13) պայմանի՝

$$|f(x_{n+1}, u(x_{n+1})) - f(x_{n+1}, v_{n+1})| \leq L |z_{n+1}| :$$

Այսպիսով,

$$|z_{n+1}| \leq |z_n| + hL|z_{n+1}| + h|\varepsilon_{n+1}| : \quad (7.4.8)$$

Կհամարենք, որ ցանցի h քայլը բավականին փոքր է: Դիցուք, որոշակիության համար, $h \leq 1/2L$: Այդ դեպքում

$$1 - hL \geq \frac{1}{2} \quad \text{և} \quad \frac{1}{1 - hL} \leq 1 + 2hL :$$

Օգտվելով այդ անհավասարություններից՝ (7.4.8)-ից հաջորդաբար ստանում ենք

$$(1 - hL)|z_{n+1}| \leq |z_n| + h|\varepsilon_{n+1}| ,$$

$$|z_{n+1}| \leq \frac{1}{1 - hL} |z_n| + \frac{h}{1 - hL} |\varepsilon_{n+1}| ,$$

$$|z_{n+1}| \leq (1 + 2hL)|z_n| + 2h|\varepsilon_{n+1}| :$$

Այսուեղից, հաշվի առնելով (7.4.3) արտահայտությունը ε_{n+1} անկապակցության համար, գտնում ենք

$$|z_{n+1}| \leq (1 + 2hL)|z_n| + hE , \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (7.4.9)$$

անհավասարությունները, որտեղ

$$E \equiv M_2 h \quad \left(M_2 \equiv \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |u''(x)| \right) : \quad (7.4.10)$$

Դրանով իսկ z սխալանքի ֆունկցիան բավարարում է 7.3.1 լեմմայի պայմաններին: Քանի որ $z_0 = 0$, ապա համաձայն (7.3.21) անհավասարության՝ ստանում ենք

$$\|z\| \leq \frac{M_2}{2L} (e^{2HL} - 1) h \quad (7.4.11)$$

գնահատականը: Այսպիսով, Եյլերի անբացահայտ մեթոդն ունի **ծշտուրյան առաջին կարգ**:

Մասնավորապես, (7.4.9) և (7.4.10)-ից հետևում է, որ Եյլերի անբացահայտ մեթոդի **տեղային սխալանքը** $O(h^2)$ մեծությունն է:

Վերջում նշենք, որ Եյլերի բացահայտ և անբացահայտ մեթոդները կարող են արտածվել նաև թվային ինտեգրման բանաձևերից: Իլորդ,

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, u(x)) dx$$

ակնհայտ հավասարության աջ մասի ինտեգրալի նկատմամբ կիրառելով (6.2.2) ձախուղղանկյունների բանաձևը, կստանանք

$$u(x_{n+1}) \approx u(x_n) + h f(x_n, u(x_n))$$

մոտավոր հավասարությունը, որից էլ հետևում է Էյլերի մեթոդի (7.3.15) հաշվարկային բանաձևը: Իսկ եթե ինտեգրալի նկատմամբ կիրառենք (6.2.3) աջ ուղղանկյունների բանաձևը, ապա կստանանք

$$u(x_{n+1}) \approx u(x_n) + h f(x_{n+1}, u(x_{n+1})),$$

որտեղից գալիս ենք (7.4.5) Էյլերի անքացահայտ մեթոդի:

7.5 Էյլերի վերահաշվման մեթոդներ

Ցշտության առաջին կարգ ունեցող Էյլերի մեթոդը դանդաղ է գուգամիտում: Սակայն մեթոդի գուգամիտության արագությունը կարելի է բարձրացնել հաշվողական սխեմայի որոշ բարդացման հաշվին:

Շարադրենք այսպես կոչված *Էյլերի վերահաշվման մեթոդը*: Համաձայն այդ մեթոդի՝ v_{n+1} -ի հաշվարկը իրականացվում է երկու փուլով: Սկզբից գտնվում է՝

$$\bar{v}_n = v_n + \alpha h f(x_n, v_n) \quad (7.5.1)$$

միջանկյալ արժեքը, որտեղ $\alpha > 0$ (փաստորեն դա Էյլերի մեթոդն է αh քայլով): Այնուհետև հաշվում է v_{n+1} արժեքը ըստ

$$v_{n+1} = \bar{v}_n + h [(1 - \sigma) f(x_n, \bar{v}_n) + \sigma f(x_n + \alpha h, \bar{v}_n)] \quad (7.5.2)$$

բանաձևի, որտեղ $\sigma > 0$: Արտաքսելով \bar{v}_n -ը (7.5.1) և (7.5.2)-ից, կստանանք հետևյալ մեթոդը.

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{h} = (1 - \sigma) f(x_n, v_n) + \sigma f(x_n + \alpha h, v_n + \alpha h f(x_n, v_n)), \quad (7.5.3)$$

$$n = 0, 1, \dots, N - 1; \quad v_0 = u_0 :$$

Սկզբից քննարկենք մեթոդի մոտարկման սխալանքի հարցը և դրա հետ կապված α և σ պարամետրների ընտրությունը: Դիցուք $u(x) \in C^3[x_0, x_0 + H]$: Գրենք արտահայտություն մեթոդի անկապակցության կամ մոտարկման սխալանքի համար.

$$\varepsilon_n \equiv \frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} - (1 - \sigma) f(x_n, u(x_n)) - \sigma f(x_n + \alpha h, u(x_n) + \alpha h f(x_n, u(x_n))), \quad (7.5.4)$$

որտեղ $0 \leq n \leq N - 1$: Օգտվելով Թեյլորի վերլուծությունից՝ ունենք

$$\frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} = u'(x_n) + \frac{h}{2} u''(x_n) + \frac{h^2}{6} u'''(x_n + \theta_1 h), \quad 0 < \theta_1 < 1 :$$

Այդ դեպքում (7.5.4)-ից, քանի որ $u'(x_n) = f(x_n, u(x_n))$, կստանանք

$$\varepsilon_n = \frac{h}{2} u''(x_n) + \sigma [u'(x_n) - f(x_n + \alpha h, u(x_n) + \alpha h u'(x_n))] + \mu_n. \quad (7.5.5)$$

որտեղ μ_n մեծությունը գնահատվում է հետևյալ կերպ.

$$|\mu_n| \leq \frac{M_3}{6} h^2, \quad M_3 \equiv \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |u'''(x)| : \quad (7.5.6)$$

Զնամինի հենք (7.5.5) արտահայտությունը ε_n անկապակցության համար՝ գրելով այն

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \frac{h}{2} u''(x_n) + \sigma [u'(x_n) - f(x_n + \alpha h, u(x_n) + \alpha h u'(x_n)) + \\ &\quad f(x_n + \alpha h, u(x_n + \alpha h)) - u'(x_n + \alpha h)] + \mu_n \end{aligned}$$

տեսքով: Ներմուծենք հետևյալ նշանակումները.

$$\nu_n \equiv f(x_n + \alpha h, u(x_n + \alpha h)) - f(x_n + \alpha h, u(x_n) + \alpha h u'(x_n)) : \quad (7.5.7)$$

Այդ դեպքում

$$\varepsilon_n = \frac{h}{2} u''(x_n) + \sigma [u'(x_n) - u'(x_n + \alpha h)] + \mu_n + \sigma \nu_n : \quad (7.5.8)$$

Չարունակենք ձևակիրակությունները: Գրենք

$$u'(x_n + \alpha h) = u'(x_n) + \alpha h u''(x_n) + \frac{\alpha^2 h^2}{2} u'''(x_n + \theta_2 \alpha h), \quad 0 < \theta_2 < 1$$

Թեյլորի վերլուծությունը: Այստեղից

$$u'(x_n) - u'(x_n + \alpha h) = -\alpha h u''(x_n) + \rho_n, \quad (7.5.9)$$

որտեղ ρ_n մեծության գնահատականը հետևյալն է.

$$|\rho_n| \leq \frac{M_3}{2} \alpha^2 h^2 : \quad (7.5.10)$$

Այսպիսով, (7.5.8) և (7.5.9)-ից կստանանք

$$\varepsilon_n = \left(\frac{1}{2} - \alpha \sigma \right) h u''(x_n) + \mu_n + \sigma (\nu_n + \rho_n) : \quad (7.5.11)$$

Մենք արդեն գնահատել ենք μ_n և ρ_n մեծությունները (տես (7.5.6) և (7.5.10) գնահատականները): Մնացել է գնահատել ν_n մեծությունը (7.5.7)-ից: Լիպշիցի (7.1.13) պայմանի շնորհիվ ունենք՝

$$|\nu_n| \leq L |u(x_n + \alpha h) - u(x_n) - \alpha h u'(x_n)| :$$

Նորից օգտվենք Թեյլորի վերլուծությունից.

$$u(x_n + \alpha h) = u(x_n) + \alpha h u'(x_n) + \frac{\alpha^2 h^2}{2} u''(x_n + \theta_3 \alpha h), \quad 0 < \theta_3 < 1 :$$

Կստանանք

$$|\nu_n| \leq \frac{LM_2}{2} \alpha^2 h^2, \quad M_2 \equiv \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |u''(x)| : \quad (7.5.12)$$

Այսպիսով, (7.5.11) և (7.5.6), (7.5.10), (7.5.12)-ից գտնում ենք, որ

$$\varepsilon_n = \left(\frac{1}{2} - \alpha \sigma \right) h u''(x_n) + O(h^2) : \quad (7.5.13)$$

Ավելի ճիշտ՝

$$|\varepsilon_n| \leq \left| \left(\frac{1}{2} - \alpha \sigma \right) h u''(x_n) \right| + \left(\frac{M_3}{6} + \frac{\alpha^2 \sigma}{2} (LM_2 + M_3) \right) h^2 : \quad (7.5.14)$$

(7.5.13)-ից հետևում է, որ ε_n անկապակցությունը կլինի h -ի նկատմամբ երկրորդ կարգի մեծություն, եթե

$$\alpha \sigma = \frac{1}{2} : \quad (7.5.15)$$

Ընդ որում, համաձայն (7.5.14)-ի

$$|\varepsilon_n| \leq C(\alpha) h^2, \quad (7.5.16)$$

որտեղ

$$C(\alpha) \equiv \frac{M_3}{6} + \frac{\alpha}{4} (LM_2 + M_3) : \quad (7.5.17)$$

Այսինքն, (7.5.3) մեթոդը (7.5.15) պայմանով մոտարկման երկրորդ կարգի մեթոդ է:

Որպես α և σ պարամետրերի միջն (7.5.15) առնչության արդյունք ստանում ենք, որ (7.5.3) մեթոդի տեղայիշմանը $O(h^3)$ մեծություն է: Իրոք, (7.5.4)-ից ուսենք

$$\begin{aligned} u(x_{n+1}) &= u(x_n) + h[(1 - \sigma)f(x_n, u(x_n)) + \\ &\quad \sigma f(x_n + \alpha h, u(x_n) + \alpha h f(x_n, u(x_n)))] + h \varepsilon_n : \end{aligned} \quad (7.5.18)$$

Ենթադրենք, որ $v_n = u(x_n)$: Այդ դեպքում (7.5.3) և (7.5.18)-ից հետևում է, որ

$$u(x_{n+1}) - v_{n+1} = h \varepsilon_n :$$

Այստեղից, (7.5.16) գնահատականի շնորհիվ

$$|u(x_{n+1}) - v_{n+1}| \leq C(\alpha) h^3 : \quad (7.5.19)$$

Այսպիսով, (7.5.3) Եյլերի վերահաշվման մեթոդը (7.5.15) լրացուցիչ պայմանով իրենից ներկայացնում է մոտարկման երկրորդ կարգի բացահայտ մեթոդների

միապարամետր ընտանիք: Նշենք նաև, որ (7.5.3) մեթոդը պատկանում է *սլույշեն* կոչումով՝ տիպի մեթոդների դասին: Մեթոդի յուրաքանչյուր քայլը ընդգրկում է իր մեջ երկու փուլ: նախ հաշվարկ ըստ (7.5.1) բանաձևի, որը տալիս է սկզբնական մոտավորություն (սլույշեն), այնուհետև՝ v_{n+1} արժեքի ճշգրտումը ըստ (7.5.2) բանաձևի (կոռեկտոր):

Գործնականում ամենից հաճախ օգտագործվում են հետևյալ երկու մասնավոր դեպքերը:

- Հոյնի մեթոդը ($\alpha = 1, \sigma = 0.5$)

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{h} = \frac{1}{2} [f(x_n, v_n) + f(x_{n+1}, v_n + hf(x_n, v_n))], \quad (7.5.20)$$

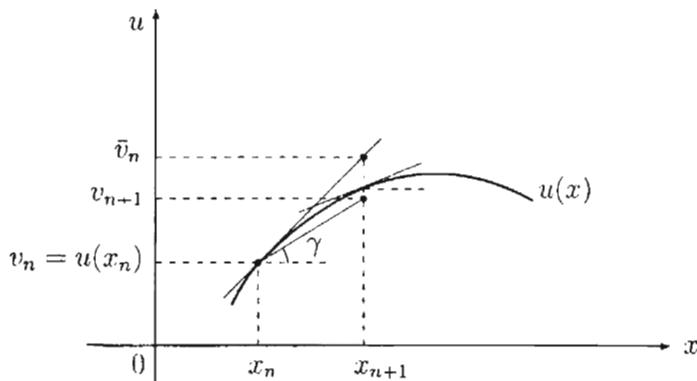
$$n = 0, 1, \dots, N-1; \quad v_0 = u_0 :$$

Մեթոդի քայլը իրականացվում է հետևյալ սխեմայով.

$$\bar{v}_n = v_n + hf(x_n, v_n) \quad (\text{սլույշեն}) . \quad (7.5.21)$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2} [f(x_n, v_n) + f(x_{n+1}, \bar{v}_n)] \quad (\text{կոռեկտոր}): \quad (7.5.22)$$

Երկրաչափորեն v_{n+1} -ի ստացումը ($O(h^3)$ ճշտությամբ) պատկերված է նկ. 7.5.1-ում: Ընդ որում, ինչպես միշտ, ենթադրվում է, որ $v_n = u(x_n)$: Որպես բացատրություն նկարին նշենք, որ $\tan \gamma = (\tan \alpha + \tan \beta)/2$, որտեղ $\tan \alpha = u'(x_n)$ և $\tan \beta = u'(x_{n+1})$:



Նկ. 7.5.1 Հոյնի մեթոդի քայլը

- Միջին կետի մեթոդը ($\alpha = 0.5, \sigma = 1$)

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{h} = f\left(x_n + \frac{h}{2}, v_n + \frac{h}{2} f(x_n, v_n)\right), \quad (7.5.23)$$

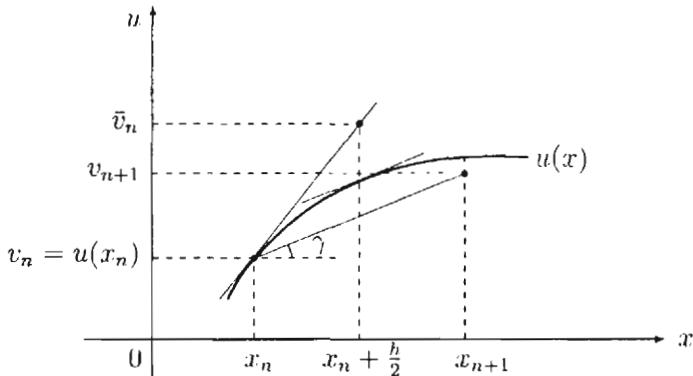
$$n = 0, 1, \dots, N-1; \quad v_0 = u_0 :$$

Այստեղ v_n -ից v_{n+1} անցումը կատարվում է հետևյալ սխեմայով.

$$\bar{v}_n = v_n + \frac{h}{2} f(x_n, v_n) \quad (\text{սրբեղիկառ}) , \quad (7.5.24)$$

$$v_{n+1} = v_n + h f\left(x_n + \frac{h}{2}, v_n\right) \quad (\text{կոռեկտոր}) : \quad (7.5.25)$$

Մեթոդի երկրաչափական մեկնաբանությունը ($O(h^3)$ ճշտությամբ) պատկերված է նկ. 7.5.2-ում: Այստեղ $\tan \gamma = u'(x_n + \frac{h}{2})$:



Նկ. 7.5.2 Միջին կետի մեթոդի քայլը

Օրինակ 7.5.1 : Դիտարկենք

$$u' = \frac{1}{2}(x - u), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0) = 1$$

Կոչու խնդիրը, որի ճշգրիտ լուծումն է $u(x) = 3e^{-x/2} + x - 2$ ֆունկցիան: Համեմատենք եյլերի, Հոյնի և միջին կետի մեթոդներով ստացված մոտավոր լուծումները (ցանցի քայլն է $h = 0.125$): Հաշվարկների արդյունքները տրված են հետևյալ աղյուսակում.

x_n	Էյլերի մեթոդ	Հոյնի մեթոդ	միջին կետի մեթոդ	ճշգրիտ լուծում
0.000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000000
0.125	0.9375	0.9434	0.9434	0.9432392
0.250	0.8867	0.8977	0.8977	0.8974907
0.375	0.8469	0.8624	0.8624	0.8620873
0.500	0.8174	0.8368	0.8368	0.8364023
0.625	0.7976	0.8203	0.8203	0.8198469
0.750	0.7868	0.8124	0.8124	0.8118678
0.875	0.7845	0.8125	0.8125	0.8119456
1.000	0.7902	0.8202	0.8202	0.8195920

Ինչպես տեսնում ենք, Հոյնի և միջին կետի մեթոդները տալիս են ավելի ճշգրիտ արդյունքներ՝ Էյլերի մեթոդի համեմատությամբ:



Այժմ համառոտակի քննարկենք մոտարկման սխալանքով պայմանավորված Էյլերի վերահաշվման մեթոդի գլոբալ սխալանքը: Դիցուք $z = \{z_n\}_{n=0}^N$, որտեղ $z_n \equiv u(x_n) = v_n$, ցանցային սխալանքի ֆունկցիան է: Էյլերի մեթոդի համար (*Ինչպես բացահայտ, այնպես էլ անբացահայտ*) մենք պարզել ենք, որ ճշտության կարգը համբակնում է մոտարկման կարգի հետ: Նման համապատասխանությունը պահպանվում է նաև Էյլերի վերահաշվման մեթոդում: (7.3.25) գնահատականին բերող դասուլությունների օգնությամբ դժվար չէ ցույց տալ, որ $\|z\| = O(h^2)$: Մասնավորապես, (7.5.20) Հոյնի մեթոդի համար և (7.5.23) միջին կետի մեթոդի համար ճիշտ է

$$\|z\| \leq \frac{C(\alpha)}{L(1+0.5hL)} \left(e^{HL(1+0.5hL)} - 1 \right) h^2 \quad (7.5.26)$$

գնահատականը, որտեղ $C(\alpha)$ մեծությունը հաշվվում է (7.5.17) բանաձևով ($\alpha = 1$ (7.5.20) մեթոդի համար և $\alpha = 0.5$ (7.5.23) մեթոդի համար): Թողմում ենք (7.5.26) գնահատականի արտածումը ընթերցողին որպես վարժություն:

Վերջում նշենք, որ Հոյնի և միջին կետի մեթոդները կարելի են ստանալ թվային ինտեգրման բանաձևերի միջոցով: Կիրառելով

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, u(x)) dx$$

հավասարության աջ մասի ինտեգրալին (6.2.32) սեղանների բանաձևը՝ կստանանք

$$u(x_{n+1}) \approx u(x_n) + \frac{h}{2} [f(x_n, u(x_n)) + f(x_{n+1}, u(x_{n+1}))]$$

մոտավոր հավասարությունը: Փոխարիմնենք աջ մասում $u(x_{n+1})$ -ը նրա մոտավոր արժեքով.

$$u(x_{n+1}) \approx u(x_n) + hf(x_n, u(x_n)) :$$

Դրանով իսկ գալիս ենք Հոյնի մեթոդի (7.5.21), (7.5.22) հաշվարկային բանաձևերի: Իսկ եթե ինտեգրալին կիրառենք միջին ուղղանկյունների բանաձևը, ապա կստանանք

$$u(x_{n+1}) \approx u(x_n) + hf \left(x_n + \frac{h}{2}, u \left(x_n + \frac{h}{2} \right) \right) :$$

Այստեղից, եթե $u(x_n + \frac{h}{2})$ -ը փոխարիմնենք նրա մոտավոր արժեքով, այն է՝

$$u \left(x_n + \frac{h}{2} \right) \approx u(x_n) + \frac{h}{2} f(x_n, u(x_n)),$$

ապա կստանանք միջին կետի (7.5.24), (7.5.25) հաշվարկային բանաձևերը:

7.6 Ռունգե-Կուտայի մեթոդը

Դիտարկենք (7.3.1), (7.3.2) Կոչու խնդրի լուծման առավել գործածելի մեթոդներից մեկը, որը հայտնի է որպես **Ռունգե-Կուտայի մեթոդ**: Այդ մեթոդը գրվում է հետևյալ կերպ:

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{h} = \frac{1}{6} [k_1^{(n)} + 2k_2^{(n)} + 2k_3^{(n)} + k_4^{(n)}], \quad (7.6.1)$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1; \quad v_0 = u_0,$$

որտեղ

$$\begin{aligned} k_1^{(n)} &= f(x_n, v_n), \\ k_2^{(n)} &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, v_n + \frac{h}{2} k_1^{(n)}\right), \\ k_3^{(n)} &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, v_n + \frac{h}{2} k_2^{(n)}\right), \\ k_4^{(n)} &= f(x_{n+1}, v_n + h k_3^{(n)}): \end{aligned} \quad (7.6.2)$$

Ինչպես տեսնում ենք, Ռունգե-Կուտայի մեթոդը միաբարյ բացահայտ մեթոդ է: Մոտավոր լուծման այժեքները հաշվում են հաջորդաբար, սկսած $v_0 = u_0$ -ից, ըստ հետևյալ բանաձևի.

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{6} [k_1^{(n)} + 2k_2^{(n)} + 2k_3^{(n)} + k_4^{(n)}], \quad n = 0, 1, \dots, N-1: \quad (7.6.3)$$

Ռունգե-Կուտայի մեթոդը ունի **մոտարկման չորրորդ կարգ**: Դիտարկենք արտահայտություն մեթոդի **անկապակցության** կամ **մոտարկման սխալանքի** համար.

$$\varepsilon_n \equiv \frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} - \frac{1}{6} [\tilde{k}_1^{(n)} + 2\tilde{k}_2^{(n)} + 2\tilde{k}_3^{(n)} + \tilde{k}_4^{(n)}], \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (7.6.4)$$

որտեղ

$$\begin{aligned} \tilde{k}_1^{(n)} &= f(x_n, u(x_n)), \\ \tilde{k}_2^{(n)} &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, u(x_n) + \frac{h}{2} \tilde{k}_1^{(n)}\right), \\ \tilde{k}_3^{(n)} &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, u(x_n) + \frac{h}{2} \tilde{k}_2^{(n)}\right), \\ \tilde{k}_4^{(n)} &= f(x_{n+1}, u(x_n) + h \tilde{k}_3^{(n)}): \end{aligned} \quad (7.6.5)$$

Կարելի է ցույց տալ, որ եթե $u(x) \in C^5[x_0, x_0 + H]$, ապա

$$|\varepsilon_n| \leq C_{RK} h^4, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (7.6.6)$$

որտեղ C_{RK} -ն դրական հաստատուն է: Այս գնահատականի արտածումը բավականին ծավալուն է, ուստի մենք այն այստեղ չենք բերի (տե՛ս, օրինակ, [4],[27],[34]):

Ռունգե-Կուտայի մեթոդի **տեղային սխալանքը** $O(h^5)$ մեծություն է: Իրոք, (7.6.4)-ից ունենք

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + \frac{h}{6} [\tilde{k}_1^{(n)} + 2\tilde{k}_2^{(n)} + 2\tilde{k}_3^{(n)} + \tilde{k}_4^{(n)}] + h \varepsilon_n : \quad (7.6.7)$$

Եթե ենթադրենք, որ x_n հանգույցում, որտեղ $0 \leq n \leq N - 1$, մոտավոր և ճշգրիտ լուծումները համընկնում են, ապա (7.6.3) և (7.6.7)-ից կստանանք

$$u(x_{n+1}) - v_{n+1} = h \varepsilon_n :$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (7.6.6) գնահատականը, ունենք

$$|u(x_{n+1}) - v_{n+1}| \leq C_{RK} h^5 : \quad (7.6.8)$$

Այժմ անցնենք մոտարկման սխալանքով պայմանավորված Ռունգե-Կուտայի մեթոդի գորու սխալանքի գնահատմանը: Ներմուծները $z = \{z_n\}_{n=0}^N$, որտեղ $z_n \equiv u(x_n) - v_n$, ցանցային սխալանքի ֆունկցիա: Ինչպես հետևում է (7.6.3) և (7.6.7)-ից, բոլոր $n = 0, 1, \dots, N - 1$ արժեքների համար ճիշտ են

$$|z_{n+1}| \leq |z_n| + \frac{h}{6} \left[|\tilde{k}_1^{(n)} - k_1^{(n)}| + 2|\tilde{k}_2^{(n)} - k_2^{(n)}| + 2|\tilde{k}_3^{(n)} - k_3^{(n)}| + |\tilde{k}_4^{(n)} - k_4^{(n)}| \right] + h|\varepsilon_n| \quad (7.6.9)$$

անհավասարությունները: Ուսնենալով (7.6.2) և (7.6.5) արտահայտությունները համապատասխանաբար $k_i^{(n)}$ և $\tilde{k}_i^{(n)}$ մեծությունների համար և օգտվելով (7.1.13) Լիպշչիցի պայմանից՝ դժվար չէ ստանալ հետևյալ գնահատականները.

$$\begin{aligned} |\tilde{k}_1^{(n)} - k_1^{(n)}| &\leq L |z_n|, \\ |\tilde{k}_2^{(n)} - k_2^{(n)}| &\leq L \left(1 + \frac{hL}{2} \right) |z_n|, \\ |\tilde{k}_3^{(n)} - k_3^{(n)}| &\leq L \left(1 + \frac{hL}{2} + \frac{(hL)^2}{4} \right) |z_n|, \\ |\tilde{k}_4^{(n)} - k_4^{(n)}| &\leq L \left(1 + hL + \frac{(hL)^2}{2} + \frac{(hL)^3}{4} \right) |z_n| : \end{aligned} \quad (7.6.10)$$

Այնուհետև, (7.6.9) և (7.6.10)-ից հետևում է

$$|z_{n+1}| \leq (1 + h Q(h)) |z_n| + h |\varepsilon_n|$$

անհավասարությունը, որտեղ

$$Q(h) \equiv L \left(1 + \frac{hL}{2} + \frac{(hL)^2}{6} + \frac{(hL)^3}{24} \right) : \quad (7.6.11)$$

Ի վերջո, հաշվի առնելով (7.6.6) գնահատականը, կստանանք

$$|z_{n+1}| \leq (1 + h Q(h)) |z_n| + h C_{RK} h^4. \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

անհավասարությունները: Գրանով իսկ z սխալանքի ֆունկցիան բավարյում է 7.3.1 լեմմայի պայմաններին: Քանի որ $z_0 = 0$, ապա համաձայն (7.3.21) անհավասարության՝ կստանանք

$$\|z\| \leq \frac{C_{RK}}{Q(h)} \left(e^{hQ(h)} - 1 \right) h^4 \quad (7.6.12)$$

զնահատականը, որտեղ C_{RK} -ն հաստատում է (7.6.6)-ից, իսկ $Q(h)$ մեծությունը որոշված է (7.6.11)-ում (\tilde{c}_2 աղենք, որ $Q(h) \rightarrow L$ եթե $h \rightarrow 0$): Այսպիսով, Ռունգե-Կուտայի մեթոդն ունի չորրորդ կարգի ճշտության:

Օրինակ 7.6.1 : Կիրառենք Ռունգե-Կուտայի մեթոդը

$$u' = \frac{1}{2}(x - u), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0) = 1$$

Կոչու խնդրի լուծման համար: Խնդրի ճշգրիտ լուծումն է $u(x) = 3e^{-x/2} + x - 2$ ֆունկցիան: Ստորև բերված այլուսակում տրված են $h = 0.125$ քայլով կատարված հաշվարկների արդյունքները: Համեմատության համար տրված են նաև Հոյնի և միջին կետի մեթոդներով ստացված տվյալները:

x_n	Հոյնի մեթոդ	Միջին կետի մեթոդ	Ռունգե-Կուտայի մեթոդ	Ճշգրիտ լուծում
0.000	1.0000	1.0000	1.0000000	1.0000000
0.125	0.9434	0.9434	0.9432392	0.9432392
0.250	0.8977	0.8977	0.8974907	0.8974907
0.375	0.8624	0.8624	0.8620874	0.8620873
0.500	0.8368	0.8368	0.8364024	0.8364023
0.625	0.8203	0.8203	0.8198470	0.8198469
0.750	0.8124	0.8124	0.8118679	0.8118678
0.875	0.8125	0.8125	0.8119457	0.8119456
1.000	0.8202	0.8202	0.8195921	0.8195920

Այսպիսով, Ռունգե-Կուտայի մեթոդը տալիս է քավականին լավ մոտարկում խնդրի ճշգրիտ լուծմանը: ♣

Վերջում նշենք կապը Ռունգե-Կուտայի մեթոդի և Սիմպոնի քառակուսացման բանաձևի միջև: Կիրառելով

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, u(x)) dx$$

հավասարության աջ մասի ինտեգրալին (6.3.3) Սիմպոնի բանաձևը՝ կստանանք

$$u(x_{n+1}) \approx u(x_n) + \frac{h}{6} \left[f(x_n, u(x_n)) + 4f\left(x_n + \frac{h}{2}, u\left(x_n + \frac{h}{2}\right)\right) + f(x_{n+1}, u(x_{n+1})) \right]$$

մոտավոր հավասարությունը: Համաձայն (7.6.5)-ում մտցված նշանակումների՝ $f(x_n, u(x_n)) = \tilde{k}_1^{(n)}$: Այնուհետև, ոչ բարդ դատողությունների միջոցով կարելի է ցույց տալ, որ

$$4f\left(x_n + \frac{h}{2}, u\left(x_n + \frac{h}{2}\right)\right) \approx 2(\tilde{k}_2^{(n)} + \tilde{k}_3^{(n)}), \quad f(x_{n+1}, u(x_{n+1})) \approx \tilde{k}_4^{(n)} :$$

Այսինքն,

$$u(x_{n+1}) \approx u(x_n) + \frac{h}{6} \left[\tilde{k}_1^{(n)} + 2\tilde{k}_2^{(n)} + 2\tilde{k}_3^{(n)} + \tilde{k}_4^{(n)} \right].$$

որտեղից էլ հետևում է Ռունգե-Կուտայի մեթոդը:

7.7 Ռունգեի կանոնը և ճշգրտում ըստ Ռիչարդսոնի

Սույն գլխի նախորդ պարագրաֆներում մենք դիտարկել ենք Կոչու խնդրի լուծման միաբայլ մեթոդները. Եյլերի մեթոդը (բացահայտ և ամբացահայտ), Եյլերի վերահաշվման մեթոդը և Ռունգե-Կուտայի մեթոդը: Բոլոր մեթոդների համար ստացել ենք ինչպես տեղային, այնպես էլ զլրբալ սխալանքի գնահատականը: Սակայն (7.3.25), (7.4.11), (7.5.26) և (7.6.12) գնահատականների գործնական օգտագործումը կապված է որոշ դժվարությունների հետ և, որպես օրենք, հնարավոր չէ: Բացի այդ, վերջնական արդյունքի վրա որոշակի ազդեցություն են գործում նաև կլրացման սխալանքները: Ուստի, կարեռ նշանակություն են ստանում սխալանքի գնահատման այլ եղանակներ, որոնք չեն պահանջում ինչպես տեսական հաշվարարություններ, այնպես էլ հաշվողական ծախսների եղանական ավելացում: Այդպիսի եղանակներից է Ռունգեի կանոնը, որի հիմքում ընկած է կրկնակի վերահաշվարկի զաղափարը: Հիշեցնենք, որ այդ կանոնի հետ մենք արդեն առնչվել ենք 6.4 պարագրաֆում բառակուսացման բանաձևերի սխալանքը գնահատելիս:

7.7.1 Ռունգեի կանոնը

Ենթադրենք, որ

$$u'(x) = f(x, u), \quad x_0 \leq x \leq x_0 + H: \quad u(x_0) = u_0 \quad (7.7.1)$$

Կոչու խնդրի թվային լուծման համար օգտագործվում է p -րդ կարգի ճշտության միաբայլ մեթոդը, որտեղ $p \geq 1$: Դիցուք հաշվարկները կատարվում են $h = H/N$ քայլով

$$x_n^{(h)} = x_0 + nh, \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (7.7.2)$$

ցանցի վրա և $v^{(h)} = \{v_n^{(h)}\}_{n=0}^N$ ՝ մոտավոր լուծումն է: Մեր կողմից դիտարկված բոլոր մեթոդների համար կարելի է նկատել հետևյալ օրինաչափությունը. մեթոդի ճշտության կարգը մեկով ցածր է տեղային սխալանքի կարգից: Վերլուծության պարզության համար կենթադրենք, որ ամեն մի քայլում կատարվող սխալանքը մոտավորապես նույնն է և հավասար է Ch^{p+1} , որտեղ C -ն ինչ-որ ոչ գրոյական հաստատուն է: Այդ դեպքում $x_{n+1}^{(h)}$ հանգույցում սխալանքի համար, որտեղ $0 \leq n \leq N - 1$, ունենք

$$z_{n+1}^{(h)} \equiv u(x_{n+1}^{(h)}) - v_{n+1}^{(h)} \approx (n+1)Ch^{p+1}: \quad (7.7.3)$$

Երկու անգամ փոքրացնենք ցանցի քայլը՝ վերցնելով այն հավասար $h/2$ -ի: Նոր մանրացված ցանցի

$$x_k^{(h/2)} = x_0 + k \frac{h}{2}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N \quad (7.7.4)$$

հանգույցները ներառում են (7.7.2) ցանցի բոլոր հանգույցները, այն է՝

$$x_{2n}^{(h/2)} = x_n^{(h)}, \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (7.7.5)$$

(տես նկ. 7.7.1): Դիցուք $v^{(h/2)} = \{v_k^{(h/2)}\}_{k=0}^{2N}$ (7.7.1) խնդրի նույն մեթոդով ստացված մոտավոր լուծումն է (7.7.4) ցանցի վրա: Համանմանորեն (7.7.3)-ին, $x_{2(n+1)}^{(h/2)}$ հանգույցում, որտեղ $0 \leq n \leq N - 1$, ունենք

$$z_{2(n+1)}^{(h/2)} \equiv u(x_{2(n+1)}^{(h/2)}) - v_{2(n+1)}^{(h/2)} \approx 2(n+1)C \left(\frac{h}{2}\right)^{p+1}: \quad (7.7.6)$$

Դրանով իսկ (7.7.3) և (7.7.6)-ից, հաշվի առնելով (7.7.5) առնչությունը, գտնում ենք

$$z_{2(n+1)}^{(h/2)} \approx \frac{z_{n+1}^{(h)}}{2^p}: \quad (7.7.7)$$

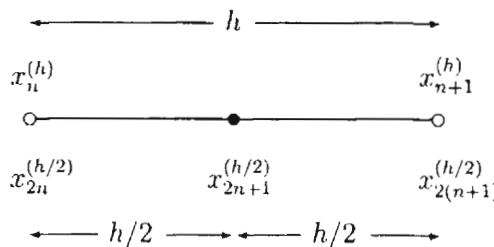
Այնուհետև,

$$\begin{aligned} z_{2(n+1)}^{(h/2)} &= u(x_{2(n+1)}^{(h/2)}) - v_{2(n+1)}^{(h/2)} = u(x_{n+1}^{(h)}) - v_{2(n+1)}^{(h/2)} = \\ &z_{n+1}^{(h)} + v_{n+1}^{(h)} - v_{2(n+1)}^{(h/2)} \approx 2^p z_{2(n+1)}^{(h/2)} + v_{n+1}^{(h)} - v_{2(n+1)}^{(h/2)} : \end{aligned}$$

Այստեղից սխալանքի գնահատման համար ստանում ենք

$$z_{2(n+1)}^{(h/2)} \approx \frac{v_{2(n+1)}^{(h/2)} - v_{n+1}^{(h)}}{2^p - 1} \quad (7.7.8)$$

մոտավոր քանածել:



Նկ. 7.7.1 Ուսումգեի կանոնի արտաձման վերաբերյալ պատկերը

7.7.2 ճշգրտում ըստ Ռիչարդսոնի

Պարզվում է, որ (7.7.8) բանաձևի աջ մասի

$$E_{2(n+1)}^{(h/2)} \equiv \frac{v_{2(n+1)}^{(h/2)} - v_{n+1}^{(h)}}{2^p - 1} \quad (7.7.9)$$

մեծությունը կարելի է օգտագործել մոտավոր լուծման ճշգրտման համար: Իրոք, առանձնացնենք մեթոդի յուրաքանչյուր քայլում ստացվող սխալանքի գլխավոր մասը՝ ներկայացնելով այդ սխալանքը

$$C_1 h^{p+1} + O(h^{p+2})$$

տեսքով, որտեղ C_1 -ը ինչ-որ ոչ զրոյական հաստատուն է: Այլ դեպքում, հաշվի առնելով այդ ճշտումը, գրենք (7.7.3) և (7.7.6) մոտավոր հավասարությունները որպես

$$z_{n+1}^{(h)} = u(x_{n+1}^{(h)}) - v_{n+1}^{(h)} \approx (n+1)C_1 h^{p+1} + O(h^{p+1}) \quad (7.7.10)$$

և

$$z_{2(n+1)}^{(h/2)} = u(x_{2(n+1)}^{(h/2)}) - v_{2(n+1)}^{(h/2)} \approx 2(n+1)C_1 \left(\frac{h}{2}\right)^{p+1} + O(h^{p+1}) \quad (7.7.11)$$

համապատասխանարար (նշենք, որ բավականաշափ մեծ n -երի համար $nh = O(1)$): Դրանով իսկ (7.7.10) և (7.7.11)-ից ունենք

$$u(x_{n+1}^{(h)}) \approx v_{n+1}^{(h)} + (n+1)C_1 h^{p+1} + O(h^{p+1}) \quad (7.7.12)$$

և

$$u(x_{2(n+1)}^{(h/2)}) \approx v_{2(n+1)}^{(h/2)} + (n+1)C_1 \frac{h^{p+1}}{2^p} + O(h^{p+1}) : \quad (7.7.13)$$

Հանելով 2^p -ով բազմապատկված (7.7.13) հավասարությունից (7.7.12) հավասարությունը՝ կստանանք

$$u(x_{2(n+1)}^{(h/2)}) \approx \frac{2^p v_{2(n+1)}^{(h/2)} - v_{n+1}^{(h)}}{2^p - 1} + O(h^{p+1}) : \quad (7.7.14)$$

Վերջին մոտավոր հավասարության աջ մասի

$$V_{2(n+1)}^{(h/2)} \equiv \frac{2^p v_{2(n+1)}^{(h/2)} - v_{n+1}^{(h)}}{2^p - 1} \quad (7.7.15)$$

մեծությունը կոչվում է **ճշգրտված ըստ Ռիչարդսոնի** մոտավոր լուծում (7.7.4) ցանցի $x_{2(n+1)}^{(h/2)}$ հանգույցում: Ինչպես երևում է (7.7.14)-ից, $V_{2(n+1)}^{(h/2)}$ լուծման ճշտության կարգը հավասար է $(p+1)$ -ի, թեև կիրառվող մեթոդը ունի ճշտության p -րդ կարգ: Այսպիսով, խնդրի լուծումը երկու ցանցերի վրա քույլ է տալիս բարձրացնել արդյունքների ճշտությունը: Վերջապես, (7.7.9) և (7.7.15)-ից հեշտությամբ հետևում է, որ

$$V_{2(n+1)}^{(h/2)} = v_{2(n+1)}^{(h/2)} + E_{2(n+1)}^{(h/2)} : \quad (7.7.16)$$

Այդ պատճառով $E_{2(n+1)}^{(h/2)}$ մեծությունը (7.7.9)-ից կոչվում է մոտավոր լուծման շտկում՝ ըստ Ռիչարդսոնի (7.7.4) ցանցի $x_{2(n+1)}^{(h/2)}$ հանգույցում:

7.7.3 Սխալանքի վերահսկումը քայլի վրա

Վերը ստացված (7.7.8) բանաձևը, այսինքն՝ $E_{2(n+1)}^{(h/2)}$ մեծությունը կարելի է օգտագործել հաշվարկների ճշտության վերահսկման նպատակով և քայլի ավտոմատիկ փոփոխման համար: Դա կարելի է իրականացնել, օրինակ, հետևյալ կերպ: Ընտրվում է քավականին փոքր $\varepsilon > 0$ թիվ: Եթե $|E_{2(n+1)}^{(h/2)}| \leq \varepsilon$, ապա հասած ճշտությունը համարվում է բավարար, և ընթացքը շարունակվում է նույն քայլով: Ավելին, եթե $|E_{2(n+1)}^{(h/2)}| \ll \varepsilon$, ապա կարելի է փորձել այնուհետև շարժվել ավելի մեծ քայլով (օրինակ, $2h$ քայլով): Իսկ եթե $|E_{2(n+1)}^{(h/2)}| > \varepsilon$, ապա ճշտությունը համարվում է անթափարար: Այդ դեպքում կարելի է ետ դառնալ $x_n^{(h)}$ հանգույցը և կրկնել հաշվարկները ավելի փոքր քայլով (օրինակ, $h/2$ քայլով): Այդպիսի բավականին պարզ քայլի փոփոխման եղանակը հաճախ թույլ է տալիս լուծել խնդիրը էապես թիշ հաշվողական ծախսերով՝ հաստատում քայլի համեմատությամբ՝ միաժամանակ պահպանելով արդյունքի ճշտությունը:

7.8 Աղամսի մեթոդը

Վերը դիտարկված Ռունգե-Կուտայի մեթոդը

$$u'(x) = f(x, u), \quad x_0 \leq x \leq x_0 + H; \quad u(x_0) = u_0 \quad (7.8.1)$$

Կոչու խնդրի լուծման համար ունի ինչպես բարձր ճշտություն, այնպես էլ բավականին պարզ հաշվողական սխեմա: Միաժամանակ, ցանցի որոշ հանգույցում մոտավոր լուծումը ստանալու համար պետք է հաշվել (7.8.1) հավասարման աջ մասի արժեքները չորս կետում (տես (7.6.1) և (7.6.2) բանաձևերը): Եթե հավասարման աջ մասը բավականին բարդ է, ապա դա կապված է որոշակի հաշվողական ծախսերի հետ: Սույն պարագրաֆում մենք կշարադրենք բազմաբայլ տարբերական **Աղամսի մեթոդը**, որի կիրառումը պահանջում է ամեն մի քայլում հավասարման աջ մասի միավատիկ հաշվարկ: Տարբերում են Աղամսի մեթոդի երկու տարբերակ, այն է՝ **Աղամս-Բաշֆորտի մեթոդ** (որին անվանում են նաև էքստրապոլացիոն մեթոդ) և **Աղամս-Մոուլտոնի մեթոդ** (կամ ինտերպոլացիոն մեթոդ):

7.8.1 Աղամս-Բաշֆորտի մեթոդը

Ընտրենք $[x_0, x_0 + H]$ հատվածում

$$x_n = x_0 + nh, \quad n = 0, 1, \dots, N; \quad h = \frac{H}{N} \quad (7.8.2)$$

հավասարաշափ ցանց: Վերցնենք ինչ-որ ամբողջ թիվ $p \geq 0$ (սովորաբար, $p \ll N$): Գրենք

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} u'(x) dx \quad (7.8.3)$$

ակնհայտ նույնությունը: Ենթադրելով, որ $n \geq p$, փոխարինենք $[x_n, x_{n+1}]$ հատվածում $u'(x)$ ենթախնտեգրալային ֆունկցիան $x_{n-p}, \dots, x_{n-1}, x_n$ հանգույցներով կառուցված p -րդ աստիճանի ինտերպոլացիոն բազմանդամով: Համաձայն (4.2.6) Լագրանժի բանաձևի՝ ունենք

$$u'(x) = \sum_{k=0}^p u'(x_{n-k}) \frac{\omega_{p+1}(x)}{(x - x_{n-k})\omega'_{p+1}(x_{n-k})} + R_p(x), \quad (7.8.4)$$

որտեղ $\omega_{p+1}(x) \equiv (x - x_{n-p}) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n)$, իսկ $R_p(x)$ -ը մնացորդային անդամ է: Եթե $u(x) \in C^{p+2}[x_0, x_0 + H]$, ապա համաձայն ինտերպոլացիայի սխալանքի համար (4.3.4) բանաձևի՝

$$R_p(x) = \frac{u^{(p+2)}(\xi)}{(p+1)!} \omega_{p+1}(x), \quad \xi \in (x_{n-p}, x_n) : \quad (7.8.5)$$

Ինտեգրելով $u'(x)$ -ի (7.8.4) արտահայտությունը՝ (7.8.3) նույնությունից կստանանք

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + \sum_{k=0}^p u'(x_{n-k}) \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\omega_{p+1}(x)}{(x - x_{n-k})\omega'_{p+1}(x_{n-k})} dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} R_p(x) dx : \quad (7.8.6)$$

Կատարենք (7.8.6) հավասարության աջ մասի ինտեգրալներում $t = (x - x_n)/h$ փոփոխականի փոխարինում: Պարզ ձևափոխությունների միջոցով կստանանք

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\omega_{p+1}(x)}{(x - x_{n-k})\omega'_{p+1}(x_{n-k})} dx = h(-1)^k \frac{C_p^k}{p!} \int_0^1 \frac{t(t+1)\dots(t+p)}{t+k} dt \quad (7.8.7)$$

և

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} R_p(x) dx = \frac{h^{p+2}}{(p+1)!} \int_0^1 u^{(p+2)}(\xi) t(t+1)\dots(t+p) dt : \quad (7.8.8)$$

Ներմուծենք հետևյալ նշանակումները.

$$A_k \equiv (-1)^k \frac{C_p^k}{p!} \int_0^1 \frac{t(t+1)\dots(t+p)}{t+k} dt, \quad k = 0, 1, \dots, p \quad (7.8.9)$$

և

$$\varepsilon_n \equiv \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \int_0^1 u^{(p+2)}(\xi) t(t+1)\dots(t+p) dt : \quad (7.8.10)$$

Արդյունքում (7.8.6) - (7.8.10)-ից կստանանք

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + h \sum_{k=0}^p A_k f(x_{n-k}, u(x_{n-k})) + h \varepsilon_n \quad (7.8.11)$$

կամ

$$\frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} = \sum_{k=0}^p A_k f(x_{n-k}, u(x_{n-k})) + \varepsilon_n : \quad (7.8.12)$$

Դեն նետելով (7.8.12) հավասարության մեջ ε_n մեծությունը՝ գալիս ենք հետևյալ տարրերական մեթոդին.

