Ներածություն

Հերմիթյան ինտերպոլյացիա

Նախքան անդրադառնալը բազմաչափ ինտերպոլյացիայի խնդրին, քննարկենք մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի ինտերպոլյացիայի որոշ դետալներ:

Ենթադրենք տրված են $f : A \mapsto B, A, B \subset \mathbb{R}$ ֆունկցիան, $\{x_i\}_{i=0}^{N}$ կետերը և դրանց համապատասխան $\{y_i = f\left(x_i\right)\}_{i=0}^{N}$ արժեքները: Յուրաքանչյուր $[x_i, x_{i+1}]$ հատվածում ինտերպո ֆունկցիան իրենից ներկայացնում է գծային ֆունկցիա, որը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$p_1^{(i)}\left(x\right) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} y_i + \frac{x - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1}, i = \overline{0, N-1}$$

Այսպիսով $[x_0, x_N]$ հատվածում կտոր առ կտոր մոտարկող ֆունկցիան տրվում է հետևյալ կերպ.

$$p_1\left(x\right) = \sum_{i=0}^{N} \varphi_i\left(x\right) y_i$$

Որտեղ

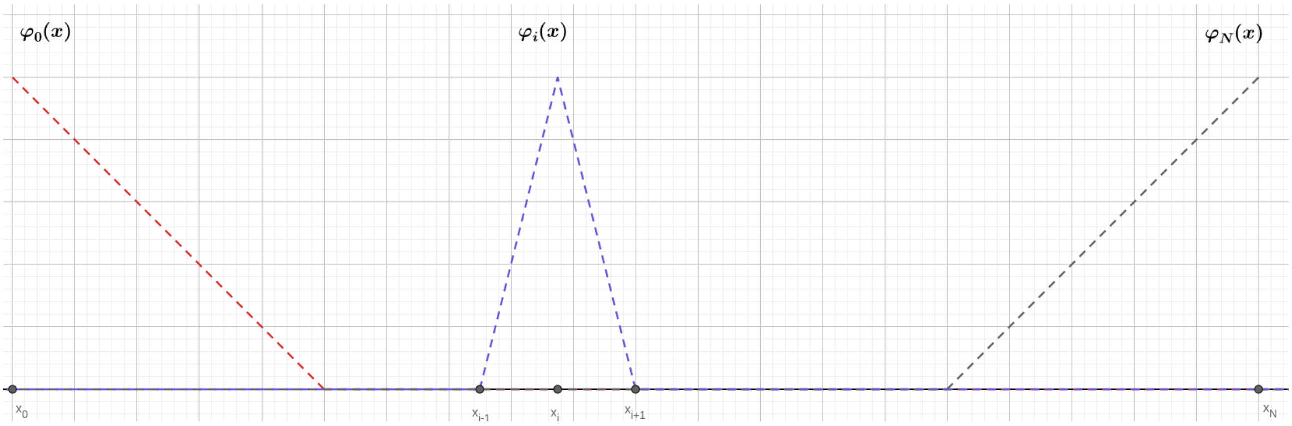
$$\varphi_0\left(x\right) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, x \in [x_0, x_1] \\ 0, x \in [x_1, x_N] \end{cases}$$

$$\varphi_i\left(x\right) = \begin{cases} 0, x \in [x_0, x_{i-1}] \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, x \in [x_{i+1}, x_N] \end{cases}$$

$$\varphi_N\left(x\right) = \begin{cases} 0, x \in [x_0, x_{N-1}] \\ \dfrac{x - x_{N-1}}{x_N - x_{N-1}}, x \in [x_{N-1}, x_N] \end{cases}$$