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1} - v_n}{h} &= \sum_{k=0}^p A_k f(x_{n-k}, v_{n-k}), \\ n &= p, p+1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (7.8.13)$$

$$v_0 = u_0; \quad v_1, v_2, \dots, v_p = \text{սրբած են},$$

որը կոչվում է **Աղամս-Բաշֆորտի մեթոդ**: Այս մեթոդը անվանում են նաև **Աղամսի էքստրապոլացիոն մեթոդ**, քանի որ ինտերպոլացիոն բազմանդամը $u'(x)$ ֆունկցիայի համար կառուցվել է ըստ $[x_{n-p}, x_n]$ հատվածին պատկանող հանգույցների, իսկ կիրառվել է $[x_n, x_{n+1}]$ հատվածում, այսինքն ըստ էության կատարվել է **էքստրապոլացիա**:

Մոտավոր լուծման արժեքները, սկսված v_{p+1} -ից, որոշվում են հաջորդաբար

$$v_{n+1} = v_n + h \sum_{k=0}^p A_k f(x_{n-k}, v_{n-k}), \quad n = p, p+1, \dots, N-1 \quad (7.8.14)$$

բացահայտ բանաձևով: Այսպիսով, համաձայն 7.3 պարագրաֆում ընդունված տարրերական մեթոդների դասակարգման, Աղամս-Բաշֆորտի մեթոդը բազմաբայլ բացահայտ մեթոդ է (եթե $p > 0$):

Ինչպես երևում է (7.8.12) և (7.8.13)-ից, ε_n մեծությունը իրենից ներկայացնում է մեթոդի **անկապակցություն** կամ **մոտարկման սխալանք**: Օգտվելով (7.8.10) արտահայտությունից՝ հեշտ է ցույց տալ, որ

$$|\varepsilon_n| \leq M_{p+2} h^{p+1}, \quad (7.8.15)$$

որտեղ $M_{p+2} \equiv \max_{x_0 < x < x_0 + H} |u^{(p+2)}(x)|$: Այսինքն, (7.8.13) մեթոդն ունի **մոտարկման** $(p+1)$ -րդ կարգ: Ընդունում, տեղայիշ սխալանքը $O(h^{p+2})$ մեծություն է: Իրոք, եթե ենթադրենք, որ $x_{n-p}, \dots, x_{n-1}, x_n$ հանգույցներում ճշգրիտ և մոտավոր լուծումները համընկնում են, ապա (7.8.11), (7.8.14) և (7.8.15)-ից ակնհայտորեն ստանում ենք հետևյալ գնահատականը.

$$|u(x_{n+1}) - v_{n+1}| = h |\varepsilon_n| \leq M_{p+2} h^{p+2}: \quad (7.8.16)$$

Դիտողություն 7.8.1: Որպեսզի (7.8.14) բանաձևով հաշվենք v_{p+1} առաջին արժեքը, մեզ բացի v_0 -ից անհրաժեշտ են նաև v_1, v_2, \dots, v_p ՝ “մեկմարկային” արժեքները: Այդ նպատակով կարելի է օգտագործել միաբայլ մեթոդները, օրինակ, Ռունգե-Կոտուայի մեթոդը:

Դիտարկենք Աղամս-Բաշֆորտի մեթոդի մի քանի մասնավոր դեպք: Տաղվ ը-ին տարբեր արժեքներ, (7.8.9) և (7.8.14)-ից ստանում ենք հետևյալ հաշվարկային բանաձևերը.

ա) $p = 0$ դեպք՝

$$v_{n+1} = v_n + hf(x_n, v_n), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

(Եյլերի մեթոդ),

բ) $p = 1$ դեպք՝

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2} [3f(x_n, v_n) - f(x_{n-1}, v_{n-1})], \quad n = 1, 2, \dots, N - 1,$$

գ) $p = 2$ դեպք՝

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{12} [23f(x_n, v_n) - 16f(x_{n-1}, v_{n-1}) + 5f(x_{n-2}, v_{n-2})],$$

$$n = 2, 3, \dots, N - 1 :$$

Գնահատենք այժմ Աղամս-Բաշֆորտի մեթոդի մոտարկման սխալանքով պայմանավորված գլոբալ սխալանքը: Դիցուք $z = \{z_n\}_{n=0}^N$, որտեղ $z_n \equiv u(x_n) - v_n$, ցանցային սխալանքի ֆունկցիան է: Այդ դեպքում (7.8.11) և (7.8.14)-ից ակնհայտորեն հետևում են

$$|z_{n+1}| \leq |z_n| + h \sum_{k=0}^p |A_k| |f(x_{n-k}, u(x_{n-k})) - f(x_{n-k}, v_{n-k})| + h |\varepsilon_n|$$

անհավասարությունները, որտեղ $n = p, p + 1, \dots, N - 1$: Լիպշիցի (7.1.13) պայմանի պատճառով ունենք

$$|f(x_{n-k}, u(x_{n-k})) - f(x_{n-k}, v_{n-k})| \leq L |z_{n-k}| :$$

Ուստի

$$|z_{n+1}| \leq |z_n| + hL \sum_{k=0}^p |A_k| |z_{n-k}| + h |\varepsilon_n| :$$

Այստեղից, օգտվելով (7.8.15) գնահատականից, ստանում ենք

$$|z_{n+1}| \leq |z_n| + hAL \sum_{k=0}^p |z_{n-k}| + hE, \quad n = p, p + 1, \dots, N - 1 \tag{7.8.17}$$

անհավասարությունները, որտեղ

$$A \equiv \max_{0 \leq k \leq p} |A_k|, \quad E \equiv M_{p+2} h^{p+1} : \tag{7.8.18}$$

Ծարունակենք ծևափոխությունները: Հաջորդաբար կիրառելով (7.8.17) անհավասարությունները, կստանանք

$$|z_{n+1}| \leq |z_p| + hAL \sum_{m=p}^n \sum_{k=0}^p |z_{m-k}| + (n-p+1)hE, \quad n = p, p+1, \dots, N-1,$$

իսկ քանի որ $(n-p+1)h \leq Nh = H$ (տես (7.8.2)), ապա

$$|z_{n+1}| \leq |z_p| + hAL \sum_{m=p}^n \sum_{k=0}^p |z_{m-k}| + HE, \quad n = p, p+1, \dots, N-1 :$$

Այնուհետև,

$$\begin{aligned} |z_{n+1}| &\leq |z_p| + hAL(|z_0| + 2|z_1| + \dots + (p+1)|z_p|) + \\ &+ hAL(p+1) \sum_{k=p+1}^n |z_k| + HE, \end{aligned} \quad (7.8.19)$$

$n = p, p+1, \dots, N-1 :$

Դիցուք v_1, v_2, \dots, v_p "մեկնարկային" արժեքները հաշվված են δ ճշտությամբ, այսինքն՝

$$|z_k| \leq \delta, \quad k = 1, 2, \dots, p : \quad (7.8.20)$$

Այդ դեպքում (7.8.19)-ից, հաշվի առնելով $z_0 = 0$ կստանանք

$$\begin{aligned} |z_{n+1}| &\leq \left(1 + hAL \frac{p(p+3)}{2}\right) \delta + hAL(p+1) \sum_{k=p+1}^n |z_k| + HE, \\ &n = p, p+1, \dots, N-1 : \end{aligned} \quad (7.8.21)$$

Նշանակումների պարզեցման նպատակով ներմուծենք հետևյալ նշանակումները.

$$a \equiv \left(1 + hAL \frac{p(p+3)}{2}\right) \delta, \quad b \equiv hAL(p+1), \quad c \equiv HE : \quad (7.8.22)$$

Այդ դեպքում (7.8.21) անհավասարությունները կգրվեն

$$|z_{n+1}| \leq a + b \sum_{k=p+1}^n |z_k| + c, \quad n = p, p+1, \dots, N-1$$

տեսքով: Ելնելով վերջին անհավասարությունից՝ ըստ n -ի մաթեմատիկական ինդուկցիայի օգնությամբ դժվար չէ ցույց տալ, որ

$$|z_n| \leq (a+c)(1+b)^{n-p-1}, \quad n = p+1, p+2, \dots, N :$$

Այնուհետև, օգտվելով b մեծության արտահայտությունից (տես (7.8.22)), կստանանք

$$\begin{aligned} |z_n| &\leq (a+c)(1+b)^{N-p-1} \leq (a+c)(1+b)^N \leq (a+c)(1+hAL(p+1))^N \\ &= (a+c) \left(1 + \frac{ALH(p+1)}{N}\right)^N \leq (a+c)e^{ALH(p+1)} : \end{aligned}$$

Վերջապես, տեղադրելով արտահայտությունների a և c մեծությունների համար (7.8.22)-ից և E մեծության համար (7.8.18)-ից, ստանում ենք հետևյալ անհավասարությունները.

$$|z_n| \leq e^{ALH(p+1)} \left[\left(1 + hAL \frac{p(p+3)}{2} \right) \delta + HM_{p+2} h^{p+1} \right], \quad (7.8.23)$$

$$n = p+1, p+2, \dots, N :$$

Այսպիսով, (7.8.20) և (7.8.23)-ից հետևում է

$$\|z\| \leq C_1 \delta + C_2 h^{p+1} \quad (7.8.24)$$

գնահատականը, որտեղ

$$C_1 \equiv e^{ALH(p+1)} \left(1 + hAL \frac{p(p+3)}{2} \right), \quad C_2 \equiv e^{ALH(p+1)} HM_{p+2} :$$

Ինչպես երևում է (7.8.24) գնահատականից, ճշտությամ $(p+1)$ -րդ կարգ ստանալու համար v_1, v_2, \dots, v_p "մեկնարկային" արժեքները պետք է նույնապես հաշվեն $\delta = O(h^{p+1})$ ճշտությամբ (տես 7.8.1 դիտողությունը):

7.8.2 Աղամս-Սոուլտոնի մեթոդը

Դիցուք $p \geq 0$ ինչ-որ ամբողջ թիվ է ($p \ll N$): Ենթադրելով $n \geq p+1$, փոխարիմնենք (7.8.3) նույնությունում $u'(x)$ ենթահնտեղրալային ֆունկցիան $x_{n-p+1}, \dots, x_n, x_{n+1}$ հանգույցներով կառուցված p -րդ աստիճանի ինտերպոլացիոն բազմանդամով: Օգտվելով (4.2.6) Լագրանժի բանաձևից՝ ունենք

$$u'(x) = \sum_{k=0}^p u'(x_{n-k+1}) \frac{\omega_{p+1}(x)}{(x - x_{n-k+1})\omega'_{p+1}(x_{n-k+1})} + R_p(x), \quad (7.8.25)$$

որտեղ $\omega_{p+1}(x) \equiv (x - x_{n-p+1}) \dots (x - x_n)(x - x_{n+1})$, իսկ $R_p(x)$ -ը մնացորդային անդամ է: Եթե $u(x) \in C^{p+2}[x_0, x_0 + H]$, ապա, համաձայն ինտերպոլացիայի սխալանքի համար (4.3.4) բանաձևի՝

$$R_p(x) = \frac{u^{(p+2)}(\xi)}{(p+1)!} \omega_{p+1}(x), \quad \xi \in (x_{n-p+1}, x_{n+1}): \quad (7.8.26)$$

Ինտեղելով $u'(x)$ ածանցյալի (7.8.25) արտահայտությունը՝ (7.8.3)-ից կստանանք

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + \sum_{k=0}^p u'(x_{n-k+1}) \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\omega_{p+1}(x)}{(x - x_{n-k+1})\omega'_{p+1}(x_{n-k+1})} dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} R_p(x) dx : \quad (7.8.27)$$

Կատարենք (7.8.27) հավասարության աջ մասի ինտեգրալներում $t = (x - x_{n+1})/h$ փոփոխականի փոխարինում: Արդյունքում կստանանք

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\omega'_{p+1}(x)}{(x - x_{n-k+1})\omega'_{p+1}(x_{n-k+1})} dx = h(-1)^k \frac{C_p^k}{p!} \int_{-1}^0 \frac{t(t+1)\dots(t+p)}{t+k} dt \quad (7.8.28)$$

և

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} R_p(x) dx = \frac{h^{p+2}}{(p+1)!} \int_{-1}^0 u^{(p+2)}(\xi) t(t+1)\dots(t+p) dt : \quad (7.8.29)$$

Ներմուծենք հետևյալ նշանակումները.

$$B_k \equiv (-1)^k \frac{C_p^k}{p!} \int_{-1}^0 \frac{t(t+1)\dots(t+p)}{t+k} dt, \quad k = 0, 1, \dots, p \quad (7.8.30)$$

և

$$\varepsilon_n \equiv \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \int_{-1}^0 u^{(p+2)}(\xi) t(t+1)\dots(t+p) dt : \quad (7.8.31)$$

Այսպիսով, (7.8.27) - (7.8.31)-ից ունենք

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + h \sum_{k=0}^p B_k f(x_{n-k+1}, u(x_{n-k+1})) + h \varepsilon_n \quad (7.8.32)$$

կամ

$$\frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} = \sum_{k=0}^p B_k f(x_{n-k+1}, u(x_{n-k+1})) + \varepsilon_n : \quad (7.8.33)$$

Դեռ նետեղով (7.8.33) հավասարությունում ε_n մեծությունը՝ ստանում ենք հետևյալ տարրերական մեթոդ:

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1} - v_n}{h} &= \sum_{k=0}^p B_k f(x_{n-k+1}, v_{n-k+1}), \\ n &= p-1, p, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (7.8.34)$$

$$v_0 = u_0; \quad v_1, v_2, \dots, v_{p-1} - տրված են,$$

որը կոչվում է *Աղամս-Մոուլտոնի մեթոդ*: Այլ մեթոդն անվանում են նաև *Աղամսի ինտերպոլացիոն մեթոդ*:

Մոտավոր լուծման արժեքները, սկսված v_p -ից, որոշվում են

$$v_{n+1} = v_n + h \sum_{k=0}^p B_k f(x_{n-k+1}, v_{n-k+1}), \quad n = p-1, p, \dots, N-1 \quad (7.8.35)$$

հավասարումներից: Այսպիսով, Աղամս-Մոռլտոնի մեթոդը, եթե $p > 1$, բազմաքայլ անրացահայտ մեթոդ է:

Համեմատելով (7.8.33) և (7.8.34)-ը՝ տեսնում ենք, որ ε_n մեծությունը իրենից մերկայացնում է մեթոդի ամկապակցություն կամ մոտարկման սխալանք: Օգտվելով (7.8.31) արտահայտությունից՝ դժվար չէ ցույց տալ, որ

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{M_{p+2}}{p+1} h^{p+1} : \quad (7.8.36)$$

Դա նշանակում է, որ Աղամս-Մոռլտոնի մեթոդը ունի մոտարկման $(p+1)$ -րդ կարգ: Ընդ որում, մեթոդի անդային սխալանքը, ինչպես և Աղամս-Բաշֆորտի մեթոդում, $O(h^{p+2})$ մեծություն է (դյուա ապացույցը բողնում ենք ընթերցողին): Այստեղ մենք դուրս չենք բերելու Աղամս-Մոռլտոնի մեթոդի գլոբալ սխալանքի գնահատականը (տե՛ս, օրինակ, [4]): Նշենք միայն, որ եթե v_1, v_2, \dots, v_{p-1} "մեկնարկային" արժեքները հաշված են $O(h^{p+1})$ ճշտությամբ, ապա գլոբալ սխալանքը նույնպես ունի այդ ճշտությունը:

Դիտարկենք Աղամս-Մոռլտոնի մեթոդի մի քանի մասնավոր դեպք: Համաձայն (7.8.30) և (7.8.35)-ի ստանում ենք հետևյալ հաշվարկային բանաձևերը.

ա) $p = 0$ դեպք՝

$$v_{n+1} = v_n + hf(x_{n+1}, v_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

(Եյլերի անբացահայտ մեթոդ),

բ) $p = 1$ դեպք՝

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2} [f(x_{n+1}, v_{n+1}) + f(x_n, v_n)], \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

գ) $p = 2$ դեպք՝

$$\begin{aligned} v_{n+1} = v_n + \frac{h}{12} [5f(x_{n+1}, v_{n+1}) + 8f(x_n, v_n) - f(x_{n-1}, v_{n-1})], \\ n = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned}$$

դ) $p = 3$ դեպք՝

$$\begin{aligned} v_{n+1} = v_n + \frac{h}{24} [9f(x_{n+1}, v_{n+1}) + 19f(x_n, v_n) - 5f(x_{n-1}, v_{n-1}) + f(x_{n-2}, v_{n-2})], \\ n = 2, 3, \dots, N-1 : \end{aligned}$$

7.8.3 Պրեդիկտոր-կոռեկտոր տիպի մեթոդներ

Աղամս-Մոռլտոնի մեթոդը տալիս է ոչ թե v_{n+1} -ի հաշվման բացահայտ բանաձև, այլ հավասարում (ընդհանուր դեպքում՝ ոչ գծային) այդ արժեքի որոշման համար:

Բնական է, որ Աղամս-Մոռլտոնի մեթոդի թվային իրականացումը ավելի բարդ է, քան Աղամս-Բաշֆորտի մեթոդները: Սակայն, չնայաց դրան, Աղամս-Մոռլտոնի մեթոդը նույնպես օգտագործվում է: Բանն այն է, որ մեթոդի հիմքում դրված ինտերպոլացիայի հանգույցների դասավորությունը ավելի հաջող է, քան Աղամս-Բաշֆորտի մեթոդում: Այդ պատճառով Աղամս-Մոռլտոնի մեթոդը տալիս է, ընդհանրապես, ավելի ճշգրիտ արդյունք՝ նույն թվով ինտերպոլացիայի հանգույցներ օգտագործելիս (տես, օրինակ, [22]):

Գործնականում լայնորեն կիրառվում է երկու մեթոդների միասնական օգտագործումը: Դա այսպիս կոչված արեդիկտոր-կոռեկտոր մեթոդներն են (այլ կերպ ասած, ճախազուշակման և շտկման մեթոդներ): Դրանց էությունը կայանում է նրանում, որ սկզբից Աղամս-Բաշֆորտի բացահայտ մեթոդը գտնվում է ընթացիկ հանգույցում ճշգրիտ լուծման սկզբնական մոտավորությունը (*Ճախազուշակում*), իսկ այնուհետև այդ արժեքը Աղամս-Մոռլտոնի մեթոդի միջոցով ճշգրտվում է (*շտկում*): Ավելի ճիշտ, հաշվողական սխեման գրվում է հետևյալ կերպ:

$$\begin{aligned} v_{n+1}^{AB} &= v_n + h \sum_{k=0}^p A_k f(x_{n-k}, v_{n-k}), \\ v_{n+1} &= v_n + h \sum_{k=1}^p B_k f(x_{n-k+1}, v_{n-k+1}) + h B_0 f(x_{n+1}, v_{n+1}^{AB}), \end{aligned} \quad (7.8.37)$$

$$n = p, p+1, \dots, N-1 :$$

Որոշ դեպքերում իմաստ ունի կատարել մի քանի լրացուցիչ իտերացիա.

$$\begin{aligned} w^{(0)} &= v_n + h \sum_{k=0}^p A_k f(x_{n-k}, v_{n-k}) \\ Q &= v_n + h \sum_{k=1}^p B_k f(x_{n-k+1}, v_{n-k+1}) \\ \text{for } i &= 1, 2, \dots, l \text{ do} \\ w^{(l)} &= Q + h B_0 f(x_{n+1}, w^{(l-1)}) \\ \text{end} \\ v_{n+1} &= w^{(l)} \end{aligned}$$

Այսպիսով, արեդիկտոր-կոռեկտոր տիպի մեթոդները բացահայտ մեթոդներ են:

7.9 Կայունության խնդիրը և կոշտ հավասարումներ

Թվային ալգորիթմների կարևորագույն հատկություններից է կայունությունը: Այս հասկացությանը բազմից առնչվել ենք մեր դասընթացի նախորդ բաժիններում: Սույն պարագրաֆում կրննարկենք այս գաղափարը սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համար Կոչու խնդրի լուծման տարբերական մեթոդների կիրարկմանը: Ընդ որում, մենք կտարբերենք ինչպես բուն դիֆերենցիալ հավասարումների, այնպես էլ նրանց լուծման տարբերական մեթոդների կայունությունը:

7.9.1 Դիֆերենցիալ հավասարումների կայունությունը

Նախ և առաջ դիտարկենք երկու օրինակ:

Օրինակ 7.9.1 : Դիցուք տրված է

$$\begin{aligned} u' &= xu(u-2), \quad x \geq 0, \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \tag{7.9.1}$$

Կոչու խնդիրը: Այս խնդրի լուծումը

$$u(x) = \frac{2u_0}{u_0 + (2 - u_0)e^{x^2}}$$

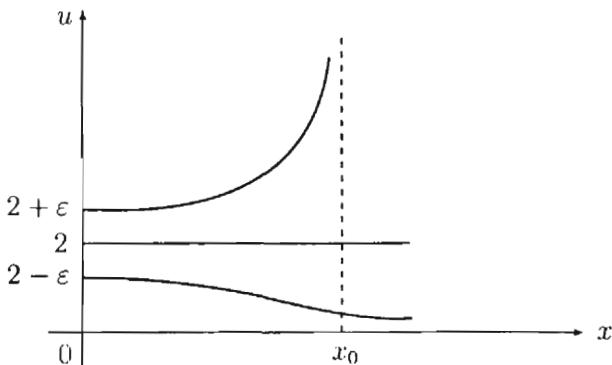
ֆունկցիան է: Եթե $u_0 = 2$, ապա $u(x) \equiv 2$: Եթե $u_0 = 2 - \varepsilon$, որտեղ $\varepsilon > 0$, ապա

$$u(x) = \frac{2(2 - \varepsilon)}{2 - \varepsilon + \varepsilon e^{x^2}} :$$

Այս դեպքում $u(x) \rightarrow 0$ եթե $x \rightarrow \infty$: Իսկ եթե $u_0 = 2 + \varepsilon$, որտեղ $\varepsilon > 0$, ապա

$$u(x) = \frac{2(2 + \varepsilon)}{2 + \varepsilon - \varepsilon e^{x^2}} :$$

Այս լուծումը ունի եզակիություն՝ $x_0 = \sqrt{\ln(1 + 2\varepsilon^{-1})}$ կետում:



Նկ. 7.9.1 (7.9.1) խնդրի լուծումը տարբեր սկզբնական պայմանների դեպքում

Լուծումների բնորոշ վարքը ցույց է տրված նկ. 7.9.1 -ում: ♣

Օրինակ 7.9.2 : Դիտարկենք երկրորդ կարգի

$$u'' - 2u' - 3u = 0, \quad x \geq 0 \tag{7.9.2}$$

ղիֆերենցիալ հավասարումը

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = -1 \quad (7.9.3)$$

սկզբանական պայմաններով:

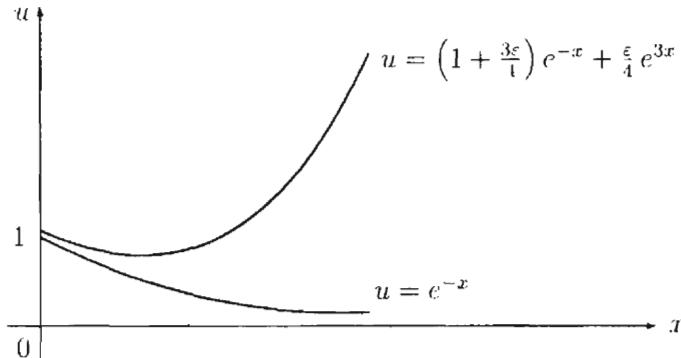
Խնդրի լուծումն է $u(x) = e^{-x}$ ֆունկցիան: Պարզ է, որ $u(x) \rightarrow 0$ եթե $x \rightarrow \infty$: Փոփոխենք (7.9.3) պայմաններից առաջինը $\varepsilon > 0$ փոքր մեծությունով այնպես, որ

$$u(0) = 1 + \varepsilon, \quad u'(0) = -1 : \quad (7.9.4)$$

Այդ դեպքում (7.9.4) պայմաններով (7.9.2) հավասարման լուծումը կլինի

$$u(x) = \left(1 + \frac{3}{4} \varepsilon\right) e^{-x} + \frac{\varepsilon}{4} e^{3x} \quad (7.9.5)$$

ֆունկցիան: Տեսնում ենք, որ (7.9.5)-ի աջ մասի առաջին գումարելին ձգտում է զրոյի երբ $x \rightarrow \infty$, այն ժամանակ երբ երկրորդ գումարելին ցանկացած դրական ε -ի դեպքում ձգտում է անվերջության:



Նկ. 7.9.2 (7.9.2) հավասարման լուծումը տարբեր սկզբանական պայմանների դեպքում

Այդ երկու լուծումները պատկերված են նկ. 7.9.2-ում: ♣

Դիտարկված օրինակները ցույց են տալիս, որ որոշ ղիֆերենցիալ հավասարումների համար սկզբանական պայմանների որքան ասես փոքր փոփոխությունները կարող են առաջացնել լուծման ինչքան ասես մեծ փոփոխություններ: Այդպիսի ղիֆերենցիալ հավասարումները կոչվում են **անկայում** սկզբանական պայմանների նկատմամբ: Գործնականում հնարավոր չեն ստանալ այդ հավասարումների ընդունելի թվային լուծում, քանի որ մոտարկման և կրորացման սխալանքները նույնպիսի ազդեցություն են գործում, ինչպես և սկզբանական պայմանների փոփոխությունները և կարող են բնրել արդյունքի աղետալի աղավաղմանը:

Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համար Կոշու խնդրի լուծման բայցին մեթոդների կայունության հետազոտումը կարելի է կատարել

$$u' = \lambda u, \quad x \geq 0 \quad (7.9.6)$$

պարզ հավասարման օրինակի վրա, որտեղ $\lambda \neq 0$ հաստատուն t ,

$$u(0) = u_0 \quad (7.9.7)$$

սկզբնական պայմանով: (7.9.6) հավասարումը հաճախ դիտարկում են որպես մոդելային հավասարում (տե՛ս ստորև 7.9.1 դիտողությունը): Հեշտ է տեսնել, որ (7.9.6)- (7.9.7) խնդրի լուծումը

$$u(x) = u_0 e^{\lambda x} \quad (7.9.8)$$

ֆունկցիան է: Եթե $\lambda < 0$, ապա այդ լուծումը ճգնում է զրոյի, երբ $x \rightarrow \infty$: Իսկ եթե $\lambda > 0$, ապա այն անսահմանորեն աճում է լատ բացարձակ արժեքի:

Դիտողություն 7.9.1 : Հիմնավորենք (7.9.6) հավասարման անվանումը՝ մոդելային հավասարում: Դիտարկենք

$$u' = f(x, u), \quad x \geq 0 \quad (7.9.9)$$

հավասարումը: Դիցուք $u(x)$ -ը (7.9.9) հավասարման լուծումն է, որը բավարարում է $u(0) = u_0$ սկզբնական պայմանին, իսկ $\tilde{u}(x)$ -ը լուծումն է $\tilde{u}(0) = u_0 + \varepsilon$ սկզբնական պայմանով: Ստանանք հավասարում

$$z(x) \equiv \tilde{u}(x) - u(x)$$

սխալանքի համար: Ուսենք

$$z'(x) = \tilde{u}'(x) - u'(x) = f(x, \tilde{u}) - f(x, u) = f'_u(x, u + \theta z) z(x),$$

որտեղ $0 < \theta < 1$: Ներմուծենք

$$\lambda(x) \equiv f'_u(x, u + \theta z)$$

նշանակումը: Այսպիսով, $z(x)$ ֆունկցիան

$$\begin{aligned} z' &= \lambda(x) z, \quad x \geq 0, \\ z(0) &= \varepsilon \end{aligned}$$

խնդրի լուծումն է, ինչը և հանդիսացավ (7.9.6) հավասարման անվան լնարության պատճառ:

Եթե $\lambda < 0$, ապա (7.9.6) հավասարումը կայուն է (7.9.7) սկզբնական պայմանի նկատմամբ: Հակառակ դեպքում, այսինքն եթե $\lambda > 0$, հավասարումն անկայուն է:

Իրոք, դիցուք $\tilde{u}(x)$ -ը՝ (7.9.6) հավասարման լուծումն է $\tilde{u}(0) = u_0 + \varepsilon$ խոտորված սկզբնական պայմանով: Այդ դեպքում $z(x) \equiv \tilde{u}(x) - u(x)$ սխալանքը

$$\begin{aligned} z' &= \lambda z, \quad x \geq 0, \\ z(0) &= \varepsilon \end{aligned} \tag{7.9.10}$$

խնդրի լուծումն է: Համաձայն (7.9.8)-ի՝ այդ լուծումը կլինի

$$z(x) = \varepsilon e^{\lambda x} : \tag{7.9.11}$$

Այսպիսով, եթե $\lambda < 0$, ապա սխալանքը ձգուում է զրոյի, եթե $x \rightarrow \infty$: Իսկ եթե $\lambda > 0$, ապա այն անսահմանորեն աճում է x -ի աճման հետ մեկտեղ: Ուստի հետագայում կհամարենք, որ մոդելային հավասարման մեջ $\lambda < 0$:

7.9.2 Տարբերական մեթոդների կայունությունը

Անդրադառնանք այժմ Կոշու խնդրի լուծման տարբերական մեթոդների կայունության հարցին՝ (7.9.6) մոդելային խնդրի համեմատ: Ինչպես հետևում է (7.9.8)-ից,

$$|u(x)| \leq |u_0| \quad \forall x \geq 0 : \tag{7.9.12}$$

Ըստ Էության, (7.9.12) անհավասարությունը նշանակում է, որ սկզբնական պայմանում թույլ տրված սխալանքը չի աճում (տես (7.9.10) և (7.9.11)): Տարբերական մեթոդը կհամարենք կայում (7.9.6) մոդելային հավասարման վրա, եթե $v_n, n = 0, 1, \dots$ մոտավոր լուծման համար տեղի ունի (7.9.12) անհավասարության նմանակ, այն է՝

$$|v_n| \leq |v_0|, \quad n = 0, 1, \dots : \tag{7.9.13}$$

Եյլերի մեթոդը: Համաձայն (7.3.15) օրենքի՝ ունենք

$$v_{n+1} = (1 + h\lambda)v_n, \quad n = 0, 1, \dots :$$

Այստեղից ստանում ենք

$$v_n = (1 + h\lambda)^n v_0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Քանածեր: Ակնհայտ է, որ (7.9.13) անհավասարությունը տեղի կունենա, եթե

$$|1 + h\lambda| \leq 1,$$

այսինքն՝

$$-h\lambda \leq 2 : \tag{7.9.14}$$

Նկատի ունենալով այդ սահմանափակումը քայլի վրա՝ ասում են, որ Եյլերի մեթոդը պայմանականորեն կայուն է:

Եյլերի անբացահայտ մեթոդը: Համաձայն (7.4.6)-ի՝ լուծումն ընթացիկ հանգույցում որոշվում է

$$v_{n+1} = v_n + h \lambda v_{n+1}$$

հավասարումից: Լուծելով այն v_{n+1} -ի նկատմամբ՝ կստանանք

$$v_{n+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} v_n, \quad n = 0, 1, \dots :$$

Այս առնչությունից հետևում է, որ

$$v_n = \frac{1}{(1 - h\lambda)^n} v_0, \quad n = 0, 1, \dots :$$

Այստեղից երևում է, որ (7.9.13) անհավասարությունը տեղի ունի ցանկացած h քայլի դեպքում: Այսպիսով, Եյլերի անբացահայտ մեթոդը բացարձակապես կայում է:

Եյլերի վերահաշվման մեթոդները: (7.9.6) մոդելային հավասարման համար (7.5.3)-ից, հաշվի առնելով (7.5.15) պայմանը, ստանում ենք

$$v_{n+1} = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2} h^2 \lambda^2\right) v_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

առնչությունը, որտեղից էլ հետևում է

$$v_n = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2} h^2 \lambda^2\right)^n v_0, \quad n = 0, 1, \dots$$

բացահայտ արտահայտությունը մոտավոր լուծման համար: Դժվար չէ ցույց տալ, որ

$$\left|1 + h\lambda + \frac{1}{2} h^2 \lambda^2\right| \leq 1$$

անհավասարությունը տեղի ունի, եթե $-h\lambda \leq 2$: Դա նշանակում է, որ Եյլերի վերահաշվման մեթոդները (մասնավորապես, Հոյնի և միջին կետի մեթոդները) պայմանականորեն կայում են:

Ուսումնական մեթոդը: Համաձայն (7.6.3) բանաձևի՝ ունենք

$$v_{n+1} = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2} h^2 \lambda^2 + \frac{1}{6} h^3 \lambda^3 + \frac{1}{24} h^4 \lambda^4\right) v_n, \quad n = 0, 1, \dots :$$

Այստեղից ստանում ենք արտահայտություն մոտավոր լուծման համար.

$$v_n = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2} h^2 \lambda^2 + \frac{1}{6} h^3 \lambda^3 + \frac{1}{24} h^4 \lambda^4\right)^n v_0, \quad n = 0, 1, \dots :$$

Ինչպես ցույց են տալիս հաշվարկները,

$$\left|1 + h\lambda + \frac{1}{2} h^2 \lambda^2 + \frac{1}{6} h^3 \lambda^3 + \frac{1}{24} h^4 \lambda^4\right| \leq 1$$

անհավասարությունը տեղի ունի. Եթե $-h\lambda \leq 2.78$: Այսպիսով, Ռունգե-Կուտայի մեթոդը նույնպես պայմանականորեն կայուն է, բնելու այսուեղ կայունության պայմանը փոքր-ինչ ավելի քոյլ է, քան Էյլերի մեթոդում:

Այստեղ մենք չենք զբաղվելու Աղամսի քազմաքայլ մեթոդների կայունության հետազոտմամբ, քանի որ այն պահանջում է հատուկ եղանակների կիրառում: Սահմանափակվենք միայն մեկ երկքայլ մեթոդի դիտարկմամբ:

Օրինակ 7.9.3 : Դիտարկենք

$$u' = -2u, \quad u(0) = 1 \quad (7.9.15)$$

Կոչու խնդիրը, որի լուծումն է $u(x) = e^{-2x}$ ֆունկցիան: Կիրառենք խնդիրի բվային լուծման համար

$$\frac{v_{n+1} - v_{n-1}}{2h} = -2v_n, \quad n = 1, 2, \dots; \quad v_0 = 1, \quad v_1 = e^{-2h} \quad (7.9.16)$$

Երկքայլ տարրերական մեթոդը: Ինչպես տեսնում ենք, առաջին երկու հանգույցներում մոտավոր և ճշգրիտ լուծումները հաճընկնում են: Մոտավոր լուծման արժեքները հաջորդ հանգույցներում հաշվվում են

$$v_{n+1} = -4hv_n + v_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.9.17)$$

օրենքով: Ստացված (7.9.17) առնչությունները իրենցից ներկայացնում են հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի համասեռ տարրերական հավասարում (տես, օրինակ, [11],[37]):

Փնտրենք (7.9.17) հավասարման մասնավոր լուծումը

$$v_n = q^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

տեսքով, որտեղ $q \neq 0$: Տեղադրելով այն (7.9.17) հավասարման մեջ՝ կստանանք

$$q^2 + 4hq - 1 = 0$$

քառակուսի հավասարում, որը կոչվում է *քառութագրիչ հավասարում*: Այդ հավասարումը ունի երկու տարրեր իրական արմատ.

$$q_1 = -2h + \sqrt{4h^2 + 1}, \quad q_2 = -2h - \sqrt{4h^2 + 1} :$$

Համաձայն երկրորդ կարգի տարրերական հավասարումների տեսության (տես [11],[37]), (7.9.17) հավասարման ընդհանուր լուծումը գրվում է, ենտեյալ տեսքով.

$$v_n = C_1q_1^n + C_2q_2^n, \quad n = 0, 1, \dots :$$

Այստեղ C_1 և C_2 հաստատունները որոշվում են $v_0 = 1$ և $v_1 = e^{-2h}$ պայմաններից, այսինքն՝

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1q_1 + C_2q_2 = e^{-2h} \end{cases}$$

հավաստրումների համակարգից: Լուծելով այդ համակարգը՝ կգտնենք

$$C_1 = \frac{1}{2} + \frac{2h + e^{-2h}}{2\sqrt{4h^2 + 1}}, \quad C_2 = \frac{1}{2} - \frac{2h + e^{-2h}}{2\sqrt{4h^2 + 1}} :$$

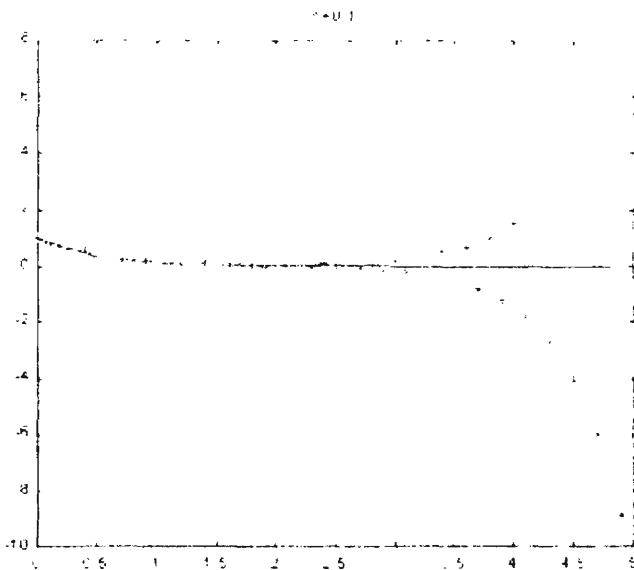
Այսպիսով, ստանում ենք

$$v_n = C_1(-2h + \sqrt{4h^2 + 1})^n + C_2(-1)^n(2h + \sqrt{4h^2 + 1})^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (7.9.18)$$

բացահայտ բանաձև (7.9.16) տարբերական մեթոդով որոշվող մոտավոր լուծման համար: Ստացված (7.9.18) բանաձևը թույլ է տալիս հետևել v_n լուծման վարքը, եթե $n \rightarrow \infty$: Իբրև, կամայական ֆիրստ h քայլի համար

$$0 < -2h + \sqrt{4h^2 + 1} < 1, \quad 2h + \sqrt{4h^2 + 1} > 1 :$$

Այդ պատճառով, եթե $n \rightarrow \infty$, ապա (7.9.18) արտահայտության աջ մասի առաջին անդամը ծգուում է զրոյի, իսկ երկրորդ անդամը, տատանվելով, ծգուում է անվերջության: Միաժամանակ, խնդրի ճշգրիտ լուծումը ծգուում է զրոյի, եթե $x \rightarrow \infty$ (նկ. 7.9.3): Այսինքն, (7.9.16) մեթոդը (7.9.15) խնդրի կիրառմամբ անկայում է:



Նկ. 7.9.3 (7.9.15) խնդրի ճշգրիտ (-) և մոտավոր (*) լուծումները

Երկրորդ գումարելին (7.9.18)-ի աջ մասում իրննից ներկայացնում է այսպես կոչված մակարույծ քաղաղրիչ: ♣

7.9.3 Կոշտ հավասարումներ

Գոյություն ունեն հավասարումներ, որոնց թվային լուծումը ստանդարտ մոտեցման դեպքում բերում է անբավարար արդյունքների: Այդպիսի հավասարումների թվին պատկանում են այսպես կոչված կոշտ հավասարումները: Պարզաբանենք կոշտության երևույթի էությունը հետևյալ օրինակի վրա (տե՛ս [31]):

Դիտարկենք

$$u' = -100u + 100, \quad u(0) = 2 \quad (7.9.19)$$

Կոշտ խնդիրը, որի ճշգրիտ լուծումն է

$$u(x) = 1 + e^{-100x} \quad (7.9.20)$$

Փունկցիան: Այդ լուծումը կայուն է և շատ արագ նվազում է $u(0) = 2$ արժեքից մինչև իր սահմանային արժեքը, որը հավասար է մեկի: Այսպես, օրինակ, $u(0.1) \approx 1 + 5 \cdot 10^{-5}$:

Կիրառենք (7.9.19) խնդրի լուծման համար

$$v_{n+1} = (1 - 100h)v_n + 100h, \quad n = 0, 1, \dots; \quad v_0 = 2 \quad (7.9.21)$$

Էյլերի մեթոդը: Համաձայն կայունության (7.9.14) պայմանի՝ պետք է վերցնել $h \leq 0.02$: Վերցնելով $h = 0.02$, (7.9.21)-ից ստանում ենք

$$v_{n+1} = -v_n + 2, \quad n = 0, 1, \dots; \quad v_0 = 2$$

հաշվարկային բանաձև: Այս բանաձևով ստացվող

$$v_0 = 2, \quad v_1 = 0, \quad v_2 = 2, \quad v_3 = 0, \dots$$

հաջորդականությունը ոչ մի դեպքում չի կարելի դիտարկել որպես (7.9.19) խնդրի (7.9.20) ճշգրիտ լուծման բավարար մոտարկում, թեև մոտավոր լուծումը կայուն է (7.9.13) իմաստով: Եթե $h = 0.01$, հաշվարկները տալիս են

$$v_0 = 2; \quad v_{n+1} = 1, \quad n = 0, 1, \dots :$$

Եապես ավելի մանր քայլը, օրինակ՝ $h = 0.001$, բավականին լավ է արտացոլում լուծման վարքը.

$$v_0 = 2, \quad v_1 = 1.9, \quad v_2 = 1.81, \dots :$$

Էյլերի (7.9.21) մեթոդով ստացվող մոտավոր լուծման համար դժվար չէ արտածել

$$v_n = 1 + (1 - 100h)^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (7.9.22)$$

Բանաձևը (թողնում ենք այն ընթերցողին որպես վարժություն): Համեմատելով (7.9.20) և (7.9.22) արտահայտությունները ճշգրիտ և մոտավոր լուծումների համար համապատասխանաբար, տեսնում ենք, որ $(1 - 100h)^n$ մեծությունը e^{-100x} անդամի մոտարկումն է, ընդ որում բավականին լավ փոքր h -երի համար: Թեև e^{-100x} անդամը տալիս է չնշին փոքր ներդրում ճշգրիտ լուծման մեջ (համենայն դեպքում, եթե $x \geq 0.1$),

կայունության պահպանման համար պահանջվում է, որ h քայլը լինի բավականաշափ փոքր: Դրանով բնութագրվում են կոչտ հավասարումները. դրանց լուծումը ներառում է արագ մարդող բաղադրիչ, որի ներդրումը ոչ էական է, սակայն շատ թվային մեթոդների կայունության պահպանման համար պահանջվում է, որ այդ բաղադրիչը մոտարկվի բավականաշափ ճշգրիտ՝ բավականաշափ փոքր հ քայլի ընտրության միջոցով: Իսկ դա բերում է ինչպես մերենայական ժամանակի մեծ ծախսերի, այնպես էլ կլորացման սխալանքների կուտակմանը:

Թվային ալգորիթմների կառուցումը կոչտ հավասարումների լուծման համար ժամանակակից հաշվողական մաթեմատիկայի կարևորագույն ուղղոթյուններից է: Սույն դասընթացում մենք չենք զբաղվելու այդ հարցով: Նշենք միայն, որ կոչտ հավասարումների լուծման համար օգտագործվում են, որպես օրենք, անբացահայտ մեթոդները: Կիրառենք, օրինակ, (7.9.19) խնդրի լուծման համար բացարձակապես կայուն էլեկտրի ամբացահայտ մեթոդը: Համաձայն (7.4.5)-ի՝ ունենք

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{h} = -100v_{n+1} + 100, \quad n = 0, 1, \dots; \quad v_0 = 2 :$$

Քանի որ հավասարումը v_{n+1} -ի նկատմամբ գծային է, ապա հաշվարկները կիրականացվեն

$$v_{n+1} = \frac{v_n + 100h}{1 + 100h}, \quad n = 0, 1, \dots; \quad v_0 = 2$$

բանաձևով: Կատարենով հաշվարկները $h = 0.02$ քայլով՝ գտնում ենք

$$v_0 = 2, \quad v_1 = 1.3333, \quad v_2 = 1.1111, \quad v_3 = 1.0370, \dots :$$

Սույնիսկ համեմատաբար մեծ $h = 0.1$ քայլի դեպքում կստանանք

$$v_0 = 2, \quad v_1 = 1.0909, \quad v_2 = 1.0083, \quad v_3 = 1.0008, \dots$$

հաջորդականությունը, որը որակապես ճիշտ է արտացոլում խնդրի ճշգրիտ լուծման վարքը:

7.10 Եզրային խնդիրներ

Մինչև այժմ մենք ուսումնասիրում էինք Կոչու խնդրի թվային լուծման մեթոդները՝ սահմանափակվելով առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների դիտարկմամբ: Այդ խնդրում լուծման գոյությունը և միակուրյունը ապահովող լրացուցիչ պայմանները տրվում են մեկ կետում և իրենցից ներկայացնում են որոնելի ֆոնկցիայի և նրա մի քանի ածանցյալների արժեքներ՝ կախված դիֆերենցիալ հավասարման կարգից: Գոյություն ունեն նաև եզրային խնդիրներ, որոնցում վնասություն է դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը ինչ-որ հատվածում, և լրացուցիչ պայմանները տրվում են հատվածի ծայրակետերում:

Օրինակ 7.10.1 (Ձերմաստիճանի մնայուն բաշխումը ծողում): Պահանջվում է գտնել T ջերմաստիճանի բաշխումը t երկարության ձողում. որը պատրաստված է և ջերմահաղորդականության գործակցով համաստ նյութից: Զոյի $x = 0$ և $x = l$ ծայրակետներում պահպանվում է հաստատուն ջերմաստիճան.

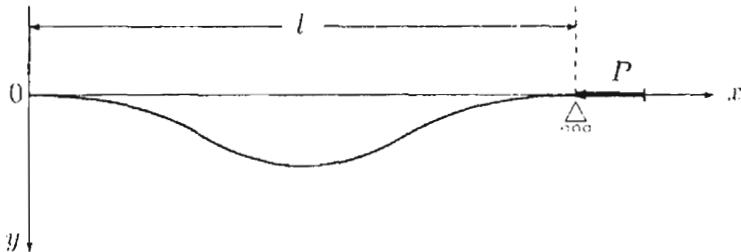
$$T(0) = T_0, \quad T(l) = T_f :$$

Եթեք աղյուսակում է, որ ծողում արտադրվում է տաքություն $q(x)$ արագությամբ: Պարզվում է, որ դիֆերենցիալ հավասարումը $T(x)$ ջերմաստիճանի նկատմամբ գրվում է հետևյալ տեսքով.

$$-\kappa T''(x) = q(x), \quad 0 \leq x \leq l :$$

Դրանով խսկ ունենք եզրային խնդիր: ♣

Օրինակ 7.10.2 (Զոյի երկայնակի ծողում): Դիտարկվում է EI հաստատուն կոշտության ծողի իր առանցքով ուղղված P սեղմող ուժի ազդեցության տակ երկայնակի ծոման խնդիրը (Հյերի խնդիրը): Դիցուք ծողի $x = 0$ ծախ ծայրը ամրացված է, խսկ $x = l$ աջ ծայրը հենաված է (նկ. 7.10.1):



Նկ. 7.10.1 Զոյի երկայնակի ծողումը

Հայտնի է, որ ծողի իր առանցքից շեղման $y(x)$ ֆունկցիան բավարարում է

$$y''' + \frac{P}{EI} y'' = 0$$

դիֆերենցիալ հավասարմանը: Համաձայն ծողի ծայրերի ամրացմամ եղանակին՝ ունենք հետևյալ եզրային պայմանները.

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y(l) = y'(l) = 0 :$$

Պահանջվում է գտնել P -ի փոքրագույն արժեքը (այսպես կոչված կրիտիկական ուժ), որի դեպքում առաջանում է փողի երկայնակի ծողում: Այլ կերպ ասած, հարցը հանգում է P -ի այն փոքրագույն դրական արժեքի որոշմանը, որի դեպքում եզրային խնդիրը ունի ոչ տրիվիալ լուծում:



Դիտարկենք նրանորդ կարգի

$$u'' = f(x, u, u'), \quad a < x < b \quad (7.10.1)$$

ոլիքերենցիալ հավասարումը

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta \quad (7.10.2)$$

Եզրային պայմաններով: Այս խնդրի լուծման գոյության և միակության պայմանները սպառիչ կերպով ուսումնաշրջան են գիտական գրականությունում (տես, օրինակ, [29]): Զնակերպենք այդպիսի պայմաններից մեկը:

Դիցուք $f(x, u, z)$ ֆունկցիան և նրա $f'_u(x, u, z)$ և $f'_z(x, u, z)$ մասնական ածանցյալները անընդհատ են $D = \{(x, u, z) : a \leq x \leq b, -\infty < u, z < +\infty\}$ տիրույթում: Եթե

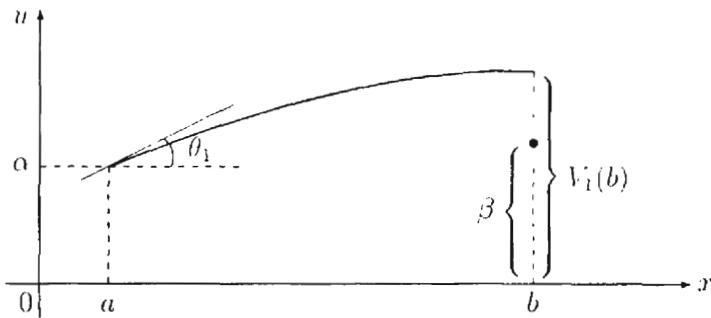
$$f'_u(x, u, z) > 0 \quad \forall (x, u, z) \in D$$

և գոյություն ունի այնպիսի $M > 0$ հաստատում, որ

$$|f'_z(x, u, z)| \leq M \quad \forall (x, u, z) \in D,$$

ապա (7.10.1), (7.10.2) եզրային խնդիրը ունի միակ լուծում:

Գոյություն ունեն եզրային խնդիրների լուծման տարրեր թվային մեթոդներ: Օրինակ, եզրային խնդիրը կարելի է հանգեցնել Կոշու խնդիրների հաջորդականությանը: Այդ տիպի մեթոդներից համառոտակի նկարագրենք այսպես կոչված *հրաձգության մոթողը*:



Նկ. 7.10.2 Հրաձգության մոթողի երկրաչափական մեկնաբանությունը

Ընտրենք ինչ-որ K_1 թիվ և դիտարկենք (7.10.1) հավասարումը

$$u(a) = \alpha, \quad u'(a) = K_1 \quad (7.10.3)$$

սկզբնական պայմաններով: Ենթադրենք, որ $[a, b]$ հատվածում կառուցված է (7.10.1), (7.10.3) խնդրի V_1 մոտավոր լուծումը: Ստացված $V_1(b)$ արժեքի և β աջ

Եզրային պայմանի համեմատումը տալիս է ինֆորմացիա $\theta_1 = \arctg K_1$ թեքման անկյան շտկման համար (նկ. 7.10.2): Դրանով զալիս ենք Կոշու նոր խնդրի (7.10.1) հավասարման համար

$$u(a) = \alpha, \quad u'(a) = K_2$$

սկզբնական պայմաններով, որտեղ K_2 թիվը ընտրված է այնպես, որ փոքրանա այնպես, որ $\beta - V_1(b)$ տարրերությունը:

Օգտվելով ունեցած ինֆորմացիայից՝ կարելի է կիրառել $u'(a) = K_1, K_2, K_3, \dots$ արժեքների ընտրության այս կամ այն ստրատեգիան, որը կրերի $V_1(b), V_2(b), V_3(b), \dots$ հաջորդականության հնարավորին շափ արագ զուգամիտությանը β թվին:

Նշենք, որ իրաձգության մոթողը տալիս է լավ արդյունքներ այն դեպքում, եթե Կոշիի խնդրի լուծումը ոչ այնքան զգայուն է $u'(a)$ տրվող արժեքների փոփոխման նկատմամբ: Հակառակ դեպքում կարելի է ստանալ անկայուն հաշվարկ:

Օրինակ 7.10.3 : Դիտարկենք

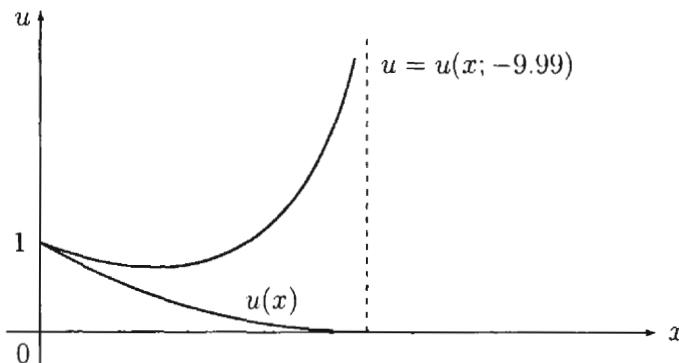
$$u'' = 100u, \quad 0 < x < 1 \quad (7.10.4)$$

հավասարումը

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 0 \quad (7.10.5)$$

Եզրային պայմաններով: Դժվար չէ ստուգել, որ (7.10.4), (7.10.5) խնդրի լուծումը հետևյալն է.

$$u(x) = \frac{1}{1 - e^{-20}} e^{-10x} - \frac{e^{-20}}{1 - e^{-20}} e^{10x} : \quad (7.10.6)$$



Նկ. 7.10.3 $u(x)$ և $u(x; K)$ ֆունկցիաների գրաֆիկները (եթե $K = -9.99$)

Դիտարկենք այժմ (7.10.4) հավասարումը

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = K \quad (7.10.7)$$

սկզբնական պայմաններով: (7.10.4), (7.10.7) խնդրի լուծումն է K պարամետրից կախված

$$u(x; K) = \frac{10 - K}{20} e^{-10x} + \frac{10 + K}{20} e^{10x} \quad (7.10.8)$$

ֆունկցիան: Հեշտ է տեսնել, որ $u(1; K) = 0$ արժեքը հասանելի է, եթե

$$K = -10 \frac{1 + e^{-20}}{1 - e^{-20}} \approx -10 :$$

Պարզվում է, որ $u(x; K)$ ֆունկցիան շատ զգայուն է K պարամետրի փոփոխման նկատմամբ: Օրինակ, $K = -9.99$ արժեքի համար ֆունկցիայի վարքը ցույց է տրված նկ. 7.10.3 -ում: Բանն այն է, որ Կոչու խնդրի (7.10.8) լուծումը աճում է ինչպես e^{10x} , և այդ արագ աճող բաղադրիչը մարելու համար սկզբնական պայմանը պետք է ընտրվի բավականին ճշգրիտ:



Հրաձգության մեթոդում խնդրը հանգում է երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման համար Կոչու խնդրի լուծմանը, ինչը չի քննարկվել մեր դասընթացում: Այդպիսի խնդրիների լուծման եղանակներից մեկը կայանում է հետևյալում:

Եթե ունենք

$$u'' = f(x, u, u')$$

հավասարումը

$$u(a) = \alpha, \quad u'(a) = \gamma$$

սկզբնական պայմաններով, ապա այն կարելի է քերել երկու առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի, եթե կատարենք $u'(x) = y(x)$ տեղադրումը: Այդ դեպքում $u''(x) = y'(x)$, և մենք ստանում ենք

$$\begin{cases} u'(x) = y(x), \\ y'(x) = f(x, u, y) \end{cases}$$

համակարգը $u(a) = \alpha, y(a) = \gamma$ սկզբնական պայմաններով: Այդ համակարգի լուծման համար կարելի է կիրառել, օրինակ,

$$\begin{aligned} \frac{U_{n+1} - U_n}{h} &= Y_n, & n = 0, 1, \dots \\ \frac{Y_{n+1} - Y_n}{h} &= f(x_n, U_n, Y_n), \end{aligned}$$

Եյլերի մեթոդը $U_0 = \alpha, Y_0 = \gamma$ սկզբնական արժեքներով:

7.11 Վերջակոր տարրերությունների մեթոդ

Սույն պարագրաֆում մենք կդիտարկենք եզրային խնդրների լուծման ամենատարածված եղանակը՝ վերջավոր տարրերությունների մեթոդը: Այս մեթոդի օգնությամբ եղային խնդրի լուծումը հանգում է տրված որոշ կետերի բազմության վրա որոնելի ֆունկցիայի արժեքների նկատմամբ հավասարումների համակարգի լուծմանը (գծային կամ ոչ գծային՝ կախված դիֆերենցիալ հավասարման տիպից):

Ինչպես արդեն ասվել է 7.1 պարագրաֆում, դա կարելի է իրագործել՝ փոխարինելով դիֆերենցիալ հավասարման մեջ մասնակցող ածանցյալները վերջավորտարբերական մոտարկումներով:

Դիտարկենք

$$-u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \quad a < x < b \quad (7.11.1)$$

զծային դիֆերենցիալ հավասարումը

$$\begin{aligned} \mu_0 u(a) + \mu_1 u'(a) &= \alpha, \\ \nu_0 u(b) + \nu_1 u'(b) &= \beta \end{aligned} \quad (7.11.2)$$

Եզրային պայմաններով, որտեղ $p(x), q(x), f(x)$ ֆունկցիաները և $\mu_0, \mu_1, \nu_0, \nu_1, \alpha, \beta$ թվերը տրված են, ընդ որում $\mu_0^2 + \mu_1^2 > 0$, $\nu_0^2 + \nu_1^2 > 0$: (7.11.2) պայմանները սահմանում են զծային կախվածություն որունելի լուծման և նրա ածանցյալների արժեքների միջև $[a, b]$ հատվածի ծայրակետերում: Այն դեպքում, եթե $\mu_1 = \nu_1 = 0$, այդ պայմանները կոչվում են առացի՛ սեռի պայմաններ: Եթե $\mu_0 = \nu_0 = 0$, ապա (7.11.2) պայմանները կոչվում են երկրորդ սեռի պայմաններ: Ընդհանուր դեպքում, եթե $\mu_i, \nu_i \neq 0$, $i = 0, 1$, եզրային պայմանները անվանում են երրորդ սեռի պայմաններ: Որոշ խնդիրներում միջակայրի ձախ և աջ ծայրակետերում կարող են տրվել տարրեր սեռի պայմաններ:

Նշենք, որ (7.11.1), (7.11.2) եզրային խնդրի լուծման գրյուրյան և միակության բավարար պայմանները կարելի է գտնել, օրինակ, [29] մենագրությունում: Մասնավորապես, եթե $p(x), q(x)$ և $f(x)$ ֆունկցիաները անընդհատ են $[a, b]$ հատվածում, ընդ որում $q(x) \geq 0$, ապա (7.11.1) հավասարումը առաջին սեռի եզրային պայմաններով ունի միակ լուծում $u(x) \in C^2[a, b]$: Ավելին, եթե $p(x), q(x), f(x) \in C^2[a, b]$, ապա $u(x) \in C^4[a, b]$:

Կառուցենք $[a, b]$ հատվածում

$$\omega_h = \{x_n : x_n = a + nh, n = 0, 1, \dots, N + 1\} \quad (7.11.3)$$

հավասարաշատի *gap* $h = (b - a)/(N + 1)$ քայլով: Ցանցի x_n հանգույցները, որտեղ $1 \leq n \leq N$, անվանենք *ենքրորդ*, իսկ $x_0 = a$ և $x_{N+1} = b$ հանգույցները՝ *եզրային*: Ցանցի վրա որոշված $v^h = \{v_n\}_{n=0}^{N+1}$ ֆունկցիան, որտեղ $v_n \equiv v(x_n)$, կանվանենք *ցանցային*: Նշանակենք G_h -ով ցանցային ֆունկցիաների զծային տարածությունը: Պարզ է, որ $[a, b]$ հատվածում որոշված կամայական $f(x)$ ֆունկցիան ծնում է $f^h = \{f_n\}_{n=0}^{N+1}$ ցանցային ֆունկցիա, որտեղ $f_n \equiv f(x_n)$:

Դիտարկենք սկզբից (7.11.1) հավասարումը

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta \quad (7.11.4)$$

առաջին սեռի եզրային պայմաններով: Կատարենք (7.11.1), (7.11.4) խնդրի վերջավորտարբերական մոտարկումը, փոխարինելով հավասարման մեջ երկրորդ ածանցյալը երկրորդ տարրերական ածանցյալով, իսկ առաջին ածանցյալը՝ կենտրոնական

տարբերական ածանցյալով (տես 4.6 պարագրաֆը): Սահմանենք (7.11.1), (7.11.4) խնդրի մոտավոր լուծումը որպես

$$\begin{cases} -(v_n)_{x\bar{x}} + p_n(v_n)_x + q_n v_n = f_n, & n = 1, 2, \dots, N, \\ v_0 = \alpha, \quad v_{N+1} = \beta \end{cases} \quad (7.11.5)$$

ցանցային հավասարումների գծային համակարգին բավարարող $v^h \in G_h$ ցանցային ֆունկցիա, որտեղ, համաձայն (4.6.3) և (4.6.7) նշանակումների՝

$$(v_n)_x^h \equiv \frac{v_{n+1} - v_{n-1}}{2h}, \quad (v_n)_{x\bar{x}} \equiv \frac{v_{n-1} - 2v_n + v_{n+1}}{h^2} :$$

Վերջավոր-տարբերական խնդիրը, որը մոտարկում է դիֆերենցիալ եզրային խնդիրը, անվանում են տարբերական սխեմա: Այսպիսով, (7.11.5) ցանցային հավասարումների համակարգը տարբերական սխեմա է (7.11.1), (7.11.4) խնդրի համար:

Գրենք (7.11.5) տարբերական սխեման

$$\begin{cases} -\left(1 + \frac{h}{2} p_n\right) v_{n-1} + \left(2 + h^2 q_n\right) v_n - \left(1 - \frac{h}{2} p_n\right) v_{n+1} = h^2 f_n, \\ n = 1, 2, \dots, N, \\ v_0 = \alpha, \quad v_{N+1} = \beta \end{cases} \quad (7.11.6)$$

Մեսքով: Դրանով իսկ ստանում ենք երեքանկյունագծային մատրիցով գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգ: Այդ համակարգը կարելի է արդյունավետորեն լուծել 3.9 պարագրաֆում նկարագրված մեթոդով: Ըստ որում, մեթոդի կոռեկտուրյան և կայունուրյան համար պեսք է ապահովել (7.11.6) համակարգի մատրիցի անկյունագծային գերիշտումը, այսինքն՝

$$|2 + h^2 q_n| \geq \left|1 + \frac{h}{2} p_n\right| + \left|1 - \frac{h}{2} p_n\right|, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (7.11.7)$$

պայմանների արկայությունը (տես 3.9.1 թեորեմը): Եթե ենթադրենք, որ $q(x) \geq 0$, ապա (7.11.7) անհավասարությունները տեղի կունենան բավականաշատ փոքր h քայլի լեռքում՝ մասնավորապես, եթե

$$h \max_{a \leq x \leq b} |p(x)| \leq 2 :$$

Այդպիսի սահմանափակում ցանցի քայլի վրա կարելի է շրջանցել, եթե (7.11.1) հավասարման մեջ առաջին ածանցյալի մոտարկման համար կենտրոնական տարբերական ածանցյալի փոխարևեն օգտագործենք աջակողմյան կամ ձախակողմյան տարբերական ածանցյալները՝ կախված գործակցի նշանից: Ավելի ճիշտ, ձևափոխենք (7.11.5) տարբերական սխեման գրելով n -րդ հավասարումը

$$-(v_n)_{x\bar{x}} + p_n(v_n)_x + q_n v_n = f_n, \quad \text{եթե } p_n < 0,$$

Կամ

$$-(v_n)_{x\bar{x}} + p_n(v_n)_{\bar{x}} + q_n v_n = f_n, \quad \text{եթե } p_n \geq 0$$

տեսքով: Այդ դեպքում ցանցային հավասարումների համակարգի մատրիցը կունենա անկյունազօջային գեղիշխում անկախ h քայլի մեծությունից: Սակայն նշենք, որ եթե կենտրոնական տարբերություններով մոտարկումը ունի ճշտության երկրորդ կարգ ըստ h -ի (լեմմա 4.6.3), ապա միակողմանի տարբերություններով մոտարկումը ունի միայն առաջին կարգ (տես 4.6.1 և 4.6.2 լեմմաները):

(7.11.2) Երբորդ սեղի պայմանների դեպքում տարբերական հավասարումները եզրային համգույցներում կարելի է գրել, օրինակ, հետևյալ կերպ:

$$\mu_0 v_0 + \mu_1 \frac{v_1 - v_0}{h} = \alpha, \quad \nu_0 v_{N+1} + \nu_1 \frac{v_{N+1} - v_N}{h} = \beta :$$

Եթե (7.11.1), (7.11.2) խնդրի լուծումը բավականաչափ ողորկ է, ապա եզրային պայմանների ավելի ճշգրիտ մոտարկում տալիս են

$$\mu_0 v_0 + \mu_1 \frac{-3v_0 + 4v_1 - v_2}{2h} = \alpha, \quad \nu_0 v_{N+1} + \nu_1 \frac{3v_{N+1} - 4v_N + v_{N-1}}{2h} = \beta .$$

հավասարումները: Իրոք, եթե $u(x) \in C^3[a, b]$, ապա օգտվելով Թեյլորի բանաձևից՝ հեշտությամբ կարելի է ցույց տալ, որ

$$\begin{aligned} \frac{-3u(x_0) + 4u(x_1) - u(x_2)}{2h} &= u'(a) + O(h^2), \\ \frac{3u(x_{N+1}) - 4u(x_N) + u(x_{N-1})}{2h} &= u'(b) + O(h^2) \end{aligned}$$

(քողնում ենք ընթերցողին համոզվել դրանում ինքնուրույն):

Տարբերական սխեմաների կառուցման ժամանակ ոչ միշտ է պետք ցուցաբերել շարլոնային մոտեցում, այլ խելամտորեն օգտագործել խնդրի ոիֆերենցիալ օպերատորի տեսքը, նրա եզրային պայմանները և այլն: Դիտարկենք, օրինակ,

$$-(a(x)u')' = f(x), \quad a < x < b \tag{7.11.8}$$

հավասարումը, որտեղ $a(x) > 0$, (7.11.4) եզրային պայմաններով: Իհարկե, մենք կարող ենք գրել (7.11.8) հավասարումը

$$-a(x)u'' - a'(x)u' = f(x)$$

համարժեք տեսքով, որից հետո կիրառել մեզ հայտնի վերջավոր-տարբերական բանաձևները: Իսկ կարելի է վարվել այլ կերպ: Ներմուծենք ω_h ցանցի համգույցների մեջտեղում օժանդակ "ֆիկտիվ" համգույցներ.

$$x_{n \pm 1/2} = x_n \pm \frac{h}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, N :$$

Այդ դեպքում $n = 1, 2, \dots, N$ արժեքների համար ունեն՝

$$\begin{aligned} -(a(x)u')' \Big|_{x=x_n} &\approx -\frac{a_{n+1/2}u'(x_{n+1/2}) - a_{n-1/2}u'(x_{n-1/2})}{h} \approx \\ &-\frac{1}{h} \left[a_{n+1/2} \frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} - a_{n-1/2} \frac{u(x_n) - u(x_{n-1})}{h} \right] = \\ &\frac{1}{h^2} \left[-a_{n-1/2}u(x_{n-1}) + (a_{n-1/2} + a_{n+1/2})u(x_n) - a_{n+1/2}u(x_{n+1}) \right] : \end{aligned}$$

Այստեղ մենք օգտվել ենք $a_{n\pm 1/2} \equiv a(x_{n\pm 1/2})$ նշանակումից: Վերցնելով որպես հիմք ստացված արտահայտություն՝ գրենք հետևյալ ցանցային հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} -a_{n-1/2}v_{n-1} + (a_{n-1/2} + a_{n+1/2})v_n - a_{n+1/2}v_{n+1} = h^2 f_n, \\ n = 1, 2, \dots, N, \\ v_0 = \alpha, v_{N+1} = \beta : \end{cases} \quad (7.11.9)$$

Հեշտ է տեսնել, որ (7.11.9) համակարգի մատրիցը սիմետրիկ է և ունի անկյունագծային գերիշխում:

Այսպիսով, մենք համառոտակի ծանոթացել ենք սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համար տարբերական սխեմաների կառուցման հիմնական սկզբունքների հետ:

7.12 Տարբերական սխեմայի հետազոտումը մեկ եզրային խնդրի համար

Դիտարկենք

$$Lu \equiv -u'' + q(x)u = f(x), \quad a < x < b \quad (7.12.1)$$

գծային դիֆերենցիալ հավասարումը

$$u(a) = \alpha, u(b) = \beta \quad (7.12.2)$$

Եզրային պայմաններով: Ենթադրենք, որ $q(x), f(x) \in C^2[a, b]$, ընդ որում $q(x) \geq 0$: Այդ դեպքում գոյություն ունի (7.12.1), (7.12.2) խնդրի $u(x) \in C^4[a, b]$ միակ լուծումը (տես [29]): (7.12.1) հավասարման ձախ մասը սահմանում է երկրորդ կարգի L գծային դիֆերենցիալ օպերատորը:

Գրենք

$$\begin{cases} L_h v_n \equiv -(v_n)_{xx} + q_n v_n = f_n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \\ v_0 = \alpha, v_{N+1} = \beta \end{cases} \quad (7.12.3)$$

Տարբերական սխեմա: (7.12.3) վերջավոր-տարբերական հավասարման ձախ մասը սահմանում է L_h գծային տարբերական օպերատոր, որը L դիֆերենցիալ օպերատորի վերջավոր-տարբերական մոտարկումն է:

Տարբերական սխեման մեզ տալիս է սիմետրիկ երթանկյունագծային մատրիցով

$$\begin{cases} -(v_{n+1} + (2 + h^2 q_n) v_n - v_{n-1}) = h^2 f_n, & n = 1, 2, \dots, N, \\ v_0 = \alpha, \quad v_{N+1} = \beta \end{cases}$$

ցանցային հավասարումների համակարգ: Քանի որ համակարգի մատրիցը ունի անկյունագծային գերիշխում, ապա (7.12.3) տարբերական խնդիրը ունի փիակ լուծում:

Սահմանեալը $w^h = \{w_n\}_{n=0}^{N+1}$ ցանցային ֆունկցիաների G_h տարածությունում

$$\|w^h\| \equiv \max_{0 \leq n \leq N+1} |w_n|$$

նորմ:

Պարզ է, որ (7.12.1), (7.12.2) խնդրի ճշգրիտ լուծումը, ընդհանուր առմամբ, ω_h ցանցի վրա չի բավարարում (7.12.3) տարբերական սխեմային: Հետազոտենք հետևյալ հարցը. ի՞նչ ճշտուրյամբ է այդ լուծումը բավարարում (7.12.3) տարբերական սխեմային: Այդ նպատակով ներմուծենք $\varepsilon^h = \{\varepsilon_n\}_{n=0}^{N+1}$ ցանցային ֆունկցիա հետևյալ կերպ.

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &\equiv L_h u_n - f_n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \\ \varepsilon_0 &\equiv u_0 - \alpha, \quad \varepsilon_{N+1} \equiv u_{N+1} - \beta : \end{aligned} \tag{7.12.1}$$

Անվանեանք այդ ֆունկցիան (7.12.3) տարբերական սխեմայի անկյապակցություն կամ մուտարկման սխալանք: Համաձայն (7.12.2) եղուային պայմանների՝ $\varepsilon_0 = \varepsilon_{N+1} = 0$: Ներդին հանգույցներում տնենք՝

$$|\varepsilon_n| = |-(u_n)_{xx} + q_n u_n + u''(x_n) - q_n v_n| = |u''(x_n) - (u_n)_{xx}| :$$

Այստեղից, օգտվելով (4.6.8) գնահատականից, կստանանք

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{M_4}{12} h^2, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

որտեղ $M_4 \equiv \max_{a \leq x \leq b} |u''(x)|$: Այսպիսով,

$$\|\varepsilon^h\| \leq \frac{M_4}{12} h^2 : \tag{7.12.5}$$

Քանի որ $\|\varepsilon^h\| \rightarrow 0$, եթե $h \rightarrow 0$, ապա ասում են, որ (7.12.3) տարբերական սխեման մուտարկում է (7.12.1), (7.12.2) դիֆերենցիալ խնդիրը և ունի մուտարկման երկրորդ կարգ:

Քննարկեանք տարբերական սխեմայի մի կարևոր հատկություն, որը կոչվում է կայունություն: Նաևս ապացուցենք հետևյալ օժանդակ պնդումը:

Լեմմա 7.12.1 (մաքսիմումի սկզբում): Դիցուք θ^h ցանցային ֆունկցիան այնպիսին է, որ $M \equiv \max_{0 \leq n \leq N+1} \theta_n \geq 0$ և

$$L_h \theta_n \leq 0, \quad n = 1, 2, \dots, N :$$

Այդ դեպքում ֆունկցիան եղաւային հանգույցներում ընդունում է իր M մեծագույն արժեքը, այսինքն՝ $\max(\theta_0, \theta_{N+1}) = M$:

Ապացույց: Ենթադրենք հակառակը, որ եզրային հանգույցներում նշված M մեծագույն արժեքը հասանելի չէ, այսինքն $\theta_0 < M, \theta_{N+1} < M$: Այդ դեպքում M արժեքը հասանելի է ինչ-որ ներքին հանգույցում: Ավելին, կգտնվի այնպիսի x_m ներքին հանգույց, որ

$$\theta_{m-1} < M, \theta_m = M, \theta_{m+1} \leq M :$$

Այդ հանգույցի համար

$$L_h \theta_m = -\frac{\theta_{m-1} - 2\theta_m + \theta_{m+1}}{h^2} + q_m \theta_m \geq \frac{2M - (\theta_{m-1} - \theta_{m+1})}{h^2} > 0,$$

ինչը հակասում է լեմմայի պայմանին: \square

Չնակերպենք և ապացուցենք այժմ հիմնական պնդումը:

Թեորեմ 7.12.1: Եթե v^h -ը (7.12.3) տարբերակամ խմբի լուծումն է, ապա

$$\|v^h\| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \max_{1 \leq n \leq N} |f_n| + \max(|\alpha|, |\beta|) : \quad (7.12.6)$$

Ապացույց: Նշանակենք $F \equiv \max_{1 \leq n \leq N} |f_n|$: Ներմուծենք

$$w_n = \frac{(x_n - a)(b - x_n)}{2} F, \quad n = 0, 1, \dots, N+1$$

ցանցային ֆունկցիա: Ակնհայտ է, որ $w_n \geq 0$, ընդ որում $w_0 = w_{N+1} = 0$: Այդ դեպքում

$$\max_{0 \leq n \leq N+1} w_n \leq \max_{a \leq x \leq b} \frac{(x-a)(b-x)}{2} F = \frac{(b-a)^2}{8} F : \quad (7.12.7)$$

Այնուհետև, հեշտ է համոզվել, որ

$$L_h w_n \geq F, \quad n = 1, 2, \dots, N : \quad (7.12.8)$$

Դիցուք $\theta^h \equiv v^h - w^h$: Այդ ցանցային ֆունկցիայի համար, L_h տարբերական օպերատորի գծայնության և (7.12.8) անհավասարությունների պատճառով, ուժներ

$$L_h \theta_n = L_h v_n - L_h w_n = f_n - L_h w_n \leq f_n - F \leq 0, \quad n = 1, 2, \dots, N : \quad (7.12.9)$$

Սկզբից ենթադրենք, որ $\max_{0 \leq n \leq N+1} \theta_n \geq 0$: Այդ դեպքում θ^h ցանցային ֆունկցիան բավարարում է 7.12.1 լեմմայի պայմաններին: Հետևաբար,

$$\max_{0 \leq n \leq N+1} \theta_n = \max(\theta_0, \theta_{N+1}) = \max(|\alpha|, |\beta|) \leq \max(|\alpha|, |\beta|) : \quad (7.12.10')$$

Իսկ եթե $\max_{0 \leq n \leq N+1} \theta_n < 0$, ապա ակնհայտորեն

$$\max_{0 \leq n \leq N+1} \theta_n \leq \max(|\alpha|, |\beta|) : \quad (7.12.10'')$$

Օգտվելով (7.12.7) և (7.12.10) անհավասարություններից, ստանում ենք, որ

$$v_n = w_n + \theta_n \leq \frac{(b-a)^2}{8} F + \max(|\alpha|, |\beta|) \quad (7.12.11)$$

բոլոր $n = 0, 1, \dots, N+1$ արժեքների համար: Ծիծու են նաև

$$-v_n \leq \frac{(b-a)^2}{8} F + \max(|\alpha|, |\beta|), \quad n = 0, 1, \dots, N+1 \quad (7.12.12)$$

անհավասարությունները: Իրոք, եթե v^h ցանցային ֆունկցիան (7.12.3) տարբերական խնդրի լուծումն է, ապա $-v^h$ ֆունկցիան կլինի

$$\begin{cases} L_h(-v_n) = -f_n, & n = 1, 2, \dots, N, \\ -v_0 = -\alpha, \quad -v_{N+1} = -\beta \end{cases}$$

տարբերական խնդրի լուծում: (7.12.11) և (7.12.12) անհավասարություններից հետևում են

$$|v_n| \leq \frac{(b-a)^2}{8} F + \max(|\alpha|, |\beta|), \quad n = 0, 1, \dots, N+1$$

անհավասարությունները և դրանով իսկ՝ (7.12.6) գնահատականը: \square

Ստացված (7.12.6) գնահատականը արտացոլում է վերը հիշատակված (7.12.3) տարբերական սխեմայի կայունության հասկությունը: Պայզաբանենք այդ հասկացության էությունը: Դիտարկենք (7.12.3) խնդրի հետ մեկտեղ խոտորված աջ մասերով

$$\begin{cases} L_h(\bar{v}_n) = f_n + \varepsilon_n, & n = 1, 2, \dots, N, \\ \bar{v}_0 = \alpha + \varepsilon_0, \quad \bar{v}_{N+1} = \beta + \varepsilon_{N+1} \end{cases}$$

տարբերական խնդրի: Այդ դեպքում, L_h տարբերական օպերատորի գծայնության պատճառով, $\bar{v}^h - v^h$ ցանցային ֆունկցիան

$$\begin{cases} L_h(\bar{v}_n - v_n) = \varepsilon_n, & n = 1, 2, \dots, N, \\ \bar{v}_0 - v_0 = \varepsilon_0, \quad \bar{v}_{N+1} - v_{N+1} = \varepsilon_{N+1} \end{cases}$$

տարբերական խնդրի լուծումն է: Հետևաբար, համաձայն (7.12.6) գնահատականի՝

$$\|\bar{v}^h - v^h\| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \max_{1 \leq n \leq N} |\varepsilon_n| + \max(|\varepsilon_0|, |\varepsilon_{N+1}|) : \quad (7.12.13)$$

Այսպիսով, (7.12.3) տարբերական խնդրի լուծման խոտորումը համաչափելի է աջ մասերի խոտորումների հետ: Վերջապես, մենք կարող ենք այժմ ցույց տալ (7.12.3) տարբերական սխեմայի զուգամիտությունը: Իրոք, (7.12.13) գնահատականից և (7.12.4)-ից հետևում է՝

$$\|u^h - v^h\| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \max_{1 \leq n \leq N} |\varepsilon_n| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \|\varepsilon^h\| :$$

Այստեղից, օգտվելով (7.12.5) գնահատականից, կստանանք, որ

$$\|u^h - v^h\| \leq \frac{M_1}{96} (b-a)^2 h^2 : \quad (7.12.14)$$

Այսպիսով, (7.12.1), (7.12.2) եզրային խնդրի օրինակի վրա մենք ցուցաբեկ ենք գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համար տարբերական սիւնաների տեսության հիմնական դրույթը, որը կարելի է համառոտակի ձևակերպել այսպես. մոտարկումից և կայունաբրյունից հետևում է զուգասիտուրյունը: Մենք այս հարցը պես մանրամասն կբննարկենք հաջորդ գլխում:

Խնդիրներ և վարժություններ - 7

1. $D = \{(x, u) : 1 \leq x \leq 3, 1 \leq u \leq 4\}$ տիրույթում գտնել Լիպշչի հաստատունը և փոփոխականի նկատմամբ հետևյալ ֆունկցիաների համար.

$$\begin{aligned} 1) f(x, u) &= x^2 - u, \quad 3) f(x, u) = 2xu^2, \\ 2) f(x, u) &= -xu, \quad 4) f(x, u) = -\frac{x}{u}; \end{aligned}$$

2. Կիրառելով աստիճանային շարքերի մեթոդ՝ գտնել

$$u' = u^2, \quad u(0) = 1$$

խնդրի մոտավոր լուծումը $x = 0.2$ և $x = 1.2$ կետերում: Համեմատել $u(x) = (1-x)^{-1}$ ճշգրիտ լուծման համապատասխան արժեքների հետ: Պարզաբանել, թե ինչո՞ւ երկրորդ դեպքում ($x = 1.2$) արդյունքը անբավարար է:

3. Կիրառելի՞ է արդյոք Էյլերի մեթոդը

$$u' = 1 + u^2, \quad 0 \leq x \leq 3; \quad u(0) = 0 ?$$

խնդրի համար: Խնդրի ճշգրիտ լուծումը $u(x) = \tan x$ ֆունկցիան է:

4. Ցույց տալ, որ Էյլերի մորուքը, կիրառած

$$u' = \frac{3}{2} u^{1/3}, \quad u(0) = 0$$

խնդրին, տալիս է անբավարար արդյունք (ճշգրիտ լուծումն է՝ $u(x) = x^{3/2}$ ֆունկցիան):

5. Կառուցել ալգորիթմ, որի միջոցով կարելի է գտնել $u(0) = 0, v(0) = 0$ սկզբնական պայմաններով

$$\begin{cases} u' = \frac{u}{x} + v f(x), \\ v' = u + x \end{cases}$$

դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի մոտավոր լուծումը ($f(x)$ -ը անընդհատ ֆունկցիա է):

6. Դիտարկվում է Կոշու խնդիրը

$$\begin{cases} u'' = x^2 - u' - v^2, \\ v'' = x + v' + u^3 \end{cases}$$

Երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի համար $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$, $v(0) = 1$, $v'(0) = 0$ սկզբնական պայմաններով: Համգեցնել խնդիրը առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգին: Կառուցել Եյլերի բացահայտ և անբացահայտ մեթոդները:

7. Արտածել Եյլերի վերահաշվման մեթոդի (7.5.26) գլոբալ սխալանքի գնահատականը:

8. Դիտարկվում է

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{h} + (\alpha_1 a(x_n) + \alpha_2 a(x_{n+1}))(\beta_1 v_n + \beta_2 v_{n+1}) = \gamma_1 f(x_n) + \gamma_2 f(x_{n+1}),$$

$$n = 0, 1, \dots; v_0 = u_0$$

տարրերական մեթոդը

$$u' + a(x)u = f(x), \quad u(0) = u_0$$

Կոշու խնդրի համար: Ընտրել $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2$) գործակիցները երկրորդ կարգի մոտարկումը ստանալու համար:

9. Կառուցել ամենաբարձր մոտարկման կարգը ունեցող

$$\frac{v_n - v_{n-2}}{2h} = \alpha f(x_n, v_n) + \beta f(x_{n-1}, v_{n-1}) + \gamma f(x_{n-2}, v_{n-2})$$

տիպի տարրերական մեթոդ

$$u' = f(r, u), \quad u(x_0) = u_0$$

Կոշու խնդրի լուծման համար:

10. Դիտարկվում է

$$u' = x + u, \quad u(0) = 1$$

Կոշու խնդիրը, որի ճշգրիտ լուծումն է $u(x) = 2e^x - x - 1$ ֆունկցիան: Ուսուցեալու մեթոդի գոտնել մոտավոր լուծման արժեքը $x = 0.2$ կետում: Կատարել հաշվարկներ $h = 0.2$ և $h = 0.1$ քայլերով: Ճշգրտել լուծումը ըստ Ռիչարդոնի և համեմատել ճշգրիտ լուծման արժեքի հետ:

11. Կիրառել Երլորդ կարգի ճշության Աղամս-Բաշֆորտի մեթոդը

$$u' = u^2, \quad u(0) = 1$$

Խնդրի լուծման համար: Գտնել մոտավոր լուծման v_3 և v_4 արժեքները $h = 0.1$ քայլով ցանցի վրա՝ վերցնելով որպես "մեկնան" արժեքներ $v_0 = 1.0000$, $v_1 = 1.1111$ և $v_2 = 1.2500$: Համեմատել $u(x) = (1 - x)^{-1}$ ճշգրիտ լուծման համապատասխան արժեքների հետ:

12. Կառուցել հրաժարված մոթողը

$$-u'' + (1+x^2)u' + u = 1, \quad 0 < x < 1; \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1$$

Եզրային խնդրի համար, որը $\varepsilon > 0$ ճշտությամբ բավարարում է աջ եզրային պայմանին:

13. Գրել հրաժարված մոթողը

$$u'' = f(x, u, u'), \quad a < x < b$$

հավասարման համար

$$\mu_0 u(a) + \mu_1 u'(a) = \alpha, \quad \nu_0 u(b) + \nu_1 u'(b) = \beta$$

Եզրային պայմաններով:

14. Շիշտ է արդյոք

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \left[\frac{u(x+2h) + u(x)}{2} - \frac{u(x) + u(x-2h)}{2} \right] \end{aligned}$$

հավասարությունը, եթե $u(x) \in C^2$:

15. Շիշտ է արդյոք

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \left[\frac{u(x+2h) + u(x)}{2} - 2u(x) + \frac{u(x) + u(x-2h)}{2} \right] \end{aligned}$$

հավասարությունը, եթե $u(x) \in C^3$:

16. Գրել տարրերական սխեմա

$$(1+x^2)u'' + 2xu' - u = \sin x, \quad 0 < x < 1; \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 0$$

Եզրային խնդրի համար այնպես, որ ցանցային հավասարումների համակարգի մատրիցը լինի սիմետրիկ և տնենա անկյունագծային զերիչխում:

17. Կիրառելով վերջավոր տարրերությունների մեթոդ՝ $h = 0.2$ քայլով ցանցի վրա գրել ցանցային հավասարումների համակարգը

$$-u'' + (1-x)u' + 2u = e^{x-1}, \quad 1 < x < 2.4; \quad u(1) = 1, \quad u(2.4) = 0.5$$

Եզրային խնդրի համար:

18. $u'' - x^2 u = 1$ հավասարման համար կառուցել $u'(0) + 4u(0) = 1$ ձախ եզրային պայմանի երկրորդ կարգի մոտարկումը՝ օգտագործելով ցանցի երկու կետեր:

19. $u'' = \sin x + 1$ հավասարման համար կառուցել $u'(1) - 3u(1) = 1$, աջ եզրային պայմանի երկրորդ կարգի մոտարկումը՝ օգտագործելով ցանցի երկու կետեր:

20. Կառուցել երկրորդ կարգի մոտարկմամբ երկկետային տարրերական սխեմա

$$-u' + 2u = \cos 2x, \quad u(0) = 0$$

խնդրի համար:

21. Մոտարկում է արդյոք

$$-\frac{v_{n+1} - v_{n-1}}{2h} + v_n = x_n^2, \quad n = 1, 2, \dots, N; \quad v_0 = 0, \quad v_1 = 0$$

տարրերական սխեման

$$-u' + u = x^2, \quad u(0) = 0$$

Եզրային խնդիրը երկրորդ կարգով բար h -ի: Եթե՝ ոչ, ապա ձևափոխել սխեման այնպես, որ այն ունենա մոտարկման երկրորդ կարգ:

22. Ինչպիսի՞ ա, β և γ պարամետրերի դեպքում է

$$-\frac{v_{n-1} - 2v_n + v_{n+1}}{h^2} + (\alpha v_{n-1} + \beta v_n + \gamma v_{n+1}) = f_n + \frac{h^2}{12} f''(x_n), \quad n = 1, 2, \dots, N; \quad v_0 = v_{N+1} = 0$$

տարրերական սխեման մոտարկում

$$-u'' + u = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0$$

խնդիրը շորորդ կարգով:

Գլուխ 8

ՏԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ՍԽԵՍԱՆԵՐ ՄԱՍՆԱԿԱՆ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐՈՎ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՍԱՐ

8.1 Մաքեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումների մասին

Բնագիտության շատ խնդիրների մաքեմատիկական մոդելները հանգում են մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների: Այդպիսի հավասարումների անհայտ ֆունկցիաների արգումենտներին հաճախ վերագրվում է տարածական փոփոխականների և ժամանակի իմաստ: Այդ իսկ պատճառով մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումները, որոնք նկարագրում են իրական ֆիզիկական երևույթներ, կոչվում են մաքեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումներ:

Բերենք մի քանի դասական օրինակ:

- Լարի տատանման հավասարումը (կամ ալիքային հավասարումը)

Ազատ տատանումներ կատարող $x = 0$ և $x = l$ ամրացված ծայրերով l երկարության համաստու առաձգական լարի $u(x, t)$ լայնական շեղումը նկարագրվում է դիֆերենցիալ հավասարումով

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (8.1.1)$$

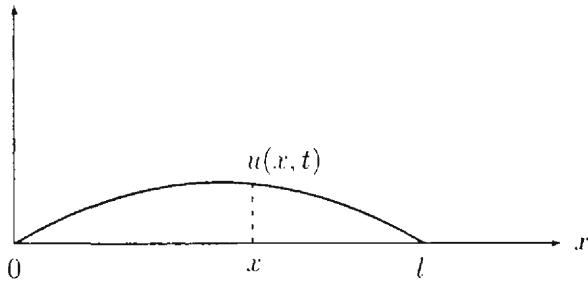
դիֆերենցիալ հավասարումով

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0 \quad (8.1.2)$$

եղրային պայմաններով և

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (8.1.3)$$

սկզբնական պայմաններով (նկ. 8.1.1): Ենթադրվում է եզրային և սկզբնական պայմանների համաձայնեցումը, այսինքն՝ $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $v(0) = v(l) = 0$:



Նկ. 8.1.1 Լարի տատանումը

Նշենք, որ (8.1.1) հավասարման մեջ $a = T/\rho$, որտեղ T -ն լարի լարումն է, իսկ ρ -ն՝ լարի նյութի խտությունը: (8.1.3) պայմաններում $\varphi(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաները որոշում են լարի սկզբնական դիրքը և սկզբնական արագությունը համապատասխանաբար: Եթե տատանումները կատարվում են $f(x, t)$ ֆունկցիայով բնութագրվող արտաքին ուժի ազդեցությամբ, ապա (8.1.1)-ի փոխարեն գրվում է

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \quad (8.1.4)$$

հավասարումը: Մասնական ածանցյալներով երկրորդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումների դասակարգման համաձայն (8.1.4)-ը հիպերբոլական տիպի հավասարում է:

- Զերմահաղորդականության հավասարումը (կամ դիֆուզիայի հավասարումը)

Դիտարկվում է l երկարությամբ մեկուսացված համասեռ բարակ ձող, որի ծայրերում պահպանվում է հաստատուն ջերմաստիճան: Չողի $u(x, t)$ ջերմաստիճանը բավարարում է

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (8.1.5)$$

հավասարմանը

$$u(0, t) = \alpha, \quad u(l, t) = \beta, \quad t > 0 \quad (8.1.6)$$

եզրային պայմաններով: Որպես սկզբնական պայման տրվում է ջերմաստիճանի բաշխումը ժամանակի $t = 0$ պահին, այսինքն՝

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l : \quad (8.1.7)$$

Նշենք, որ (8.1.5) հավասարման մեջ $a = \kappa/s\rho$, որտեղ κ -ն ջերմահաղորդականության գործակիցն է, s -ը՝ ձողի նյութի տեսակարար ջերմունակությունը, իսկ ρ -ն՝ նրա խտությունը: Ենթադրվում է եզրային և սկզբնական պայմանների համաձայնեցումը՝ $\varphi(0) = \alpha$, $\varphi(l) = \beta$: Չողի ներսում $f(x, t)$ ֆունկցիայով բնութագրվող ջերմության

աղբյուրի կամ ջերմության կլանիչի առկայության դեպքում ջերմահաղորդականության հավասարումը կլինի անհամատել:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f : \quad (8.1.8)$$

Հիշեցնենք, որ (8.1.8)-ը պարագուական տիպի հավասարում է:

Հարք թիրեղում ջերմության տարածման ընթացքը նկարագրում է

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \Delta u + f \quad (8.1.9)$$

ջերմահաղորդականության հավասարումը, որտեղ Δ -ն *Լազարսի օպերատորն է՝*

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

իսկ $u(x, y, t)$ -ն (x, y) կետի ջերմաստիճանն է ժամանակի t պահին: Նշենք, որ (8.1.8) և (8.1.9) տիպի հավասարումները նկարագրում են ջերմության տարածումից բացի նաև դիֆուզիոն պրոցեսները:

Դիտողություն 8.1.1 : Դիֆուզիա բառը ծագել է *լատիներեն diffusio բառից՝* տարածում, ցորում: Այս նշանակում է նյութի տեղափոխմանը և խոռոքյան հավասարեցմանը բերող միջավայրի մասնիկների շարժում: Օրինակ, մողեկումների ջերմային շարժումով պայմանավորված մողեկույյար դիֆուզիան մեկ նյութի (գազի, հեղուկի, պինդ մարմնի) ներթափանցումն է մյուսի մեջ նրանց անսիդական շփման դեպքում կամ ծակուկեն միջնապատի միջով:

- *Պուասոնի հավասարումը*

Հարք թիրեղում ստացիոնար (ժամանակի ընթացքում չփոփոխվող) ջերմության $u(x, y)$ բաշխումը նկարագրում է

$$\Delta u = f \quad (8.1.10)$$

Ելիպտական տիպի հավասարումով, որը կոչվում է *Պուասոնի հավասարում:* Համասեն $\Delta u = 0$ հավասարումը անվանում են *Լազարսի հավասարում:* Կախված հետազոտվող երևոյթի բնույթից՝ թիրեղի եզրի վրա կարող են տրվել տարբեր տիպի եզրային պայմաններ:

Նշենք, որ (8.1.10) տեսքի հավասարում հանդիպում է նաև էլեկտրոստատիկայի, էլեկտրոնային օպտիկայի, առաձգականության տեսության և այլ խնդիրների նկարագրման ժամանակ:

- *Տեղափոխման հավասարումը*

Դիտարկենք որոշ նյութի միաշափ կոնվեկտիվ տեղափոխման պրոցեսը $-a(x, t)$ արագությամբ շարժվող միջավայրով: Այդ երևոյթի մաթեմատիկական մոդելը

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial u}{\partial x} = f, \quad t > 0 \quad (8.1.11)$$

հավասարումն է, որտեղ $f(x, t)$ -ն բնութագրում է նյութի հնարավոր աղբյուրների կամ հնութիւնների պահանջմանը: Ըստ որում, $t = 0$ պահին տրվում է նյութի խտության սկզբնական բաշխումը:

$$u(x, 0) = \varphi(x) : \quad (8.1.12)$$

Դիտողություն 8.1.2 : Կոնվեկցիա բառը առաջացել է լատիներեն convectio բառից՝ տեղափոխում, փոխանցում: Այն նշանակում է մասսաների, լիցքերի և այլ ֆիզիկական մեծությունների տեղափոխում շարժվող միջավայրով (օդի, գողորշու, հեղուկի հոսքերով): Տարբերում են միջավայրի անհամասնությամբ պայմանակիրքած բնական կոնվեկցիա (ջերմաստիճանի կամ խտության գրադիենտի առկայությունը) և միջավայրի վրա արտաքին մեխանիկական ազդեցությամբ առաջացած հարկադրական կոնվեկցիա:

Դիտարկված հավասարումները ինարկե չեն սպառում մաքեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումների ամբողջ բազմազանությունը (տե՛ս, օրինակ. [32],[42]): Վերը բերված հավասարումները պարզագույն և, միաժամանակ, մաքեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումների բնորոշ ներկայացուցիչներ են: Չնայած որոշ հավասարումների համար կարելի է ստանալ ճշգրիտ լուծումներ (օրինակ, Ֆուրիեի շարքերի միջոցով), մենք այդ հավասարումները կդիտարկենք որպես հարմար մոդելային խնդիրներ թվային ալգորիթմները ներկայացնելու համար: Բանն այն է, որ ավելի ընդհանուր տեսքի հավասարումների համար (օրինակ, փոփոխական գործակիցներով) ստանալ լուծումը անհիտիկ տեսքով, որպես կանոն, հնարավոր չէ: Եվ այստեղ արդեն պետք է կիրառել թվային մեթոդներ:

Մաքեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումների լուծման թվային մեթոդներից ամենալայն տարածում ստացել են վերջավոր-տարրերական մեթոդները: Այդ մեթոդներում արգումենտի անընդհատ փոփոխման տիրույթը փոխարինվում է նրա դիսկրետ փոփոխման տիրույթով՝ *ցանցով*: Հավասարումների մեջ մասնակցող ածանցյալները, ինչպես նաև եզրային և սկզբնական պայմանները, արտահայտվում են ցանցի հանգույցներում փունկցիաների արժեքների միջոցով: Արդյունքում ստացվում է ցանցային հավասարումների համակարգ, որը կոչվում է տարրերական սիստեմ: Լուծելով այդ համակարգը, գտնում են որոնելի լուծման մոտավոր արժեքները ցանցի հանգույցներում:

8.2 Տարբերական սխեմաների տեսության հիմնական հասկացությունները

Ինչպես արդեն ասվել է նախորդ պարագրաֆի վերջում, տարբերական սխեմայի կառուցումը ներառում է երկու հիմնական փուլ:

- ցանցի կառուցում անկախ փոփոխականների անընդհատ փոփոխման տիրույթում,

- դիֆերենցիալ օպերատորի փոխարինում տարբերակամ օպերատորով, ինչպես նաև եզրային և սկզբնական պայմանների տարբերական նմանակների կառուցում:

Քննարկենք յուրաքանչյուր փուլն առանձին:

8.2.1 Ցանցեր և ցանցային ֆունկցիաներ

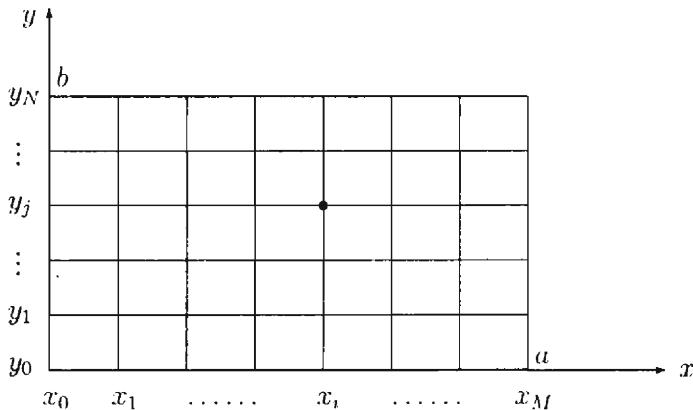
Դիֆերենցիալ հավասարումների բվային լուծման ժամանակ հնարավոր չէ ստանալ մոտավոր լուծումը դիտարկվող տիրույթում փոփոխվող անկախ փոփոխականների բոլոր արժեքների համար: Ուստի ընտրվում է այդ տիրույթի կետերի որոշակի բազմություն, որը կոչվում է *ցանց*: Այդ կետերը կոչվում են ցանցի *հանգույցներ*:

Քերենք երկափ տիրույթներում ցանցերի կառուցման մի քանի օրինակ:

Օրինակ 8.2.1 (Հավասարաչափ ցանց ուղղանկյունում): Դիտարկենք x, y փոփոխականների հարթության մեջ $\Omega = \{0 < x < a, 0 < y < b\}$ ուղղանկյուն տիրույթը $\partial\Omega$ եզրով: Տրուենք Ox առանցքի $[0, a]$ հատվածը և Oy առանցքի $[0, b]$ հատվածը M և N հավասար մասերի համապատասխանաբար $x_i = ih_1$ ($i = 0, 1, \dots, M$) և $y_j = jh_2$ ($j = 0, 1, \dots, N$) կետերի միջոցով, որտեղ $h_1 = a/M$ և $h_2 = b/N$: Այդ կետերից տանելով կորդինատական առանցքներին գուգահեռ ուղիղներ կատանանք (x_i, y_j) հանգույցներով

$$\omega_h \equiv \{(x_i, y_j) \in \bar{\Omega}\}$$

ցանցը, որտեղ $h = (h_1, h_2)$ (նկ. 8.2.1): Անվանենք h_1 և h_2 մեծությունները ցանցի քայլեր լստ x և y ուղղությունների համապատասխանաբար:



Նկ. 8.2.1 Հավասարաչափ ցանց ուղղանկյունում

Երկու հանգույց կանվանենք *հարևան*, եթե նրանց հեռավորությունը Ox կամ Oy առանցքների ուղղությամբ հավասար է h_1 կամ h_2 համապատասխանաբար: Այն (x_i, y_j) հանգույցները, որոնք ընկած են Ω տիրույթի ներսում, կոչվում են ներքին.