$\varphi_i\left(x\right)$ ֆունկցիաները կոչվում են բազիսային ֆունկցիաներ, որոնք ունեն այսպես կոչված լոկալ կրողներ, քանի որ դրանք ոչ զրոյական են որևէ տիրույթում և զրոյական որոշման տիրույթի մնացած մասերում: Նմանատիպ բազիսային ֆունկցիաների հիմնական հատկությունն այն է, որ դրանք հավասար են մեկի որևէ կոնկրետ հանգույցում և հավասար են զրոյի մնացած բոլոր հանգույցներում: Նշենք սակայն, որ այս տիպի ինտերպոլյացիան C^0 դասի է, այսինքն միայն անընդհատ է, և հետևաբար կիրառելի չէ այն խնդիրներում, որտեղ պահանջվում է ավելի բարձր կարգի ողորկություն:

Ստորև տրված է բազիսային ֆունկցիաների սխեմատիկ ներկայացում.



Նկար 1

Այժմ դիտարկենք հետևյալ խնդիրը. Անհրաժեշտ է կառուցել կտոր առ կտեր մոտարկող ֆունկցիա, որը ֆունկցիայի արժեքի հետ մեկտեղ կհամընկնի նաև ֆունկցիայի առաջին կարգի ածանցյալի հետ ինտերպոլյացիոն կետերում: Այսինքն.

$$\frac{d^j}{dx^j} f(x_i) = \frac{d^j}{dx^j} p_3(x_i),\ j = 0, 1;\ i = \overline{0, N-1}$$

Յուրաքանչյուր $[x_i, x_{i+1}]$ հատվածում ինտերպոլյացիոն ֆունկցիան իրենից ներկայացնում է խորանարդային ֆունկցիա, որը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով:

$$p_3^{(i)} = \alpha_i(x) f(x_i) + \beta_{i+1}(x) f(x_{i+1}) + \gamma_i(x) f^{'}(x_i) + \delta_{i+1}(x) f^{'}(x_{i+1})$$

որտեղ

$$\alpha_i(x) = \frac{(x_{i+1} - x)^2 \left[(x_{i+1} - x_i) + 2\,(x - x_i)\right]}{(x_{i+1} - x_i)^3}, \beta_{i+1}(x) = \frac{(x - x_i)^2 \left[(x_{i+1} - x_i) + 2\,(x_{i+1} - x)\right]}{(x_{i+1} - x_i)^3}$$

$$\gamma_i(x) = \frac{(x - x_i)\,(x_{i+1} - x)^2}{(x_{i+1} - x_i)^2}, \delta_{i+1}(x) = \frac{(x - x_i)^2\,(x - x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)^2}$$

Այսպիսով $[x_0, x_N]$ հատվածում կտոր առ կտոր մոտարկող ֆունկցիան տրվում է հետևյալ կերպ.

$$p_3(x) = \sum_{i=0}^{N} \left[\varphi_i^{(0)} f(x_i) + \varphi_i^{(1)} f^{'}(x_i)\right]$$

որտեղ

$$\varphi_0^{(0)}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x_1 - x)^2 \left[(x_1 - x_0) + 2\,(x - x_0)\right]}{(x_1 - x_0)^3}, x \in [x_0, x_1] \\ 0, x \in [x_1, x_N] \end{cases}$$

$$\varphi_i^{(0)}(x) = \begin{cases} 0, x \in [x_0, x_{i-1}] \\ \dfrac{(x - x_{i-1})^2 \left[(x_i - x_{i-1}) + 2\,(x_i - x)\right]}{(x_i - x_{i-1})^3}, x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{(x_{i+1} - x)^2 \left[(x_{i+1} - x_i) + 2\,(x - x_i)\right]}{(x_{i+1} - x_i)^3}, x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, x \in [x_{i+1}, x_N] \end{cases}$$