իսկ տիրույթի եզրի վրա գտնվող հանգույցները՝ եզրային: Սահմաննը ներբեռ հանգույցների ցանց

$$\omega_h^{\circ} \equiv \{(x_i, y_j) \in \Omega\}$$

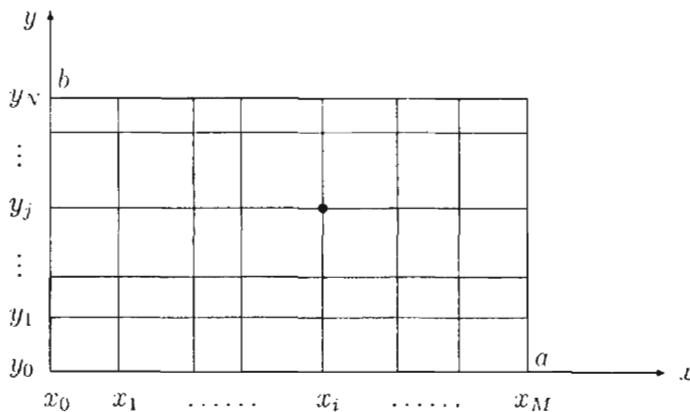
և եզրային հանգույցների ցանց

$$\omega_h' \equiv \{(x_i, y_j) \in \partial\Omega\} :$$

Ակնհայտ է, որ $\omega_h = \omega_h^{\circ} \cup \omega_h'$: ♣

Եշգրտության բարձրացման նպատակով որոշ դևաքերում անհրաժեշտ է լինում կատարել ցանցի հանգույցների հտացում դիտարկվող տիրույթի առանձին մասերում: Այդ դեպքում օգտագործում են անհավասարաչափ ցանցեր:

Օրինակ 8.2.2 (Անհավասարաչափ ցանց ուղղանկյունում): Դիտարկենք 8.2.1 օրինակի Ω տիրույթը: Տրուենք $[0, a]$ և $[0, b]$ հատվածները համապատասխանաբար M և N մասերի կամայականորեն վերցված $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_M = a$ և $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_N = b$ կտերի միջոցով (նկ. 8.2.2): Այսուեղ արդեն հարևան հանգույցների միջև եղած հեռավորությունները (ինչպես x , այնպես էլ y ուղղությամբ) հաստատում մեծություններ չեն: Ցանցի քայլերներ $h_1^{(i)} = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, M$ և $h_2^{(j)} = x_j - x_{j-1}$, $j = 1, 2, \dots, N$:



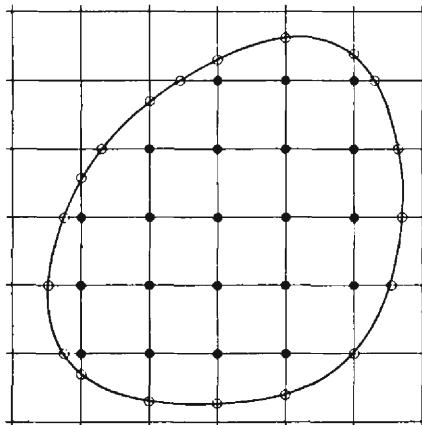
Նկ. 8.2.2 Անհավասարաչափ ցանց ուղղանկյունում

Այսպիսով, (x_i, y_j) հանգույցների համախմբությունը կազմում է

$$\omega_h \equiv \{(x_i, y_j) \in \bar{\Omega}\}$$

ցանց: Հատուկ նշենք, որ այստեղ արդեն է նշանին տրվում է փոքր-ինչ այլ իմաստ՝ $\tilde{h} = (h_1^{(1)}, h_1^{(2)}, \dots, h_1^{(M)}; h_2^{(1)}, h_2^{(2)}, \dots, h_2^{(N)})$: Ներքին և եզրային հանգույցների ցանցերը (ω_h° և ω_h') սահմանվում են ճիշտ նոյն կերպ, ինչպես նաևսորդ օրինակում: ♣

Օրինակ 8.2.3 (Ցանց կամայական ծեփ տիրույթի համար): Դիցուք x, y փոփոխականների հարթության մեջ տրված է կամայական երկրաչափական ծեփ Ω տիրույթը $\partial\Omega$ եզրով: Ընտրենք ըստ x և y ուղղություննորի համապատասխանաբար $h_1 > 0$ և $h_2 > 0$ որոշակի քայլերը և տանենք $x = x_i, i = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ և $y = y_j, j = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ ուղիղները, որտեղ $x_i = ih_1$ և $y_j = jh_2$: Այդ դեպքում ամրող հարթության մեջ կստանանք հավասարաչափ ցանց (վանդակ) (x_i, y_j) հանգույցներով: Այն հանգույցները, որոնք գտնվում են Ω տիրույթի ներսում, անվանենք **ներքին հանգույցներ** (նկ. 8.2.3-ում նրանք ցույց են տրված • նիշով) և նրանց համախմբությունը նշանակենք ω_h^o -ով: Այնուհետև, $x = x$, և $y = y_j$ ուղիղների հատման կետերը $\partial\Omega$ եզրի հետ անվանենք **եզրային հանգույցներ** (նկ. 8.3.3-ում նրանք ցույց են տրված ○ նիշով), իսկ նրանց համախմբությունը նշանակենք ω_h' -ով: Մեր նշանակումներով՝ $h = (h_1, h_2)$:



Նկ. 8.2.3 Ցանց կամայական ծեփ տիրույթի համար

Այսպիսով, Ω տիրույթի համար կառուցված $\omega_h = \omega_h^o \cup \omega_h'$ ցանցը, որը տիրույթի եզրի մոտ անհավասարաչափ է:



Նման ձևով կարելի է կառուցել ցանցեր նաև ավելի մեծ չափի տարածության տիրույթներում: Մեր դիտարկած մի քանի օրինակներով չեն սպառվում ցանցերի կառուցման բոլոր եղանակները, որոնք, հատկապես, շատ բազմազան են կամայական ծեփ տիրույթների համար:

Դիտողություն 8.2.1 : Դիտարկված օրինակներում մեմք մերժուժում էինք և նշանը՝ որին՝ կախված ցանցի յուրահատկությունից, վերագրվում էր տարբեր իմաստ: Պայմանավորվենք հետազայտմ այդ նշանը օգտագործել որպես պարամետր և մեկնաբանել այն որպես ցանցի «քայլ»:

Ցանցի հանգույցների վրա որոշված ֆունկցիան կանվանենք **ցանցային**: Եթե համարակալենք ցանցի բոլոր հանգույցները որոշակի կարգով, ապա ցանցային

ֆունկցիան կարելի է համարել վեկտոր, որի շափթ հավասար է ցանցի հանգույցների քանակին: Կօզմագործենք G_h, G'_h և G''_h գրությունները ω_h, ω'_h և ω''_h ցանցերի վրա որաշված ցանցային ֆունկցիաների տարածությունները նշանակելու համար համապատասխանաբար:

8.2.2 Դիֆերենցիալ օպերատորների տարբերական մոտարկումը

Դիցուք ունենք որոշ L գծային դիֆերենցիալ օպերատոր, որը գործում է մեկ կամ մի քանի փոփոխականի $u = u(x)$ ֆունկցիայի վրա: Այսուել որպես x հասկանում ենք համապատասխան չափողականության տարածության կետ: Փոխարինելով $x \in \omega_h$ հանգույցում $Lu(x)$ -ի արտահայտության մեջ մտնող ածանցյալները վերջավոր-տարբերական առնչություններով, կստանանք $L_h u(x)$ արտահայտությունը, որը ցանցի հանգույցների ինչ-որ $S_h(x)$ բազմության վրա u ֆունկցիայի արժեքների գծային կոմբինացիա է՝

$$L_h u(x) = \sum_{x \in S_h(x)} A_h(x, \xi) u(\xi), \quad (8.2.1)$$

որտեղ $A_h(x, \xi)$ գործակիցներն են: Հանգույցների $S_h(x)$ համախմբությունը կոչվում է շարլու x հանգույցի համար:

Այսպիսով, (8.2.1) արտահայտությամբ որոշվում է L դիֆերենցիալ օպերատորը մոտարկող L_h տարբերական օպերատոր:

Դիտարկենք որոշ պարզագույն դիֆերենցիալ օպերատորների տարբերական մոտարկումներ:

- Օպերատոր $Lu \equiv u'$:

Ըստ էության, այս օպերատորի մոտարկման հարցը մենք արդեն բավականին մանրամասն քննարկել ենք 4.6 պարագափում: Մենք կարող ենք օգտվել աջակողմյան, ձախակողմյան կամ կենտրոնական տարբերական ածանցյալներից: Համապատասխանաբար կստանանք հետևյալ տարբերական օպերատորները.

$$L_h u(x) \equiv \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \equiv u_x(r) \quad (8.2.2)$$

(շարլոնը՝ $S_h(x) = \{x, x+h\}$),

$$L_h u(x) \equiv \frac{u(x) - u(x-h)}{h} \equiv u_x(r) \quad (8.2.3)$$

(շարլոնը՝ $S_h(x) = \{x-h, x\}$) կամ

$$L_h u(x) \equiv \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \equiv u'_x(x) \quad (8.2.4)$$

(շարլոնը՝ $S_h(x) = \{x-h, x+h\}$):

Որպես դիտարկվող օպերատորի տարրերական մոտարկում կարելի է վերցնել նաև (8.2.2) և (8.2.3) դեպքերի գծային կոմբինացիան, այսինքն՝

$$L_h^{(\sigma)} u(x) \equiv \sigma u_x(x) + (1 - \sigma)u_{\bar{x}}(x). \quad (8.2.5)$$

որտեղ σ -ն ցանկացած իրական թիվ է: $L_h^{(\sigma)}$ տարրերական օպերատորը որոշված է $S_h(x) = \{x - h, x, x + h\}$ երեքետային շարլոնի վրա: Մասնավորապես, $\sigma = 0.5$ դեպքում կստանանք (8.2.4) տարրերական օպերատորը:

- Օպերատոր $Lu \equiv u''$:

Մենք արդեն բազմիցս օգտվել ենք երկրորդ կարգի ածանցյալի տարրերական մոտարկումից (տե՛ս (4.6.7)-ը): Սահմանենք

$$L_h u(x) \equiv \frac{u(x + h) - 2u(x) + u(x - h)}{h^2} \equiv u_{xx}(x) : \quad (8.2.6)$$

Այսուհետ շարլոնն է՝ $S_h(x) = \{x - h, x, x + h\}$:

Այժմ դիտարկենք երկու փոփոխականից ֆունկցիաների վրա գործող դիֆերենցիալ օպերատորները:

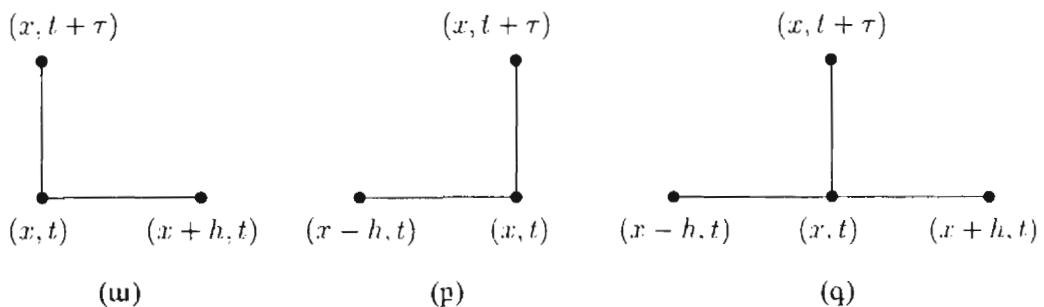
- Օպերատոր $Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x}$:

Օգտվելով նկ. 8.2.4-ում պատկերված շարլոններից՝ գրենք համապատասխան տարրերական մոտարկումները.

$$L_h u(x, t) \equiv u_t(x, t) - u_x(x, t) \quad (\text{շարլոն (ա)}), \quad (8.2.7)$$

$$L_h u(x, t) \equiv u_t(x, t) - u_{\bar{x}}(x, t) \quad (\text{շարլոն (թ)}). \quad (8.2.8)$$

$$L_h u(x, t) \equiv u_t(x, t) - u_x^c(x, t) \quad (\text{շարլոն (զ)}): \quad (8.2.9)$$



Նկ. 8.2.4 Շարլոններ $\partial u / \partial t - \partial u / \partial x$ օպերատորի մոտարկման համար

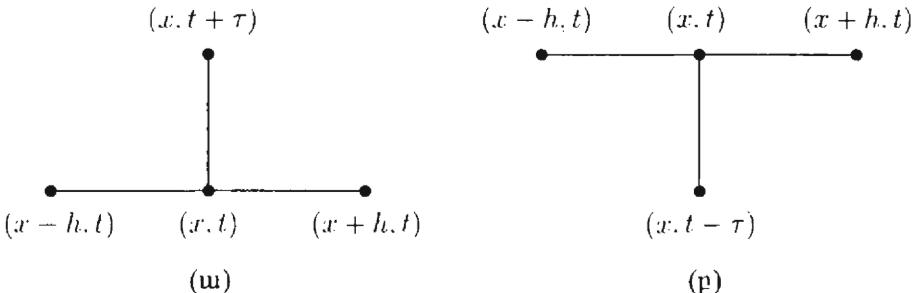
Դիտարկվող օպերատորի համար, ինչպես (8.2.5)-ում, կարելի է կառուցել σ պարամետրից կախված

$$L_h^{(\sigma)} u(x, t) \equiv u_t(x, t) - [\sigma u_x(x, t) + (1 - \sigma)u_{\bar{x}}(x, t)] \quad (8.2.10)$$

տարրերական օպերատորների ընտանիք: Մասնավորաբար, եթե $\sigma = 0.5$, (8.2.10)-ից ստանում ենք վերը բերված (8.2.9) տարրերական օպերատորը:

- Օպերատոր $L_h u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$:

Այս դիֆերենցիալ օպերատորի մոտարկման համար օգտվենք նկ. 8.2.5-ում պատկերված շաբլոններից:



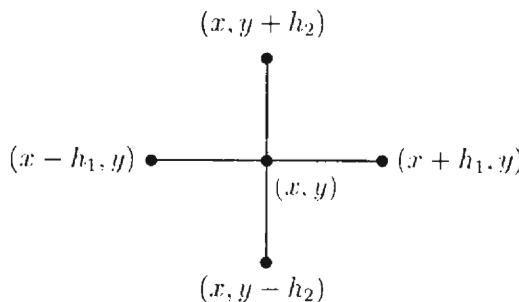
Նկ. 8.2.5 Շաբլոններ $\partial u / \partial t - \partial^2 u / \partial x^2$ օպերատորի մոտարկման համար Համապատասխանորեն կստանանք հետևյալ տարրերական օպերատորները՝

$$L_h u(x, t) \equiv u_t(x, t) - u_{x\bar{x}}(x, t) \quad (\text{շաբլոն (ա)}), \quad (8.2.11)$$

$$L_{\bar{h}} u(x, t) \equiv u_{\bar{t}}(x, t) - u_{x\bar{x}}(x, t) \quad (\text{շաբլոն (р)}): \quad (8.2.12)$$

- Լապլասի օպերատոր $\Delta_h u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$:

Առավել հաճախ օգտագործվող Լապլասի օպերատորի տարրերական մոտարկումը կատարվում է ըստ նկ. 8.2.6-ում պատկերված «խաչ» շաբլոնի:



Նկ. 8.2.6 «Խաչ» շաբլոնը

Լապլասի Δ_h տարրերական օպերատորը սահմանենք

$$\Delta_h u(x, y) \equiv u_{x\bar{x}}(x, y) + u_{y\bar{y}}(x, y) \quad (8.2.13)$$

արտահայտության միջոցով:

8.2.3 Տարբերական սխեմաներ

Մաթեմատիկական ֆիզիկայի խնդիրների դրվածքի մեջ, բացի դիֆերենցիալ հավասարումից, մտնում են նաև եղուային և սկզբնական լրացուցիչ պայմանները, որոնք ապահովում են լուծման միակուրյունը: Մենք արդեն վերը ասել ենք, որ տարբերական սխեմա կոչվում է դիֆերենցիալ հավասարումը, ինչպես նաև եղրային և սկզբնական պայմանները մոտարկող տարբերական հավասարումների համակարգը: Բերենք տարբերական սխեմաների կառուցման մի քանի օրինակ:

Օրինակ 8.2.4 : Դիտարկենք

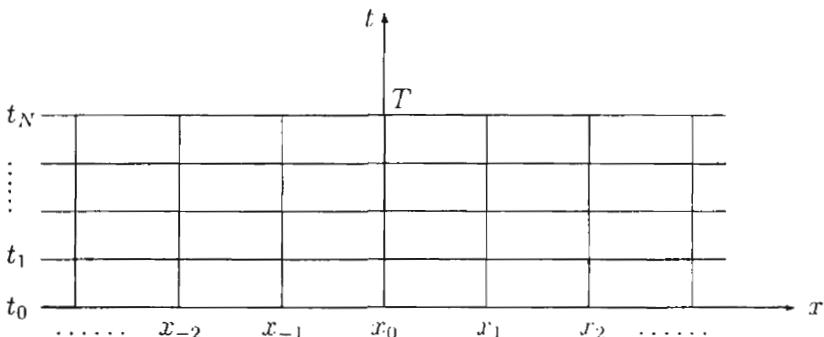
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t), \quad -\infty < x < +\infty, 0 < t \leq T$$

տեղափոխման հավասարումը

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty$$

սկզբնական պայմանով:

Կառուցենք $-\infty < x < +\infty, 0 \leq t \leq T$ տիրույթում ω_h ցանց՝ $h > 0$ քայլով ըստ x փոփոխականի և $\tau = T/N$ (N -ը բնական թիվ է) քայլով ըստ t -ի (Ակ. 8.2.7): Ցանցի հանգույցներն են (x_m, t_n) կետերը, որտեղ $x_m = mh$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ և $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots, N$: Ֆիքսած n -ի դեպքում (x_m, t_n) հանգույցների համախմբությունն անվանենք ցանցի n -րդ շերտ:



Ակ. 8.2.7 Ցանց տեղափոխման հավասարման համար

Ցանցային $w \in G_h$ ֆունկցիայի արժեքը (x_m, t_n) հանգույցում նշանակենք w_m^n -ով:

Կառուցենք տարբերական սխեման ըստ Ակ. 8.2.4ա -ում պատկերված շաբոնի.

$$\begin{cases} \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - a_m^n \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} = f_m^n, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0, 1, \dots, N-1, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Այստեղ՝ $\varphi_m \equiv \varphi(x_m)$: Մոտավոր $v \in G_h$ լուծման արժեքը (x_m, t_{n+1}) հանգույցում հաշվում է բացահայտորեն ըստ

$$v_m^{n+1} = \left(1 - \frac{\tau}{h} a_m^n\right) v_m^n + \frac{\tau}{h} a_m^n v_{m+1}^n + \tau f_m^n \quad .$$

բանաձևի: Այսպիսով, իմանալով լուծումը n -րդ շերտում, մենք կարող ենք հաշվել լուծումը $n+1$ -րդ շերտում: Քանի որ սկզբնական շերտում v_m^0 արժեքները տրված են, ապա մենք կարող ենք քայլ առ քայլ հաշվել մոտավոր լուծման արժեքները ցանցի կամայական հանգույցում: Ուշադրություն դարձնենք, որ թեև x ուղղությամբ միաշափ ցանցի հանգույցների քանակը անվերջ է, v_m^{n+1} -ի հաշվման համար պահանջվում են միայն $\varphi_m, \varphi_{m+1}, \dots, \varphi_{m+n+1}$ արժեքները:



Օրինակ 8.2.5 : Դիտարկենք $\Omega = \{0 < x < a, 0 < y < b\}$ ուղղանկյուն տիրույթում Դիրիխլեի խնդիրը Պուասոնի հավասարման համար.

$$\begin{cases} \Delta u = f, & (x, y) \in \Omega \\ u = \varphi, & (x, y) \in \partial\Omega : \end{cases} \quad (8.2.14)$$

Կառուցենք $\bar{\Omega}$ տիրույթում $\omega_h = \omega_h^\circ \cup \omega_h'$ հավասարաշափ ցանց $\hbar = (h_1, h_2)$ քայլով (օրինակ 8.2.1): Նշանակենք $w(i, j)$ -ով $w \in G_h$ ցանցային ֆունկցիայի արժեքը (x_i, y_j) հանգույցում: Օգտագործենով «խաչ» շարլոնը (նկ. 8.2.6)՝ գրենք

$$\begin{cases} \Delta_h v(i, j) = f(i, j), & (x_i, y_j) \in \omega_h^\circ \\ v(i, j) = \varphi(i, j), & (x_i, y_j) \in \omega_h' \end{cases} \quad (8.2.15)$$

տարբերական սխեման (Δ_h տարբերական օպերատորը տրված է (8.2.13)-ում): Ստացված ցանցային հավասարումների այսպիսի համակարգի լուծման եղանակը քննարկված է 8.9 պարագրագում:



Օրինակ 8.2.6 : Դիտարկենք (8.2.14) Դիրիխլեի խնդիրը $\partial\Omega$ ողորկ եզրով Ω կամայական տիպի տիրույթում: Այդ խնդրի համար շարադրենք տարբերական սխեմայի կառուցման եղանակներից մեկը:

Կառուցենք Ω տիրույթում ω_h ցանցը, ինչպես նկարագրվել է 8.2.3 օրինակում: Տրնենք ω_h° ներքին հանգույցների քազմությունը երկու ենթաքազմությունների: $(x_i, y_j) \in \omega_h^\circ$ հանգույցը անվանենք *խիստ ներքին*, եթե $(x_i - h_1, y_j), (x_i + h_1, y_j), (x_i, y_j - h_2)$ և $(x_i, y_j + h_2)$ հանգույցները պատկանում են $\bar{\Omega}$ -ին: Խիստ ներքին հանգույցների քազմությունը նշանակենք ω_h^{**} -ով: Սնացած ներքին հանգույցները անվանենք *սահմանամերձ*: Դիցուք $\omega_h' \equiv \omega_h^\circ \setminus \omega_h^{**}$, սահմանամերձ հանգույցների քազմությունն է:

Խիստ ներքին հանգույցներում տարբերական հավասարումները գրվում են ճիշտ այնպես, ինչպես (8.2.15) սխեմայում՝

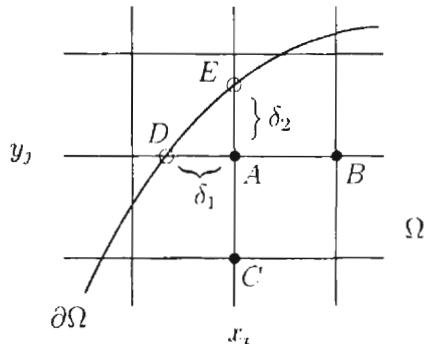
$$\Delta_h v(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \omega_h^{**} :$$

Եզրային հանգույցներում ունենք

$$v(x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \omega'_h :$$

Մնացած՝ սահմանամերձ հանգույցներում հավասարումներ գրելու համար կիրառենք զծային ինտերպոլացիա x կամ y առանցքների ուղղությամբ:

Դիտարկենք նկ. 8.2.8-ում պատկերված դրույթունը: Դիցուք $A(x_i, y_j)$ -ն սահմանամերձ հանգույց է, իսկ $B(x_i + h_1, y_j)$ -ն և $C(x_i, y_j - h_2)$ -ն նրան հարևան ներքին հանգույցներն են ըստ x և y ուղղությունների համապատասխանաբար: Այնուհետև, A -ին ամենամոտ եզրային հանգույցներն են ըստ x և y ուղղությունների՝ $D(x_i - \delta_1, y_j)$ -ն և $E(x_i, y_j + \delta_2)$ -ն համապատասխանաբար, որտեղ $0 < \delta_1 < h_1$ և $0 < \delta_2 < h_2$:



Նկ. 8.2.8 Ցանց սահմանամերձ հանգույցի շրջակայքում

Ըստ Թեյլորի բանաձևի ունենք

$$u(B) = u(x_i + h_1, y_j) = u(A) + h_1 \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} + O(h_1^2)$$

և

$$u(D) = u(x_i - \delta_1, y_j) = u(A) - \delta_1 \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} + O(\delta_1^2) :$$

Բազմապատկեյով առաջին հավասարությունը δ_1 -ով, երկրորդը՝ h_1 -ով, ապա անդամ առ անդամ գումարելով, կստանանք՝

$$u(A) = \frac{h_1 u(D) + \delta_1 u(B)}{h_1 + \delta_1} + O(h_1^2) :$$

Դեռ նետելով այստեղ մնացորդային անդամը, ծեռք կրերենք հավասարում A սահմանամերձ հանգույցում՝

$$v(A) = \frac{h_1 \varphi(D) + \delta_1 v(B)}{h_1 + \delta_1} :$$

Փաստորեն մենք կատարեցինք գծային ինտերպոլացիա ըստ մոտավոր լուծման արժեքների B և D կետերում: Համանմանորեն կստանանք

$$v(A) = \frac{h_2\varphi(E) + \delta_2 v(C)}{h_2 + \delta_2}$$

հավասարումը: Կարելի է նաև, երկու ուղղությունների հավասարագոր օգտագործմամբ, և հանգույցում հավասարումը գրել ինտևլայ տեսքով.

$$v(A) = \frac{1}{2} \left(\frac{h_1\varphi(D) + \delta_1 v(B)}{h_1 + \delta_1} + \frac{h_2\varphi(E) + \delta_2 v(C)}{h_2 + \delta_2} \right) :$$

Այսպիսով, սահմանամերձ համգույցներում ցանցային հավասարումների գրառման եղանակները բազմազան են: ♣

Բոլոր օրինակներում մենք սահմանափակվել ենք առաջին սեղի եզրային և սկզբնական պայմանների դիտարկմամբ: Ածանցյաներով արտահայտված եզրային և սկզբնական պայմանները բնականաբար մոտարկվում են ավելի բարդ արտահայտություններով (տես, օրինակ, [4],[7],[34],[36]):

8.2.4 Տարբերական սխեմաների գուգամիտությունը, մոտարկումը և կայունությունը

Այս հասկացությունները, սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համար եզրային խնդիրների լուծման տարբերական մեթոդների կիրարկմամբ, արդեն քննարկվել են 7.12 պարագրաֆում: Այստեղ մենք կտանը տարբերական սխեմաների այդ կարևորագույն բնութագրերի ավելի խիստ սահմանումները և կիսաստատենք կապը նրանց միջև:

Դիցուք $\partial\Omega$ եզրով Ω տիրույթում պահանջվում է գտնել

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in \Omega \tag{8.2.16}$$

դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը, որը բավարարում է լրացուցիչ (եզրային կամ սկզբնական)

$$lu(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega \tag{8.2.17}$$

պայմաններին, որտեղ L -ը և f -ը գծային դիֆերենցիալ օպերատորներ են, իսկ $f(x)$ -ը և $\varphi(x)$ -ը՝ տրված ֆունկցիաներ: Ենթադրվում է, որ (8.2.16), (8.2.17) խնդրի լուծումը գոյություն ունի և միակն է:

Կառուցենք Ω տիրույթի համար $\omega_h = \omega_h^\circ \cup \omega_h'$ ցանցը: Գրենք

$$\begin{cases} L_h v^h(x) = f^h(x), & x \in \omega_h^\circ \\ l_h v^h(x) = \varphi^h(x), & x \in \omega_h' \end{cases} \tag{8.2.18}$$

տարբերական սխեման, որտեղ L_h -ը և l_h -ը L և l դիֆերենցիալ օպերատորների տարբերական ճշտարկումներն են համապատասխանաբար, իսկ $f^h \in G_h^\circ$ և $\varphi^h \in G'_h$ ցանցային ֆունկցիաները տրված են: Ցանցային $v^h \in G_h$ ֆունկցիան (8.2.18) տարբերական խնդրի լուծումն է:

Սահմանենք G_h , G_h° և G'_h ցանցային ֆունկցիաների գծային տարածություններում որոշակի $\|\cdot\|_h$, $\|\cdot\|_h^\circ$ և $\|\cdot\|_h'$ նորմեր համապատասխանաբար: Նշանակենք $|h|$ -ով $\hbar = (h_1, h_2, \dots, h_p)$ «քայլի» երկարությունը՝ $|h| \equiv \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_p^2}$: Նշանակենք u^h -ով (8.2.16), (8.2.17) խնդրի և ճշգրիտ լուծման նեղացումը ω_h ցանցի վրա վերցնելով $u^h(x) = u(x)$ կամայական $x \in G_h$ հանգույցում:

Զեակերպենք այժմ տարբերական սխեմաների տեսության հիմնական հասկացությունները:

Սահմանում 8.2.1 : Ասում են, որ (8.2.18) տարբերական սխեման զուգամիտում է (8.2.16), (8.2.17) դիֆերենցիալ խնդրի լուծմանը, եթե

$$\|u^h - v^h\|_h \rightarrow 0, \quad \text{երբ } |h| \rightarrow 0 : \quad (8.2.19)$$

Ըստ որում, եթե տեղի ունի

$$\|u^h - v^h\|_h \leq C |\hbar|^m \quad (8.2.20)$$

անհավասարությունը, որտեղ C -ն \hbar -ից անկախ դրական հաստատում է և $m > 0$, ապա ասում են, որ սխեման ունի m -րդ կարգի ճշտություն: Իսկ եթե առկա է

$$\|u^h - v^h\|_h \leq C (h_1^{m_1} + h_2^{m_2} + \dots + h_p^{m_p}) \quad (8.2.21)$$

անհավասարությունը, որտեղ $m_\alpha > 0$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$, ապա ասում են, որ սխեմայի ճշտության կարգը ըստ h_α -ի հավասար է m_α -ի:

Սահմանում 8.2.2 : Ասում են, որ (8.2.18) տարբերական սխեման մուտարկում է (8.2.16), (8.2.17) դիֆերենցիալ խնդրի, եթե

$$\|L_h u^h - f^h\|_h^\circ \rightarrow 0, \quad \|l_h u^h - \varphi^h\|_h' \rightarrow 0, \quad \text{երբ } |h| \rightarrow 0 : \quad (8.2.22)$$

Եթե տեղի ունեն

$$\|L_h u^h - f^h\|_h^\circ \leq C_1 |\hbar|^m, \quad \|l_h u^h - \varphi^h\|_h' \leq C_2 |\hbar|^m \quad (8.2.23)$$

անհավասարությունները, որտեղ C_1 և C_2 դրական հաստատումները \hbar -ից անկախ են, և $m > 0$, ապա ասում են, որ տարբերական սխեման ունի m -րդ կարգի մուտարկում: Իսկ եթե

$$\begin{aligned} \|L_h u^h - f^h\|_h^\circ &\leq C_1 (h_1^{m_1} + h_2^{m_2} + \dots + h_p^{m_p}), \\ \|l_h u^h - \varphi^h\|_h' &\leq C_2 (h_1^{m_1} + h_2^{m_2} + \dots + h_p^{m_p}), \end{aligned} \quad (8.2.24)$$

որտեղ $m_\alpha > 0$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$, ապա ասում են, որ սխեմայի մուտարկման կարգը ըստ h_α -ի հավասար է m_α -ի:

Սահմանում 8.2.3 : Ասում են, որ (8.2.18) տարբերական սխեման կայում է, եթե

$$\|v^h\|_h \leq C_3 \|f^h\|_h^\circ + C_4 \|\varphi^h\|'_h, \quad (8.2.25)$$

որտեղ C_3 -ը և C_4 -ը ինչպես \hbar -ից, այնպես էլ f^h -ից և φ^h -ից անկախ դրական հաստատուններ են:

(8.2.25) անհավասարությունը նշանակում է, որ (8.2.18) տարբերական խնդրի մուտքային տվյալների փոքր փոփոխությանը համապատասխանում է լուծման փոքր փոփոխություն: Դրանով իսկ կայունությունը բնութագրում է տարբերական սխեմայի զգայունությունը տարբեր տիպի սխալանքների նկատմամբ: Նշենք, որ կայունությունը (ի տարբերություն զուգամիտության և մոտարկման) տարբերական սխեմայի ներքին հատկությունն է, որը կապված չէ դիտարկվող դիֆերենցիալ խնդրի հետ:

Ներմուծված հասկացությունների միջև կապը հաստատում է հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 8.2.1 (Լաքս-Ֆիլիպով): Եթե (8.2.18) տարբերական սխեման մոտարկում է (8.2.16), (8.2.17) դիֆերենցիալ խնդիրը և կայուն է, ապա այն զուգամետ է, ըմբ որում ճշտության կարգը որոշվում է մոտարկման կարգով:

Ապացույց: Քանի որ L_h և l_h տարբերական օպերատորները գծային են, ապա

$$\begin{aligned} L_h(u^h - v^h) &= L_h u^h - L_h v^h = L_h u^h - f^h, \\ l_h(u^h - v^h) &= l_h u^h - l_h v^h = l_h u^h - \varphi^h : \end{aligned}$$

Դրանով իսկ $u^h - v^h$ տարբերությունը բավարարում է

$$\begin{cases} L_h(u^h - v^h) &= L_h u^h - f^h, \quad x \in \omega_h^\circ \\ l_h(u^h - v^h) &= l_h u^h - \varphi^h. \quad x \in \omega_h' \end{cases}$$

Տարբերական հավասարումների համակարգին: Համաձայն (8.2.25) գնահատականի ունենք

$$\|u^h - v^h\|_h \leq C_3 \|L_h u^h - f^h\|_h^\circ + C_4 \|l_h u^h - \varphi^h\|'_h :$$

Այսուղից, հաշվի առնելով (8.2.22)-ը և (8.2.23)-ը (կամ (8.2.24)-ը), գալիս ենք մեր պնդմանը: \square

Այսպիսով, ստացված արլյունքը համառոտակի կարելի է ձևակերպել այսպես. մոտարկումից և կայունությունից հետևում է զուգամիտությունը: Ուստի, կառուցելով մոտարկող տարբերական սխեմա, և ապացուցելով նրա կայունությունը, մենք կարող ենք վստահ լինել, որ այն զուգամետ է:

Հաջողության պարագաներում մենք կը նենարկենք տարբերական սխեմաների կառուցման և հետազոտման եղանակները սույն գլխի սկզբում դիտարկված մաքեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումների համար:

8.3 Տարբերական սխեմաներ տեղափոխման հավասարման համար

Դիտարկենք

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial u}{\partial x} = f, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t \leq T \quad (8.3.1)$$

հավասարումը, որտեղ $a = \text{const} > 0$,

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty \quad (8.3.2)$$

սկզբնական պայմանով:

Կառուցենք դիտարկվող տիրույթում ω_h ցանցը, ինչպես նկարագրված է 8.2.4 օրինակում (նկ. 8.2.7): Այդ ցանցի վրա որոշված G_h ֆունկցիաների տարածությունում ներմուծենք

$$\|w\| \equiv \max_{0 \leq n \leq N} \sup_m |w_m^n| \quad (8.3.3)$$

նորմը: Այնուհետև, $\omega'_h = \{x_m : m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ միաչափ ցանցի վրա որոշված $\psi = \{\psi_m : m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \in G'_h$ ֆունկցիաների համար նորմը սահմանենք հետևյալ կերպ:

$$\|\psi\|' \equiv \sup_m |\psi_m| : \quad (8.3.4)$$

Հետագայում կօգտագործենք նաև

$$w^n \equiv \{w_m^n : m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

նշանակումը ցանցի n -րդ շերտի վրա որոշված ցանցային ֆունկցիաների համար:

Դիտարկենք աջակողմյան շաբլոնով կառուցված

$$\begin{cases} \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - a \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} = f_m^n, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0, 1, \dots, N-1, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (8.3.5)$$

տարբերական սխեման (նկ. 8.2.4ա): Համաձայն այդ սխեմայի, մեկ շերտից մյուսին անցումը կատարվում է ըստ

$$v_m^{n+1} = (1 - r)v_m^n + rv_{m+1}^n + \tau f_m^n, \quad r \equiv a \frac{\tau}{h} \quad (8.3.6)$$

բանաձևի:

Դիտողություն 8.3.1 : Տարբերական սխեմայի զուգամիտության հետազոտման ժամանակ մենք կենքադրենք, որ τ և h քայլերը ճգնաժամ են զրոյի ոչ թե իրարից անկախ, այլ լինելով

$$r = a \frac{\tau}{h} = \text{const} \quad (8.3.7)$$

հարաբերության մեջ:

Նախ պարզենք (8.3.5) տարրերական սխեմայի մոտարկման կարգը: Օգտվելով թեյլորի վերլուծությունից (տես լեռնա 4.6.1) և հաշվի առնելով (8.3.2) սկզբնական պայմանը, դժվար չէ ստանալ

$$\begin{aligned} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - a \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} &= f_m^n + \varepsilon_m^{n+1}, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0, 1, \dots, N-1. \\ u_m^0 &= \varphi_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned}$$

որտեղ

$$\varepsilon_m^{n+1} = \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{(x_m, t_n + \theta_1 \tau)} - a \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(x_m + \theta_2 h, t_n)}, \quad 0 < \theta_1, \theta_2 < 1 :$$

Այստեղից, ենթադրենով (8.3.1), (8.3.2) խնդրի ճշգրիտ լուծման երկրորդ կարգի մասնական ածանցյալների սահմանափակությունը, կստանանք

$$|\varepsilon_m^{n+1}| \leq C(\tau + h). \quad C = \text{const} > 0$$

բոլոր $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ և $n = 0, 1, \dots, N-1$ արժեքների համար: Այսպիսով, (8.3.5) տարրերական սխեման մոտարկում է (8.3.1), (8.3.2) խնդիրը:

Այժմ հետազոտենք սխեմայի կայունությունը:

Թեորեմ 8.3.1: Եթե $r \leq 1$, ապա (8.3.5) տարրերական խնդրի $v \in G_h$ լուծման համար ծիշտ է հետևյալ գնահատականը.

$$||v|| \leq T ||f|| + ||\varphi||' : \quad (8.3.8)$$

Ապացույց: Քանի որ $r \leq 1$, ապա (8.3.6)-ից հետևում է

$$|v_m^{n+1}| \leq (1-r)|v_m^n| + r|v_{m+1}^n| + \tau|f_m^n|$$

անհավասարությունը: Այստեղից

$$\sup_m |v_m^{n+1}| \leq (1-r) \sup_m |v_m^n| + r \sup_m |v_{m+1}^n| + \tau ||f||,$$

և մենք ստանում ենք

$$||v^{n+1}||' \leq ||v^n||' + \tau ||f||. \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

անհավասարությունները: Այս անհավասարությունների հաջորդական կիրառմամբ բոլոր $n = 1, 2, \dots, N$ արժեքների համար կստանանք՝

$$\begin{aligned} ||v^n||' &\leq ||v^{n-1}||' + \tau ||f|| \leq ||v^{n-2}||' + 2\tau ||f|| \leq \dots \\ &\leq ||v^0||' + n\tau ||f|| \leq ||v^0||' + N\tau ||f|| = ||\varphi||' + T ||f|| : \end{aligned}$$

Այսպիսով,

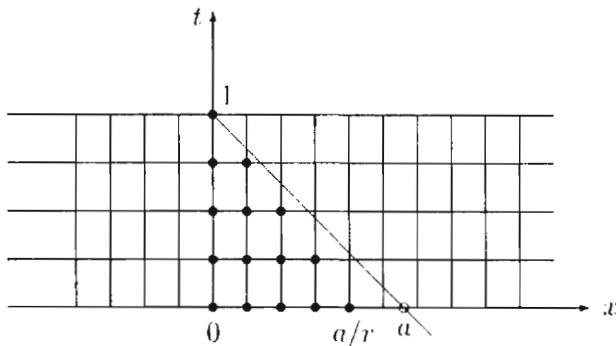
$$||v^n||' \leq T ||f|| + ||\varphi||', \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

որտեղից էլ ակնհայտորեն հետևում է (8.3.8) գնահատականը: \square

Ստացված գնահատականը պնդում է (8.3.5) սխեմայի կայունությունը (8.3.3) նորմում:

Ցույց տանք, որ $r \leq 1$ պայմանը էական է, այսինքն՝ $r > 1$ դեպքում սխեման անկայուն է: Դեռ համար բավարար է ցույց տալ, որ այն զուգամետ չէ (տես 8.2.1 թեորեմը):

Ենթադրելով $f(x, t) \equiv 0$ անմիջական ստուգմամբ կարող ենք համոզվել, որ (8.3.1), (8.3.2) խնդրի լուծումը $u(x, t) = \varphi(x+at)$ ֆունկցիան է: Ուստի լուծումը հաստատուն է, յուրաքանչյուր $x+at = const$ ուղիղ գծի վրա, որի կոչում է հավասարման թնութագրի: (տես սույն պարագրաֆի վերջի): Շարադրման պարզության համար վերցնենք $T = 1$: Այդ դեպքում լուծումը հաստատուն է $x+at = a$ թնութագրիչի վրա, որն անցնում է $(0, 1)$ և $(a, 0)$ կետերով (նկ. 8.3.1): Ակնհայտ է, որ $u(0, 1) = \varphi(a)$:



Նկ. 8.3.1 $r > 1$ դեպքում (8.3.5) սխեմայի տարամիտության ապացույցի առթիվ

Հեշտ է տեսնել, որ (8.3.5) տարրերական խնդրի v_0^N լուծումը $(0, 1)$ կետում միարժեքորեն որոշվում է $\varphi(r)$ ֆունկցիայի արժեքներով $0 \leq x \leq a/r$ հասվածին պատկանող հանգույցների վրա, և կախված չէ $\varphi(x)$ ֆունկցիայի արժեքներից այդ հատվածից դուրս: Եթե $r > 1$, ապա $a/r < a$: Ուստի զուգամիտություն $(0, 1)$ հանգույցում, ընդհանրապես ասած, գոյություն չունի: Իրոք, լիցուք որոշ $\varphi(x)$ ֆունկցիայի համար տեղի ունի զուգամիտություն, այսինքն՝

$$\lim_{h, r \rightarrow 0} v_0^N = u(0, 1) = \varphi(a) :$$

Փոխենք $\varphi(x)$ ֆունկցիայի արժեքները $x = a$ կետի շրջակայքում այնպես, որ $0 \leq x \leq a/r$ հատվածում այն մնիա, սակայն, անփոփոխ: Ավելի ճիշտ, վերցնենք մի այլ սկզբնական ֆունկցիա $\tilde{\varphi}(x)$ այնպես, որ $\tilde{\varphi}(r) = \varphi(r)$, եթե $0 \leq x \leq a/r$, բայց $\tilde{\varphi}(a) \neq \varphi(a)$: Այդ դեպքում ճշգրիտ լուծման արժեքը $(0, 1)$ կետում կփոխվի (այժմ այն հավասար է $\tilde{\varphi}(a)$ -ի), այն դեպքում, եթե v_0^N մոտավոր լուծումը կմնա նախսկինը:

Դրանով իսկ զուգամիտություն փոփոխված սկզբնական արժեքի դեպքում արդեն չկա: Իսկ քանի որ (8.3.5) սխեման մոտարկող է, ապա այն չի կարող լինել կայուն (հակառակ դեպքում այն կհակասեր 8.2.1 թեորեմի պնդմանը):

Բերենք մի պարզ օրինակ. թե ինչպես է $r > 1$ դեպքում սխեմայի անկայունությունը ազդում մոտավոր լուծման վրա սկզբնական արժեքների փոքր սխալանքների դեպքում: Դիտարկենք (8.3.1), (8.3.2) խնդիրը, երբ $f(x, t) \equiv 0$ և $\varphi(x) \equiv 0$: Այդ խնդրի լուծումն է՝ $u(x, t) \equiv 0$: Ունենալով

$$v_m^0 = 0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8.3.9)$$

սկզբնական արժեքները, մոտավոր լուծումը հաջորդ շերտերում որոշվում է ըստ

$$v_m^{n+1} = (1 - r)v_m^n + rv_{m+1}^n, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

բանաձևի: Ակնհայտ է, որ $v_m^n \equiv 0$: Այժմ ենթադրենք, որ սկզբնական արժեքներում թույլ է տրվել սխալանք և (8.3.9)-ի փոխարեն իրականում ունենք

$$\tilde{v}_m^0 = (-1)^m \varepsilon, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (8.3.10)$$

որտեղ $\varepsilon = const$: Գծվար չէ ստանալ բացահայտ բանաձև նոր (8.3.10) սկզբնական արժեքներին համապատասխանող \tilde{v}_m^n ցանցային ֆունկցիայի համար՝

$$\tilde{v}_m^n = (1 - 2r)^n (-1)^m \varepsilon :$$

Մասնավորապես, վերջին շերտում՝

$$|\tilde{v}_m^N| = |1 - 2r|^N |\varepsilon| = |1 - 2r|^{T/\tau} |\varepsilon| :$$

Քանի որ $|1 - 2r| > 1$, ապա $\tau \rightarrow 0$ դեպքում սկզբունքը թույլ տրված սխալանքը շատ արյագ աճում է ուստի և լուծումը աղետալիորեն աղավաղվում է:

Կատարելով համանման դասողություններ, կարելի է ցույց տալ, որ նկ. 8.2.4բ-ում պատկերված ձախակողմյան շաբլոնով կառուցված

$$\begin{cases} \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - a \frac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} = f_m^n, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0, 1, \dots, N-1, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

տարբերական սխեման անկայուն է կամայական r -ի դեպքում:

- Տեղափոխման հավասարման բնութագրիչների մասին

Կարելի է ցույց տալ, որ

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t) \quad (8.3.11)$$

տեղափոխման հավասարման մեջ ծախս մասը իրենից ներկայացնում է $u(x, t)$ ֆունկցիայի լրիվ ածանցյալ ըստ t -ի՝

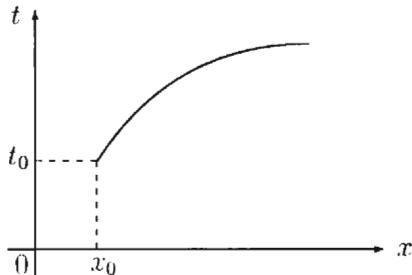
$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} - a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} :$$

Ուստի (8.3.11) հավասարումը կարող է գրվել հետևյալ բնութագրիշ տեսքով.

$$\frac{du}{dt} = f(x, t), \quad (8.3.12)$$

$$\frac{dx}{dt} = -a(x, t) : \quad (8.3.13)$$

Նշենք, որ (8.3.13) սովորական դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրալ կորերը կոչվում են բնութագրիշմեր: Այդ կորերը հոսքի գծերն են. $x = x(t; x_0, t_0)$ բնութագրիշը իրենից ներկայացնում է կրող միջավայրի մասնիկի շարժման հետազիծ, որը ժամանակի $t = t_0$ պահին ունի $x = x_0$ կոորդինատը (նկ. 8.3.2):



Նկ. 8.3.2 $x = x(t; x_0, t_0)$ բնութագրիշը

Պարզ է, որ $x = x(t; x_0, t_0)$ ֆիքսված բնութագրիշի վրա դիտարկվող (8.3.12) հավասարումը սովորական դիֆերենցիալ հավասարում է t անկախ փոփոխականով և $u(t) \equiv u(x(t; x_0, t_0), t)$ որոնելի ֆունկցիայով: Այդ հավասարման լուծումը միարժեքորեն որոշվում է $u(t_0) = u(x_0, t_0)$ սկզբնական պայմանով: «Մարոր տեղափոխման» դեպքում $f(x, t) \equiv 0$, բնութագրիշի վրա ունենք $u(t) \equiv u(t_0)$: Եթե $a = const$, բնութագրիշները ներկայացնում են $x + at = const$ զուգահեռ ուղիղների ընտանիք:

8.4 Կայունության սպեկտրալ հայտանիշը

Չարադրենք տարրերական սխեմաների կայունության վերլուծության բավականին պարզ եղանակ, որն առաջարկել է Զ. Նեյմանը: Այստեղ մենք կսահմանափակվենք տեղափոխման հավասարման համար (8.3.1), (8.3.2) Կոչու խնդրի հետազոտմամբ:

Սկզբից դիտարկենք

$$\begin{cases} \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - a \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} = f_m^n, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0, 1, \dots, N-1, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (8.4.1)$$

տարբերական սխեման: Համաձայն 8.2.3 սահմանմանը (8.4.1) տարբերական սխեմայի կայունությունը նշանակում է

$$\|v\| \leq C_1 \|f\| + C_2 \|\varphi\|' \quad (8.4.2)$$

զնահատականի առկայություն, որտեղ C_1 և C_2 դրական հաստատունները կախված չեն ոչ ցանցի քայլերից, ոչ ել $f = \{f_m^n\} \in G_h$ և $\varphi = \{\varphi_m\} \in G'_h$ ցանցային ֆունկցիաներից (տես ցանցային նորմերի (8.3.3) և (8.3.4) սահմանումները): (8.4.2) անհավասարությունը պետք է տեղի ունենա կամայական f և φ ֆունկցիաների համար: Մասնավորապես, կայունության համար անհրաժեշտ է, որպեսզի այն ճիշտ լինի $f \equiv 0$ և կամայական $\varphi \in G'_h$ ֆունկցիայի համար: Սա նշանակում է, որ

$$\begin{cases} \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - a \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} = 0, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0, 1, \dots, N-1, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (8.4.3)$$

տարբերական խնդրի լուծման համար պետք է տեղի ունենա

$$\|v\| \leq C \|\varphi\|' \quad (8.4.4)$$

զնահատականը, որտեղ C -ն ցանցի քայլերից և φ ցանցային ֆունկցիայից անկախ դրական հաստատուն է: (8.4.4) հատկությունը կոչվում է (8.4.1) սխեմայի կայունությունը սկզբնական տվյալների:

Ըստ սկզբնական տվյալների սխեմայի կայունության համար անհրաժեշտ է, որ (8.4.4) զնահատականը տեղի ունենա, մասնավորապես,

$$\varphi_m(\alpha) = e^{i\alpha m}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8.4.5)$$

Կոմպլեքս ցանցային ֆունկցիայի համար, որտեղ α -ն կամայական իրական պարամետր է: Քանի որ $|\varphi_m(\alpha)| = |e^{i\alpha m}| = 1$, ապա (8.4.4) զնահատականը այս դեպքում լնդունում է

$$\|v(\alpha)\| \leq C \quad (8.4.6)$$

տեսքը, որտեղ $v(\alpha)$ -ն (8.4.5) սկզբնական ֆունկցիային համապատասխանող (8.4.3) տարբերական խնդրի լուծումն է: Դժվար չէ համոզվել, որ

$$v_m^n(\alpha) = \lambda^n(\alpha) e^{i\alpha m},$$

որտեղ

$$\lambda(\alpha) = 1 - r + re^{i\alpha}, \quad r \equiv a \frac{\tau}{h} : \quad (8.4.7)$$

Քանի որ

$$\sup_n |v_m^n(\alpha)| = |\lambda(\alpha)|^n,$$

ապա (8.4.6) գնահատականի գոյության համար անհրաժեշտ է, որ բոլոր իրական α -ների համար

$$\max_{0 \leq n \leq N} |\lambda(\alpha)|^n \leq C :$$

Այս անհավասարությունը տեղի կունենա, եթե

$$|\lambda(\alpha)| \leq 1 + K\tau \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}, \quad (8.4.8)$$

որտեղ K -ն τ -ից և α -ից անկախ դրական հաստատում է: Իրոք, այդ դեպքում

$$\max_{0 \leq n \leq N} |\lambda(\alpha)|^n \leq \max_{0 \leq n \leq N} (1 + K\tau)^n \leq (1 + K\tau)^N = \left(1 + \frac{KT}{N}\right)^N \leq e^{KT} :$$

Ստացված (8.4.8) պայմանը կոչվում է Նեյմանի կայունության անհրաժեշտ սպեկտրալ պայման: Այն կոչվում է սպեկտրալ հետևյալ պատճառով: Դիտարկվող (8.4.3) տարրերական խնդրում մի շերտից մյուսին անցումը կարելի է գրել

$$v^{n+1} = Pv^n$$

օպերատորային ձևով, որտեղ P անցման օպերատորը գործում է ըստ

$$(Pw)_m = (1 - r)w_m + rw_{m+1}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

օրենքի: Հեշտ է ցոյց տալ, որ $\lambda(\alpha)$ թվերը (8.4.7)-ից P օպերատորի սեփական արժեքներն են, իսկ $\varphi(\alpha)$ ցանցային ֆունկցիաները (8.4.5)-ից համապատասխան սեփական ֆունկցիաներ են, այսինքն՝

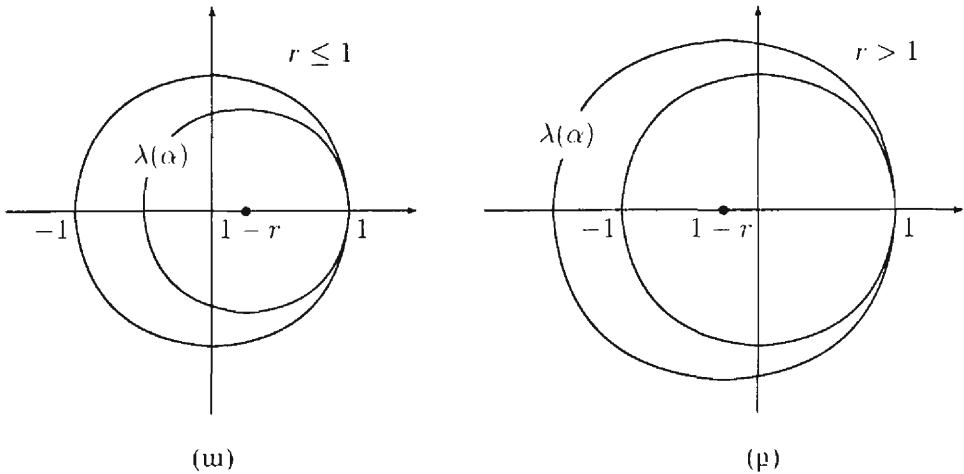
$$P\varphi(\alpha) = \lambda(\alpha)\varphi(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbf{R} :$$

Եթե α -ն անցնում է ամբողջ իրական առանցքով, $\lambda(\alpha)$ կետը գծում է կոմպլեքս հարթության վրա որոշ զիծ, որը բաղկացած է P անցման օպերատորի սեփական արժեքներից:

Պարզենք (8.4.8) պայմանի առկայությունը մեր սխեմայի դեպքում: Դժվար չէ տեսնել, որ (8.4.7) կետերի համախմբությունը կոմպլեքս հարթության վրա կազմում է r շառավիղով շրջանագիծ, որի կենտրոնը գտնվում է իրական առանցքի $1 - r$ կետում: Իրոք,

$$|\lambda(\alpha) - (1 - r)| = r |e^{i\alpha}| = r :$$

Եթե $r \leq 1$, այդ շրջանագիծը գտնվում է միավոր շրջանի ներսում (նկ. 8.4.1ա), ուստի $|\lambda(\alpha)| \leq 1$: Եթե $r > 1$, շրջանագիծը գտնվում է միավոր շրջանից դուրս. շոշափելով վերջինը միայն իրական առանցքի $\lambda = 1$ կետում (նկ. 8.4.1ի): Դժվար չէ տեսնել, որ (8.4.8) պայմանը այսուղեւ տեղի չունի:



Նկ. 8.4.1 Անցման օպերատորի սպեկտրի կետերը (8.4.1) սխեմայի համար

Նախորդ պարագրաֆում մենք բավականին մանրամասն հետազոտել ենք (8.4.1) տարրերական սխեման և ցույց ենք տվել, որ $r \leq 1$ դեպքում այն կայուն է, իսկ $r > 1$ դեպքում՝ անկայուն: Այսպիսով, Նեյմանի պայմանը բավականին զգայուն գունվեց, որպեսզի ճշտությամբ միմյանցից անշատի կայունության և անկայունության դեպքերը:

Կատարենք այժմ տեղափոխման հավասարման համար այլ տարրերական սխեմաների վերլուծությունը: Դիտարկենք

$$\begin{cases} \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - a \frac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} = f_m^n, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0, 1, \dots, N-1, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (8.4.9)$$

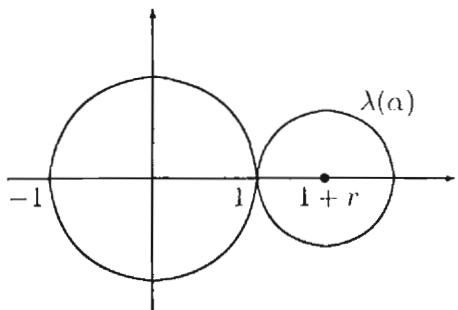
սխեման: Ինչպես արդեն ասվել է նախորդ պարագրաֆում, այդ սխեման անկայուն է կամայական r -ի դեպքում (իշեցնենք, որ այստեղ $a > 0$): Հեշտ է համոզվել, որ (8.4.5) տեսքի սկզբնական ցանցային ֆունկցիայի համար համապատասխան համասեռ խնդրի ($f \equiv 0$) լուծումը կլինի

$$v_m^n(\alpha) = \lambda^n(\alpha) e^{i\alpha m},$$

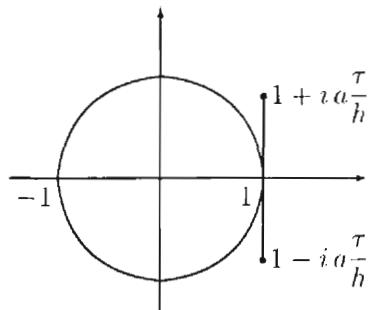
որտեղ

$$\lambda(\alpha) = 1 + r - re^{-i\alpha}: \quad (8.4.10)$$

(8.4.10) կետերի համախմբությունը, եթե $\alpha \in \mathbf{R}$, իրենից ներկայացնում է կոմպլեքս հարրության վրա r շառավիղով շրջանագիծ, որի կենտրոնը գտնվում է իրական առանցքի $1 + r$ կետում (նկ. 8.4.2ա): Ուստի (8.4.8) պայմանը տեղի չունի r -ի ոչ մի արժեքի դեպքում: Այսպիսով, կայունության սպեկտրալ հայտանիշը (8.4.9) սխեմայի համար նույնական զգայուն է:



(ω)



(ρ)

Նկ. 8.4.2 Անցման օպերատորի սպեկտրի կետերը. (ω) (8.4.9) սխեմայի համար,
(ρ) (8.4.11) սխեմայի համար

Դիտարկենք այժմ

$$\begin{cases} \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = f_m^n, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0, 1, \dots, N-1, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (8.4.11)$$

տարբերական սխեման: Այս սխեմայի համար, կատարելով համանման դատողություններ, գտնում ենք, որ

$$\lambda(\alpha) = 1 + i \frac{\tau}{h} \sin \alpha : \quad (8.4.12)$$

Այստեղ (8.4.12) կետերի համախմբությունը կազմում է $2a\tau/h$ երկարությամբ ուղղաձիգ հատված, որն անցնում է իրական առանցքի $\lambda = 1$ կետով (նկ. 8.4.2ρ): Եթե $a\tau/h = r = const$, ինչպես ենթադրում էինք վերը, ապա (8.4.8) պայմանը տեղի չունի: Իսկ եթե ըստ ժամանակի τ քայլը, եթք $h \rightarrow 0$, փոփոխվում է h^2 -ին համեմատականորեն այնպես, որ $\tau = rh^2$, որտեղ $r = const$, ապա այս դեպքում (8.4.8) կայունության անհրաժեշտ սպեկտրալ պայմանը արդեն տեղի ունի: Իրոք, կամայական $\alpha \in \mathbb{R}$ համար ունենք

$$|\lambda(\alpha)| \leq \left| \lambda \left(\frac{\pi}{2} \right) \right| = \sqrt{1 + a^2 \frac{\tau^2}{h^2}} = \sqrt{1 + a^2 r \tau} \leq 1 + \frac{a^2 r}{2} \tau :$$

Ասենք, որ $\tau = rh^2$ պահանջը ավելի խիստ պայման է քայլերի հարաբերակցության վրա: Սա նշանակում է, որ փոքր h -երի դեպքում մենք ստիպված ենք ընտրել շափականց փոքր քայլ ըստ ժամանակի: Իսկ դա, իր հերթին, կրերի մեքենայական ժամանակի զգալի աճի:

Ելենով վերը շարադրածից, մենք գալիս ենք ենտելյալ եզրակացությանը: Եթե կայունության (8.4.8) անհրաժեշտ սպեկտրալ պայմանը տեղի չունի, ապա ցանցային նորմերի ինչպիսի խելամիտ լնալություն էլ կատարվի չի կարենի սպասել տարբերական սխեմայի կայունության: Իսկ եթե այն տեղի ունի, ապա կան մեծ հիմքեր հանարելու, որ սխեման կայուն է: Ըստ այդմ Նեյմանի պայմանը կարելի է դիտարկել որպես յուրատեսակ ֆիլտր, որը մաղում է անկայուն սխեմաները:

8.5 Չերմահաղորդականության հավասարումը

Դիտարկենք

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T \quad (8.5.1)$$

Չերմահաղորդականության հավասարումը, որտեղ $a = \text{const} > 0$,

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (8.5.2)$$

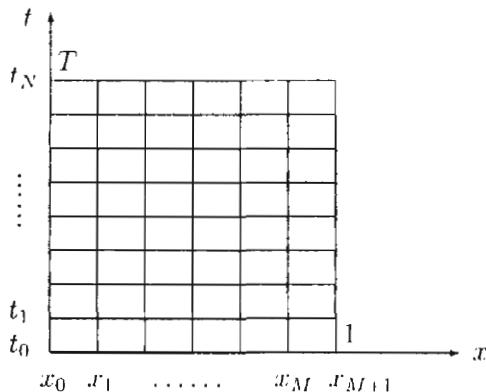
սկզբնական պայմանով և

$$u(0, t) = \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 < t \leq T \quad (8.5.3)$$

եզրային պայմաններով:

Ենթադրում է, որ (8.5.1)-(8.5.3) խնդրի լուծումը գոյություն ունի և միակն է:

Կառուցենք դիտարկվող տիրույթում ω_h ցանցը (x_m, t_n) հանգույցներով. որտեղ $x_m = mh, m = 0, 1, \dots, M+1, h = 1/(M+1)$ և $t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N, \tau = T/N$ (նկ. 8.5.1): Դիցուր G_h -ը ω_h ցանցի վրա որոշված ցանցային ֆունկցիաների տարածությունն է: Նշանակենք w_m^n -ով $w \in G_h$ ֆունկցիայի արժեքը (x_m, t_n) հանգույցում: Ֆիքսված n -ի դեպքում (x_m, t_n) հանգույցների համախմբությունը անվանենք ցանցի n -րդ շերտ: Կօգուազործենք $w^n \equiv \{w_m^n : m = 0, 1, \dots, M+1\}$ նշանակումը n -րդ շերտում տրված ցանցային ֆունկցիաների համար:



Նկ. 8.5.1 Ցանց չերմահաղորդականության հավասարման համար

Ցանցային ֆունկցիաների G_h տարածությունում սահմանենք

$$\|w\| \equiv \max_{0 \leq n \leq N} \max_{0 \leq m \leq M+1} |w_m^n| \quad (8.5.4)$$

Առաջը: Այնուհետև, միաշափ $\omega'_h = \{x_m : m = 0, 1, \dots, M+1\}$ ցանցի վրա տրված $\psi = \{\psi_m\}_{m=0}^{M+1} \in G'_h$ ֆունկցիայի համար նորմը սահմանենք հետևյալ կերպ:

$$\|\psi\|' \equiv \max_{0 \leq m \leq M+1} |\psi_m| : \quad (8.5.5)$$

Սույն պարագրաֆում մենք կդիտարկենք եթեր առավել գործածելի սխեմաներ չերմահաղորդականության հավասարման համար:

8.5.1 Բացահայտ սխեմա

Կառուցենք տարբերական սխեմա ըստ նկ. 8.2.5ա -ում պատկերված շարլոնի:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - a \frac{v_{m-1}^n - 2v_m^n + v_{m+1}^n}{h^2} = f_m^n, \\ m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, 1, \dots, M+1, \\ v_0^n = \alpha^n, \quad v_{M+1}^n = \beta^n, \quad n = 1, 2, \dots, N; \end{array} \right. \quad (8.5.6)$$

Այստեղ $\alpha^n \equiv \alpha(t_n)$, $\beta^n \equiv \beta(t_n)$:

Համաձայն այս սխեմայի, իմանալով մոտավոր լուծումը n -րդ շերտում, որտեղ $0 \leq n \leq N-1$, լուծման արժեքները հաջորդ՝ $(n+1)$ -րդ շերտում հաշվվում են ըստ

$$v_m^{n+1} = rv_{m-1}^n + (1-2r)v_m^n + rv_{m+1}^n + \tau f_m^n, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (8.5.7)$$

բացահայտ բանաձևի, որտեղ $r \equiv a\tau/h^2$: Այդ իսկ պատճառով (8.5.6) տարբերական սխեման կոչվում է բացահայտ:

```
Pseudocode EXPLICIT
input a, T, M, N
h = 1/(M+1)
τ = T/N
r = aτ/h²
for m = 0, 1, ..., M+1 do
    v_m⁰ = φ_m
end
for n = 0, 1, ..., N-1 do
    v_₀^{n+1} = α^{n+1}
    v_{M+1}^{n+1} = β^{n+1}
    for m = 1, 2, ..., M do
        v_m^{n+1} = (1-2r)v_m^n + r(v_{m-1}^n + v_{m+1}^n) + τf_m^n
    end
end
output v
```

Պարզենք սխեմայի մոտարկման կարգը: Օգտագործենով Թեյլորի վերլուծությունը (տես 4.6.1 և 4.6.4 լեմմաները), և հաշվի առնելով (8.5.2) և (8.5.3) սկզբնական և եզրային պայմանները, դժվար չէ ստանալ, որ

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - a \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2} = f_m^n + \varepsilon_m^{n+1},$$

$$m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$u_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, 1, \dots, M+1,$$

$$u_0^n = \alpha^n, \quad u_{M+1}^n = \beta^n, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

որտեղ

$$\varepsilon_m^{n+1} = \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{(x_m, t_n + \theta_1 \tau)} - a \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(x_m + \theta_2 h, t_n)}, \quad 0 < \theta_1 < 1, \quad -1 < \theta_2 < 1 :$$

Ենթադրելով հավասարության աջ մասում մասնական ածանցյալների սահմանափակությունը, այստեղից հետևում են

$$|\varepsilon_m^{n+1}| \leq C(\tau + h^2), \quad C = \text{const} > 0 \quad (8.5.8)$$

գնահատականները բոլոր $m = 1, 2, \dots, M$ և $n = 0, 1, \dots, N - 1$ արժեքների համար: Դրանով իսկ (8.5.6) տարրերական սխեման մոտարկում է (8.5.1)-(8.5.3) խնդիրը առաջին կարգով ըստ τ -ի և երկրորդ կարգով ըստ h -ի:

Այժմ անդրադասնաճը (8.5.6) սխեմայի կայունության հարցին:

Թեորեմ 8.5.1: Եթե $r \leq 1/2$, ապա (8.5.6) տարրերական սխեմայի $v \in G_h$ լուծման համար ճիշտ է

$$\|v\| \leq T\|f\| + \max(\|\varphi\|', \Phi) \quad (8.5.9)$$

գնահատականը, որտեղ

$$\Phi \equiv \max \left(\max_{1 \leq n \leq N} |\alpha^n|, \max_{1 \leq n \leq N} |\beta^n| \right) :$$

Ապացույց: Քանի որ $r \leq 1/2$, ապա (8.5.7)-ից ունենք

$$|v_m^{n+1}| \leq r|v_{m-1}^n| + (1 - 2r)|v_m^n| + r|v_{m+1}^n| + \tau|f_m^n| \leq \|v^n\|' + \tau\|f\| \quad (8.5.10)$$

բոլոր $m = 1, 2, \dots, M$ և $n = 0, 1, \dots, N - 1$ արժեքների համար: Ակնհայտ են

$$|v_0^{n+1}| = |\alpha^{n+1}| \leq \Phi, \quad |v_{M+1}^{n+1}| = |\beta^{n+1}| \leq \Phi \quad (8.5.11)$$

անհավասարությունները: Այնուհետև, (8.5.10)-ից և (8.5.11)-ից հետևում է, որ

$$\|v^{n+1}\|' \leq \max(\|v^n\|', \Phi) + \tau\|f\|, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 : \quad (8.5.12)$$

Օգտվելով (8.5.12) անհավասարություններից, ցանկացած n -ի համար, որտեղ $1 \leq n \leq N$, ունենք

$$\begin{aligned} \|v^n\|' &\leq \max(\|v^{n-1}\|', \Phi) + \tau\|f\| \leq \max(\max(\|v^{n-2}\|', \Phi) + \tau\|f\|, \Phi) + \tau\|f\| \leq \\ &\leq \max(\|v^{n-2}\|', \Phi) + 2\tau\|f\| \leq \dots \leq \max(\|v^0\|', \Phi) + n\tau\|f\| \leq \max(\|v^0\|', \Phi) + \\ &N\tau\|f\| = \max(\|\varphi\|', \Phi) + T\|f\| : \end{aligned}$$

Այստեղից ակնհայտորեն հետևում է (8.5.9) գնահատականը: \square

Ստացված (8.5.9) գնահատականը հաստատում է (8.5.6) սխեմայի կայունությունը (8.5.4) նորմում: Նկատի ունենալով τ և h քայլերի հարաբերակցության վրա դրվող $r \leq 1/2$ պայմանը, ասում են, որ բացահայտ սխեման պայմանականորեն կայուն է:

Նշենք, որ քայլերի հարաբերակցության վրա նույն պահանջը դնում է նաև Նեյմանի կայունության անհրաժեշտ սպեկտրալ պայմանը: Իրոք, մոտարկելով

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t \leq T, \quad (8.5.13)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty \quad (8.5.14)$$

զերմահաղորդականության խնդիրը 8.2.4 օրինակում նկարագրված ցանցի վրա (նկ. 8.2.7), գտնում ենք, որ անցման օպերատորի սեփական արժեքներն են՝

$$\lambda(\alpha) = 1 - 2r + 2r \cos \alpha, \quad \alpha \in \mathbf{R} :$$

Ակնհայտ է, որ $|\lambda(\alpha)| \leq 1$ եթե $r \leq 1/2$:

8.5.2 Անքացահայտ սխեմա

Ըստ նկ. 8.2.5բ -ում տրված շաբլոնի կառուցենք

$$\left\{ \begin{array}{l} L_h v_m^n \equiv \frac{v_m^n - v_m^{n-1}}{\tau} - a \frac{v_{m-1}^n - 2v_m^n + v_{m+1}^n}{h^2} = f_m^n, \\ m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, 1, \dots, M+1, \\ v_0^n = \alpha^n, \quad v_{M+1}^n = \beta^n, \quad n = 1, 2, \dots, N \end{array} \right. \quad (8.5.15)$$

տարրերական սխեման: Ի տարրերություն բացահայտ սխեմայի, այստեղ յուրաքանչյուր n -րդ շերտում, որտեղ $1 \leq n \leq N$, մոտավոր լուծումը գտնելու համար անհրաժեշտ է լուծել

$$\left\{ \begin{array}{l} -rv_{m-1}^n + (1 + 2r)v_m^n - rv_{m+1}^n = \tau f_m^n + v_m^{n-1}, \\ m = 1, 2, \dots, M, \\ v_0^n = \alpha^n, \quad v_{M+1}^n = \beta^n \end{array} \right.$$

գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը, որտեղ $r \equiv a\tau/h^2$: Ստացված համակարգի մատրիցը երեքանկյունագծային է: Ուստի այդ համակարգը կարելի է արդյունավետ լուծել 3.9 պարագրաֆում նկարագրված մեթոդով: Նկատենք, որ 3.9.1 թեորեմի բոլոր պայմանները այստեղ բավարարված են և, նաև ավելացնելու համար առանձ անհրաժեշտ է մատրիցի խիստ անկյունագծային գերիշխումը՝ $1 + 2r > 2r$:

Կառուցված (8.5.15) տարրերական սխեման կոչվում է **անքացահայտ**: Ստորև տրված է այդ սխեմայի իրականացման ալգորիթմը:

Pseudocode IMPLICIT

input a, T, M, N

$h = 1/(M + 1)$

$\tau = T/N$

$r = a\tau/h^2$

for $m = 0, 1, \dots, M + 1$ do

$v_m^0 = \varphi_m$

end

for $n = 1, 2, \dots, N$ do

$v_0^n = \alpha^n$

$v_{M+1}^n = \beta^n$

solve system

$$-rv_{m-1}^n + (1 + 2r)v_m^n - rv_{m+1}^n = \tau f_m^n + v_m^{n-1},$$

$$m = 1, 2, \dots, M$$

end solve

end

output v

Միւեմայի մոտարկման կարգը նույնն է, ինչպես բացահայտ սիւեմայի դեպքում: Իրոք, օգտվելով 4.6.2 և 4.6.4 լենմաներից, և հաշվի առնելով (8.5.2) և (8.5.3) սկզբնական և եզրային պայմանները, կստանանք

$$\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\tau} - a \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2} = f_m^n + \varepsilon_m^n.$$

$$m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

$$u_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, 1, \dots, M + 1,$$

$$u_0^n = \alpha^n, \quad u_{M+1}^n = \beta^n, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

որտեղ

$$\varepsilon_m^n = -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{(x_m, t_n - \theta_1 \tau)} - a \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(x_m + \theta_2 h, t_n)}, \quad 0 < \theta_1 < 1, \quad -1 < \theta_2 < 1:$$

Այստեղից, ենթադրելով հավասարության աջ մասում մասնական ածանցյալների սահմանափակությունը, կստանանք, որ

$$|\varepsilon_m^n| \leq C(\tau + h^2), \quad C = \text{const} > 0 \quad (8.5.16)$$

բոլոր $m = 1, 2, \dots, M$ և $n = 1, 2, \dots, N$ արժեքների համար: Այսպիսով, անբացահայտ տարրերական սիւեման մոտարկում է (8.5.1)-(8.5.3) խնդիրը առաջին կարգով ըստ τ -ի և երկրորդ կարգով ըստ h -ի:

Ապացուցենք (8.5.15) տարրերական սիւեմայի կայունությունը (8.5.4) նորմում: Այդ նպատակով մեզ պետք կգա հետևյալ օժանդակ պնդումը:

Լեմմա 8.5.1 (մաքսիմումի սկզբունք) : Դիցուք $\theta \in G_h$ ցանցային ֆունկցիան այնպիսին է, որ

$$L_h \theta_m^n \leq 0, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N : \quad (8.5.17)$$

Այդ դեպքում այն ընդունում է իր մեծագույն արժեքը կամ սկզբնական շերտում ($n = 0$), կամ էլ եզրում ($m = 0$ կամ $m = M + 1$):

Ապացույց: Նշանակենք $\mu \equiv \max_{\omega_h} \theta_m^n$: Պարզ է, որ մաքսիմումը հասանելի է ω_h ցանցի որոշ հանգույցներում: Դիցուք k -ն ցանցի այն ամենաստորին շերտի համարն է, որտեղ θ ցանցային ֆունկցիան ընդունում է μ արժեքը: Եթե $k = 0$, ապա պնդումն ապացուցված է:

Դիցուք $k \geq 1$: Ցույց տանք, որ (x_m, t_k) ներքին հանգույցներում, այն է՛ եթք $1 \leq m \leq M$, θ ֆունկցիան չի կարող ընդունել μ արժեքը: Ընդունենք հակառակը, այսինքն՝ $\theta_i^k = \mu$ ինչ-որ i -ի համար, որտեղ $1 \leq i \leq M$: Այդ դեպքում (x_i, t_k) հանգույցում կունենանք

$$L_h \theta_i^k = \frac{\theta_i^k - \theta_{i-1}^{k-1}}{\tau} - a \frac{\theta_{i-1}^k - 2\theta_i^k + \theta_{i+1}^k}{h^2} = \frac{\mu - \theta_{i-1}^{k-1}}{\tau} + a \frac{2\mu - \theta_{i-1}^k - \theta_{i+1}^k}{h^2} \geq \frac{\mu - \theta_{i-1}^{k-1}}{\tau} > 0,$$

ինչը հակառակ է (8.5.17) պայմանին: Ուստի մեր ենթադրությունը ճիշտ չէ, և θ ֆունկցիան կը նդունի իր մեծագույն մաքսիմը (x_0, t_k) կամ (x_{M+1}, t_k) հանգույցներից գոնե մեկում: \square

Թեորեմ 8.5.2 : Տարրերական (8.5.15) խնդրի $v \in G_h$ լուծման համար ճիշտ է

$$\|v\| \leq \frac{1}{8a} \|f\| + \max(\|\varphi\|', \Phi) \quad (8.5.18)$$

գնահատականը, որտեղ

$$\Phi \equiv \max \left(\max_{1 \leq n \leq N} |\alpha^n|, \max_{1 \leq n \leq N} |\beta^n| \right) :$$

Ապացույց: Դիտարկենք $w \in G_h$ օժանդակ ֆունկցիան, որը որոշվում է հետևյալ կերպ:

$$w_m^n = \frac{x_m(1-x_m)}{2a}, \quad m = 0, 1, \dots, M+1, \quad n = 0, 1, \dots, N :$$

Պարզ է, որ $w_m^n \geq 0$, ընդ որում $w_0^n = w_{M+1}^n = 0$: Այդ դեպքում

$$\|w\| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} \frac{x(1-x)}{2a} = \frac{1}{8a} : \quad (8.5.19)$$

Այնուհետև, պարզ հաշվարկներով ստանում ենք, որ

$$L_h w_m^n = 1, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N : \quad (8.5.20)$$

Դիցուք $\theta \equiv v - ||f||w$: Այս ցանցային ֆունկցիայի համար, L_h տարրերական օպերատորի գծայնության և (8.5.20) հատկության շնորհիվ, բոլոր $m = 1, 2, \dots, M$ և $n = 1, 2, \dots, N$ արժեքների համար ունենք

$$L_h \theta_m^n = L_h v_m^n - ||f|| L_h w_m^n = f_m^n - ||f|| \leq 0 :$$

Դրանով իսկ θ ֆունկցիան բավարարում է 8.5.1 լեմմայի պայմանին: Այդ դեպքում

$$\theta_m^n \leq \max \left(\max_{0 \leq m \leq M+1} \theta_m^0, \max_{1 \leq n \leq N} \theta_0^n, \max_{1 \leq n \leq N} \theta_{M+1}^n \right), \\ m = 0, 1, \dots, M+1, n = 0, 1, \dots, N :$$

Ցանցային θ ֆունկցիայի սահմանումից ունենք

$$\begin{aligned} \theta_m^0 &= v_m^0 - ||f|| w_m^0 \leq v_m^0 = \varphi_m \leq ||\varphi||', \\ \theta_0^n &= v_0^n - ||f|| w_0^n = v_0^n = \alpha^n \leq \Phi, \\ \theta_{M+1}^n &= v_{M+1}^n - ||f|| w_{M+1}^n = v_{M+1}^n = \beta^n \leq \Phi : \end{aligned}$$

Հետևաբար,

$$\theta_m^n \leq \max (||\varphi||', \Phi), \quad m = 0, 1, \dots, M+1, n = 0, 1, \dots, N :$$

Վերջապես, հաշվի առնելով (8.5.19) գնահատականը, կստանանք

$$v_m^n = \theta_m^n + ||f|| w_m^n \leq \max (||\varphi||', \Phi) + \frac{1}{8a} ||f||. \quad (8.5.21) \\ m = 0, 1, \dots, M+1, n = 0, 1, \dots, N :$$

Ճիշտ են նաև

$$-v_m^n \leq \max (||\varphi||', \Phi) + \frac{1}{8a} ||f||, \quad m = 0, 1, \dots, M+1, n = 0, 1, \dots, N \quad (8.5.22)$$

անհավասարությունները: Դրանք հետևում են այն ակնհայտ փաստից, որ եթե v ցանցային ֆունկցիան (8.5.15) տարրերական խնդրի լուծումն է, ապա $-v$ ֆունկցիան կլինի

$$\begin{cases} L_h(-v_m^n) = -f_m^n, & m = 1, 2, \dots, M, n = 1, 2, \dots, N, \\ -v_m^0 = -\varphi_m, & m = 0, 1, \dots, M+1, \\ -v_0^n = -\alpha^n, -v_{M+1}^n = -\beta^n, & n = 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

Տարրերական խնդրի լուծումը: Այսպիսով, (8.5.21) և (8.5.22)-ից ստանում ենք

$$|v_m^n| \leq \frac{1}{8a} ||f|| + \max (||\varphi||', \Phi), \quad m = 0, 1, \dots, M+1, n = 0, 1, \dots, N$$

անհավասարությունները, որոնցից և բխում է (8.5.18) գնահատականը: \square

Մենք ապացուցել ենք (8.5.16) տարբերական սխեմայի կայունությունը առանց ցանցի քայլերի հարաբերակցության վրա որևէ մի սահմանափակման : Այդ պատճառով անբացահայտ տարբերական սխեման անվանում են անպայմանորեն կամ **բացարձակ կայուն**:

Նեյմանի կայունության անհրաժեշտ սպեկտրալ պայմանը՝ (8.5.14), (8.5.15) խնդրի կիրարկմամբ, նույնպես հաստատում է անբացահայտ սխեմայի բացարձակ կայունությունը: Իրոք, այստեղ անցման օպերատորի սեփական արժեքներն են՝

$$\lambda(\alpha) = \frac{1}{1 + 2r(1 - \cos \alpha)}, \quad \alpha \in \mathbf{R} :$$

Ակնհայտ է, որ $|\lambda(\alpha)| \leq 1$ ցանկացած դրական r -ի դեպքում:

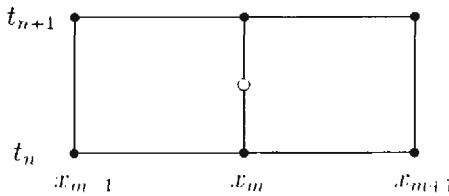
Քերենք մի քանի էական դիտողություն բացահայտ և անբացահայտ սխեմաների վերաբերյալ: Համաձայն (8.5.8) և (8.5.16)-ի, երկուսն էլ ունեն $O(\tau + h^2)$ մոտարկման կարգ: Բացահայտ սխեման իրականացվում է ավելի ենշտ, այն դեպքում երբ անբացահայտ սխեմայի հաշվարկները պահանջում են յուրաքանչյուր ժամանակային շերտում գծային հանրահաշվական հավասարումների լուծում: Սակայն պետք է նկատի ունենալ, որ երեքանյունազային մատրիցով համակարգերը լուծվում են ըստ կարգի օպտիմալ մեթոդով (տես 3.9 պարագրաֆի): Ուստի երկու դեպքում էլ առանձին շերտում մոտավոր լուծման որոշումը պահանջում է $O(h^{-1})$ թվարանական գործողություն: Բացահայտ սխեմայում շերտերի քանակը, ընդհանրապես, $\tau \leq h^2/a$ սահմանափակության պատճառով, ավելի շատ է, քան անբացահայտ սխեմայում: Պետք չէ մոռանալ նաև մոտարկման ճշտության մասին, որը բացահայտ սխեմայում, ժամանակային քայլի վրա սահմանափակության առկայությամբ, $O(h^2)$ մեծություն է, և որպեսզի ունենանք նույն ճշտությունը անբացահայտ սխեմայի դեպքում, պետք է նույնպես վերցնել $\tau = O(h^2)$:

8.5.3 Կուանկ-Նիկոլսոնի սխեմա

Դիտարկենք ևս մեկ տարբերական սխեմա ջերմահաղորդականության հավասարման համար: Գրենք (8.5.1)-(8.5.3) խնդրի համար

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - \frac{a}{2} \left[(v_m^{n+1})_{x\bar{x}} + (v_m^n)_{x\bar{x}} \right] = f_m^{n+1/2}, \\ m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, 1, \dots, M+1, \\ v_0^n = \alpha^n, \quad v_{M+1}^n = \beta^n, \quad n = 1, 2, \dots, N \end{array} \right. \quad (8.5.23)$$

ցանցային հավասարումների համակարգը, որտեղ $f_m^{n+1/2} \equiv f(x_m, t_n + \tau/2)$: Այս սխեման, որը կրում է **Կուանկ-Նիկոլսոնի** անունը, կառուցված է ըստ նկ. 8.5.2-ում պատկերված վեցկետային շաբլոնի:



Նկ. 8.5.2 Կուանկ-Նիկոլսոնի սխեմայի շաբլոնը

Կուանկ-Նիկոլսոնի սխեման պատկանում է անբացահայտ սխեմաների դասին, քանի որ յուրաքանչյուր $(n+1)$ -րդ շերտում, որտեղ $0 \leq n \leq N-1$, լուծվում է

$$\begin{cases} -\frac{r}{2}v_{m-1}^{n+1} + (1+r)v_m^{n+1} - \frac{r}{2}v_{m+1}^{n+1} = g_m^{n+1}, \\ m = 1, 2, \dots, M, \\ v_0^{n+1} = \alpha^{n+1}, \quad v_{M+1}^{n+1} = \beta^{n+1} \end{cases}$$

գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը, որտեղ

$$g_m^{n+1} \equiv \frac{r}{2}v_{m-1}^n + (1-r)v_m^n + \frac{r}{2}v_{m+1}^n + \tau f_m^{n+1/2} :$$

Ի տարրերություն բացահայտ և անբացահայտ սխեմաների, Կուանկ-Նիկոլսոնի սխեման ունի մոտարկման երկրորդ կարգ ըստ τ բայլի: Ենթադրելով ճշգրիտ լուծման բավականաչափ ուղղվություն, դժվար չէ ստանալ, որ

$$\begin{aligned} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{a}{2} \left[(u_m^{n+1})_{xx} + (u_m^n)_{xx} \right] &= f_m^{n+1/2} + \varepsilon_m^{n+1/2}, \\ m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \\ u_0^n &= \varphi_m, \quad m = 0, 1, \dots, M+1, \\ u_0^n &= \alpha^n, \quad u_{M+1}^n = \beta^n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

որտեղ

$$|\varepsilon_m^{n+1/2}| \leq C(\tau^2 + h^2), \quad C = const > 0 \quad (8.5.24)$$

բոլոր $m = 1, 2, \dots, M$ և $n = 0, 1, \dots, N-1$ արժեքների համար:

Ապացուցված է, որ Կուանկ-Նիկոլսոնի սխեման կայուն է (8.5.4) նորմում, եթե $\tau = O(h^2)$ (տես, օրինակ, [36]): Միաժամանակ, հաջորդ պարագրաֆում մենք ցույց կտանք, որ այդ սխեման բացարձակ կայուն է ցանցային էվկլիդյան նորմում: Դա նշանակում է, որ ունենալով (8.5.24) գնահատականը, և վերցնելով $\tau = O(h)$, մենք ապահովում ենք $O(h^2)$ մոտարկման սխալանք:

Սխեման իրականացվում է ըստ հետևյալ ալգորիթմի.

Pseudocode CRANK – NICOLSON

```

input  $a, T, M, N$ 
 $h = 1/(M + 1)$ 
 $\tau = T/N$ 
 $r = a\tau/h^2$ 
for  $m = 0, 1, \dots, M + 1$  do
     $v_m^0 = \varphi_m$ 
end
for  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  do
     $v_0^{n+1} = \alpha^{n+1}$ 
     $v_{M+1}^{n+1} = \beta^{n+1}$ 
    for  $m = 1, 2, \dots, M$  do
         $g_m = (1 - r)v_m^n + 0.5r(v_{m-1}^n + v_{m+1}^n) + \tau f_m^{n+1/2}$ 
    end
    solve system
     $-0.5rv_{m-1}^{n+1} + (1 + r)v_m^{n+1} - 0.5rv_{m+1}^{n+1} = g_m,$ 
     $m = 1, 2, \dots, M$ 
    end solve
end
output  $v$ 

```

Վերջում նշենք, որ զերմահաղորդականության հավասարման համար դիտարկված բոլոր սխեմաները մասնավոր դեպքերն են այսպիս կոչված:

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - a \left[\sigma (v_m^{n+1})_{x\bar{x}} + (1 - \sigma) (v_m^n)_{x\bar{x}} \right] = f_m^{n+\sigma}$$

Կշռներով սխեմայի, որտեղ $f_m^{n+\sigma} \equiv f(x_m, t_n + \sigma\tau)$: Եթոք, $\sigma = 0$ դեպքում մենք ստուգում ենք բացահայտ սխեմա, $\sigma = 1$ դեպքում անբացահայտ, իսկ $\sigma = 0.5$ դեպքում Կունկ-Նիկոլսոնի սխեմա:

8.6 Ֆուրիեի մեթոդ

Որոշ դեպքերում ցանցային խնդրի լուծումը հաջողվում է վերլուծել ըստ համապատասխան տարրերական օպերատորի սեփական ֆունկցիաների: Լուծման այդպիսի ներկայացումները հաճախ օգտագործվում են մոդելային խնդիրների ուսումնասիրման ժամանակ, քանի որ այդ խնդիրները հնարավորություն են տալիս հայտնագործել դիտարկվող հավասարումների դասի հիմնական հատկությունները: Գոյություն ունեն վերլուծություններ ըստ տարրեր ցանցային բազմային ֆունկցիաների՝ կախված ցանցային խնդրի տիպից (տե՛ս, օրինակ, [39]): Սույն պարագրաֆում մենք կդիտարկենք այդպիսի վերլուծություններից մեկը:

8.6.1 Ֆուրիեի դիսկրետ շարքեր ըստ սինուսների

Դիցուք $0 \leq x \leq 1$ հատվածում տրված է $\omega_h = \{x_m = mh : m = 0, 1, \dots, M+1\}$ ցանցը $h = 1/(M+1)$ քայլով: Նշանակենք $\overset{\circ}{G}_h$ -ով ω_h ցանցի վրա որոշված այն $v = \{v_m\}_{m=0}^{M+1}$ ցանցային ֆունկցիաների բազմությունը, որոնք հավասար են գրոյի եզրային հանգույցներում, այսինքն՝ $v_0 = v_{M+1} = 0$: Ակնհայտ է, որ այդ ֆունկցիաների համախմբությունը M -չափանի գծային տարածություն է: Ներմուծենք $\overset{\circ}{G}_h$ տարածության մեջ սկալյար արտադրյալ և նորմ:

$$(v, w) \equiv h \sum_{m=1}^M v_m w_m, \quad \|v\| \equiv \sqrt{(v, v)} : \quad (8.6.1)$$

Դիտարկենք

$$\psi^{(p)} = \left\{ \psi_m^{(p)} = \sqrt{2} \sin \frac{p\pi m}{M+1} \right\}_{m=0}^{M+1}, \quad p = 1, 2, \dots, M \quad (8.6.2)$$

ցանցային ֆունկցիաները: Ցույց տանք, որ այդ ֆունկցիաները կազմում են օրբունորմավորված համակարգ $\overset{\circ}{G}_h$ -ում: Նախ ապացուցենք, որ

$$\sum_{m=0}^M \cos \frac{s\pi m}{M+1} = \begin{cases} 0, & \text{եթե } s-\text{ը զույգ է} \\ 1, & \text{եթե } s-\text{ը կենտ է} \end{cases} \quad (8.6.3)$$

բոլոր $s = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(2M+1)$ արժեքների համար: Իրոք,

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^M \cos \frac{s\pi m}{M+1} &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^M \left[e^{i \frac{s\pi m}{M+1}} + e^{-i \frac{s\pi m}{M+1}} \right] = \frac{1}{2} \left[\sum_{m=0}^M e^{i \frac{s\pi m}{M+1}} + \sum_{m=0}^M e^{-i \frac{s\pi m}{M+1}} \right] = \\ &\frac{1}{2} \left[\frac{e^{i \frac{s\pi(M+1)}{M+1}} - 1}{e^{i \frac{s\pi}{M+1}} - 1} + \frac{e^{-i \frac{s\pi(M+1)}{M+1}} - 1}{e^{-i \frac{s\pi}{M+1}} - 1} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{(-1)^s - 1}{e^{i \frac{s\pi}{M+1}} - 1} + \frac{(-1)^s - 1}{e^{-i \frac{s\pi}{M+1}} - 1} \right], \end{aligned}$$

որտեղից էլ հեշտությամբ հետևում է (8.6.3) հատկությունը:

Եթե $p \neq q$, ապա

$$\begin{aligned} (\psi^{(p)}, \psi^{(q)}) &= 2h \sum_{m=1}^M \sin \frac{p\pi m}{M+1} \sin \frac{q\pi m}{M+1} = 2h \sum_{m=0}^M \sin \frac{p\pi m}{M+1} \sin \frac{q\pi m}{M+1} = \\ &h \left[\sum_{m=0}^M \cos \frac{(p-q)\pi m}{M+1} - \sum_{m=0}^M \cos \frac{(p+q)\pi m}{M+1} \right] : \end{aligned}$$

Իսկ քանի որ $p-q$ և $p+q$ թվերը զույգ կամ կենտ են միաժամանակ, ապա, համաձայն (8.6.3)-ի՝ $(\psi^{(p)}, \psi^{(q)}) = 0$: Իսկ եթե $p = q$, ապա

$$\begin{aligned} (\psi^{(p)}, \psi^{(p)}) &= 2h \sum_{m=1}^M \sin^2 \frac{p\pi m}{M+1} = 2h \sum_{m=0}^M \sin^2 \frac{p\pi m}{M+1} = h \sum_{m=0}^M \left[1 - \cos \frac{2p\pi m}{M+1} \right] = \\ &h(M+1) - h \sum_{m=0}^M \cos \frac{2p\pi m}{M+1} = h(M+1) = 1 : \end{aligned}$$

Այսպիսով, (8.6.2) ֆունկցիաները կազմում են օրթոնորմավորված բազիս ցանցային ֆունկցիաների \hat{G}_h տարածությունում:

Ցանկացած $v \in \hat{G}_h$ ցանցային ֆունկցիա ներկայացվում է

$$v = \sum_{p=1}^M c_p \psi_m^{(p)} \quad (8.6.4)$$

գումարի տեսքով, այսինքն՝

$$v_m = \sum_{p=1}^M c_p \psi_m^{(p)} = \sqrt{2} \sum_{p=1}^M c_p \sin \frac{p\pi m}{M+1}, \quad m = 1, 2, \dots, M : \quad (8.6.5)$$

Կասենք, որ (8.6.4) գումարը v ցանցային ֆունկցիայի վերլուծությունն է Ֆուրիեի դիսկրետ շարքի: Վերլուծության c_p գործակիցները կոչվում են v ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցները: Բազիսային $\psi^{(p)}$ ֆունկցիաների օրթոնորմալության պատճառով ստանում ենք հետևյալ արտահայտությունները Ֆուրիեի գործակիցների համար.

$$c_p = (v, \psi^{(p)}) = h \sum_{m=1}^M v_m \psi_m^{(p)} = \sqrt{2} h \sum_{m=1}^M v_m \sin \frac{p\pi m}{M+1}, \quad p = 1, 2, \dots, M : \quad (8.6.6)$$

Այնուհետև, ունենք

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{p=1}^M c_p^2}, \quad (8.6.7)$$

ինչը սովորական Ֆուրիեի շարքերի տեսության հայտնի Պարսկայի հավասարության նմանակն է:

Ցանցային $v \in \hat{G}_h$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցների որոշումը ըստ (8.6.6) բանաձևների կոչվում է Ֆուրիեի ուղիղ դիսկրետ ձևափոխություն: Իսկ ցանցային ֆունկցիայի վերականգնումը ըստ (8.6.5) բանաձևների կոչվում է Ֆուրիեի հակադարձ դիսկրետ ձևափոխություն: Երկու դեպքում ել խնդիրը հանգում է

$$S_k = \sum_{l=1}^M a_l \sin \frac{k\pi l}{M+1}, \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (8.6.8)$$

տեսքի գումարների հաշվանը: Հեշտ է համոզվել, որ բոլոր S_k մեծությունների հաշվան համար բավարար է կատարել $O(M^2)$ թվարանական գործողություն (ենթադրելով, որ $\sin(k\pi l / (M+1))$ արժեքները հայտնի են): Սակայն այս թիվը կարելի է էապես փոքրացնել, եթե օգտագործենք (8.6.2) ցանցային օրթոգոնալ ֆունկցիաների հատուկ տեսքը: Գոյություն ունի ալգորիթմ, որը թույլ է տալիս հաշվել բոլոր (8.6.8) գումարները ծախսելով $O(M \log_2 M)$ թվարանական գործողություն: Այդ ալգորիթմը կոչվում է Ֆուրիեի արագ ձևափոխություն: Նրա մանրամասն նկարագրությունը կարելի է գտնել, օրինակ, [2],[39] գրքերում: Նշենք միայն, որ ալգորիթմի հիմնական գաղափարն այն է, որ (8.6.8) գումարներում նախըան բազմապատկում կատարելը խմբավորվում են ընդհանուր բազմապատկիշ ունեցող անդամները:

8.6.2 Սեփական արժեքների տարբերական խնդիրը

Սահմանենք $v \in \check{G}_h$ ցանցային ֆունկցիայի վրա գործող Λ տարբերական օպերատորը հետևյալ կերպ.

$$\Lambda v_m = (v_m)_{xx}, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad \Lambda v_0 = \Lambda v_{M+1} = 0 :$$

Ցույց տանք, որ $\psi^{(p)}$ ցանցային ֆունկցիաները Λ օպերատորի սեփական ֆունկցիաներն են: Իրոք, $m = 1, 2, \dots, M$ արժեքների համար ունենք

$$\begin{aligned} \Lambda \psi_m^{(p)} &= \frac{\sqrt{2}}{h^2} \left[\sin \frac{p\pi(m-1)}{M+1} - 2 \sin \frac{p\pi m}{M+1} + \sin \frac{p\pi(m+1)}{M+1} \right] = \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{h^2} \sin \frac{p\pi m}{M+1} \left(\cos \frac{p\pi}{M+1} - 1 \right) = -\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{p\pi}{2(M+1)} v_m^{(p)} : \end{aligned}$$

Այսպիսով,

$$\Lambda \psi^{(p)} = \lambda_p \psi^{(p)}, \quad p = 1, 2, \dots, M. \quad (8.6.9)$$

Որտեղ

$$\lambda_p = -\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{p\pi}{2(M+1)} \quad (8.6.10)$$

թվերը Λ օպերատորի համապատասխան սեփական արժեքներն են: Այդ սեփական արժեքների համար ճիշտ են հետևյալ առնչությունները.

$$8 < \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi}{2(M+1)} = |\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_M| = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi}{2(M+1)} < \frac{4}{h^2} : \quad (8.6.11)$$

Այսուղի | λ_M | -ի վերին գնահատականը ակնհայտ է: Ինչ վերաբերում է | λ_1 | -ի ստորին գնահատականին, ապա այն կարելի է ստանալ հետևյալ կերպ: Ունենք

$$|\lambda_1| = \pi^2 \left(\sin \frac{\pi}{2(M+1)} \middle/ \frac{\pi}{2(M+1)} \right)^2 :$$

Քանի որ $M \geq 1$, ապա $\pi/(2(M+1))$ թիվը գտնվում է $(0, \pi/4]$ միջակայքում: Հեշտ է ստուգել, որ $\sin \alpha / \alpha$ ֆունկցիայի մինիմումը, եթե $\alpha \in (0, \pi/4]$, հասանելի է $\alpha = \pi/4$ կետում: Ուստի $|\lambda_1| > 8$:

8.6.3 Ֆուրիեի դիսկրետ շարբերի կիրառումը

Պարզվում է, որ օգտագործելով Ֆուրիեի վերլուծությունը, որոշ դեպքերում կարելի է ստանալ տարբերական խնդիրի լուծումը, ինչպես նաև ապացուցել սխեմայի կայունությունը: Բերենք երկու օրինակ:

- Ուսպես առաջին օրինակ դիտարկենք

$$\begin{cases} -\Lambda v_m + qv_m = f_m, & m = 1, 2, \dots, M, \\ v_0 = v_{M+1} = 0 \end{cases} \quad (8.6.12)$$

տարբերական սխեման, որտեղ $q = const > 0$: Այս սխեման մոտարկում է 7.12 պարագուաֆում դիտարկված համասն եզրային պայմաններով (7.12.1) սովորական դիֆերենցիալ հավասարությունը: Փնտրենք (8.6.12) խնդրի լուծումը հետևյալ տեսքով.

$$v = \sum_{p=1}^M c_p v^{(p)} . \quad (8.6.13)$$

Դիցուք F_p թվերը՝ ցանցային $f = \{f_m\}_{m=0}^{M+1}$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցներն են: Ունենք

$$f = \sum_{p=1}^M F_p v^{(p)} : \quad (8.6.14)$$

Տեղադրելով (8.6.13) և (8.6.14) վերլուծությունները (8.6.12) հավասարման մեջ, կստանանք

$$\sum_{p=1}^M c_p [-\Lambda \psi^{(p)} + q v^{(p)}] = \sum_{p=1}^M F_p v^{(p)} :$$

Այսուհետև, համաձայն (8.6.9)-ի՝

$$\sum_{p=1}^M c_p (q - \lambda_p) v^{(p)} = \sum_{p=1}^M F_p v^{(p)} :$$

Այստեղից, քանի որ $\psi^{(p)}$ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են, ստանում ենք

$$c_p (q - \lambda_p) = F_p, \quad p = 1, 2, \dots, M$$

կամ

$$c_p = \frac{F_p}{q - \lambda_p}, \quad p = 1, 2, \dots, M : \quad (8.6.15)$$

Այսպիսով, մենք գտնում ենք Ֆուրիեի գործակիցները, և դրանով խնդիրը լուծումը:

Ունենալով (8.6.7) հավասարությունը, հեշտ է ապացուցել (8.6.12) տարբերական սխեմայի կայունությունը: Իրոք, օգտվելով (8.6.15) արտահայտություններից և հաշվի առնելով (8.6.11) անհավասարությունները, կստանանք

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{p=1}^M c_p^2} = \sqrt{\sum_{p=1}^M \frac{F_p^2}{(q - \lambda_p)^2}} \leq \frac{1}{q - \lambda_1} \sqrt{\sum_{p=1}^M F_p^2} = \frac{1}{q + 8} \|f\| :$$

Ստացված

$$\|v\| \leq \frac{1}{q + 8} \|f\|$$

գնահատականը (8.6.12) տարբերական սխեմայի կայունությունն և ըստ աչ մասի (8.6.1) էվկլիույան ցանցային նորմում:

- Որպես երկրորդ օրինակ վերցնենք (8.5.23) Կուանկ-Նիկոլսոնի սխեման: Ապացուցենք այդ սխեմայի կայունությունը ըստ աջ մասի և սկզբնական տվյալների: Դրա համար դիտարկենք

$$\begin{cases} \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - \frac{a}{2} \left[(v_m^{n+1})_{x\bar{x}} + (v_m^n)_{x\bar{x}} \right] = f_m^{n+1/2}, \\ m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, 1, \dots, M+1, \\ v_0^n = v_{M+1}^n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (8.6.16)$$

տարրերական խնդիրը: Ենթադրվում է եզրային և սկզբնական պայմանների համաձայն ցվածվածությունը՝ $\varphi_0 = \varphi_{M+1} = 0$:

Ունենալով գաղափարական ցանցային ֆունկցիայի

$$v^0 = \varphi = \sum_{p=1}^M c_p^0 \psi^{(p)}$$

Ֆուրիեի վերլուծությունը, փոնտընք (8.6.16) խնդրի լուծումը n -րդ շերտում, որտեղ $1 \leq n \leq N$, հետևյալ տեսքով.

$$v^n = \sum_{p=1}^M c_p^n \psi^{(p)} : \quad (8.6.17)$$

Դիցուք $F_p^{n+1/2}$ թվերը՝ ցանցային $f^{n+1/2} = \{f_m^{n+1/2}\}_{m=0}^{M+1}$ ֆունկցիայի, որտեղ $f_0^{n+1/2} = f_{M+1}^{n+1/2} = 0$, Ֆուրիեի գործակիցներն են: Ունենք

$$f^{n+1/2} = \sum_{p=1}^M F_p^{n+1/2} \psi^{(p)} : \quad (8.6.18)$$

Ֆիքսված n արժեքի համար, որտեղ $0 \leq n \leq N-1$, գրենք (8.6.16) համակարգի հավասարումները

$$\frac{1}{\tau} (v^{n+1} - v^n) - \frac{a}{2} [\Lambda v^{n+1} + \Lambda v^n] = f^{n+1/2}$$

օպերատորային տեսքով: Տեղադրելով (8.6.17) և (8.6.18) վերլուծությունները վերջին հավասարման մեջ, կստանանք

$$\sum_{p=1}^M \left[\frac{c_p^{n+1} - c_p^n}{\tau} - \frac{a\lambda_p}{2} (c_p^{n+1} + c_p^n) \right] \psi^{(p)} = \sum_{p=1}^M F_p^{n+1/2} \psi^{(p)} :$$

Այստեղից, հավասարեցնելով սեփական ցանցային ֆունկցիաների գործակիցները, գտնում ենք

$$c_p^{n+1} = \frac{1 + \tau a \lambda_p / 2}{1 - \tau a \lambda_p / 2} c_p^n + \frac{\tau}{1 - \tau a \lambda_p / 2} F_p^{n+1/2}, \quad p = 1, 2, \dots, M : \quad (8.6.19)$$

Հաջորդաբար հաշվարկելով Ֆուրիինի գործակիցները ըստ (8.6.19) բանաձևերի՝ սկսած $n = 0$ -ից, կստանանք (8.6.16) տարբերական խնդրի լուծումը:

Այնուհետև, քանի որ

$$1 - \tau a \lambda_p / 2 > 1 \quad \text{և} \quad \left| \frac{1 + \tau a \lambda_p / 2}{1 - \tau a \lambda_p / 2} \right| < 1.$$

ապա

$$|c_p^{n+1}| \leq |c_p^n| + \tau |F_p^{n+1/2}|, \quad p = 1, 2, \dots, M : \quad (8.6.20)$$

Այդ դեպքում, օգտվելով հայտնի Մինկովսկու անհավասարությունից (տե՛ս, օրինակ, [9],[20]) և (8.6.7) հավասարությունից, կստանանք

$$\|v^{n+1}\| = \sqrt{\sum_{p=1}^M |c_p^{n+1}|^2} \leq \sqrt{\sum_{p=1}^M (|c_p^n| + \tau |F_p^{n+1/2}|)^2} \leq \sqrt{\sum_{p=1}^M |c_p^n|^2} + \tau \sqrt{\sum_{p=1}^M |F_p^{n+1/2}|^2} = \\ \|v^n\| + \tau \|f^{n+1/2}\| :$$

Այսպիսով, ունենք

$$\|v^{n+1}\| \leq \|v^n\| + \tau \|f^{n+1/2}\|, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

անհավասարությունները: Այստեղից արդեն հեշտությամբ հետևում է

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|v^n\| \leq T \max_{0 \leq n \leq N-1} \|f^{n+1/2}\| + \|\varphi\|$$

գնահատականը, որը հաստատում է Կոանկ-Նիկոլսոնի սխեմայի կայունությունը ըստ աջ մասի և սկզբնական տվյալների:

Վերջում նշենք, որ Ֆուրիինի մեթոդի կիրառման հնարավորությունները լուծման անմիջական հաշվման համար սահմանափակ են: Բանն այն է, որ մեթոդը դառնում է ոչ պիտանի, օրինակ, փոփոխական գործակիցներով հավասարումների համար, կամ էլ անկանոն երկրաչափական ձևի տիրույթների համար: Միաժամանակ ասենք, որ նշված դեպքերում հաջողությամբ կիրառվում են տարբերական մեթոդները:

8.7 Լարի տատանման հավասարումը

Դիտարկենք ամրացված ծայրերով լարի տատանման խնդիրը.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (8.7.1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (8.7.2)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t \leq T : \quad (8.7.3)$$

Հավասարման մեջ $a = \text{const} > 0$: Ենթադրվում է, որ սկզբնական և եզրային պայմանները համաձայնեցված են, այսինքն՝ $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ և $\psi(0) = \psi(1) = 0$: Մենք կենթադրենք նաև, որ (8.7.1), (8.7.2)-ում տրված ֆունկցիաները և (8.7.1)-(8.7.3) խնդրի լուծումը շարադրման ընթացքում ունեն պահանջվող ողորկություն:

8.7.1 Մխեմայի կառուցումը

Զերմահաղորդականության խնդիրը լուծելիս օգտվենք 8.5 պարագրաֆում կառուցված գանցից (նկ. 8.5.1): Նախը առ տարբերական սխեմա գրելու, դիտարկենք (8.7.2) սկզբնական պայմաններից երկրորդի մոտարկման հարցը: Կիրառելով մժելորի վերլուծությունը, ունենք

$$u_m^1 = u(x_m, \tau) = u_m^0 + \tau \frac{\partial u(x_m, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_m, t)}{\partial t^2} \Big|_{t=0} + \frac{\tau^3}{6} \frac{\partial^3 u(x_m, t)}{\partial t^3} \Big|_{t=0},$$

որտեղ $0 < \theta < \tau$: Այսուղից՝

$$\frac{u_m^1 - u_m^0}{\tau} = \frac{\partial u(x_m, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x_m, t)}{\partial t^2} \Big|_{t=0} + O(\tau^2) :$$

Այնուհետև, հաշվի առնելով (8.7.1) հավասարումը և (8.7.2) սկզբնական պայմանները, կստանանք

$$\frac{u_m^1 - u_m^0}{\tau} = \nu_m + O(\tau^2), \quad (8.7.4)$$

որտեղ

$$\nu_m \equiv \psi_m + \frac{\tau}{2} \left(a \varphi''(x_m) + f_m^0 \right) :$$

Օգտագործելով նկ. 8.2.6-ում տրված «խաչ» շաբլոնը, գրենք

$$\begin{cases} (v_m^n)_{tt} - a(v_m^n)_{xx} = f_m^n, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad \frac{v_m^1 - v_m^0}{\tau} = \nu_m, \quad m = 1, 2, \dots, M, \\ v_0^n = v_{M+1}^n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N \end{cases} \quad (8.7.5)$$

տարբերական սխեման: Պարզ է, որ

$$(u_m^n)_{tt} - a(u_m^n)_{xx} = f_m^n + O(\tau^2 + h^2) \quad (8.7.6)$$

(տես 4.6.4 լեմման): Այսպիսով, (8.7.4)-ից և (8.7.6)-ից հետևում է, որ (8.7.5) սխեման ունի մոտարկման երկրորդ կարգ՝ ինչպես ըստ h -ի, այնպես էլ ըստ τ -ի:

Սխեմայի թվային իրականացումը կատարվում է հետևյալ հերթականությամբ: Առաջին երկու շերտերում գտնում ենք

$$v_m^0 = \varphi_m, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad v_0^0 = v_{M+1}^0 = 0,$$

$$v_m^1 = v_m^0 + \tau \nu_m, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad v_0^1 = v_{M+1}^1 = 0 :$$

Այնուհետև, $n = 1, 2, \dots, N-1$ արժեքների համար լուծումը հաջորդաբար հաշվվում է ըստ

$$v_m^{n+1} = r^2 v_{m-1}^n + 2(1-r^2)v_m^n + r^2 v_{m+1}^n - v_m^{n-1} + \tau^2 f_m^n,$$

$$m = 1, 2, \dots, M,$$

$$v_0^{n+1} = v_{M+1}^{n+1} = 0$$

բացահայտ բանաձևերի, որտեղ

$$r \equiv \sqrt{a} \frac{\tau}{h} : \quad (8.7.7)$$

8.7.2 Կայունության հետազոտումը

Մենք կսահմանափակվենք (8.7.5) տարրերական սխեմայի բատ սկզբնական տվյալների կայունության ուսումնախորությամբ: Այդ նպատակով լիտարկենք

$$\begin{cases} (v_m^n)_{t\bar{t}} - a(v_m^n)_{x\bar{x}} = 0, & m = 1, 2, \dots, M, n = 1, 2, \dots, N-1, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad \frac{v_m^1 - v_m^0}{\tau} = \nu_m, & m = 1, 2, \dots, M, \\ v_0^n = v_{M+1}^n = 0, & n = 0, 1, \dots, N \end{cases} \quad (8.7.8)$$

տարրերական խնդիրը: Փռտրենք այս խնդրի լուծումը փոփոխականների անջատման մեթոդով: Սկզբից գտնենք

$$v_m^n = \psi_m z^n \quad (8.7.9)$$

տեսքի մասնավոր լուծումները, որտեղ $\psi_m \equiv \psi(x_m)$, $z^n \equiv z(t_n)$: Տեղադրելով (8.7.9) որոնելի լուծումը (8.7.8) համակարգի հիմնական հավասարման մեջ, որը մոտարկում է (8.7.1) համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումը, կստանանք

$$\psi_m(z^n)_{t\bar{t}} - a(\psi_m)_{x\bar{x}} z^n = 0,$$

$$m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N-1$$

կամ

$$\frac{(\psi_m)_{x\bar{x}}}{\psi_m} = \frac{1}{a} \frac{(z^n)_{t\bar{t}}}{z^n} \equiv \lambda. \quad (8.7.10)$$

Դրանով իսկ խնդիրը բերվում է

$$(\psi_m)_{x\bar{x}} = \lambda \psi_m, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

սեփական արժեքների խնդրի, որի լուծումներն են $\psi^{(p)}$ ցանցային ֆունկցիաները (8.6.2)-ից և համապատասխան λ_p արժեքները (8.6.10)-ից:

Յուրաքանչյուր $p = 1, 2, \dots, M$ արժեքի համար՝ համաձայն (8.7.10)-ի, ունենք

$$(z^n(p))_{t\bar{t}} - a \lambda_p z^n(p) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1$$

Երկրորդ կարգի համասեռ տարրերական հավասարումը: Հաշվի առնելով (8.7.7) նշանակումները, գրենք այն

$$z^{n-1}(p) - (2 + r^2 h^2 \lambda_p) z^n(p) + z^{n+1}(p) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1 \quad (8.7.11)$$

տեսքով: Այս հավասարման մասնավոր լուծումը փնտրվում է:

$$z^n(p) = \mu^n$$

տեսքով, որտեղ $\mu \neq 0$ (այստեղ μ'' -ը μ թվի n -րդ աստիճանն է): (8.7.11) հավասարման մեջ տեղադրելուց հետո կստանանք

$$\mu^2 - (2 + r^2 h^2 \lambda_p) \mu + 1 = 0$$

բնութագրիչ հավասարումը: Հաշվենք դիսկրիմինանտը.

$$\mathcal{D}_p = r^2 h^2 \lambda_p (4 + r^2 h^2 \lambda_p) :$$

Քանի որ $\lambda_p < 0$ (տե՛ս (8.6.10)), ապա \mathcal{D}_p մեծությունը կլինի բացասական, եթե

$$4 + r^2 h^2 \lambda_p > 0$$

կամ

$$4 - r^2 h^2 |\lambda_p| > 0 : \quad (8.7.12)$$

Դրա համար, ինչպես հետևում է (8.6.11)-ից, բավարար է պահանջել, որ $r \leq 1$, այսինքն՝

$$\tau \leq \frac{1}{\sqrt{a}} h : \quad (8.7.13)$$

Այդ դեպքում բնութագրիչ հավասարման արմատներն են՝

$$\mu = \frac{2 + r^2 h^2 \lambda_p \pm i \sqrt{-\mathcal{D}_p}}{2} :$$

Հայտնի է, որ (8.7.11) հավասարման ընդհանուր լուծումը գրվում է

$$z^n(p) = A_p \cos n\alpha_p + B_p \sin n\alpha_p, \quad n = 0, 1, \dots, N$$

տեսքով, որտեղ A_p -ն և B_p -ն կամայական հաստատուներ են, իսկ α_p -ն

$$\sin \alpha_p = \frac{\sqrt{-\mathcal{D}_p}}{2}, \quad \cos \alpha_p = \frac{2 + r^2 h^2 \lambda_p}{2} \quad (8.7.14)$$

հավասարություններով որոշվող անկյունն է (տե՛ս, օրինակ, [11],[36]): Այսպիսով, մենք ստացել ենք

$$v_m^n(p) = (A_p \cos n\alpha_p + B_p \sin n\alpha_p) \psi_m^{(p)}, \quad p = 1, 2, \dots, M$$

մասնավոր լուծումները, որոնք բավարարում են (8.7.8) համակարգի իխմնական հավասարմանը և համասեռ եզրային պայմաններին: Ակնհայտ է, որ

$$v_m^n = \sum_{p=1}^M (A_p \cos n\alpha_p + B_p \sin n\alpha_p) \psi_m^{(p)} \quad (8.7.15)$$

ցանցային ֆունկցիան նոյնպես այդպիսի լուծում է: Մնում է ընտրել A_p և B_p գործակիցները այնպես, որ բավարարվեն սկզբնական պայմանները:

Գրենք $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=0}^{M+1}$ և $\nu = \{\nu_m\}_{m=0}^{M+1}$ ցանցային ֆունկցիաների

$$\varphi = \sum_{p=1}^M a_p \psi^{(p)}, \quad \nu = \sum_{p=1}^M b_p \psi^{(p)} \quad (8.7.16)$$

վերլուծությունները (մենք ենդադրում ենք, որ $\nu_0 = \nu_{M+1} = 0$): Պահանջենք, որ $v^0 = \varphi$: Վերցնելով (8.7.15)-ում $n = 0$:

$$\sum_{p=1}^m A_p \psi^{(p)} = \sum_{p=1}^m a_p \psi^{(p)}$$

հավասարությունից գտնում ենք

$$A_p = a_p, \quad p = 1, 2, \dots, M : \quad (8.7.17)$$

Այնուհետև,

$$\frac{1}{\tau} (v^1 - v^0) = \sum_{p=1}^M \left(A_p \frac{\cos \alpha_p - 1}{\tau} + B_p \frac{\sin \alpha_p}{\tau} \right) \psi^{(p)} :$$

Հավասարեցնելով վերջին հավասարության և (8.7.16)-ից ν -ի վերլուծության աջ մասերը, կստանանք

$$A_p \frac{\cos \alpha_p - 1}{\tau} + B_p \frac{\sin \alpha_p}{\tau} = b_p, \quad p = 1, 2, \dots, M :$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (8.7.17)-ը, գտնում ենք

$$B_p = \frac{1 - \cos \alpha_p}{\sin \alpha_p} a_p + \frac{\tau}{\sin \alpha_p} b_p, \quad p = 1, 2, \dots, M : \quad (8.7.18)$$

Տեղադրելով A_p և B_p գործակիցների (8.7.17) և (8.7.18) արտահայտությունները (8.7.15)-ի մեջ, որոշ ձևափոխություններից հետո գտնում ենք (8.7.8) խնդրի լուծումը՝

$$v_m^n = \sum_{p=1}^M \left[\frac{\cos(n - 1/2)\alpha_p}{\cos(\alpha_p/2)} a_p + \frac{\tau \sin n\alpha_p}{\sin \alpha_p} b_p \right] \psi_m^{(p)} : \quad (8.7.19)$$

Ի վերջո, գնահատենք ստացված (8.7.19) լուծումը: Դրա համար փոքր-ինչ ուժեղացնենք (8.7.12) անհավասարությունը պահանջելով

$$4 - r^2 h^2 |\lambda_p| \geq \varepsilon \quad \forall p = 1, 2, \dots, M, \quad (8.7.20)$$

որտեղ ε -ը որոշ թիվ է (0.4) միջակայքից: Դրա համար, համաձայն (8.6.11)-ի, բավարար է վերցնել $r \leq \sqrt{4 - \varepsilon}/2$, այսինքն՝

$$\tau \leq \frac{\sqrt{4 - \varepsilon}}{2\sqrt{a}} h : \quad (8.7.21)$$

Բոլոր $n = 0, 1, \dots, N$ արժեքների համար, ելնելով (8.7.19) արտահայտությունից և Մինկովսկու անհավասարությունից (տես, օրինակ, [9],[20]), կստանանք

$$\begin{aligned} ||v^n|| &= \sqrt{\sum_{p=1}^M \left[\frac{\cos(n - 1/2)\alpha_p}{\cos(\alpha_p/2)} a_p + \frac{\tau \sin n\alpha_p}{\sin \alpha_p} b_p \right]^2} \leq \\ &\sqrt{\sum_{p=1}^M \frac{\cos^2(n - 1/2)\alpha_p}{\cos^2(\alpha_p/2)} a_p^2} + \sqrt{\sum_{p=1}^M \frac{\tau^2 \sin^2 n\alpha_p}{\sin^2 \alpha_p} b_p^2} \leq \\ &\sqrt{\sum_{p=1}^M \frac{1}{\cos^2(\alpha_p/2)} a_p^2} + \sqrt{\sum_{p=1}^M \frac{\tau^2}{\sin^2 \alpha_p} b_p^2} : \end{aligned} \quad (8.7.22)$$

Հաշվի առնելով (8.7.14) և (8.7.20)-ը, ունենք

$$\cos^2 \frac{\alpha_p}{2} = \frac{1 + \cos \alpha_p}{2} = \frac{4 + r^2 h^2 \lambda_p}{4} = \frac{4 - r^2 h^2 |\lambda_p|}{4} \geq \frac{\varepsilon}{4} :$$

Այնուհետև,

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 \alpha_p}{\tau^2} &= \frac{4 \sin^2(\alpha_p/2) \cos^2(\alpha_p/2)}{\tau^2} \geq \frac{\sin^2(\alpha_p/2)}{\tau^2} \varepsilon = \\ \frac{1 - \cos \alpha_p}{2\tau^2} \varepsilon &= \frac{r^2 h^2 |\lambda_p|}{4\tau^2} \varepsilon = \frac{a |\lambda_p|}{4} \varepsilon > 2a\varepsilon : \end{aligned}$$

Օգտագործելով այս գնահատականները, (8.7.22)-ից կստանանք

$$||v^n|| \leq \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} ||\varphi|| + \frac{1}{\sqrt{2a\varepsilon}} ||\nu||, \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

որտեղից էլ

$$\max_{0 \leq n \leq N} ||v^n|| \leq \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} ||\varphi|| + \frac{1}{\sqrt{2a\varepsilon}} ||\nu|| : \quad (8.7.23)$$

Դրանով իսկ մենք ապացուցել ենք (8.7.5) տարբերական սխեմայի կայունությունը ըստ սկզբնական տվյալների ցանցային էվկլիդյան նորմում:

8.8 Գիրիխլեի խնդիրը Պուասոնի հավասարման համար

Սինչև այժմ մենք ուսումնասիրում էինք տարբերական սխեմաներ մաքեմատիկական ֆիզիկայի այն հավասարումների համար, որոնք նկարագրում են ժամանակի ընթացքում փոփոխվող պրոցեսներ: Այդպիսի հավասարումներ ընդունված են անվանել *սուպացիոնար*: Եթե մասնական ածանցյալներով հավասարումը չի պարունակում ժամանակային փոփոխականը, այն կոչվում է *սուպացիոնար*: Որպես օրինակ դիտարկենք ‘Գիրիխլեի խնդիրը Պուասոնի հավասարման համար’:

Դիցուք $\Omega = \{0 < x, y < 1\}$ տիրույթում տրված է

$$-\Delta u = f, \quad (x, y) \in \Omega \quad (8.8.1)$$

հավասարումը

$$u = \varphi, \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (8.8.2)$$

Եզրային պայմանով: Մենք կենթադրենք, որ գոյություն ունի (8.8.1), (8.8.2) խնդրի միակ լուծումը: Ենթադրենք նաև, որ այդ լուծումը ունի շարադրման ընթացքում պահանջվող ողորկություն:

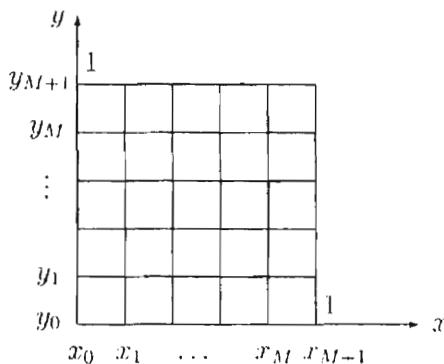
Կառուցենք Ω տիրույթում ω_h հավասարաչափ ցանց (x_i, y_j) հանգույցներով, որտեղ $x_i = ih$ ($i = 0, 1, \dots, M+1$), $y_j = jh$ ($j = 0, 1, \dots, M+1$) և $h = 1/(M+1)$, ինչպես ցույց է տրված նկ. 8.8.1 -ում: Այստեղ մենք ուսնենք ω_h ցանցի բնական տրոհում, այն է՝ $\omega_h = \omega_h^o \cup \omega_h'$, որտեղ ω_h^o և ω_h' -ը համապատասխանաբար ներքին և եզրային հանգույցների բազմություններն են (տես 8.2.1 օրինակը): Ցանցային $w \in G_h$ ֆունկցիայի արժեքը (x_i, y_j) հանգույցում նշանակենք $w(i, j)$ -ով:

Ցանցային ֆունկցիաների G_h տարածությունում սահմանենք

$$\|w\| \equiv \max_{\omega_h} |w(i, j)|$$

նորմը: Այնուհետև, նոյմերը G_h^o և G_h' տարածություններում համապատասխանաբար սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$\|w\|^o \equiv \max_{\omega_h^o} |w(i, j)|, \quad \|w\|' \equiv \max_{\omega_h'} |w(i, j)| :$$



Նկ. 8.8.1 Ցանց Պուասոնի հավասարման համար

Հստ նկ. 8.2.6 -ում պատկերված «խաչ» շաբլոնի կառուցենք

$$\begin{cases} -\Delta_h v(i, j) = f(i, j), & (x_i, y_j) \in \omega_h^o \\ v(i, j) = \varphi(i, j), & (x_i, y_j) \in \omega_h' \end{cases} \quad (8.8.3)$$

տարրերական սխեմա, որտեղ Δ_h Լազլասի տարրերական օպերատորը որոշվում է հետևյալ կերպ.

$$\Delta_h v(i, j) \equiv v_{x\bar{x}}(i, j) + v_{y\bar{y}}(i, j) : \quad (8.8.4)$$

Կարելի է ցույց տալ, որ (8.8.3) սխեման ունի մոտարկման երկրորդ կարգ: Իրոք, օգտվելով Թեյլորի վերլուծությունից (տես լեմմա 4.6.4), կստանանք

$$-\Delta_h u(i, j) = f(i, j) + \varepsilon(i, j),$$

որտեղ

$$\varepsilon(i, j) = -\frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(x_i + \theta_1 h, y_j)} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{(x_i, y_j + \theta_2 h)} \right), \quad -1 < \theta_1, \theta_2 < 1 :$$

Ենթադրելով այս արտահայտության աջ մասում մասնական ածանցյալների սահմանափակությունը, կստանանք

$$|\varepsilon(i, j)| \leq Ch^2, \quad C = \text{const} > 0$$

բոլոր $(x_i, y_j) \in \omega_h^\circ$ հանգույցների համար:

Այժմ անցնենք (8.8.3) տարրերական սխեմայի կայունության հետազոտմանը: Նախապես ծևակերպենք և ապացուցենք մեկ օժանդակ պնդում:

Լեմմա 8.8.1 (մաքսիմումի սկզբունք): Դիցուք $\theta \in G_h$ ցանցային ֆունկցիան այնպիսին t , որ

$$-\Delta_h \theta(i, j) \leq 0, \quad (x_i, y_j) \in \omega_h^\circ : \quad (8.8.5)$$

Այդ դեպքում այն ընդունում է իր մեծագույն արժեքը տիրույթի եզրի վրա, այսինքն՝

$$\max_{\omega_h} \theta(i, j) = \max_{\omega_h^\circ} \theta(i, j) : \quad (8.8.6)$$

Ապացույց: Դիցուք $\mu \equiv \max_{\omega_h} \theta(i, j)$: Ենթադրենք հակառակը՝ եզրային հանգույցներում մաքսիմումը հասանելի չէ: Այդ դեպքում ակնհայտորեն կգտնվի այնպիսի հանգույց $(x_k, y_l) \in \omega_h^\circ$, որ $\theta(k, l) = \mu$ և նրա չորս հարևան հանգույցներից գոնեն մեկում θ ֆունկցիայի արժեքը μ -ից փոքր է: Այդպիսի (x_k, y_l) հանգույցում ունենք

$$\begin{aligned} -\Delta_h \theta(k, l) &= -\frac{\theta(k-1, l) - 2\theta(k, l) + \theta(k+1, l)}{h^2} - \frac{\theta(k, l-1) - 2\theta(k, l) + \theta(k, l+1)}{h^2} = \\ &\frac{4\mu - \theta(k-1, l) - \theta(k+1, l) - \theta(k, l-1) - \theta(k, l+1)}{h^2} > 0. \end{aligned}$$

Ինչը հակասում է (8.8.5) պայմանին: Այսինքն մեր ենթադրությունը ճիշտ չէ ուստի և θ ֆունկցիան իր մեծագույն արժեքն ընդունում է գոնեն մեկ եզրային հանգույցում: \square

Թեորեմ 8.8.1 : *Տարբերական (8.8.3) խնդրի $v \in G_h$ լուծման համար ճիշտ է հետևյալ գնահատականը.*

$$\|v\| \leq \frac{1}{8} \|f\|^{\circ} + \|\varphi\|' : \quad (8.8.7)$$

Ապացույց: Դիտարկենք հետևյալ կերպ սահմանվող $w \in G_h$ ցանցային ֆունկցիան.

$$w(i, j) = \frac{x_i(1 - x_i)}{4} + \frac{y_j(1 - y_j)}{4}, \quad i, j = 0, 1, \dots, M + 1 :$$

Ակնհայտ է, որ $w(i, j) \geq 0$: Դժվար չէ ստանալ

$$\|w\| \leq \frac{1}{8} \quad (8.8.8)$$

Գնահատականը: Այնուհետև, պարզ հաշվարկով գտնում ենք, որ

$$\Delta_h w(i, j) = -1, \quad (x_i, y_j) \in \omega_h^{\circ} : \quad (8.8.9)$$

Դիցուք $\theta \equiv v - \|f\|^{\circ} w$: Տարբերական Δ_h օպերատորի գծայնության և (8.8.9) հատկության շնորհիվ ունենք

$$-\Delta_h \theta(i, j) = -\Delta_h v(i, j) + \|f\|^{\circ} \Delta_h w(i, j) = f(i, j) - \|f\|^{\circ} \leq 0$$

բոլոր $(x_i, y_j) \in \omega_h^{\circ}$ հանգույցների համար: Սա նշանակում է, որ θ ֆունկցիան բավարարում է 8.8.1 լեմմայի (8.8.5) պայմանին: Ուստի, համաձայն (8.8.6)-ի, ճիշտ են

$$\theta(i, j) \leq \max_{\omega_h'} \theta(i, j), \quad (x_i, y_j) \in \omega_h$$

անհավասարությունները: Ցանցային θ ֆունկցիայի սահմանումից ունենք

$$\max_{\omega_h'} \theta(i, j) \leq \max_{\omega_h'} v(i, j) \leq \|v\|' = \|\varphi\|' :$$

Հետևաբար՝

$$\theta(i, j) \leq \|\varphi\|', \quad (x_i, y_j) \in \omega_h :$$

Այնուհետև, օգտվելով (8.8.8) գնահատականից, ստանում ենք

$$v(i, j) = \theta(i, j) + \|f\|^{\circ} w(i, j) \leq \|\varphi\|' + \frac{1}{8} \|f\|^{\circ}, \quad (x_i, y_j) \in \omega_h \quad (8.8.10)$$

անհավասարությունները: Ճիշտ են նաև

$$-v(i, j) \leq \|\varphi\|' + \frac{1}{8} \|f\|^{\circ}, \quad (x_i, y_j) \in \omega_h \quad (8.8.11)$$

անհավասարությունները: Իրոք, եթե v ցանցային ֆունկցիան (8.8.3) տարբերական խնդրի լուծում է, ապա $-v$ ֆունկցիան կլինի

$$\begin{cases} -\Delta_h(-v(i, j)) = -f(i, j), & (x_i, y_j) \in \omega_h^{\circ} \\ -v(i, j) = -\varphi(i, j). & (x_i, y_j) \in \omega_h' \end{cases}$$

տարրերական խնդրի լուծում: Վերջավկա, (8.8.10) և (8.8.11)-ից ստանում ենք

$$|v(i,j)| \leq \frac{1}{8} ||f||^o + ||\varphi||'. \quad (x_i, y_j) \in \omega_h$$

գնահատականը, ինչից բխում է (8.8.7) գնահատականը: \square

Այսպիսով, մենք ապացուցել ենք (8.8.3) տարրերական սխեմայի կայունությունը:

Հաջորդ պարագրաֆում մենք կքննարկենք (8.8.3) տարրերական սխեմայով որոշվող ցանցային հավասարումների համակարգի կառուցվածքը, և կդիտարկենք այդպիսի համակարգերի լուծման որոշ մեթոդներ:

8.9 Ցանցային հավասարումների համակարգերի լուծման մեթոդները

Նախորդ պարագրաֆում կառուցված (8.8.3) տարրերական սխեման, որն մոտարկում է Դիրիխլեի խնդիրը Պուտանի հավասարման համար, տալիս է

$$\begin{cases} -v(i-1,j) - v(i+1,j) + 4v(i,j) - v(i,j-1) - v(i,j+1) = h^2 f(i,j), \\ i, j = 1, 2, \dots, M, \\ v(i,0) = \varphi(i,0), \quad v(i,M+1) = \varphi(i,M+1), \quad i = 0, 1, \dots, M+1, \\ v(0,j) = \varphi(0,j), \quad v(M+1,j) = \varphi(M+1,j), \quad j = 0, 1, \dots, M+1 \end{cases} \quad (8.9.1)$$

գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը: Այսպիսով, մենք ունենք M^2 հավասարումների համակարգ M^2 անհայտով (դրանք $v(i,j)$ արժեքներն են, եթե $1 \leq i, j \leq M$): Քննարկենք այդպիսի համակարգերի լուծման մեթոդները: Եթե M -ը մեծ չէ, ապա կարելի է կիրառել ստանդարտ մեթոդներ, օրինակ՝ Գաուսի մեթոդը: Սակայն արդեմ $M = 100$ -ի դեպքում մենք ստանում ենք $10^4 \times 10^4$ չափսի համակարգ: Այստեղ արդեմ անհրաժեշտ են լուծման հասուլ մեթոդներ. քանի որ Գ-առախ մեթոդի իրականացումը կպահանջի 10¹² կարգի թվաբանական գործողություն: Խոկ դա նշանակում է, որ համակարգի լուծումը կարող է հսկայական մերենայական ծամանակ խլել:

Անկախ դիրենցիալ հավասարման տեսքից, տիրույթի երկրաչափական ձևից, եզրային պայմանների տիպից և ածանցյալների նույարկման եղանակից տարրերական հավասարումների համակարգերի առանձնահատկություններ երա գլուխոր մասիցի նոսրությունն է: Այսինքն, այդ մաստրիցի տարրերի մեծամասնությունը գրուներն են, որոնք գտնվում են նախօրոք հայտնի տևերում: Մատրիցի նշված հատկությունը հաջողորդացր օգտագործվում է ցանցային հավասարումների համակարգերի լուծման էֆեկտիվ ալգորիթմներ կառուցելիս:

Օրինակ, $M = 4$ դեպքում գրենք (8.9.1) համակարգի հավասարումները, դեպի աջ մաս տանելով եզրային պայմաններից հայտնի անդամները: Կստանանք հետեւյալ տեսքի համակարգը.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc|c|c} 4 & -1 & & -1 & & & v(1,1) \\ -1 & 4 & -1 & & -1 & & v(2,1) \\ & -1 & 4 & -1 & & -1 & v(3,1) \\ & & -1 & 4 & & & v(4,1) \\ \hline -1 & & & 4 & -1 & -1 & \\ & -1 & & -1 & 4 & -1 & \\ & & -1 & -1 & 4 & -1 & \\ & & & -1 & -1 & 4 & \\ \hline & & -1 & & 4 & -1 & -1 \\ & & & -1 & -1 & 4 & -1 \\ & & & & -1 & -1 & 4 \\ & & & & & -1 & -1 \\ \hline & & & -1 & & 4 & -1 \\ & & & & -1 & -1 & 4 \\ & & & & & -1 & -1 \\ & & & & & & -1 \end{array} \right] =$$

$$\left[\begin{array}{c} h^2 f(1,1) + \varphi(1,0) + \varphi(0,1) \\ h^2 f(2,1) + \varphi(2,0) \\ h^2 f(3,1) + \varphi(3,0) \\ \hline h^2 f(4,1) + \varphi(4,0) + \varphi(5,1) \\ \hline h^2 f(1,2) + \varphi(0,2) \\ h^2 f(2,2) \\ h^2 f(3,2) \\ \hline h^2 f(4,2) + \varphi(5,2) \\ \hline h^2 f(1,3) + \varphi(0,3) \\ h^2 f(2,3) \\ h^2 f(3,3) \\ \hline h^2 f(4,3) + \varphi(5,3) \\ \hline h^2 f(1,4) + \varphi(1,5) + \varphi(0,4) \\ h^2 f(2,4) + \varphi(2,5) \\ h^2 f(3,4) + \varphi(3,5) \\ \hline h^2 f(4,4) + \varphi(4,5) + \varphi(5,4) \end{array} \right] : \quad (8.9.2)$$

Ավելի մանրամասն դիտարկենք (8.9.1) համակարգը: Թեև այդ համակարգի կառուցվածքը բավականին պարզ է, նրա (8.9.2) տիպի գրառումը շատ ծավալուն է: Ավելի հարմար է համակարգը ներկայացնել վանդակային ձևով, օգտագործելով ցանցի ներքին հանգույցների նկ. 8.9.1ում նշված համարակալումը, որը կոչվում է բառարանագրական կարգավորում (տես նկ. 8.9.1):

$$\begin{array}{ccccc}
 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 M^2 - M + 1 & & \dots \dots & & M^2 \\
 \vdots & & & & \\
 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 M + 1 & M + 2 & \dots \dots & & 2M \\
 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 1 & 2 & \dots \dots & & M
 \end{array}$$

Նկ. 8.9.1 Հանգույցների բառարանագրական կարգավորումը

Ընդ որում, հանգույցի դեկարտյան կոորդինատներից հեշտությամբ որոշվում է նրա բառարանագրական համարը, և ընդհակառակը՝

$$(i, j) \rightarrow n = (j-1)M + i,$$

$$n \rightarrow j = \left\lfloor \frac{n-1}{M} \right\rfloor + 1, \quad i = n - (j-1)M :$$

Ներմուծենք

$$v_j = [v(1, j), v(2, j), \dots, v(M, j)]^T, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

և

$$\begin{aligned}
 r_1 &= h^2[f(1, 1), f(2, 1), \dots, f(M, 1)]^T + \\
 &\quad [\varphi(1, 0) + \varphi(0, 1), \varphi(2, 0), \dots, \varphi(M-1, 0), \varphi(M, 0) + \varphi(M+1, 1)]^T,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_j &= h^2[f(1, j), f(2, j), \dots, f(M, j)]^T + [\varphi(0, j), 0, \dots, 0, \varphi(M+1, j)]^T, \\
 &\quad j = 2, 3, \dots, M-1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_M &= h^2[f(1, M), f(2, M), \dots, f(M, M)]^T + \\
 &\quad [\varphi(1, M+1) + \varphi(0, M), \varphi(2, M+1), \dots \\
 &\quad \dots, \varphi(M-1, M+1), \varphi(M, M+1) + \varphi(M+1, M)]^T
 \end{aligned}$$

Վեկտորները: Այդ դեպքում (8.9.1) համակարգը կարելի է գրել

$$\left[\begin{array}{cccccc}
 T & -I & & & & \\
 -I & T & -I & & & \\
 & -I & T & -I & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & -I & T & -I \\
 & & & & -I & T
 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c}
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3 \\
 \vdots \\
 v_{M-1} \\
 v_M
 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c}
 r_1 \\
 r_2 \\
 r_3 \\
 \vdots \\
 r_{M-1} \\
 r_M
 \end{array} \right] \quad (8.9.3)$$

կոմպակտ վանդակային երեքանկյունագծային տեսքով, որտեղ T -ն հետևյալ երեքանկյունագծային $M \times M$ չափի մատրիցն է:

$$T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & 4 & -1 & \\ & -1 & 4 & -1 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad (8.9.4)$$

իսկ I -ը՝ M կարգի միավոր մատրից է:

Ցանցային հավասարումների (8.9.3) համակարգի տեսքը մեզ բերում է այն մտքի, որ հնարավոր է ընդհանրացնել 3.9 պարագրաֆում դիտարկված երեքանկյունագծային սկալյար մատրիցով համակարգերի լուծման ալգորիթմը:

8.9.1 Վանդակային երեքանկյունագծային համակարգերի լուծման մեթոդը Դիտարկենք ավելի ընդհանուր տեսքի համակարգ

$$\begin{cases} D_1 v_1 - B_1 v_2 &= r_1 \\ -A_j v_{j-1} + D_j v_j - B_j v_{j+1} &= r_j, \quad j = 2, 3, \dots, M-1, \\ -A_M v_{M-1} + D_M v_M &= r_M, \end{cases} \quad (8.9.5)$$

որտեղ v_j և r_j վեկտորները ունեն M երկարություն, իսկ A_j , B_j և D_j մատրիցները M կարգի քառակուսի մատրիցներ են:

Ի՞շպես և սկալյար մատրիցով համակարգերի դեպքում, մեթոդի ալգորիթմը բաղկացած է երկու փուլից: Առաջին փուլում (*ուղիղ արտաքսում*) (8.9.5) համակարգը բերվում է

$$\begin{cases} v_j - \Gamma_j v_{j+1} &= \rho_j, \quad j = 1, 2, \dots, M-1, \\ v_M &= \rho_M \end{cases} \quad (8.9.6)$$

համարժեք համակարգի, որի գործակիցները և աջ մասերը հաշվվում են լստ հետևյալ քանածների.