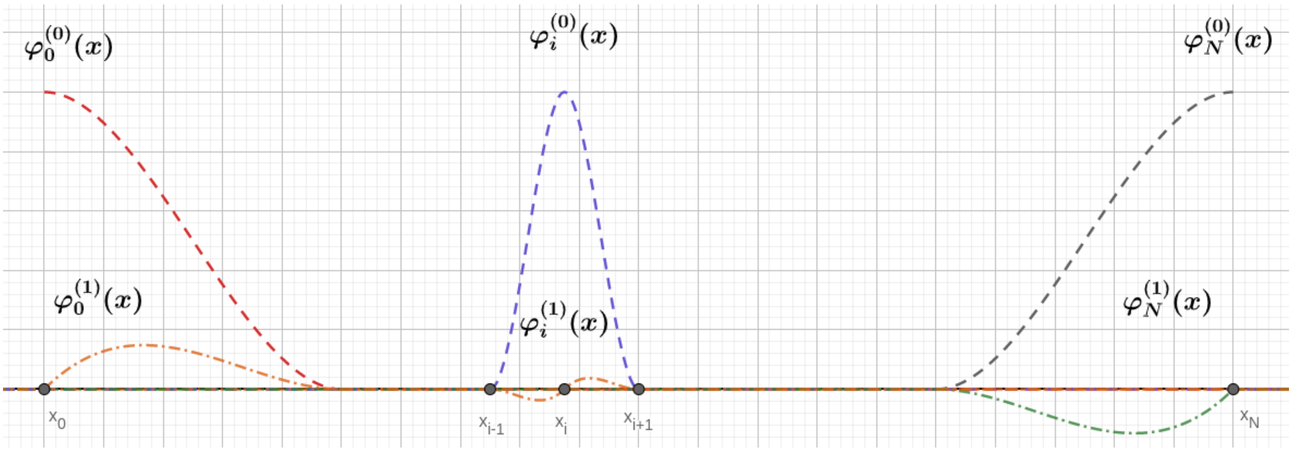
$$\varphi_N^{(0)}(x) = \begin{cases} 0, x \in [x_0, x_{N-1}] \\ \dfrac{(x - x_{N-1})^2 \left[(x_N - x_{N-1}) + 2\,(x_N - x)\right]}{(x_N - x_{N-1})^3}, x \in [x_{N-1}, x_N] \end{cases}$$

$$\varphi_0^{(1)}(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-x_0)(x_1-x)^2}{(x_1-x_0)^2}, x\in[x_0,x_1]\\ 0, x\in[x_1,x_N]\end{cases}$$

$$\varphi_i^{(1)}(x)=\begin{cases}0, x\in[x_0,x_{i-1}]\\ \dfrac{(x-x_{i-1})^2(x-x_i)}{(x_i-x_{i-1})^2}, x\in[x_{i-1},x_i]\\ \dfrac{(x-x_i)(x_{i+1}-x)^2}{(x_{i+1}-x_i)^2}, x\in[x_i,x_{i+1}]\\ 0, x\in[x_{i+1},x_N]\end{cases}$$

$$\varphi_N^{(1)}(x)=\begin{cases}0, x\in[x_0,x_{N-1}]\\ \dfrac{(x-x_{N-1})^2(x-x_N)}{(x_N-x_{N-1})^2}, x\in[x_{N-1},x_N]\end{cases}$$

Ստորև տրված է բազիսային ֆունկցիաների սխեմատիկ ներկայացում.



Նկար 2

Այսպիսով ստացանք C^1 ինտերպոլյացիա:

Ընդհանուր դեպքում հերմիթյան ինտերպոլյացիայի պայմանը կարելի է գրել հետևյալ կերպ.

$$\frac{d^k}{dx^k}f(x_i)=\frac{d^k}{dx^k}p_{2m-1}(x_i),\ i=\overline{0,N},\ k=\overline{0,m-1}$$

Խորանարդային ինտերպոլյացիա

Խնդիրներում, որտեղ անհրաժեշտ է որոշել միայն տրված ֆունկիցիան, ֆունկցիայի ածանցյալներն ինտերպոլացնելու փոխարեն դրվում է դրանց անընդհատության պայման բազիսային ֆուկցիաների միացման կետերում, բավականին հեշտացնելով դրված խնդիրը և դրա լուծումը: Սակայն այս դեպքում բազիսային ֆունկցիաները չեն հանդիսանում լոկալ կրողներ, ուստի կիրառական տեսանկյունից հարմար չեն:

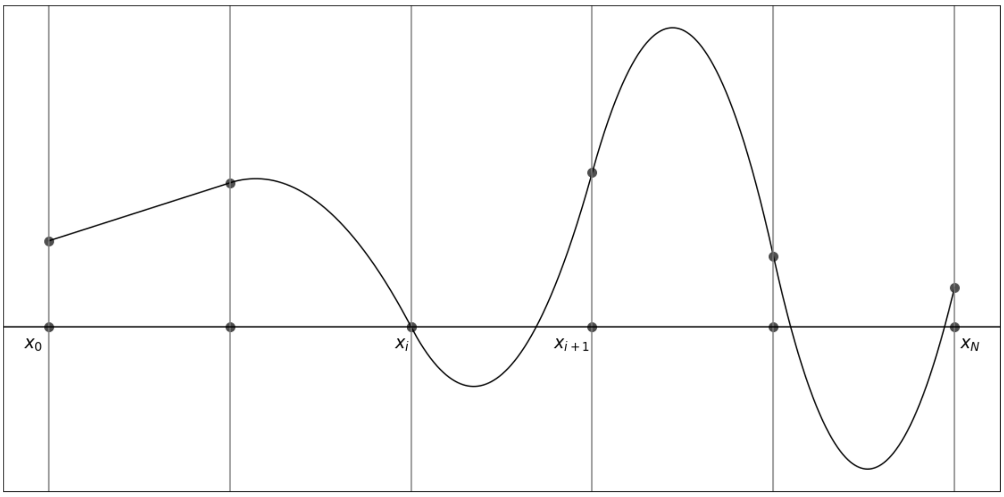
Նման տիպի ինտերպոլյացիայի կառուցման պարզագույն օրինակը հետևյալն է. Յուրաքանչյուր $[x_i, x_{i+1}]$ ինտերվալում կառուցենք այպիսի պարաբոլ, որ բոլոր x_i հանգուցային կետերում առանջին կարգի ածանցյալները լինեն անընդհատ:

$$S_2^{(i)}(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i) + c_i (x - x_i) (x - x_{i+1})$$

Ածանցյալների անընդհատության պայմանից կհետևի, որ

$$c_i + c_{i-1} = \frac{1}{h^2} (f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})) \;\; i = \overline{1, N-1}$$

Քանի որ համակարգը պարունակում է $N-1$ հավասարում, ապա մնում է մեկ ազատ գործակից, որը կարելի գտնել, որևէ x_j հանգուցային կետում որոշելով $S_2^{(j)''}$-ն:



Նկար 3

Առավել կիրառելի են խորանարդային սփլայնները: Այս դեպքում յուրաքանչյուր $[x_i, x_{i+1}]$ ինտերվալում կառուցվում են երրորդ աստիճանի բազմանդամներ այնպիսին, որ դրանց միացման կետերում (հանգույցներում) առաջին և երկրորդ կարգի ածանցյալները լինեն անընդհատ:

Բազմանդամը դիտարկելու փոխարեն դիտարկենք նրա երկրորդ կարգի ածանցյալը: Այն գծային ֆունկցիա է, հետևաբար այն կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$S_3^{(i)''}(x) = c_i \frac{x_{i+1} - x}{x - x_i} + c_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Երկչափ մոտարկում