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= D_1^{-1} B_1, & \Gamma_j &= (D_j - A_j \Gamma_{j-1})^{-1} B_j, & j &= 2, 3, \dots, M-1, \\ \rho_1 &= D_1^{-1} r_1, & \rho_j &= (D_j - A_j \Gamma_{j-1})^{-1} (r_j + A_j \rho_{j-1}), & j &= 2, 3, \dots, M \end{aligned} \quad (8.9.7)$$

Երկրորդ փուլում (*հակադարձ տեղադրում*) (8.9.6) համակարգից անմիջականորեն գտնվում են անհայտները՝

$$\begin{aligned} v_M &= \rho_M, \\ v_j &= \Gamma_j v_{j+1} + \rho_j, \quad j = M-1, M-2, \dots, 1 \end{aligned}$$

Թեև շարադրված մեթոդի արդյունավետությունը եապես ավելի բարձր է, քան սովորական Գաուսի մեթոդինը, բայց և այնպես այն այդքան էլ շահավետ չէ,

ինչպես կարելի էր սպասել, քանի որ նրա իրականացումը պահանջում է $O(M^4)$ թվաբանական գործողություն (տե՛ս, օրինակ, [36],[39]): Բայն այն է, որ ուղիղ արտաքսման ընթացքում պետք է շրջել M -րդ կարգի մատրիցներ:

Ինչ վերաբերում է մեթոդի կոռևնկառությանը, ապա ճիշտ է հետևյալ պնդումը, որը համանման է 3.9.1 թեորեմի (ապացույցը տես [39]-ում):

Թեորեմ 8.9.1 : Հիցուք (8.9.5) համակարգում D_j ($1 \leq j \leq M$) մատրիցները չվերասերված են, A_j և B_j ($2 \leq j \leq M - 1$) մատրիցները ոչ զրոյական են և, բացի դրանից, տեղի ունեն:

$$\begin{aligned} \|D_1^{-1}B_1\|_2 &\leq 1, \\ \|D_j^{-1}A_j\|_2 + \|D_j^{-1}B_j\|_2 &\leq 1, \quad 2 \leq j \leq M - 1, \\ \|D_M^{-1}A_M\|_2 &\leq 1 \end{aligned} \quad (8.9.8)$$

պայմանները, ըստ որում պայմաններից գոնեք մեկում անհավասարությունը խիստ է: Այդ դեպքում $D_j = A_j\Gamma_{j-1}$ ($j = 2, 3, \dots, M$) մատրիցները չվերասերված են և դրանով իսկ մեթոդը կոռնելու է:

Մասնավորապես, մեր (8.9.3) համակարգի համար (8.9.7) բանաձևերը էապես պարզեցվում են՝

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= T^{-1}, & \Gamma_j &= (T - \Gamma_{j-1})^{-1}, & j &= 2, 3, \dots, M - 1, \\ \rho_1 &= T^{-1}r_1, & \rho_j &= (T - \Gamma_{j-1})^{-1}(r_j + \rho_{j-1}), & j &= 2, 3, \dots, M \end{aligned}$$

Ընդ որում (8.9.8) պայմանները հանգում են մեկի, այն է՝

$$\|T^{-1}\|_2 \leq \frac{1}{2} :$$

Դժվար չէ համոզվել, որ վերջին պայմանը բավարարված է: Իբր, (8.9.4)-ից T մատրիցի սեփական արժեքներն են

$$\lambda_p(T) = 2 + 4 \sin^2 \frac{p\pi}{2(M+1)}, \quad p = 1, 2, \dots, M$$

թվերը (տես (8.6.9) և (8.6.10)-ի արտածումը): Ակնհայտ է, որ $\lambda_p(T) > 2$: Ուստի

$$\|T^{-1}\|_2 = \max_p |\lambda_p(T^{-1})| = \frac{1}{\min_p \lambda_p(T)} < \frac{1}{2} :$$

8.9.2 Ֆուրիեի մեթոդը

Դիտարկենք (8.8.3) տարբերական խնդրի լուծման և մեկ ուղիղ մեթոդ, որի հիմքում ընկած է փոփոխականների անշատման եղանակը:

Նախ և առաջ, (8.8.3) տարբերակսն խնդրիը կարելի է քերել համասեռ եղային պայմաններով խնդրի՝ փոփոխելով սահմանամերձ հանգույցներում գրված հավասարումների աջ մասերը (փաստորեն մենք կա էլ արել ևս (8.9.2) համակարգի գրառման ժամանակ): Ավելի ճիշտ, ω , ցանցի ներքին հանգույցներում (8.8.3) խնդրի լուծումը համընկնում է

$$\begin{cases} -\Delta_h u(i,j) = r(i,j), & (x_i, y_j) \in \omega_h^\circ \\ u(i,j) = 0, & (x_i, y_j) \in \omega_h' \end{cases} \quad (8.9.9)$$

խնդրի լուծման հետ, որի աջ մասը որոշվում է ըստ

$$r(i,j) = f(i,j) + \frac{1}{h^2} \mu_1(i,j) + \frac{1}{h^2} \mu_2(i,j), \quad (x_i, y_j) \in \omega_h^\circ$$

բանաձևի, որտեղ

$$\mu_1(i,j) = \begin{cases} \varphi(0,j), & i=1 \\ 0, & 2 \leq i \leq M-1 \\ \varphi(M+1,j), & i=M \end{cases}, \quad \mu_2(i,j) = \begin{cases} \varphi(i,0), & j=1 \\ 0, & 2 \leq j \leq M-1 \\ \varphi(i,M+1), & j=M \end{cases} :$$

Այսպիսով, բավարար է գտնել (8.9.9) խնդրի լուծումը:

- Սեփական արժեքների խնդրը Լապլասի տարրերական օպերատորի համար

Պարագուած 8.6 -ում մենք դիտարկել ենք երկրորդ տարրերական ածանցյալի Λ օպերատորի համար սեփական արժեքների խնդիրը: Երկչափ դեպքում այդ խնդրի նմանակն է սեփական արժեքների խնդիրը ուղղանկյուն տիյույրում հավասարաչափ ցանցի վրա որոշված Δ_h Լապլասի տարրերական օպերատորի համար:

Նշանակենք \check{G}_h -ով G_h տարածության այն ցանցային ֆունկցիաների բազմությունը, որոնք հավասար են գրոյի եզրային հանգույցներում: Այդ ֆունկցիաների համախմբությունը կազմում է M^2 չափի գծային տարածություն: Ներմուծենք \check{G}_h -ում սկալյար արտադրյալ՝

$$(v, w) \equiv h^2 \sum_{i,j=1}^M v(i,j) w(i,j) :$$

Սահմանենք $p, q = 1, 2, \dots, M$ արժեքների համար

$$\Phi^{(p,q)}(i,j) \equiv \psi_i^{(p)} \psi_j^{(q)}, \quad 0 \leq i, j \leq M+1 \quad (8.9.10)$$

ցանցային ֆունկցիաներ, որտեղ

$$\psi_i^{(p)} = \sqrt{2} \sin \frac{p\pi i}{M+1}, \quad \psi_j^{(q)} = \sqrt{2} \sin \frac{q\pi j}{M+1}$$

(տե՛ս (8.6.2)): Հեշտ է տեսնել, որ (8.9.10) ֆունկցիաների համախմբությունը կազմում է օրբոնորմալ բազիս \check{G}_h -ում: Եթոր,

$$(\Phi^{(p,q)}, \Phi^{(k,l)}) = \left(h \sum_{i=1}^M \zeta_i^{(p)} \zeta_i^{(k)} \right) \left(h \sum_{j=1}^M \zeta_j^{(q)} \zeta_j^{(l)} \right) = \delta_{pk} \delta_{ql}$$

(δ_{pk} և δ_{ql} Կրոնեկերի սիմվոլներն են): Դրանով խև կամայական $u \in \check{G}_h$ ցանցայի ֆունկցիա վերլուծվում է

$$u = \sum_{p,q=1}^M c_{pq} \Phi^{(p,q)} \quad (8.9.11)$$

տևարով, որտեղ՝ c_{pq} -երը ֆուրիեի գործակիցներն են, որոնք հաշվում են բառ

$$c_{pq} = \left(u, \Phi^{(p,q)} \right), \quad p, q = 1, 2, \dots, M \quad (8.9.12)$$

բանաձևերի:

Ցույց տանք, որ (8.9.10) ցանցային ֆունկցիաները Δ_h տարրերական օպերատորի սեփական ֆունկցիաներն են: Օգտվելով (8.6.9)-ից, կստանանք

$$\Delta_h \Phi^{(p,q)}(i, j) = \left(\psi_i^{(p)} \right)_{xx} \psi_j^{(q)} + \psi_i^{(p)} \left(\psi_j^{(q)} \right)_{yy} = (\lambda_p + \lambda_q) \Phi^{(p,q)}(i, j) :$$

Այսպիսով,

$$\Delta_h \Phi^{(p,q)} = \lambda_{pq} \Phi^{(p,q)}, \quad p, q = 1, 2, \dots, M. \quad (8.9.13)$$

Որտեղ

$$\lambda_{pq} = -\frac{4}{h^2} \left(\sin^2 \frac{p\pi}{2(M+1)} + \sin^2 \frac{q\pi}{2(M+1)} \right) : \quad (8.9.14)$$

Ինչպես ակնհայտորեն հետևում է (8.6.11)-ից,

$$16 < |\lambda_{pq}| < \frac{8}{h^2}, \quad p, q = 1, 2, \dots, M :$$

- Լուծման մեթոդը. Վերլուծություն ըստ ֆուրիեի շարքի

Փնտրենք (8.9.9) տարրերական խնդյան լուծումը (8.9.11) տեսքով: Նշանակենք R_{pq} -ով եզրային հանդույցներում գրուներով լրասահմանված $r \in C_h^\infty$ աջ մասի ֆուրիեի գործակիցները: Այդ դեպքում

$$r = \sum_{p,q=1}^M R_{pq} \Phi^{(p,q)} : \quad (8.9.15)$$

Տեղադրելով (8.9.11) և (8.9.15) վերլուծությունները (8.9.9) հավասարումների մեջ, կստանանք

$$-\sum_{p,q=1}^M c_{pq} \Delta_h \Phi^{(p,q)} = \sum_{p,q=1}^M R_{pq} \Phi^{(p,q)} :$$

Այսուհետև, օգտվելով (8.9.13)-ից, ունենք

$$-\sum_{p,q=1}^M c_{pq} \lambda_{pq} \Phi^{(p,q)} = \sum_{p,q=1}^M R_{pq} \Phi^{(p,q)} :$$

Հանդի որ $\Phi^{(p,q)}$ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են, ապա

$$c_{pq} = -\frac{R_{pq}}{\lambda_{pq}}, \quad p, q = 1, 2, \dots, M : \quad (8.9.16)$$

Համաձայն ֆուրիեի գործակիցների հաշվման բանաձևերի կստանանք.

$$R_{pq} = \left(r, \Phi^{(p,q)} \right) = h^2 \sum_{i,j=1}^M r(i,j) \Phi^{(p,q)}(i,j) = h \sum_{i=1}^M \left(h \sum_{j=1}^M r(i,j) \psi_j^{(q)} \right) \psi_i^{(p)} :$$

Բայկ (8.9.11)-ից ունենք

$$u(i, j) = \sum_{p,q=1}^M c_{pq} \Phi^{(p,q)}(i, j) = \sum_{p=1}^M \left(\sum_{q=1}^M c_{pq} \psi_j^{(q)} \right) \psi_i^{(p)} :$$

Այդ դեպքում հաշվողական ալգորիթմը կարելի է կարգավորել հետևյալ կերպ.

```

Pseudocode POISSON/FOURIER
input  $M, h, \{r(i, j)\}, \{\lambda_{pq}\}$ 
for  $i = 1, 2, \dots, M$  do
    for  $q = 1, 2, \dots, M$  do
         $s_{iq} = \sqrt{2}h \sum_{j=1}^M r(i, j) \sin \frac{q\pi j}{M+1}$ 
    end
    end
    for  $q = 1, 2, \dots, M$  do
        for  $p = 1, 2, \dots, M$  do
             $R_{pq} = \sqrt{2}h \sum_{i=1}^M s_{iq} \sin \frac{p\pi i}{M+1}$ 
        end
    end
    for  $p = 1, 2, \dots, M$  do
        for  $q = 1, 2, \dots, M$  do
             $c_{pq} = -R_{pq}/\lambda_{pq}$ 
        end
    end
    for  $p = 1, 2, \dots, M$  do
        for  $j = 1, 2, \dots, M$  do
             $t_{pj} = \sqrt{2} \sum_{q=1}^M c_{pq} \sin \frac{q\pi j}{M+1}$ 
        end
    end
    for  $j = 1, 2, \dots, M$  do
        for  $i = 1, 2, \dots, M$  do
             $u(i, j) = \sqrt{2} \sum_{p=1}^M t_{pj} \sin \frac{p\pi i}{M+1}$ 
        end
    end
output  $\{u(i, j)\}$ 

```

Եթե հաշվենք գումարները Յուրիեի արագ ձևափոխության ալգորիթմի կիրառմամբ, որն այդեն հիշատակվել էր 8.6 պարագրաֆում, ապա (8.9.9) խնդրի լուծումը որոշելու համար կպահանջվի $O(M^2 \log_2 M)$ թվարանական գործողություն:

8.9.3 Իտերացիոն մեթոդներ

Էլիպտական եզրային խնդիրների համար կառուցված ցանցային հավասարումների համակարգեր լուծելիս հաճախ նախապատրյությունը տրվում է իտերացիոն մեթոդներին այն պատճառով, որ նրանք իրականացվում են էավել ավելի պարզ և կիրառելի են ինչպես փոփոխական գործակիցներով հավասարումների համար, այնպես էլ բարյ երկրաշափական ձևի տիպությունների համար: Բացի այս, իտերացիոն մեթոդները, որպես օրենք, պահանջում են համակարգչի հիշողության ավելի փոքր ծավալ, քան ուղիղ մեթոդները:

Պարզության համար դիտարկենք (8.9.1) ցանցային հավասարումների համակարգը: Այդ համակարգի լուծման համար կարելի է կիրառել, օրինակ, բավականին պարզ

$$v^{n+1}(i, j) = \frac{1}{4} (v^n(i-1, j) + v^n(i+1, j) + v^n(i, j-1) + v^n(i, j+1)) + \frac{h^2}{4} f(i, j), \\ i, j = 1, 2, \dots, M \quad (8.9.17)$$

Յակոբիի մեթոդ: Հիմք ընդունելով հանգույցների բառարանագրական կարգավորումը, կարելի է օգտվել նաև **Գաոս-Զեյլելի մեթոդից՝**

$$v^{n+1}(i, j) = \frac{1}{4} (v^{n+1}(i-1, j) + v^{n+1}(i, j-1) + v^n(i+1, j) + v^n(i, j+1)) + \frac{h^2}{4} f(i, j), \\ i, j = 1, 2, \dots, M : \quad (8.9.18)$$

Ենշպես հեշտ է նկատել (8.9.2)-ից, (8.9.1) համակարգի մատրիցը ունի **ոչ իսկանական ազդային** գերիշխում: Ուստի այսուել կիրառելի չեն Յակոբիի մեթոդի գուգամիտության մասին 3.11.2 և 3.11.3 թեորեմները: Սակայն ավելի խիստ հետազոտությունը ցույց է տալիս, որ մեթոդը գուգամնաւ է:

Դիցուք B_J -ն Յակոբիի (8.9.17) մեթոդի իտերացնող մատրիցն է: Որպես օպերատոր նրա համար ճիշտ է.

$$B_J = \frac{h^2}{4} \Delta_h + I$$

Շերկայացումը, որտեղ I -ն նույնական օպերատոր է: Օգտվելով (8.9.13)-ից, բոլոր $p, q = 1, 2, \dots, M$ արժեքների համար, ունենք

$$B_J \Phi^{(p,q)} = \frac{h^2}{4} \Delta_h \Phi^{(p,q)} + \Phi^{(p,q)} = \left(1 + \frac{h^2}{4} \lambda_{pq} \right) \Phi^{(p,q)} :$$

Ուստի

$$\mu_{pq} \equiv 1 + \frac{h^2}{4} \lambda_{pq}, \quad p, q = 1, 2, \dots, M$$

Բվերը B_J մատրիցի սեփական արժեքներն են: Հաշվի առնելով նաև (8.9.14) բանաձեռ, ստանում ենք հետևյալ արտահայտությունը B_J մատրիցի սպեկտրալ շառավիղի

համար

$$\rho(B_J) = \max_{1 \leq p,q \leq M} |\mu_{pq}| = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{2(M+1)} = \cos \frac{\pi}{M+1} = \cos \pi h \approx 1 - \frac{(\pi h)^2}{2} :$$

Այսպիսով, $\rho(B_J) < 1$ և, հետևաբար, Յակորիի մերուղի գուգամիառում է: Սակայն փոքր h -երի դեպքում մատրիցի սպեկտրալ շառավիղը մոտ է մեկին: Ուստի մերուղի գուգամիառությունը արագությունը քայլի փոքրացմանը գուգնքաց նկատելիորեն վատանում է: Այդ իսկ պատճառով նաև ցանցերի դեպքում մերուղի կիրառումը աննպատակահայրմար է:

Գ-առու-Զեյլելի (8.9.18) մերուղի գուգամիառությունը հետևում է 3.12.4 թերեմից, քանի որ (8.9.1) համակարգի մատրիցը պիմետրիկ է և դրական որոշյալ (ապացուցել): Այստեղ, ինչպես և Յակորիի մերուղում, ցանցի քայլի փոքրացման հետ մեկտեղ նկատվում է գուգամիառության արագության վատացում: Կարելի է ցույց տալ, որ

$$\rho(B_{GS}) = \cos^2(\pi h) \approx 1 - (\pi h)^2$$

(տես, օրինակ, [51]):

Վերջում նշենք, որ քացի վերը դիտալիկած մերուղներից գոյություն ունեն ցանցային հավասարությունների համակարգերի լուծման այլ՝ ավելի էֆեկտիվ խերացիոն մերուղներ: Այդպիսիք են, օրինակ, հաջորդական վերին ռեզարսացիայի մերուղը, փոփոխական ուղղությունների մերուղը, համապուծ գրադիենտների մերուղը և այլն (տես ս [39],[47],[51]):

ԽՄԴՀՐՆԵՐ և ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ - 8

1. Դիտարկվում է

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xy$$

հավասարությունը $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$ կիսաշրջանում Γ եզրով: Վերցնելով $h = 0.5$ քայլով քառակուսի ցանց, կառուցել տարբերական սխեմաներ հետևյալ եզրային պայմանների դեպքում:

ա) $u|_{\Gamma} = |x + y| - 1$

բ) $\left(u - \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{\Gamma} = \begin{cases} y - \sin \pi x, & y > 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$ (n - արտաքին նորմալի վեկտորն է):

2. Արտածել $\partial^2 u / \partial x \partial y$ ածանցյալի տարբերական մոտարկուման բանաձևը ինըկետանի շաբլոնի վրա:

3. Որոշել

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

հավասարման համար գրված

$$\frac{1}{\tau} \left(v_m^{n+1} - \frac{v_{m-1}^n + v_{m+1}^n}{2} \right) + \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0$$

տարբերական սխեմայի մոտարկման կարգը:

4. Դիտարկել տարրեր տիպի տարրերական սխեմաներ

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} = 0 & , U(x, 0) = U_0(x) \\ \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial x} = 0 & , V(x, 0) = V_0(x) \end{cases}$$

հավասարումների համակարգի համար և հետազոտել դրանց կայունությունը:

5. Նեյմանի սպեկտրալ հայտանիշի օգնությամբ հետազոտել

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + a \frac{v_{m+1}^{n+1} - v_{m-1}^{n+1}}{h} = 0, \quad \text{որտեղ } a = \text{const},$$

տարրերական սխեմայի կայունությունը:

6. Նեյմանի սպեկտրալ հայտանիշի օգնությամբ հետազոտել

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + a \frac{v_m^{n+1} - v_{m-1}^{n+1}}{h} = 0, \quad \text{որտեղ } a = \text{const},$$

տարրերական սխեմայի կայունությունը:

7. Նեյմանի սպեկտրալ հայտանիշի օգնությամբ հետազոտել

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + a \frac{v_{m+1}^{n+1} - v_{m-1}^{n+1}}{2h} = 0, \quad \text{որտեղ } a = \text{const}.$$

տարրերական սխեմայի կայունությունը:

8. Նեյմանի սպեկտրալ հայտանիշի օգնությամբ հետազոտել

$$\frac{1}{\tau} \left(v_m^{n+1} - \frac{v_{m+1}^n + v_{m-1}^n}{2} \right) + a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0, \quad \text{որտեղ } a = \text{const},$$

տարրերական սխեմայի կայունությունը:

9. Նեյմանի սպեկտրալ հայտանիշի օգնությամբ հետազոտել

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} - \frac{h^2}{2\tau} \frac{v_{m-1}^n - 2v_m^n + v_{m+1}^n}{h^2} = 0, \quad \text{որտեղ } a = \text{const}.$$

տարրերական սխեմայի կայունությունը:

10. Նեյմանի սպեկտրալ հայտանիշի օգնությամբ հետազոտել

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + a \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} + (1-a) \frac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} = 0$$

տարրերական սխեմայի կայունությունը $a \in [0, 1]$ դեպքում:

11. Գրիված է

$$\frac{1}{\tau} \left(\frac{v_{m+1}^{n+1} + v_{m+1}^n}{2} - v_m^n \right) - (x_m^2 + 1) \frac{v_{m+1}^{n+1} - 2v_m^{n+1} + v_{m+1}^n}{h^2} = f_m^{n+1}$$

տարբերական սխեման

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (x^2 + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$$

հավասարման համար: τ և h քայլերի ինչպիսի՞ հարաբերակցության դեպքում մոտարկման սխեմանքը կլինի $O(h)$ կարգի մեծություն

12. θ -ի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} = \theta \frac{v_{m+1}^{n+1} - 2v_m^{n+1} + v_{m+1}^n}{h^2} + (1 - \theta) \frac{v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m+1}^n}{h^2}$$

տարբերական սխեման, գրիված

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

հավասարման համար, կունենա $O(\tau^2 + h^4)$ մոտարկման սխեմանք:

13. Կառուցել

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left((1 + x^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad -1 < x < 1, t > 0$$

հավասարման համար

$$u(x, 0) = \sin \pi x, \quad -1 \leq x \leq 1$$

սկզբնական պայմանով և համասեռ եզրային պայմաններով անբացահայտ տարբերական սխեմա այնպես, որ ամեն մի ժամանակային շերտում ցանցային հավասարումների համակարգի մատրիցը լինի սիմետրիկ:

14. Հետազոտել

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{2\tau} = \frac{v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m+1}^n}{h^2}$$

տարբերական սխեմայի կայունությունը համասեռ եզրային պայմանների դեպքում:

15. Հետազոտել

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{2\tau} = \frac{v_{m+1}^{n+1} - 2v_m^{n+1} + v_{m+1}^n}{h^2}$$

տարբերական սխեմայի կայունությունը համասեռ եզրային պայմանների դեպքում:

16. Հետազոտել

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^{n-1}}{2\tau} = \frac{v_{m-1}^n - v_m^{n+1} - v_m^{n-1} + v_{m+1}^n}{h^2}$$

տարբերական սխեմայի կայունությունը համաստո եզրային պայմանների դեպքում:

17. Կառուցել տարբերական սխեմա

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \text{const} > 0$$

հավասարման համար բառ ստորև բերված շաբլոնի: Այս ապացուցել, որ սխեման կայուն է, եթե $2a\tau \geq h^2$:



18. Ապացուցել, որ (8.9.1) համակարգի մատրիցը դրական որոշյալ է:

19. Լավասարի $\Delta u = 0$ հավասարումը լուծվում է վերջավոր տարբերական մեթոդով մանրացվող քառակուսի ցանցերի հաջորդականության վրա: Ամեն մի ցանցի վրա լուծումը փնտրվում է որևէ իտերացիոն մեթոդի օգնությամբ: Սաորեւ նշված են ցանցային լուծման արժեքները h քայլով ցանցի վեց հանգույցներում: $h/2$ քայլով ցանցի վրա ցանցային լուծման սկզբնական մոտավորությունը տարու համար պետք է, մասնավորապես, որոշել a, b և c արժեքները, ինչպես ցույց է տրված ստորև.

$$\begin{array}{ccc} 81 & 83 & 89 \\ a & b & c \\ 93 & 95 & 97 \end{array} :$$

Պահանջվում է հաշվել այդ արժեքները $O(h^4)$ ճշգրտվածք, անտեսելով տրված թվային արժեքների սխալանընթաց:

20. Հաշվել λ -ի մոտավոր փոքրագույն արժեքը, որի դեպքում

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

հավասարումը ունի ոչ տրիվիալ լուծում, որը հավասար է զրոյի $(0, 0), (0, 1)$ և $(1, 0)$ գագարներով եռանկյան եզրի վրա: Հաշվարկները կատարել օգտվելով վերջացվող տարբերական մեթոդից $h = 1/5$ քայլով ցանցի վրա: Արդյունքը համեմատել $\lambda = 5\pi^2$ ճշգրիտ արժեքի հետ:

ՀԱՎԵԼՎԱԾ

ՀԱՄԱՌԱԾԿԱՆ ԿԵՆՍԱԳՐԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

• Աղամս Զոն Կառլ (1819-1892)

Անգլիացի աստղագետ և մաթեմատիկոս: Պետերբուրգի ԳԱ արտասահմանյան թղթակից անդամ (1864), Լոնդոնի Թագավորական ընկերության անդամ:

Ծնվել է Կոռնուոլում: Սովորել է Քեմբրիջում: 1859-1892 -ին՝ Քեմբրիջի համալսարանի աստղագիտության և երկրաշափության պրոֆեսոր: Խոկ 1861 -ից՝ նաև Քեմբրիջի աստղադիտարանի տնօրեն:

Հիմնական աշխատությունները վերաբերում են երկնային մեխանիկային և մաթեմատիկական ֆիզիկային: Հետազոտել է երկնային մարմինների (Լուսնի, մոլորակների, գիսաստղերի, երկնաքարային հոգքերի) շարժումը: Ուրանի խոտորումների հետազոտման հիման վրա 1845 -ին կանխագուշակել է Նեպտոն մոդորակի գոյրությունը. հաշվարկելով նրա ուղեծիրը և կորորդինատները: Մեկ տարի անց, 1846 -ին Նեպտոնի հայտնաբերել է գերմանացի աստղագետ Յ. Հայեն, դեկավարվելով ֆրանսիացի աստղագետ Ու. Լեվիթիսի հաշվարկված կորորդինատներով: Հաշվողական մաթեմատիկայում քաջ հայտնի է տոփորական դիֆերենցիալ հավասարումների բվային լուծման Ազամսի մեթոդը: Այդ մեթոդը Զ. Ալանալ մշակել է 1855 -ին անգլիացի հայտնի երեսանափոր Բաշխորտի խնդրանքով: Հետազայում մեթոդը մոռացության մատնագետ և նորից հայտնաբերվել է նախորդ դարի սկզբում նորվեգացի մաթեմատիկոս Յ. Շաբերների կողմից:

• Բենշտեյն Սերգեյ Նաթանովիչ (1880-1968)

Խորհրդային մաթեմատիկոս: ԽՍՀՄ ԳԱ ակադեմիկոս (1929, թղթակից անդամ 1924 -ից): Բելգիական ԳԱ (1911) և Փարիզի ԳԱ (1955) անդամ: ԽՍՀՄ Պետական մրցանակի դափնեկիր (1942): Պարզեատրվել է Լենինի երկու շքանշանով:

Ծնվել է Օդեսայում, բժշկագիտության դոկտորի բնակնիքում: Ավարանլով գիմնազիան (1898), սովորել է Սորորոնում (Փարիզ): Ավարտել է Փարիզի համալսարանը (1899). Փարիզի Պոլիտեխնիկական դպրոցը (1901): 1904 -ին Փարիզում պաշտպանել է դոկտորական ատենախոսությունը: 1907-1908 -ին դասավանդել է Պետերբուրգի Կանանց պոլիտեխնիկական դասրանից: 1908-1933 -ին Խարկովի համալսարանի պրոֆեսոր: 1933-1941 -ին՝ Լենինգրադի համալսարանի և պրիտեխնիկական ինստիտուտի պրոֆեսոր: 1935 -ից աշխատում էր ԽՍՀՄ ԳԱ Մաթեմատիկական ինստիտուտում: Կյանքի վերջին 25 տարիներին ապրում էր Մոսկվայում, դասավանդում էր Մոսկվայի պետական համալսարանում:

Հիմնական հետազոտությունները վերաբերում են դիմումներին, քունկցիաների մոտարկման տեսությանը, հավանականությունների տեսությանը: Առաջարկել է ոչ գծային էլիպտական հավասարությունների համար եգրային խնդիրների լուծման նոր մեթոդներ: Ստեղծել է ֆունկցիաների կրնատրուկուլիվ տեսությունը: Հավանականությունների տեսության մեջ հետազոտել է սահմանային բերեմներ, ստոխաստիկ դիմումների հավասարություններ, ինչպես նաև հավանականային մեթոդների կիրառման հարցերը ֆիզիկայում, վիճակագրության և կենսաբանության մեջ: Կառուցել է հավանականությունների տեսության առաջին արսիոնատիկ տեսությունը: Մի շարք աշխատանքներ վերաբերում են ֆունկցիոնալ անլիպին, վարիացիոն հաշվին, մաքենատիկայի պատմությանը և դասավանդման մեթոդիկային:

● Բեսել Ֆրիդրիխ Վիլհելմ (1784-1846)

Գերմանացի աստղագետ և մաքենատիկոս: Բեռլինի ԳԱ անդամ (1812), Պետերբուրգի ԳԱ պատվավոր անդամ (1814):

Ծնվել է Մինդենում: Մասնագիտական կրթություն չի ստացել և աստղագիտական ու մաքենատիկական գիտելիքները ծեռք է բերել ինքնակրթությամբ: Հալլեի գիտաստիդ ուղեծրի ծցրիտ հաշվարկը (1804) նրան հնարիափորություն է տվել Լիլիենբրայի մասնավոր աստղադիտարանում 1806 -ից ստանձնել դրկուլոր-ասիստենտի պաշտոնը: 1810 -ին նշանակվել է Քյոնիգսբերգի համալսարանի պրոֆեսոր և կառուցել է ժամանակի ամենակատարյալ գործիքներով սարքավորված աստղադիտարանը, որի տնօրենը եղել է մինչև կյանքի վերջը:

Հիմնական հետազոտությունները վերաբերում են աստղագիտությանը: Բեսելի աշխատանքները եապես ազդել են աստղագիտական դիտումների բնույթի և ընդհանրապես աստղագիտության հետազա զարգացման վրա: Մշակել է աստղագիտական գործիքների սխալանըների տեսությունը: Դիտումների արդյունքների մաքենատիկական մշակումների բնագրում կիրառել է հավանականությունների տեսությունը և փոքրագույն բառակուսիների մերույթը: Ստեղծել է Արեգակի խավարումների տեսությունը, որոշել ճնշորակների գանգվածները: Մաքենատիկայի բնագավառում մշակել է գլանային ֆունկցիաների տեսությունը (բեսելյան ֆունկցիաները) և դիտարկել է այն դիմումներները, որոնք հավարարում են այդ ֆունկցիաները (Բեսելի հավասարություն): Նրա անունն է կրտսեր Ֆուրիեի շարքի գործակիցների համար հայտնի անհավասարությունը (Բեսելի անհավասարություն):

● Գրամ Ցորգեն Պեդերսեն (1850-1916)

Դանիական մաքենատիկոս:

Ծնվել է Նուստրուպ գյուղում (Հադերավի մուտ): 1871 -ին ավարտել է Կոպենհագենի համալսարանը: 1875 -ից աշխատել է որպես մաքենատիկոս «Հաֆնիա» ապահովագրական ընկերությունում: 1896 -ից այդ ընկերության տնօրենը և Դանիական ապահովագրական խորհրդի նախագահ:

Հիմնական հետազոտությունները վերաբերում են մաքենատիկական վիճակագրությանը և քերի տեսությանը: Զբարգել է նաև ֆունկցիաների մուտարկման հարցերով: Ներմուծել է սկալյար արտադրյալներից կազմված մատրիցներ և որոշչիչներ (Գրամի մասորից, Գրամի որոշշիշ), որոնք ունեն բազմազան կիրառություններ:

• Դիրիխել Պետեր Գուստավ (1805-1859)

Գերմանացի մաքենատիկոս: Բեռլինի ԳԱ անդամ (1837), Պետերբուրգի ԳԱ թղթակից անդամ (1837). Փարիզի Գ.Ա անդամ (1854): Լոնդոնի Թագավորական ընկերության անդամ (1855):

Ծնվել է Դյուրենում: Ստանալով միջնակարգ կրթությունը, 1822-1827 -ին աշխատել է Փարիզում որպես տնային ուսուցիչ: Եղել է Երիտասարդ գիտնականների խորակի անդամ, որը դեկավարել է Ժ.Ֆուրիեն: 1827 -ին ստանձնել է դոցենտի պաշտոնը Բրեսլաուի համալսարանում: 1829 -ից դասավանդել է Բեռլինի: 1831-1855 -ին Բեռլինի համալսարանի, իսկ 1855-1859 -ին Գյորինցենի համալսարանի պրոֆեսոր եր:

Հիմնական աշխատությունները վերաբերում են թվերի տեսությանը, մաքենատիկական անալիգին, մաքենատիկական ֆիզիկայի հավասարումներին: Թվերի տեսության մեջ ստացել է մի շարք կարևոր արդյունքներ: Ապացուցել է Ֆերմայի մեծ թեորեմը իինք ցուցիչի համար: Շշգրիտ ձևակերպել և հետազոտել է շարքերի պայմանական գուգամիտության հասկացությունը և ստացել գուգամիտության կարևոր հայտանիշ (Դիրիխելի հայտանիշ): Ստեղծել է Դիրիխելի շարքերի տեսությունը, որը հետագայում զարգացել է որպես անալիտիկ ֆունկցիաների տեսության առանձին ճյուղ: Մասնական ածանցյալներով դիրիխելնցիալ հավասարումների տեսության մեջ բաց հայտնի է Դիրիխելի հիմնիրը:

• Էյլեր Լեոնարդ (1707-1783)

Շվեյցարացի մաքենատիկոս, մեխանիկ, ֆիզիկոս և աստղագետ: 1726-1741 -ին և 1766 -ից Պետերբուրգի Գ.Ա անդամ, 1742-1766 -ին՝ Պետերբուրգի Գ.Ա արտասահմանյան պատվավոր անդամ: Փարիզի Գ.Ա, Բեռլինի Գ.Ա և Լոնդոնի թագավորական ընկերության անդամ:

Ծնվել է Բագելում, պատորի ընտանիքում: 1724 -ին ավարտել է Բագելի համալսարանը: 1726 -ին իրավիրվել է Պետերբուրգի Գ.Ա: 1726 -ից՝ բնախոսության, ավելի ուշ՝ մաքենատիկայի աղյունկությունը: 1731-1741 -ին՝ սկզբից ֆիզիկայի և տեսական մեխանիկայի, այնուհետև՝ մաքենատիկայի պրոֆեսոր: 1741 -ին տեղափոխվել է Բեռլին, որտեղ ապրել է 25 տարի: 1744 -ից Բեռլինի Գ.Ա Մաքենատիկական դասարանի տնօրին: 1766 -ին վերադարձել է Պետերբուրգ: Շուտով համարյա աճբողջովին կորցմելով տեսությունը, շարունակել է ստեղծագործել:

Էյլերի գիտական հետաքրքրությունների շրջանակը բնդրկում էր իր ժամանակի մաքենատիկայի և մեխանիկայի բոլոր բաժինները: 1727-1741 -ին գրել է ավելի քան 80 աշխատանք նվիրված վարիացիոն հաշվին, դիֆերենցիալ հավասարումներին, աստիճանային շարքերին, հատուկ ֆունկցիաներին, դիֆերենցիալ երկրաչափությանը, թվերի տեսությանը, հիպոդինամիկային, երկնային մեխանիկային, օպտիկային և այլն: Էյլերի, որպես մաքենատիկոսի, գլխավոր գործը եղել է մաքենատիկական անալիգի մշակումը: Ստեղծել է վարիացիոն հաշվիվ, դիֆերենցիալ հավասարումների տեսական հիմունքները: Հետազոտել է պիտի մարմնի կինետատիկան և դինամիկան, տվել անշարժ կետի շորջը նրա պտտման հավասարումը, հիմնադրել գիրոսկոպի տեսությունը: Նշանակալի են Էյլերի հետազոտությունները երկնային մեխանիկայում: Նրա տեսական արդյունքները հիմք են ծառայել Լուսնի շարժման ալյուստական ստեղծման համար: Զբաղվել է նաև սոսկ կիրառական խնդիրներով: Իմանադրել է տուրբինների տեսությունը, երրորում կատարել նյութերի դիմադրության տեսությունը և օպտիկական տեխնիկայում: Էյլերի գիտական աշխատությունների ցուցակը պարունակում է 850 -ից ավելի անվանումներ, այդ թվում մի շարք բազմահատոր մենագրություններ:

• Լայքնից Գործողի Վիլհելմ (1646-1716)

Գերմանացի մարեմատիկոս, ֆիզիկոս, վիլխուփիա, հանրագիտակ և հասարակական գործիչ: Բևոյնի ԳԱ հիմնադրամը և առաջին պյետիլենսը (1700): Եղել է Փարիզի ԳԱ (1700) և Լոնդոնի բազավորական ընկերության (1673) անդամ:

Ծնվել է Լայպցիցում: Ուսումնասիրել է վիլխուփիայություն և իրավունք Լայպցիցի համալսարանում (1661-1666), մարեմատիկա Ենայի համալսարանում (1663): 1672-1676-ին դիվանագիտական հանձնարարություններով եղել է Փարիզում և Լոնդոնում, որ միաժամանակ գրադիմի է գիտական աշխատանքով և դասավանդությունով: 1676-1716-ին ծառայել է Հանովերի հերցոգի մոտ՝ նախ որպես գրադարանավար, պատմագիր, ապա նաև արտաքին գործերով քաղաքական խորհրդական: Նախատել է Լայպցիցի, Վիեննայի և Պետերբուրգի ակադեմիաների ստեղծմանը:

Հիմնական մարեմատիկական աշխատանքները նվիրված են դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվի ստեղծմանը: Մասնակի և անցատ մեթոդները Լայքնիցը միաբերել է մաթեմատիկական անալիզի հասկացությունների փոխկապակցված միանալիան համակարգի: Տվյալները են դիֆերենցիալի և ինտեգրալի սահմանումները, ներմուծել է դիֆերենցիալի (d) և ինտեգրալի (ʃ) նշանակումները, արտածել է գումարի, տարրերության, արտասրյալի, քանորդի, աստիճանի, կարեւուսգույն տրանսգենդինու ֆունկցիաների, բարդ ֆունկցիաների դիֆերենցման օրենքները: Քացահայտել է անալիզի հիմնական հասկացությունների՝ դիֆերենցման և ինտեգրման փոխհակադարձ բնույթը: Հիմք է դրել շարքերի տեսությանը և դիֆերենցիալ հավասարումների տեսությանը: Լայքնիցը առաջարկել է համբուղիանուր օգտագործում տեղացած տերմինները՝ ֆունկցիա, դիֆերենցիալ հավասարում, այգորիմ, արտցիս, օրդինատ և այլն: Նյուտոնից անհամար Լայքնիցը մատեծել է մաթեմատիկական անալիզի հիմունքները: Հետագայում նրանց միջև երկարաժամկետ պահանջանառ է դավալվել առաջնության հարցի շուրջը: Ավանդական ձևական տրամաբանության շրջանակներում Լայքնիցը մշակել և գարգարել է մի շարք մերոդներ ու գաղափարներ, որոնք հետագայում ընդգրկվել են մաթեմատիկական տրամաբանության մեջ: Զրադիմ է տեխնիկական հարցերով՝ առաջարկել է զլանի և միացլի գաղափարը, կատարելագործել Պասկալի հաշվի մերժան և այլն: Փիլխուփիայության մեջ Լայքնիցը ծգուել է կեցության եռթյունը բացահայտել սուրստանցի մասին տաճունքի ձևով: Ի տարրերություն XVII դ. մեխանիստական պատկերացուների, փորձում էր բնության բազմազանությունը մեկնարանել դիմանամիկ հիմքերով: Հասու Լայքնիցի, սուբստանցիների թիվը անվերջ է, որոնք բոլորն ել նախատարրել կամ կեցության միավորներն են մոնադները: Աշխարհի բազմազանությունը պայմանավորված է տարրեր մոնադների ստորակարգությամբ, որի հիմքը բարձրագույն մոնադն է աստվածը: Լեզվաբանության բնագավառում հանդես է եկել լեզուների ծագման վերաբերյալ աստվածաշնչյան առասպելի դևն, նշել մի շարք լեզուների սատմական ընդհանրությունները: Լայքնիցը մասնավորապես հետաքրքրվել է հայոց լեզվի հետ այլ լեզուների ունեցած փոխհարաբերության հարցով, իրախուսել Մ. Լ. Կրոպի հայագիտական աշխատանքները: Կապեր է ունեցել Անստերդամում գործող հայ տպագրիչների (Նուկաս Վանանդեցի և ուրիշներ) հետ: Լայքնիցի այլ աշխատանքներ վերաբերում են իրավունքին, կենսաբանությանը, հնէաբանությանը, քաղաքականությանը, մանկավարժությանը և այլն:

• Հապլաս Պիեռ Սիմոն (1749-1827)

Ֆրանսիացի մաքենատիկոս, աստղագետ և ֆիզիկոս: Փարիզի ԳԱ (1783) և Ֆրանսիայի ազգային ինստիտուտի (1795) անդամ: Պետերբուրգի ԳԱ պատվավոր անդամ (1802):

Ծնվել է Բուրց-ան-Օժուս (Նորմանդիա), գյուղացու ընտանիքում: Մտացել է աստղածարանական կրթություն՝ ավարտելով բենեֆիկայան վանականնիրի միաբանության դպրոցը: Ուներ հիանալի հիշողություն, ինչի շնորհիվ արագ տիրապետել է մի քանի լեզուների: Դրսերել է մեծ ընդունակություններ մաքենատիկայի, աստղագիտության, գրականության և արվեստի ուսումնակրթման մեջ: 1766-ին տեղափոխվել է Փարիզ, որտեղ 1771-ին Ժ. Ալամբերի միջնորդությամբ Թագավորական իրեալանային դպրոցում կրթական պաշտոն է ստացել: Ֆրանսիական Մեծ հեղափոխությունից հետո մասնակցել է Ֆրանսիայի կրթության վերակազմակերպման, ինչպես նաև Բարձրագույն նորմայ և Պոլիտեխնիկական դպրոցների ստեղծման աշխատանքներին: 1790-ին դարձել է Փարիզի Զափերի և Կշիռների հանձնաժողովի նախազան: Նեկավարել է նոր մետրական համակարգի ներդրման աշխատանքը: 1795-ին եղել է Երկայնությունների բյուրոյի դեկավարության կազմում: Զաղակական ըմբռնումներով անկայուն էր: Յուրաքանչյուր քաղակական հեղաշրջման դեպքում նա անցնում էր հաղորդների կողմը՝ նախ հանրապետական էր, Նապոլեոն Բոնապարտի իշխանության օրոք՝ ներքին գործերի նախարար, ապա սենատի անդամ և փոխնախագույն. կայսրության դրու: Այնուհետև միացել է Նապոլեոնի հակառակորդներին. ստօրագրելով նրա արտորման դեկրետը: Բուրբոնների իշխանության վերականգնումով դարձել է պեր և ստացել մարկիզի տիտղոս:

Հիմնական աշխատանքները վերաբերում են մաքենատիկային, երկնային մեխանիկային և մաքենատիկական ֆիզիկային: Հավանականությունների տեսության ստեղծողներից մեկն է: Հաճակարգել և կատարելազգործել է յիշնից առաջ գոյություն ունեցող մերույները և տեսությունները: Ապացուցել է հավանականությունների բաշխման երկանդամային օրենքը: Իր ստեղծած տեսությունում կիրառել է ինտեգրալ ծևափոխություն, որը հայտնի է Լապլասի ծևափոխություն անունով: Հանրահաշվում ապացուցել է որոշիչը լրացուցիչ մինորների արտադրյալների գումարի տեսքով ներկայացման մասին թեորեմը (Լապլասի թեորեմ): Զարգացրել է սխալանընների տեսությունը և փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը: Լապլասի կարևորագույն գիտական աշխատանքը նրա հիմնահատողյա ՝Նրկնային մեխանիկա’-ն է (1798-1825), որում ավարտված է երկնային մեխիսնիկայի սահմանադր՝ հիմնված Նյուտոնի տիեզերական գորոդության օրենքի հիման վրա: Այդ հիմնավոր մենագրության մեջ Լապլասը շարադրել է ոչ միայն սեփական արյուններներ, այլև հանրագումարի է բերել իր նախորդների Նյուտոնի, Ժ. Ալամբերի, Էյլերի, Լաքրանժի և որիշների հետագուտությունները: Արյունքում կառուցվել են տարբեր տեսություններ, մասնավորապես, Երկրի պատկերի տեսությունը, Լուսի տեսությունը, մոլորակների խոտորման տեսությունը, մակրենթացությունների և տեղատփությունների տեսությունը. Յուսիսերի արբանյակների շարժման տեսությունը Լապլասը ապացուցել է Արեգակնային համակարգի կայունությունը: Նա ստացել է Սատուրնի օդակի հավասարակշռության պայմանները և ապացուցել է, որ այն հոծ լինել չի կարող: Նրա անոնն նե կրում լեռնայնությանությունները Լուսի երևացող կողմի վրա: Լապլասը զարգացրել և հիմնավորել է միգամածությունից Արեգակնային համակարգի առաջացման տեեզերածնության տեսությունը, որը որպես վարկած առաջադրել էր գերմանացի փիլիսոփա Ի. Կանտը (1755):

● Լաքս Պետեր (ծն. 1926)

Ամերիկացի մաթեմատիկոս:

Ծնվել է Բուհապետում (Հունգարիա): 1944 -ին ավարտել է Նյու-Յորքի համալսարանը: 1958 -ից՝ Ω.Կուրանտի անվան Մաթեմատիկական ինստիտուտի պրոֆեսոր, իսկ 1963 -ից՝ Ամերիկյան էլեկտրական ընկերակցության հաշվողական և կիրառական կենտրոնի տնօրեն: Հիմնական գիտական հետազոտությունները նվիրված են դիֆերենցիալ հավասարումների տեսությանը և կիրառական մաթեմատիկային: 1956 -ին ձևակերպել է բավականաչափ ընդհանուր տեսքով բեռնեմ, որը կապ է հաստատում տարրերական սխեմաների մոտարկման, կայունության և զուգամիտության միջև: Նման արդյունք է ստացել նաև խորհրդային գիտմական Ա.Ֆ.Ֆիլիպովը (1955):

● Լեժանդր Ադրիեն Մարի (1752-1833)

Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս: Փարիզի Գ-Ա անդամ (1783), Ֆրանսիայի ազգային ինստիտուտի անդամ (1797):

Ծնվել է Փարիզում: Ավարտել է Փարիզի Մազարինի Կոլեջը (1774): 1775-1780 -ին՝ Փարիզի գինուրական դպրոցի պրոֆոսոր, 1816 -ից՝ Պոլիտեխնիկական դպրոցի պրոֆեսոր: 1813-1833 -ին՝ Երկայնությունների բյուրոյի անդամ:

Հիմնական հետազոտությունները նվիրված են մաթեմատիկական անալիզին, թվերի տեսությանը, վարիացիոն հաշվին, երկնային մեխանիկային: Մաթեմատիկական անալիզի բնագավառում ներնուծել է ոլորտային պարզագույն ֆունկցիաները՝ *Լեժանդրի բազմանդամներ*: Ելիպտիկ ինտեգրալները բերել է կանոնական տեսքի, գտել է դրանց վերլուծությ շարքերի, կազմել դրանց արժեքների աղյուսակներ: Իր աշխատանքներով նպաստել է թվերի տեսության ստեղծմանը: Ձեսկերպել է պարզ թվերի բաշխման օրենքը (1808), տվել է իր ժամանակի թվերի տեսության ամբողջական շարադրանքը: Վարիացիոն հաշվում ձևակերպել է էքստրեմումի գոյության հայտանիշը: Հիմնավորել և զարգացրել է գեոդեզիական չափումների տեսությունը, հայտնագործել է (1805-1806 -ին, Կ.Գառուսից անկախ) փորրագոյն քառակուսիմերի մեթոդը: Աստղագետներ Ժ.Դ.Կասինի և Պ.Ֆ.Մեշելի հետ միասին գտել է Փարիզի և Գրինվիչի աստղադիտարանների երկայնությունների տարրերությունը (1787), մետրը որպես երկարության միավոր սահմանելու համար կատարել է Բարսելոնի (Խոսպանիա) և Դյունկերկի (Ֆրանսիա) միջև միջօրեականի աղեղի երկարության բոլոր հաշվարկների ստուգումը:

● Լիաշից Ռուտոլֆ Օստոն Սիգհամունդ (1832-1903)

Գերմանացի մաթեմատիկոս: Բեռլինի Գ-Ա անդամ (1872), մի շաբթ ակադեմիաների և գիտական ընկերությունների անդամ:

Ծնվել է Քյոնիխսբերգում: 1853 -ին ավարտել է Բեռլինի համալսարանը: Բրեվալտուի (այժմ Վյուլցվ, Լեհաստան) համալսարանի պրոֆեսոր (1862): 1864 -ից՝ Բոնի համալսարանի պրոֆեսոր, 1874-1875 -ին՝ այդ համալսարանի ռեկտոր:

Հիմնական հետազոտությունները վերաբերում են դիֆերենցիալ հավասարումներին, թվերի տեսությանը, քառակուսային և երկակի ձևերի տեսությանը: Աշխատել է նաև հանրահաշվի, հիդրոդինամիկայի և վերլուծական մեխանիկայի բնագավառներում: Նրան է պատկանում դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումների գոյության պայմանների վերաբերյալ թեորեմի ձևակերպումը (Կոշի-Լիաշիցի թեորեմ): Ֆուրիեի շարքերի տեսության մեջ առաջարկել է

անրողջ թվային առանցքի վրա շարքի հավասարաչափ գուգամիտության հայտանիշը (Հիւշիցի հայտանիշ):

• Լոտկա Ալֆրեդ Զեյմ (1880-1949)

Ամերիկացի քիմիկոս, կենսաբան, դեմոգրաֆ և մաթեմատիկոս:

Ծնվել է Լեմբերգում (այժմ Լվով, Ուկրաինա): 1902-ին արտագաղթել է ԱՍԽ:

Հայտնի է որպես զոհ - գիշատիչ մաքրեատիկական մողելի հեղինակ, որը նա առաջարկել է 1925-ին Վոլուերայից անկախ (Հոտկա-Վոլուերայի մողել): Այս մողելը հիմք էր դարձել բոլոր հետագա պոպուլյացիաների դիճամիկան նկարագրող մողելների համար: Հետագայում Հոտկան բողել է ակադեմիական գիտությունը և աշխատել է ապահովագրական ընկերակցությունում:

• Կանտորովիչ Լեռնիդ Վիտալեվիչ (1912-1986)

Խորհրդային նարեմատիկոս և տնտեսագետ: ԽՍՀՄ ԳԱ ակադեմիկոս (1964, թղթակից անդամ 1958-ից): ԽՍՀՄ պետական (1949) և լենինյան (1965) մրցանակների դափնեկիր: Նորելյան մրցանակի դափնեկիր (1975):

Ծնվել է Պետերբուրգում: Ավարտել է Լենինգրադի պետական համալսարանը (1930): 1932-1964-ին դասավանդել է Լենինգրադի համալսարանում (1934-ից՝ պրոֆեսոր): 1940-1964-ին աշխատել է ԽՍՀՄ ԳԱ Մաքրեատիկական ինստիտուտի Լենինգրադյան բաժանմունքում, 1964-1971-ին՝ ԽՍՀՄ ԳԱ սիբիրյան բաժանմունքի մաքրեատիկայի ինստիտուտում, 1971-1976-ին՝ ԽՍՀՄ Մինիստրության խորհրդի գիտության և տեխնիկայի պետական կոմիտեի ժողովրդական տնտեսության կառավարման ինստիտուտում: Կյանքի վերջին տարիներին աշխատել է ԽՍՀՄ ԳԱ համակարգային հետազոտությունների Համամիութենական ինստիտուտում:

Հիմնական հետազոտությունները վերաբերում են ֆունկցիոնալ անալիզին, բազմությունների տեսությանը, ֆունկցիաների տեսությանը, վարիացիոն հաշվին, թվային մեթոդներին, տնտեսագիտության մաքրեատիկական մեթոդներին: Ֆունկցիոնալ անալիզում ներմուծել և ուսումնասիրել է կիսակարգավորված տարածությունների դասը: Ստեղծել է էլիպտական հավասարումների համար եզրային խնդիրների լուծման նոր վարիացիոն մեթոդ: Մշակել օպերատորային հավասարումների լուծման արագագույն իջեցման մեթոդ, Նյուտոնի մեթոդի ընդիանրացումը ոչ գծային օպերատորային հավասարումների համար: 1939-1940-ին ստեղծել է սահմանափակումներով էքստրեմալ խնդիրների որոշ դասերի լուծման մեթոդներ և գծային ծրագրավորում տեսությունը: Մեծ ներդրում կատարեց տնտեսական մոդելների տեսության մեջ: Նրա հետազոտությունները նպաստել են տնտեսության օպտիմալ նախագծման և կառավարման տեսության ստեղծմանը:

• Կոտս Ռոջեր (1682-1716)

Անգլիացի մաքրեատիկոս: Լոնդոնի Թագավորական ընկերության անդամ (1711):

Ծնվել է Բերբերցում: Սովորել է Լոնդոնում, այնուհետև՝ Շեմբրիջի համալսարանի Տրինիտի քոլեջում (1702): Ի. Նյուտոնի աշակերտն էր: 1706-ից՝ Շեմբրիջի համալսարանի պրոֆեսոր:

Հիմնական հետազոտությունները վերաբերում են մխալանըների տեսությանը, որը հետագայում օգտագործել է Պ. Լապլասը հավանականությունների տեսության և ֆունկցիաների

տեսության գողափարների գարգացման թերաքրում: Զբաղվել է նևկ ռազմինակ հանրահաշվական ֆունկցիաների ինտեգրման հարցերով: Նրան են պատկանում $x'' - 1 = 0$ տեսրի հավասարման արմատների վերաբերյալ բերրեմբ, տանգենսի և սեկանսի գրաֆիկները, առնչություններ եռանկյունաչափական և ցուցչային ֆունկցիաների միջև, դիվերենցիալ երկրաչափության որոշ բանաձևեր:

• Կոանկ Զոն (ծն. 1916)

Անգլիացի մաթեմատիկոս և ֆիզիկոս:

Ծնվել է Հինդկան (Լանքաշիր): Սովորել է Մանչեստրի համալսարանում (1934-1938): Երկրորդ համաշխարհային պատերազմի տարիներին զբաղվել է հետազոտություններով բալիստիկայի բնագավառում: 1945-1957 -ին աշխատել է գիտահետազոտական լաբորատորիայում: 1957-1981 -ին՝ Բրյունելի համալսարանի մաթեմատիկայի պրոֆեսոր:

Հիմնական գիտական հետազոտությունները նվիրված են մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումների, մասնավորապես, ցերմահաղորդականության հավասարման թվային լուծման մեքողներին: Մեծ ներդրում կատարեց պարաբոլական հավասարումների լուծման կայուն տարրերական մեքողների ստեղծման մեջ: Իր գիտական գործունեությունում Զ.Կոանկը սերտորեն համագործակցել է ֆ.Նիկոլսոնի հետ: Նրանց կողմից առաջարկված մեքողը Կուանկ-Նիկոլսոնի սինուած պարաբոլական հավասարումների թվային լուծման առավել արդյունավետ ալգորիթմներից մեկն է:

• Կուտա Մարտին Վիլհելմ (1867-1944)

Գերմանացի ֆիզիկոս և մաթեմատիկոս:

Ծնվել է Վերին Սիլեզիայում (այժմ Լեհաստանի կազմում է): 1885-1890 -ին սովորել է Բրեսլաու քաղաքում (այժմ Վրոցլավ, Լեհաստան): Շարունակել է ուսումը Մյունիստի Բարձրագույն տեխնիկական դպրոցում (1891-1894): Դասավանդել է Ենայում և Աախենում: 1911-1935 -ին՝ Շոտտգարտի Բարձրագույն տեխնիկական դպրոցի պրոֆեսոր:

Մաթեմատիկայում կատարելագործել է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների Կոշու խնդրի թվային լուծման Կ. Ունգերի մեքողը (Ունգե-Կուտայի մեքող):

• Յերմիտ Շառլ (1822-1901)

Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս: Փարիզի ԳԱ անդամ (1856):

Ծնվել է Դենքեռում (Լորարինգիա): 1845 -ին ավարտել է Փարիզի Պոլիտեխնիկական դպրոցը: 1848-1869 -ին՝ Պոլիտեխնիկական դպրոցի դասուույց, իսկ 1869-1876 -ին՝ պրոֆեսոր: 1869-1897 -ին՝ Փարիզյան գիտությունների ֆակուլտետի պրոֆեսոր:

Հիմնական գիտական աշխատանքները վերաբերում են մաթեմատիկական անալիզին, կլիպտական ֆունկցիաների տեսությանը և նյուա կլիպտառումներին, հանրահաշվին և թվերի տեսությանը: Հետազոտել է օրթոգոնալ քազմանդամների իր անունը կրող դասը (Յերմիտի քազմանդամներ) և շատ փոփոխականների քազմանդամների համանման դասը: Զարգացրել է հանրահաշվական ծերերի և նրանց ինվարիանտների տեսությունը, նրա կիրառումները թվերի տեսության մեջ: Այդ կապակցությամբ մտցրել է հատուկ երկգծային ծերեր (Յերմիտի ծերեր): Ապացուցել է և թվի տրանսցենդենտությունը:

• Հիլբերտ Դավիդ (1862-1943)

Գերմանացի մաթեմատիկոս: Բեռլինի ԳԱ թղթակից անդամ (1913), ԽՍՀՄ ԳԱ պատվավոր անդամ (1934, թղթակից անդամ 1922-ից):

Ծնվել է Վետառ քաղաքում (Քյոնիգսբերգի մոտ): 1884-ին ավարտել է Քյոնիգսբերգի համալսարանը: 1893-1895-ին՝ Քյոնիգսբերգի համալսարանի պրոֆեսոր: 1895-1943-ին՝ Գյորինգենի համալսարանի պրոֆեսոր:

Հիմնական աշխատությունները վերաբերում են ինվարիանտների տեսությանը, թիերի տեսությանը, մաթեմատիկայի իմաստներին, մաթեմատիկական տրամաբանությանը, վարիացիոն հաշվին, դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հավասարություններին, մաթեմատիկական ֆիզիկային: Ինվարիանտների տեսությունում ապացուցել է ինվարիանտների համակարգի վերջավոր բազիսի գոյության մասին հիմնական բեռնեմը: Հանրահաշվական թվերի տեսությունում Հիլբերտի աշխատանքները վերափոխել են մաթեմատիկայի այդ բնագավառը ու ելակետ դարձել դրա հետագա զարգացման համար: Հիլբերտի «Երկրաչափության հիմնություններ» (1899) մենագրությունը մեծապես խթանեց երկրաչափության արսիոմատիկ կառուցման հետագա աշխատանքները: Նրա անունն է կրում էվկլիպտյան տարրածության ընդհանրացումը անվերջ չափանի դեպքի համար (հիլբերտյան տարրածություն): Հիլբերտի կառուցած սիմետրիկ կորիզով ինստեգրալ հավասարությունների տեսությունը դարձավ արդի ֆունկցիոնալ անալիզի և հատկապես զծային օպերատորների սպեկտրալ տեսության հիմքերից մեկը: 1910-1922-ին նա իմնականում զրայիցել է մաթեմատիկական ֆիզիկայի մերուների հետագա համակարգելով: Ռ. Կորանտի հետ համահետինակրթյանը հրապարակելը է «Մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարություններ» (1924) մենագրությունը: Կատարել է կարևոր հետազոտություններ մաթեմատիկայի տրամաբանական հիմունքների բնագավառում: Ի. Բեռնայիսի հետ համատեղ գրել է «Մաթեմատիկայի հիմնություններ» (1934) աշխատանքը: Հիլբերտի հետազոտությունները մեծապես նպաստել են մարելմատիկայի բազմաթիվ բաժինների զարգացմանը: Գյորինգենում նա իմանել է խոշոր մաթեմատիկական կենտրոն: Մի քանի տարի "Mathematische Annalen" ամսագրի խմբագիրն էր: Երկրորդ Միջազգային մաթեմատիկական կոնգրեսում, որը կայացել է Փարիզում 1900-ին, իր գեկուցման մեջ ծևակերպել է 22 կարևորագույն խնդիրներ (Հիլբերտի պրոբլեմներ), որոնք կանխորչեցին 20-րդ դարի մաթեմատիկայի զարգացման հիմնական ուղղությունները: Հիլբերտի սահմանադրությանը հատուկ է հավատոր մարդկային նորի անսահմանավակության ու մաթեմատիկայի և բնագիտության միասնականության հանդեպ:

• Յոյն Կարլ Լյուդվիգ Վիլհելմ (1859-1929)

Գերմանացի մեխանիկ և մաթեմատիկոս:

Ծնվել է Վիսբադենում: Սովորել է Գյորինգենի (1878-1880), Հալեի (1880-1881) և Բեռլինի (1881-1882) համալսարաններում: 1886-1902-ին աշխատում էր Սյունիսենի համալսարանում: 1902-1921-ին՝ Կարլսրուեի Պոլիտեխնիկական ինստիտուտի պրոֆեսոր, 1921-ից՝ Բեռլին-Շառլուտենմբուրգի Բարձրագույն աեխմիկական դպրոցի ճարտարագետ-դրվագուր:

Հիմնական հետազոտությունները վերաբերում են գծային դիֆերենցիալ հավասարությունների տեսությանը, ֆունկցիաների տեսությանը, տեսական կիսնեմատիկային: Մի շարք աշխատանքներ նվիրված են Լամեի ֆունկցիաների տեսությանը և վեկտորական հաշվին:

• Մինկովսկի Հերման (1864-1909)

Գերմանացի մաքենատիկոս և ֆիզիկոս:

Ծնվել է Ալեքսանդրով (Կառնասի մոտ, Լիտվա), բարգավաճ առևտրականի ընտանիքում: Ավարտելով գիմնազիան, սովորել է Բելինի և Քյոնիգսբերգի համալսարաններուն: 1883-ին՝ թիվը հինգ քառակուսիների գումարի տեսքով ներկայացնելու խնդրի լուծման համար ստացել էր Փարիզի ԳԱ մրցանակ, կիսելով այն անգիտացի հայտնի մաքենատիկոս Գ. Սմիտի հետ: 1893-ին նշանակվել է Բոնի համալսարանի պրոֆեսոր: 1894-1896-ին՝ Քյոնիգսբերգի համալսարանի, իսկ 1896-1902-ին՝ Ցյուրիխի տեխնոլոգիական ինստիտուտի պրոֆեսոր էր: 1902-ից՝ Գյորինգենի համալսարանի պրոֆեսոր:

Հիմնական աշխատությունները նվիրված են թվերի տեսությանը, երկրաչափությանը, հիդրոդինամիկային և մաքենատիկական ֆիզիկային: Մշակել և զարգացրել է թվերի երկրաչափական տեսությունը: Հիմք է դրել ուսուցիկ մարմինների երկրաչափությանը. Նրա անունն է կրում ամենահաճախ կիրառվող անհավասարություններից մեկը (*Մինկովսկու անհավասարությունը*): Համաշխարհային ճանաչում է ստացել նրա «*Տարածություն և Ժամանակ*» աշխատանքը (1909). որտեղ տրված է հարաբերականության հատուկ տեսության մաքենատիկական հիմնավորումը: Մասնավորապես, մշակվել է հիպերբոլական մետրիկայով քառաչափ տարածության տեսությունը (*Մինկովսկու տարածությունը*), ինչը մոտեցրել է այդ տեսությունը Լորաչևսկու երկրաչափության հետ: Զեակերպել էր ֆիզիկական օրենքների Լորենցի ծևափոխությունների նկատմամբ ինվարիտության մասին կանխադրույթը: Մինկովսկու անունով են կոչել խառնարան Լուսնի հակառակ կողման:

• Նեյման Զոն (Յանոշ) Ֆոն (1903-1957)

Ամերիկացի մաքենատիկոս, ագգուրյամբ հունգար: ԱՄՆ-ի ազգային ԳԱ անդամ (1937): Ամերիկան մաքենատիկական ընկերության պրեզիդենտ (1951-1952): Ա. Էյնշտեյնի անվ. (1956) և Է. Ֆերմիի անվ. (1957) մրցանակների դափնեկիր:

Ծնվել է Բուդապեշտում (Հունգարիա): 1921-1923-ին առվորել է Բեռլինի համալսարանում, 1923-1925-ին՝ Ցյուրիխի բարձրագույն պոլիտեխնիկական դպրոցում (Շվեյցարիա): 1926-ին ավարտել է Բուդապեշտի համալսարանը, ստանալով դոկտորի կոչում: Դասավանդել է Բեռլինի (1926-1929), Համբուրգի (1929-1930) և Պրինստոնի (ԱՄՆ) (1930-1933) համալսարաններում: 1933-ից՝ Պրինստոնի հետանկարային հետազոտությունների խնամատության պրոֆեսոր, 1940-ից՝ բանակային և ծովային տարբեր հաստատությունների խորհրդական: Մասնակցել է առաջին ատոմային ռումբի ստեղծման աշխատանքներին: 1955-ից և ավել է ԱՄՆ-ի ատոմային Էներգիայի հանձնաժողովի անդամ: Մեծ ականդ ունի առաջին ԷՀՄ-երի ստեղծման և օգտագործման մեթոդների մշակման գործում: 1945-1955-ին՝ ԷՀՄ-երի նախագծման բյուրոյի անդամ:

Հիմնական աշխատանքները վերաբերում են ֆունկցիոնալ անալիզին, տոպոլոգիական խմբերի տեսությանը, հավանականությունների տեսությանը և մաքենատիկական վիճակագրությանը, հաշվողական մաքենատիկային և տնտեսագիտության մաքենատիկական մեթոդներին: Կիրառել է ֆունկցիոնալ անալիզի մեթոդները ընդհանուր և քիսնտային մեխանիկայի խնդիրներում: Ուսումնասիրություններ ունի մաքենատիկական տրամադրանության, բազմությունների տեսության, անընդհատ խմբերի տեսության և պարբերական ֆունկցիաների տեսության բնագավառում: Տարբերական սխեմաների տեսության մեջ ներմուծել է

կայունության հասկացողությունը: Վերջին տարիներին զբաղվել է հիմնականում խաղերի տեսության և ավտոմատների տեսության հարցերով:

• Նիկոլսոն Ֆիլիս (1917-1968)

Անգլիացի ֆիզիկոս և մաթեմատիկոս:

Ծնվել է Մաքսֆիլդում (օրիորդական ազգանուն՝ Լուկետ): 1934-1939 -ին սովորել է Մանչեստրի համալսարանում, որտեղ 1946 -ին ստացել է ֆիզիկայից փիլիսոփայության դոկտորի գիտական աստիճանը: 1940-1945 -ին Մանչեստրի համալսարանի գիտահետազոտական խմբի կազմում աշխատել է ռազմական խնդիրների վրա, զբաղվելով մագնետրոնների տեսությունով: 1945-1949 -ին կատարել է գիտական հետազոտություններ Քեմբրիջում:

Ֆ. Նիկոլսոնը քաջ հայտնի է իր համարեղ գիտական աշխատանքներով Զ. Կունիկի հետ: Նրանց կողմից առաջարկված մեթոդ՝ Կունկ-Նիկոլսոնի սինեման, պարարողական հավասարումների թվային լուծման առավել արդյունավետ ալգորիթմներից մեկն է:

• Շմիդտ Էրիսարո (1876-1959)

Գերմանացի մաթեմատիկոս:

Ծնվել է Դերատում (այժմ Տարտու, Էստոնիա): Սովորել է Բեռլինի և Գյորինգենի համալսարաններում (1901-1905): Գ. Շվարցի և Դ. Հիլբերտի աշակերտն էր: 1906-1916 -ին դասավանդել է Ցյուրիխի, Էռլանգենի և Բրեսլաուի համալսարաններում: 1917 -ից Բեռլինի համալսարանի պրոֆեսոր: 1946-1958 -ին՝ ԳԴՀ-ի ԳԱ Մաթեմատիկայի ինստիտուտի առաջնորդներն է:

Հիմնական գիտական աշխատությունները վերաբերում են ֆունկցիաների տեսությանը, ինտեգրալ հավասարումներին, ֆունկցիոնալ անալիզին, տոպոլոգիային: Շարունակել և զարգացրել է Դ. Հիլբերտի հետազոտությունները ինտեգրալ հավասարումների բնագավառում: Լրիվ համանմանությամբ Եվլիդեսի Երկրաչափության հետ հետազոտել է հիլբերտյան տարածությունը: Հայտնի են Հիլբերտ-Շմիդտի օպերատորը և Գրամ-Շմիդտի օրորգանակացման ալգորիթմը:

• Պարսևալ Մարկ Անտոնան (1755-1836)

Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս:

Ծնվել է Ռոգիեր-օ-Սալինում հարուստ ազնվական ընտանիքում: Իր քաղաքական համոզմունքներով միապետական էր: 1792-1793 -ին, որպես Լյուտրվիկոս XVI-ի կողմնակից, գտնվում էր բանտում: Նապոլեոն Բոնապարտի իշխանության հասնելուց հետո (1804), իր քաղաքական բանաստեղծությունների համար հետապնդումների ենթարկվեց և ստիպված էր հեռանալ Ֆրանսիայից: Հետազայում Վերադարձել է Փարիզ: Չնայած որ ինքն անզամ առաջադրվել է Ֆրանսիական ԳԱ անդամ (1796, 1799, 1802, 1813 և 1828), ոչ մի անգամ չի ընտրվել:

Գիտական աշխատությունները վերաբերում են դիֆերենցիալ հավասարումներին և իրական փոփոխականի ֆունկցիաների տեսությանը, որտեղ հայտնի է Ֆուրիեի շարքերի կոնտերսում դիտարկվող Պարսևալի հավասարությունը:

• Պիկար Շառլ Էմիլ (1856-1941)

Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս: Փարիզի ԳԱ անդամ (1889), նրա պրեզիդենտը 1910 -ին: Լոնդոնի Խագավորական ընկերության անդամ (1909). Ֆրանսիական ԳԱ անդամ (1924): Պետերբուրգի ԳԱ թթակից անդամ (1895), ԽՍՀՄ ԳԱ պատվավոր անդամ (1925):

Ծնվել է Փարիզում: Ավարտել է Բարձրագույն նորմալ դպրոցը (1877): 1878-1879 -ին դասավանդել է Փարիզի, իսկ 1879-1881 -ին՝ թուլուվի համալսարաններում: 1881-1941 -ին դասավանդել է Սուրբունում (1886 -ից՝ պրոֆեսոր), 1893 -ից՝ արվեստների և արհեստների կենտրոնական դպրոցում: 1917 -ից՝ Փարիզի ԳԱ մաթեմատիկական գիտությունների բաժնի մշտական քարտուղար:

Հիմնական աշխատանքները վերաբերում են ֆունկցիաների տեսությանը, դիֆերենցիալ հավասարումներին, անվերջ խմբերի տեսությանը: Կառուցել է գծային դիֆերենցիալ հավասարումների տեսությունը համանման հանրահաշվական հավասարումների Գ-ալգորիթմությանը: Եական ներդրում է կատարել հանրահաշվական ֆունկցիաների և նրանց ինտեգրալների հետազոտության մեջ: Կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության մեջ ստացել է մի կարևոր արդյունք, որը հայտնի է Պիկարի թեորեմ անունով: Զարգացրել է հաջորդական մոտարկումների մեթոդը սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման համար (Պիկարի մեթոդ): Զբաղվել է նաև պատմությամբ և մաթեմատիկայի փիլիսոփայությամբ:

• Պուասոն Միմոն Դեմի (1781-1840)

Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս, մեխանիկ և ֆիզիկոս: Փարիզի ԳԱ անդամ (1812); Պետերբուրգի ԳԱ պատվավոր անդամ (1826):

Ծնվել է Պիտիվիե քաղաքում: Ավարտել է Փարիզի Պոլիտեխնիկական դպրոցը (1798), 1802 -ից դասավանդել այդ դպրոցում (1806 -ից՝ պրոֆեսոր): 1809 -ից՝ Փարիզի համալսարանի պրոֆեսոր: 1812 -ից՝ Ֆրանսիայի բոլեցներում մաթեմատիկայի դասավանդման դիտորդ:

Հիմնական աշխատանքները վերաբերում են մաթեմատիկական անալիզին, մաթեմատիկական ֆիզիկային, տեսական և երկնային մեխանիկային, հավանականությունների տեսությանը, վարիացիոն հաշվին: Հիյոյումնեխանիկայում ընկանությունների և Նավիս-Ստորսի հավասարումը սեղմելի մածուցիկ հեղուկի շարժման համար՝ շերմափոխանցման հաշվառումով: Լուծել է առածականության տեսության մի շարք խնդիրներ, ընդհանրացրել է այդ տեսության հավասարումները անհզութրոպ մարմինների համար: Պուտենցիալի տեսության մեջ ներմուծել է Պուասոնի հավասարումը և կիրառել այն գրավիտացիայի և էլեկտրաստատիկայի խնդիրների լուծման համար: Երկնային մեխանիկայի բնագավառում ուսումնասիրել է Արեգակնային համակարգի մոլորակների շարժման կայունությունը, գրադիւն մոլորակային ուղեծրերի խոտրումների և ծանրության կենուրունի չուրքը Երկրի շարժման խնդիրների լուծմամբ: Հավանականությունների տեսության մեջ ապացուցել է մեծ թվերի օրենքի մասնավոր դեպքը և սահմանային թեորեմներից մեկը: Զեակերպել է պատահական մեծությունների բաշխման օրենքը (Պուասոնի օրենք):

• Ոիչարդսոն Լյուիս Ֆրայ (1881-1953)

Անգլիացի գեոֆիզիկոս և մաթեմատիկոս:

Ծնվել է Նյուքասլում քվակերների ընտանիքում: 1903 -ին հաջողությամբ ավարտել է Քեմբրիջի բագավորական քոլեջը: Աշխատել է բազմաթիվ իիմնարկություններում Ֆիզիկայի ազգային լաբորատորիայում (1903-1904, 1907-1909), Տորֆի ազգային ընկերակցությունում (1906-1907), Օդերնութաբանական ծառայությունում (1913-1916): Առաջին համաշխարհային պատերազմի տարիներին, իր կրոնական համոզմունքներով լինելով պացիֆիստ, հրաժարվել է

ծառայությունից գործող բանակում և աշխատել է դաշտային հոսպիտալում (1916-1919): 1920-1929 -ին դեկավարել է Վեստմինստերի մանկավարժական քոլեջի ֆիզիկայի դեպարտամենտը: 1929-1940 -ին՝ Պեյսի տեխնոլոգիական քոլեջի և Շոտլանդիայի արվեստի դպրոցի ռեկտորը: 1940 -ին պաշտոնաքող է եղել, իրեն նվիրելով հետազոտական աշխատանքին:

Մաքեմատիկայում հիմնական աշխատությունները վերաբերում են մաքեմատիկական ֆիզիկային և հաշվողական մաթեմատիկային: Կիրառել է վերջավոր տարրերությունների մեթոդ տորիում հեղուկի հոսանքը նկարագրող դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման համար: Այլ մեթոդը հետագա զարգացում ստացավ մընչորդի դինամիկային նվիրված նրա աշխատանքներում: Նրա հետազոտությունների արդյունքները բնկած են եղանակի նախագուշակման ժամանակակից մաքեմատիկական մեթոդների հիմքում: Մշակել է հաշվողական մաթեմատիկայում լայնորեն օգտագործվող մոտարկումների ջշտությունը լավացնող մեթոդ (էքսորապորտացիա բառ Ահապրոտնի): 1919 -ից սկսած մշակել է համակաժ հակապատերազմական գաղափարահայտությամբ պատերազմների իր մաքեմատիկական տեսությունը:

• Ռոդրիգ (Ռոդրիգես) Բենջամեն Օլիմոն (1794 -1851)

Ֆրանսիացի մաքեմատիկոս և տնտեսագետ:

Ծնվել է Բորդոյում: Ավարտել է Փարիզի Բարձրագույն նորմալ դպրոցը: Աշխատել է Փարիզի Պոլիտեխնիկական դպրոցում որպես դասուսուց, այնուհետև՝ վարկային բանկի տնօրին:

Հիմնական աշխատանքները վերաբերում են մեխանիկային, երկրաչափությանը և բվերի տեսությանը: Մեխանիկայի բնագավառում ուսումնասիրում էր փորրագույն գործողության սկզբունքը, որը գուգակցում էր *Լազրանժի* բազմապատկիշների մեթոդի հետ շարժման հավասարումները ստանալու համար: Սակերեւույթների տեսության մեջ ստացել է նոր արտահայտություն *Լեժանդրի* բազմանդամների համար (Ռոդրիգի բանաձև):

• Ռումգե Կարլ Դավիդ (1856–1927)

Գերմանացի մաքեմատիկոս և ֆիզիկոս:

Ծնվել է Բրեմենում: Սովորել է Մյունիսի (1876-1877) և Բենյմի (1878-1880) համալսարան-ներում: 1886-1904 -ին՝ Հաննովերի Բարձրագույն տեխնիկական դպրոցի, իսկ 1904-1925 -ին Գյորիմգենի համալսարանի պրոֆեսոր: Կիրառական մաքեմատիկայի առաջին պրոֆեսորն էր Գերմանիայում:

Հետազոտությունների հիմնական ուղղությունները եղել են կիրառական մաքեմատիկան և սպեկտրոսկոպիան: Դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման բվային մեթոդների հեղինակն է: Լայնորեն հայտնի է Ռումգե-Կուտայի մեթոդը: Առաջարկել է դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման երկրաչափական մեթոդ: Զբաղվել է նաև անալիտիկ ֆունկցիաների բազմանդամային մոտարկումներով:

• Միմպսոն Թոմաս (1710-1761)

Անգլիացի մաքեմատիկոս: Լոնդոնի Թագավորական ընկերության անդամ (1746):

Ծնվել է Մարկետ-Վուստորֆում: Մաքեմատիկան ուսումնասիրել է ինքնուրույն: Վարում էր մաքեմատիկայի մասնավոր դասեր, միաժամանակ զրադշում էր մետաքսյա գործվածքների արտադրությամբ: 1743 -ից՝ Վուլփիչի ուղղական ակադեմիայի պրոֆեսոր:

Աշխատանքները վերաբերում են մաքենատիկական անալիզին: 1737 -ին հրապարակել է «Ֆլյուրսիաների մասին նոր տրակտատ» աշխատությունը, որտեղ կիրառել է մաքենատիկական անալիզի մեթոդները մեխանիկայի խնդիրների լուծման համար: Արսածել է մոտավոր ինտեգրման բանաձևը (*Միջնական բանաձև*): Միայնակ է տեսության հիմնադիրներից է: Բացահայտել է գնդային եռանկյունաչափության մի շարք բանաձևեր: Զբաղվել է նաև շարքերի տեսությամբ:

• Վլուտերա Վիտո (1860-1940)

Խտանացի մաքենատիկոս: Հոռմի դեի Լինչեի ազգային ակադեմիայի անդամ (1899), Երա պրեգիդենտը (1921-1926): Պետերովովի ԳԱ արտասահմանյան թղթակից անդամ (1908), ԽՍՀՄ ԳԱ պատվավոր անդամ (1926):

Ծնվել է Անկոնայում, աղքատ ընտանիքում: Ավարտել է Պիզայի համալսարանը (1880): 1883-1892 -ին՝ Պիզայի, 1893-1899 -ին՝ Թուրինի, 1900-1931 -ին՝ Հոռմի համալսարանների պրոֆեսոր: Առաջին համաշխարհային պատերազմի սարիներին ճարտարագիտական գորքերի սպա էր: Հրաժարվելով Խտայիայի ֆաշիստական կառավարության հետ համագործակցությունից, 1931 -ին առիվագած էր քողնել Հոռմի համալսարանը: Հաջորդող տարիները ապրել ե իհմնականում արտասահմանում ֆրանսիայում, Խապանիայում և այլ երկրներում:

Հիմնական աշխատանքները վերաբերում են մաքենատիկական անալիզին. ֆունկցիոնալ անալիզին և մաքենատիկական ֆիզիկային: Մշակել է մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների ինտեգրման մեթոդներ: Զարգացրել է ինտեգրալ հավասարումների տեսությունը (Վլուտերայի հավասարումները): 1900 -ին Հոռմի համալսարանում կատարած գելուցում նշել է կենսաբանությունում և սոցիալական հետազոտություններում մաքենատիկական մեթոդների կիրածման անհրաժեշտությունը: Մշակել է գոյության համար պայքարի և ժողովրդագրական դինամիկայի մաքենատիկական տեսությունը (Հոտկա-Վլուտերայի մոդելը): Ստացել է կարենոր արշունքներ կրկնակի բեկումով միջավայրերի օպտիկայում և պիճող մարմինների շարժման տեսության մեջ:

• Ֆուրիէ Ժան Բապտիստ Ժոզեֆ (1768-1830)

Ֆրանսիացի մաքենատիկոս: Փարիզի ԳԱ անդամ (1817, 1822 -ից՝ մաքենատիկայի բաժանումինից մշտական քարտուղար): Ֆրանսիական ԳԱ անդամ (1826): Պետերովովի ԳԱ պատվավոր անդամ (1829), Լոնդոնի թագավորական թնկերության արտասահմանյան անդամ:

Ծնվել է Օսերում, աղքատ լերձակի ընտանիքում: Որբացել է ուժամյա հասակում: Ավարտել է Օսերի ռազմական դպրոցը, որտեղ և անցել է դասախոսական աշխատանքի (1784-1793 -ին դասավանդել է հետարկություն, պատմություն և վիլիտիվայություն): 1795 -ին սովորելու և ուղարկվել Փարիզի Պոլիտեխնիկական դպրոցը, որտեղ շուտով դարձել է դասախոս, այնուհետև պրոֆեսոր: Սասնակցել է Նապոլեոնի Եգիպտական արշավանքին (1798-1801): 1798 -ից՝ Եգիպտական ինստիտուտի մշտական քարտուղար: 1799 -ին գլխավորում էր Վերին Նեղոսի հովտում գիտական արշավանքից մնկը: Նեկավարել է իրավաբանական վարչությունը, կատարել է ֆրանսիական իշխանությունների դիվանագիտական հանձնարարությունները: 1801 -ից աշխատել է Ֆրանսիայի ժողովրդական լուսավորության գերատեսչությունները: 1802 -ից՝ Իզեր դեպարտամենտի պրեֆեկտ: 1827 -ից՝ Պոլիտեխնիկական դպրոցի կատարելագործման խորհրդի նախագահ: Ֆուրիէի ընտրությունը Փարիզի ԳԱ մաքենատիկայի

բաժանմունքում (1816) թագավորի կրոմից չի հաստատվել: Երկրորդ անգամ նա ընտրվել է ընդհանուր ֆիզիկայի բաժանմունքում (1817):

Հիմնական աշխատանքները վերաբերում են մարենատիկական ֆիզիկային, մասնավորապես պինդ մարմնում ջերմության տարածման տեսությանը. որտեղ նրա ստուգած արդյունքները մեծ դեր են խաղացել մարենատիկայի հետագա գարգացման գործում: Ֆունկցիաները եռանկյունաչափական շարքերով ներկայացնելու տևառթյան հիմնադիրներից է (Ֆուրիեի շարքեր): Թեև ցանկացած ֆունկցիա եռանկյունաչափական շարքի վերածման հնարավորությունն ապացուցելու նրա փորձերն անհաջող էին, այնուամենայնիվ այդ աշխատանքները դարձան այդ խնդրի հետագա բազմաթիվ հետազոտությունների հիմնաքարը, որոնցով էլ նշանակալից շափով պայմանավորվեց բազմությունների տեսության և իրական փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության սկզբնավորումը: Վաղ աշխատանքներում արտածել է որոշ սահմանափակումների դեպքում հանրահաշվական հավասարումների իրական արմատների բանակի մասին բեռնմբ: Հրատարակել է մի շարք աշխատանքներ հավանականության տեսությունից և մարենատիկական վիճակագրությունից: Մեծ ներդրում է կատարել եգիպտաբանության մեջ:

Қаршылаптұрғыз

- [1] **Бахвалов Н.С.** Численные методы. - М., Наука, 1975.
- [2] **Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.** Численные методы. - М., БИНОМ: Лаборатория Знаний, 2004.
- [3] **Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В.** Численные методы в задачах и упражнениях. - М., Высшая школа, 2000.
- [4] **Березин И.С., Жидков Н.П.** Методы вычислений, т.1,2. - М., Физматгиз, 1962.
- [5] **Боголюбов А.Н.** Математики, механики (биографический справочник). - Киев, Наукова думка, 1983.
- [6] **Вербицкий В.М.** Численные методы: математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. - М., Высшая школа, 2001.
- [7] **Вербицкий В.М.** Основы численных методов. - М., Высшая школа, 2002.
- [8] **Волков Е.А.** Численные методы. - М., Наука, 1982.
- [9] **Вулих Б.З.** Введение в функциональный анализ. - М., Наука, 1967.
- [10] **Гавурин М.К.** Лекции по методам вычислений. - М., Наука, 1971.
- [11] **Годунов С.К., Рябенький В.С.** Разностные схемы. - М., Наука, 1977.
- [12] **Демидович Б.П., Марон И.А.** Основы вычислительной математики. - М., Наука, 1970.
- [13] **Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.** Численные методы. - М., Наука, 1967.
- [14] **Дзядык В.К.** Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. - М., Наука, 1977.
- [15] **Дробышевич В.И., Дымников В.П., Ривин Г.С.** Задачи по вычислительной математике. - М., Наука, 1980.
- [16] **Ильин В.П.** Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. - М., Наука, 1995.
- [17] **Калиткин Н.Н.** Численные методы. - М., Наука, 1978.

- [18] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. - М., Наука, 1977.
- [19] Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. - М., ИЛ, 1971.
- [20] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М., Наука, 1989.
- [21] Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. - М., Физматгиз, 1959.
- [22] Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. т.1,2. - М., Наука, 1976,1977.
- [23] Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М., Наука, 1971.
- [24] Малаховский В.С. Избранные главы истории математики. - Калининград, ФГУИПП "Янтарный сказ", 2002.
- [25] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - М., Наука, 1989.
- [26] Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. - М., Высшая школа, 1963.
- [27] Мысовских И.М. Лекции по методам вычислений. - М., Физматгиз, 1962.
- [28] Мэттьюз Дж.Г., Финк К.Д. Численные методы: Использование MATLAB. - М., Издательский дом "Вильямс", 2001.
- [29] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. - М., Наука, 1969.
- [30] Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. - М., Наука, 1974.
- [31] Орtega Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. - М., Наука, 1986.
- [32] Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. - М., Наука, 1984.
- [33] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М., Наука, 1964.
- [34] Положий Г.Н., Пахарева Н.А. и др. Математический практикум. - М., Физматгиз, 1960.
- [35] Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение. - М., Мир, 1984.
- [36] Самарский А.А. Теория разностных схем. - М., Наука, 1977.
- [37] Самарский А.А. Введение в численные методы. - М., Наука, 1987.
- [38] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М., Наука, 1986.

- [39] **Самарский А.А., Николаев Е.С.** Методы решения сеточных уравнений. - М., Наука, 1978 .
- [40] **Степанов В.В.** Курс дифференциальных уравнений. - М., Физматгиз, 1959 .
- [41] **Стройк Д.Я.** Краткий очерк истории математики. - М., Наука, 1984 .
- [42] **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. - М., Наука, 1966 .
- [43] **Турчак Л.И.** Основы численных методов. - М., Наука, 1987 .
- [44] **Тыртышников Е.Е.** Краткий курс численного анализа. - М., ВИНИТИ, 1994 .
- [45] **Фихтенгольц Г.М.** Основы математического анализа. т.1,2 . - М., Наука, 1968 .
- [46] **Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.** Машиныые методы математических вычислений. - М., Мир, 1980 .
- [47] **Хейгеман Л., Янг Д.** Прикладные итерационные методы. - М., Мир, 1986 .
- [48] **Хемминг Р.В.** Численные методы. - М., Наука, 1972 .
- [49] **Բոնդարենկո Վ.Ս., Գաղայան Յու.Գ., Հակոբյան Յու.Ռ.** Հաշվման մեթոդներ, մաս 1 և 2 : -Երևան, ԵՊՀ հրատ., 1982 և 1984 .
- [50] **Ղազարյան Հ.Գ., Հովհաննիսյան Ա.Հ., Հարությունյան Տ.Ն., Կարապետյան Գ.Ա.** Սովորական դիֆերենցիալ հավասարություններ : -Երևան, «Զանգակ - 97», 2002 .
- [51] **Dahlquist G. and Bjorck A.** Numerical Methods. - Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1974 .
- [52] **Isaacson E. and Keller H.B.** Analysis of Numerical Methods. - Dover Publications, 1994 .
- [53] **Kincaid D. and Cheney W.** Numerical Analysis. - Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 1991 .
- [54] **Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. and Flannery B.P.** Numerical Recipes in C. - Cambridge Univ. Press, 1992 .

Յուրի Ռուբենի Յակոբյան
Թվային մեթոդներ
մաս 2
դասագիրք
համալսարանների համար

Յանձնված է տպագրության 15.03.2007
Չափսը 60x84, 1/16: Ծավալը 15.5 տպ. մամուլ:
Թուղթը օֆսեթ: Տպարանակ 300

Տպագրվել է «ՎՄՎ-ՊՐԻՆՏ» ՍՊԸ հրատարակչության տպարանում
Քասեն՝ Ազատության 24, հեռ.՝ 28 54 28
E-mail: vmv_print@yahoo.com