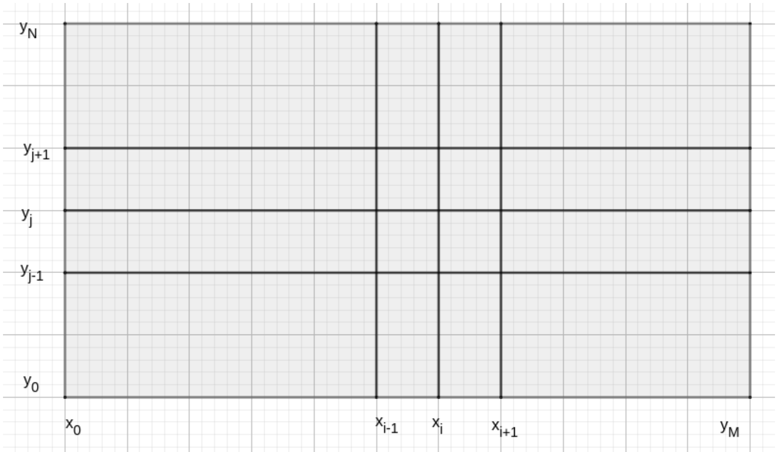
Այժմ դիտարկենք երկու փոփոխականի կտոր առ կտոր անընդհատ մոտարկման խնդիրը ∂R եզրով սահմանափակ R տիրույթում: Տիրույթը տրոհվում է որոշակի թվով էլեմենտների: Կախված R տիրույթից, առանձնացվում են հետևյալ մոտակման ձևերը.

Ուղղանկյուն տիրույթ

$C^{(0,0)}$ մոտարկում

Դիցուք տրված են $f : \Omega \mapsto B$, $B \subset \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = [x_0, x_M] \times [y_0, y_M]$, ուղղանկյուն տիրույթը, որը տրոհված է $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, ուղղանկյուն էլեմենտների:

$$x_{i+1} - x_i = h_1,\ y_{j+1} - y_j = h_2,\ i = \overline{0, M-1}, j = \overline{0, N-1}$$



Նկար 3

Յուրաքանչյուր $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ էլեմենտի վրա f ֆունկցիան մոտարկվում հետևյալ քառակուսային ֆունկցիայով:

$$p_1^{(i,j)}(x,y) = \alpha_{i,j}(x,y) f(x_i, y_j) + \beta_{i+1,j}(x,y) f(x_{i+1}, y_j) \gamma_{i,j+1}(x,y) f(x_i, y_{j+1}) + \delta_{i+1,j+1}(x,y) f(x_{i+1}, y_{j+1})$$

որտեղ

$$\alpha_{i,j}(x,y) = \frac{1}{h_1 h_2} (x_{i+1} - x)(y_{j+1} - y)$$

$$\beta_{i+1,j}(x,y) = \frac{1}{h_1 h_2} (x - x_i)(y_{j+1} - y)$$

$$\gamma_{i,j+1}(x,y) = \frac{1}{h_1 h_2} (x_{i+1} - x)(y - y_j)$$

$$\delta_{i+,j+1}(x,y) = \frac{1}{h_1 h_2} (x - x_i)(y - y_j)$$

Այսպիսով $[x_0, x_M]\times[y_0, y_M]$ տիրույթում կտոր առ կտոր մոտարկող ֆունկցիան տրվում է հետևյալ կերպ.

$$p_1(x,y) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\varphi_{i,j}(x,y)f(x_i,y_j)$$

որտեղ

$$\varphi_{i,j}\left(x,y\right) = \begin{cases} \frac{1}{h_1h_2}\left(x-x_{i-1}\right)\left(y-y_{j-1}\right), (x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j] \\ \frac{1}{h_1h_2}\left(x-x_{i-1}\right)\left(y_{j+1}-y\right), (x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_j,y_{j+1}] \\ \frac{1}{h_1h_2}\left(x_{i+1}-x\right)\left(y-y_{j-1}\right), (x,y)\in[x_i,x_{i+1}]\times[y_{j-1},y_j] \\ \frac{1}{h_1h_2}\left(x_{i+1}-x\right)\left(y_{j+1}-y\right), (x,y)\in[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}] \\ 0, otherwise \end{cases}$$

Վերը դիտարկված մոտարկումը հանդիսանում է երկչափ Հերմիթյան մոտարկման մասնավոր դեպք:

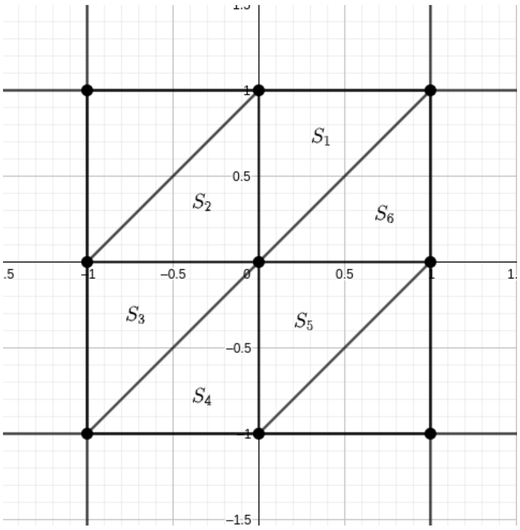
Ընդհանուր դեպքում, տրված $k\in\mathbb{N}$ թվի և տրված ուղղանկյուն տիրույթի ցանկացած ուղղանկյունաձև տրոհման էլեմենտում կարելի է կառուցել $C^{k-1,k-1}$ կարգի մոտարկող բազմանդամ, որը $2k-1$ -րդ կարգի բազմանդամ է ըստ իր յուրաքանչյուր փոփոխականի և, ինտերպոլյացիայի պայմանները կարելի է գրել հետևյալ կերպ.

$$\frac{d^{p+q}}{dx^p dy^q}f(x_i,y_j) = \frac{d^{p+q}}{dx^p dy^q}p_{2k-1}(x_i,y_j)$$
$$p,q=\overline{0,k-1};\ i=\overline{0,M};\ j=\overline{0,N}$$

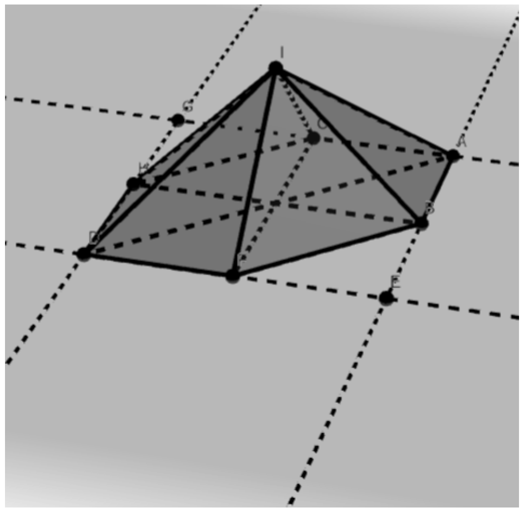
Այժմ դիտարկենք ուղղանկյուն տիրույթի տրոհման և բազիսային ֆունկցիաների կառուցման այլ տարբերակ: Այս դեպքում տիրույթը տրոհենք ըստ նախորդ տարբերակի, ի հավելումն յուրաքանչյուր ուղղանկյուն էլեմենտ տրոհելով երկու ուղղանկյուն եռանկյունների.

Դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան.

$$\varphi\left(x,y\right)=\begin{cases}1-y, & (x,y)\in S_1\\ 1-x+y, & (x,y)\in S_2\\ 1+x, & (x,y)\in S_3\\ 1+y, & (x,y)\in S_4\\ 1-x+y, & (x,y)\in S_5\\ 1-x, & (x,y)\in S_6\\ 0, otherwise & \end{cases}$$



Նկար 4



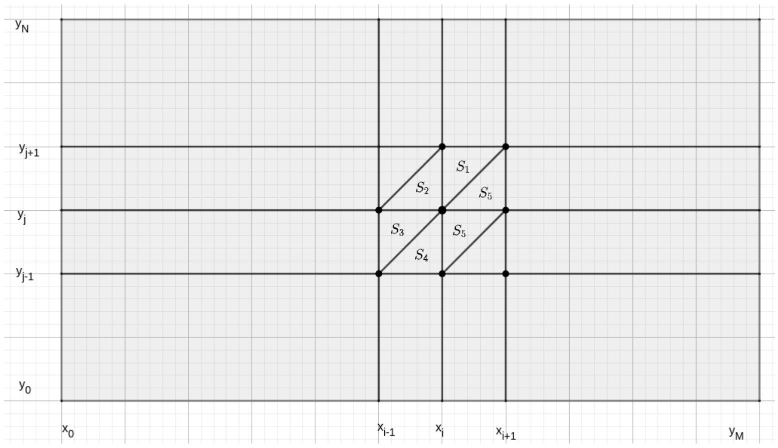
Նկար 5

Պարզ է, որ այն յուրաքանչյուր ուղղանկյուն էլեմենտում $C^{(0,0)}$ ֆունկցիա է:
Այժմ յուրաքանչյուր x_i, y_j կետի վրա կառուցենք հետևյալ ֆունկցիան.

$$\varphi_{i,j}(x,y)=\varphi\left(\frac{x-x_i}{h_1},\frac{y-y_j}{h_2}\right)$$

Այդ դեպքում f ֆունկցիայի մոտարկման բանաձևը կտվրի հետևյալ կերպ:

$$p_1(x,y) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}\varphi_{i,j}(x,y)f(x_i,y_j)$$



Նկար 5

Բազմանկյուն տիրույթ

Բազմանկյուն տիրույթ ասելով կիասկանանք կամ հենց բազմանկյունաձև տիրույթը, կամ դրա՝ բազմանկյունով մոտարկումը:

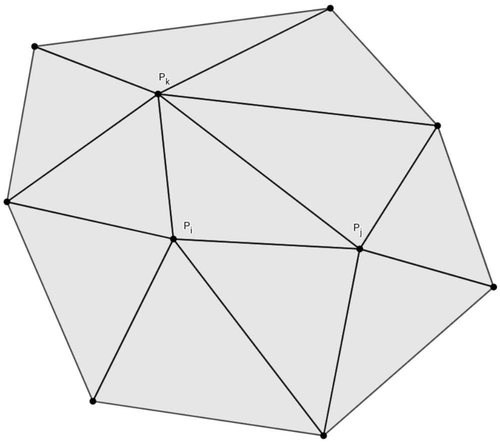
Դիցուք տրված են $f : \Omega \mapsto B$, $B \subset \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ բազմանկյուն տիրույթը, որը կամայական ձևով տրոհված է եռանկյուն էլեմենտների: Յուրաքանչյուր այդպիսի P_1, P_2, P_3 գագաթներով եռանկյան համար դիտարկենք հետևյալ մոտարկող ֆունկցիան.

$$p_1(x,y) = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{3} p_i^{(1)}(x,y) f(x_i, y_i)$$

$$S = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$p_i^{(1)}(x,y) = x_j y_k - x_k y_j + x(y_j - y_k) - y(x_j - x_k)$$

որտեղ $(x_i, y_i),\ i = 1, 2, 3$ տրված եռանկյուն էլեմենտի գագաթներն են (հերթականությունը ժամսլաքին հակառակ ուղղությամբ):



Նկար 6

Բնական է, որ որևէ կետի նկատմամբ լրիվ բազիսային ֆունկցիայի կառուցելու համար անհրաժեշտ է իրար գումարել այն բոլոր եռանկյուն էլեմենտների՝ այդ կետին համապատասխա ֆունկցիաները, որոնց համար տվյալ կետը գագաթ է: Հետևաբար, ընդհանուր դեպքում վերը նշված մոտարկան եղանակը հաշվողական տեսակետից հարմար չէ:

Վարիացիոն մեթոդ

Վարիացիոն մեթոդները հանդիպում են բազմաթիվ ֆիզիկական և այլ խնդիրնորում, և այդ խնդիրների մոտավոր լուծումը հիմնված է համապատասխան վարիացիոն մեթոդներին: