

## Ներածություն

### Հերմիթյան ինտերպոլյացիա

Նախքան անդրադառնալը բազմաչափ ինտերպոլյացիայի խնդրին, քննարկենք մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի ինտերպոլյացիայի որոշ դետալներ:

Ենթադրենք տրված են  $f : \Omega \mapsto \Theta, \Omega, \Theta \subset \mathbb{R}$  ֆունկցիան,  $\{x_i\}_{i=0}^N$  կետերը և դրանց համապատասխան  $\{y_i = f(x_i)\}_{i=0}^N$  արժեքները: Յուրաքանչյուր  $[x_i, x_{i+1}]$  հատվածում ինտերպոլացնող ֆունկցիան իրենից ներկայացնում է գիսային ֆունկցիա, որը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$p_1^{(i)}(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1}, i = \overline{0, N-1}$$

Այսպիսով  $[x_0, x_N]$  հատվածում կտոր առ կտոր մոտարկող ֆունկցիան տրվում է հետևյալ կերպ.

$$p_1(x) = \sum_{i=0}^N \varphi_i(x) y_i$$

Որտեղ

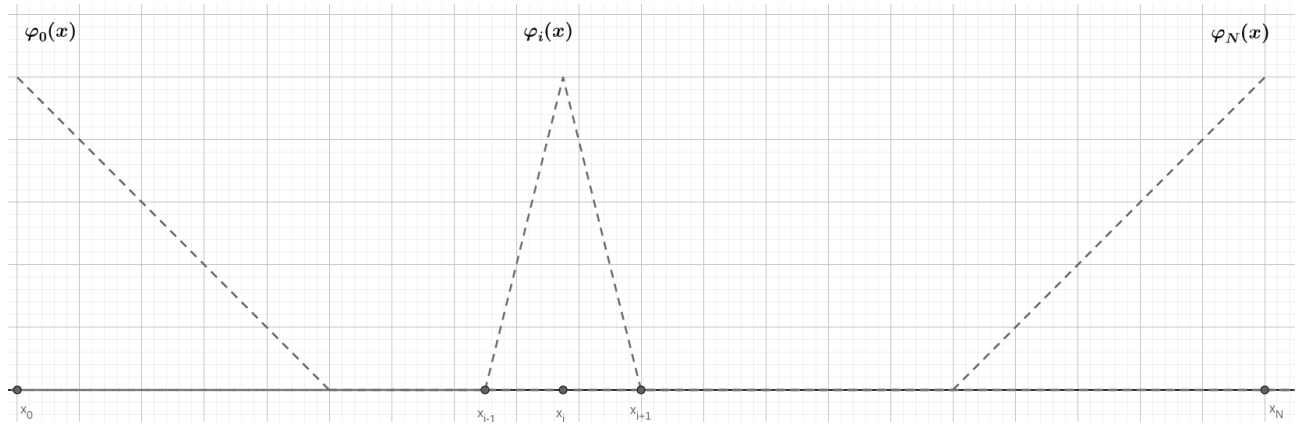
$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, & x \in [x_0, x_1] \\ 0, & x \in [x_1, x_N] \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & x \in [x_0, x_{i-1}] \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & x \in [x_{i+1}, x_N] \end{cases}$$

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} 0, & x \in [x_0, x_{N-1}] \\ \frac{x - x_{N-1}}{x_N - x_{N-1}}, & x \in [x_{N-1}, x_N] \end{cases}$$

$\varphi_i(x)$  ֆունկցիաները կոչվում են բազիսային ֆունկցիաներ, որոնք ունեն այսպես կոչված լոկալ կրողներ, քանի որ դրանք ոչ զրոյական են որևէ տիրույթում և զրոյական որոշման տիրույթի մնացած մասերում: Նմանատիպ բազիսային ֆունկցիաների հիմնական հատկությունն այն է, որ դրանք հավասար են մեկի որևէ կոնկրետ հանգույցում և հավասար են զրոյի մնացած բոլոր հանգույցներում: Նշենք սակայն, որ այս տիպի ինտերպոլյացիան  $C^0$  դասի է, այսինքն միայն անընդհատ է, և հետևաբար կիրառելի չէ այն խնդիրներում, որտեղ պահանջվում է ավելի բարձր կարգի ողորկություն:

Ստորև տրված է բազիսային ֆունկցիաների սխեմատիկ ներկայացում.



Նկար 1

Այժմ դիտարկենք հետևյալ խնդիրը. Անհրաժեշտ է կառուցել կտոր առ կտոր մոտարկող ֆունկցիա, որը ֆունկցիայի արժեքի հետ մեկտեղ կհամընկնի նաև ֆունկցիայի առաջին կարգի ածանցյալի հետ ինտերպոլյացիոն կետերում: Այսինքն.

$$\frac{d^j}{dx^j} f(x_i) = \frac{d^j}{dx^j} p_3(x_i), \quad j = 0, 1; \quad i = \overline{0, N-1}$$

Յուրաքանչյուր  $[x_i, x_{i+1}]$  հատվածում ինտերպոլյացիոն ֆունկցիան իրենից ներկայացնում է խորանարդային ֆունկցիա, որը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով:

$$p_3^{(i)} = \alpha_i(x)f(x_i) + \beta_{i+1}(x)f(x_{i+1}) + \gamma_i(x)f'(x_i) + \delta_{i+1}(x)f'(x_{i+1})$$

որտեղ

$$\alpha_i(x) = \frac{(x_{i+1} - x)^2 [(x_{i+1} - x_i) + 2(x - x_i)]}{(x_{i+1} - x_i)^3}, \quad \beta_{i+1}(x) = \frac{(x - x_i)^2 [(x_{i+1} - x_i) + 2(x_{i+1} - x)]}{(x_{i+1} - x_i)^3}$$

$$\gamma_i(x) = \frac{(x - x_i)(x_{i+1} - x)^2}{(x_{i+1} - x_i)^2}, \quad \delta_{i+1}(x) = \frac{(x - x_i)^2(x - x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)^2}$$

Այսպիսով  $[x_0, x_N]$  հատվածում կտոր առ կտոր մոտարկող ֆունկցիան տրվում է հետևյալ կերպ.

$$p_3(x) = \sum_{i=0}^N \left[ \varphi_i^{(0)} f(x_i) + \varphi_i^{(1)} f'(x_i) \right]$$

որտեղ

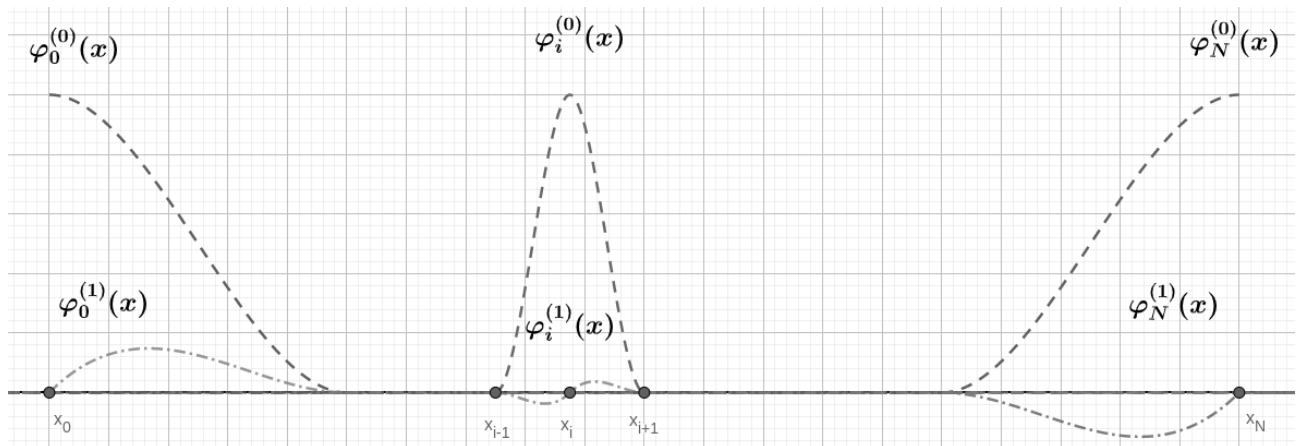
$$\begin{aligned} \varphi_0^{(0)}(x) &= \begin{cases} \frac{(x_1 - x)^2 [(x_1 - x_0) + 2(x - x_0)]}{(x_1 - x_0)^3}, & x \in [x_0, x_1] \\ 0, & x \in [x_1, x_N] \end{cases} \\ \varphi_i^{(0)}(x) &= \begin{cases} 0, & x \in [x_0, x_{i-1}] \\ \frac{(x - x_{i-1})^2 [(x_i - x_{i-1}) + 2(x_i - x)]}{(x_i - x_{i-1})^3}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{(x_{i+1} - x)^2 [(x_{i+1} - x_i) + 2(x - x_i)]}{(x_{i+1} - x_i)^3}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & x \in [x_{i+1}, x_N] \end{cases} \\ \varphi_N^{(0)}(x) &= \begin{cases} 0, & x \in [x_0, x_{N-1}] \\ \frac{(x - x_{N-1})^2 [(x_N - x_{N-1}) + 2(x_N - x)]}{(x_N - x_{N-1})^3}, & x \in [x_{N-1}, x_N] \end{cases} \end{aligned}$$

$$\varphi_0^{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_0)(x_1-x)^2}{(x_1-x_0)^2}, & x \in [x_0, x_1] \\ 0, & x \in [x_1, x_N] \end{cases}$$

$$\varphi_i^{(1)}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [x_0, x_{i-1}] \\ \frac{(x-x_{i-1})^2(x-x_i)}{(x_i-x_{i-1})^2}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{(x-x_i)(x_{i+1}-x)^2}{(x_{i+1}-x_i)^2}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & x \in [x_{i+1}, x_N] \end{cases}$$

$$\varphi_N^{(1)}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [x_0, x_{N-1}] \\ \frac{(x-x_{N-1})^2(x-x_N)}{(x_N-x_{N-1})^2}, & x \in [x_{N-1}, x_N] \end{cases}$$

Ստորև տրված է բազիսային ֆունկցիաների սխեմատիկ ներկայացում.



Նկար 2

Այսպիսով ստացանք  $C^1$  ինտերպոլացիա:

Ընդհանուր դեպքում հերմիթյան ինտերպոլացիայի պայմանը կարելի է գրել հետևյալ կերպ.

$$\frac{d^k}{dx^k} f(x_i) = \frac{d^k}{dx^k} p_{2m-1}(x_i), \quad i = \overline{0, N}, \quad k = \overline{0, m-1}$$

## Քառակուսային և խորանարդային ինտերպոլյացիա

Խնդիրներում, որտեղ անհրաժեշտ է որոշել միայն տրված ֆունկցիան, ֆունկցիայի ածանցյալներն ինտերպոլացնելու փոխարեն դրվում է դրանց անընդհատության պայման բազիսային ֆունկցիաների միացման կետերում, բավականին հեշտացնելով դրված խնդիրը և դրա լուծումը: Սակայն այս դեպքում բազիսային ֆունկցիաները չեն հանդիսանում լոկալ կրողներ, ուստի կիրառական տեսանկյունից հարմար չեն:

Նման տիպի ինտերպոլյացիայի կառուցման պարզագույն օրինակը հետևյալն է. Յուրաքանչյուր  $[x_i, x_{i+1}]$  ինտերվալում կառուցենք այսիսի պարաբոլ, որ բոլոր  $x_i$  հանգուցային կետերում առանցին կարգի ածանցյալները լինեն անընդհատ:

$$S_2^{(i)}(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i) + c_i (x - x_i) (x - x_{i+1})$$

Ածանցյալների անընդհատության պայմանից կհետևի, որ

$$c_i + c_{i-1} = \frac{1}{h^2} (f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})) \quad i = \overline{1, N-1}$$

Քանի որ համակարգը պարունակում է  $N-1$  հավասարում, ապա մնում է մեկ ազատ գործակից, որը կարելի գտնել, որևէ  $x_j$  հանգուցային կետում որոշելով  $S_2^{(j)''}$ -ն:

Առավել կիրառելի են խորանարդային սփլայնները: Այս դեպքում յուրաքանչյուր  $[x_i, x_{i+1}]$  ինտերվալում կառուցվում են երրորդ աստիճանի բազմանդամներ այնպիսին, որ դրանց միացման կետերում (հանգույցներում) առանցին և երկրորդ կարգի ածանցյալները լինեն անընդհատ:

Բազմանդամը դիտարկելու փոխարեն դիտարկենք նրա երկրորդ կարգի ածանցյալը: Այն գծային ֆունկցիա է, հետևաբար այն կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$S_3^{(i)''}(x) = c_i \frac{x_{i+1} - x}{x - x_i} + c_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

որտեղ  $c_i$  և  $c_{i+1}$ -ը  $x_i$  և  $x_{i+1}$  կետերում երկրորդ կարգի ածանցյալների արժեքներն են: Հաշվի առնելով նաև հետևյալ պայմանները.

$$\begin{cases} S_3^{(i)}(x_i) &= f_i \\ S_3^{(i)}(x_{i+1}) &= f_{i+1} \\ S_3^{(i-1)'}(x_i) &= S_3^{(i)'}(x_i) \end{cases}$$

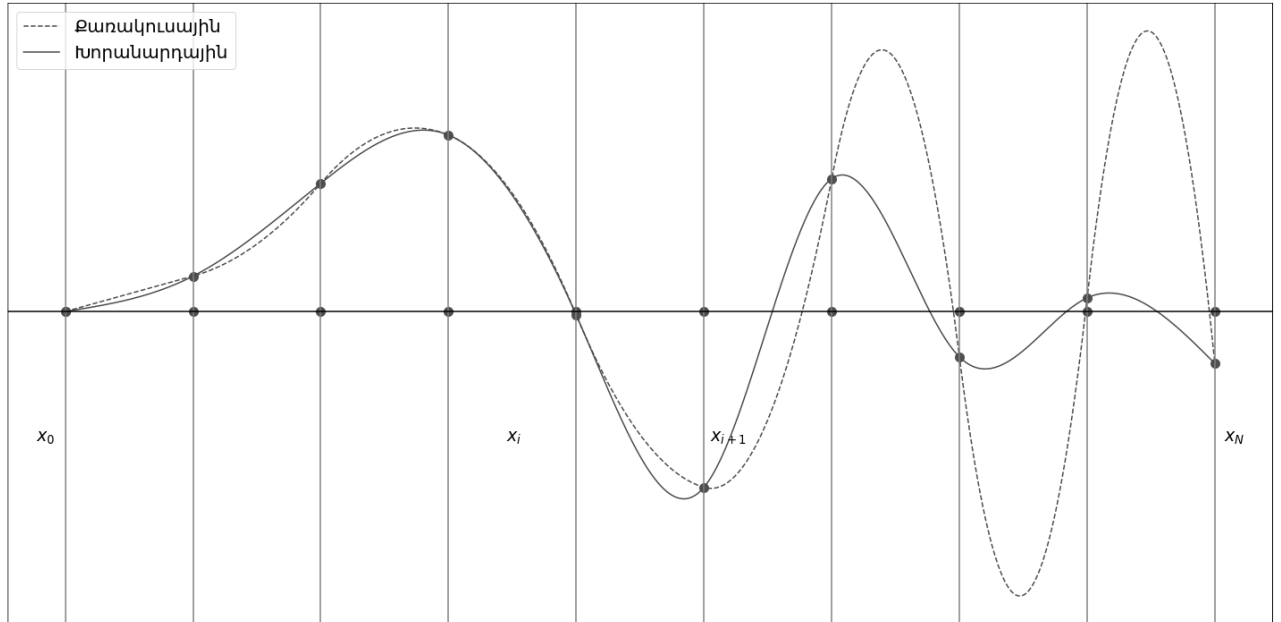
կստանանք հետևյալ տեսքի խորանարդային սփլայն.

$$S_3^{(i)}(x) = \frac{c_i}{6h} (x_{i+1} - x)^3 + \frac{c_{i+1}}{6h} (x - x_i)^3 + \left( \frac{f_i}{h} - \frac{hc_i}{6} \right) (x_{i+1} - x) + \left( \frac{f_{i+1}}{h} - \frac{hc_{i+1}}{6} \right) (x - x_i)$$

$c_i$  գործակիցները բավարարում են հետևյալ պայմաններին.

$$c_{i+1} + 4c_i + c_{i-1} = \frac{6}{h^2} (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1})$$

Ստորև ներկայացվում է քառակուսային և խորանարդային ինտերպոլացիայի օրինակ



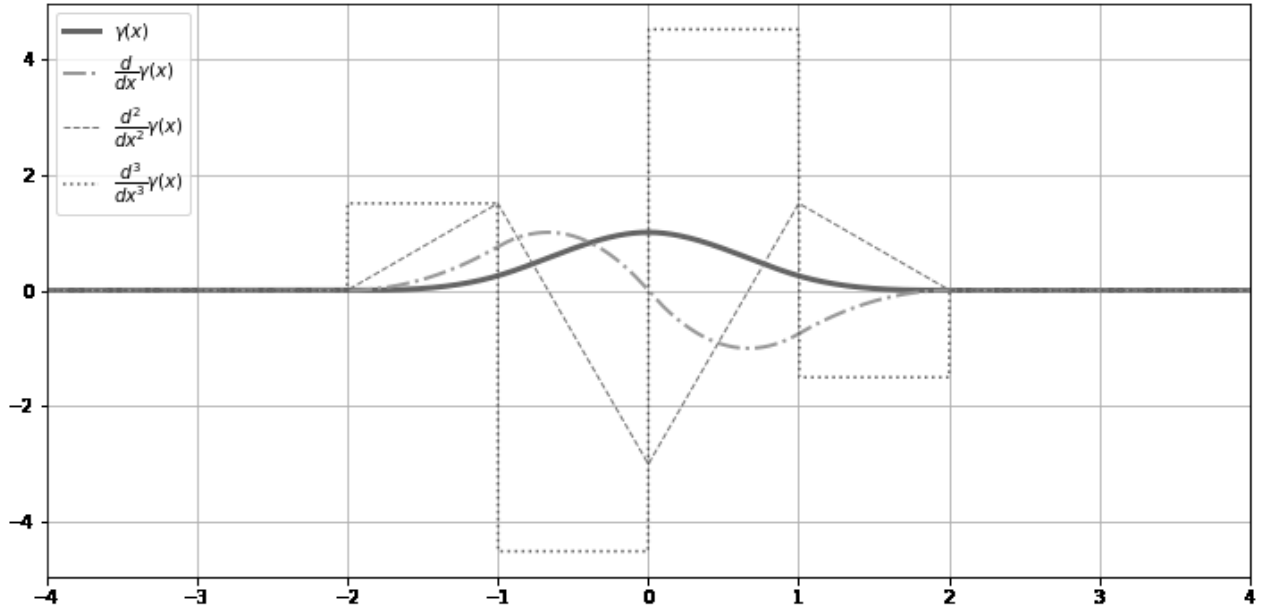
Նկար 3

Այժմ դիտարկենք լոկալ կրող ունեցող խորանարդային սփլայները: Այդպիսի սփլայ առաջարկել է ավստրացի մաթեմատիկոս Առնոլդ Շներբերգը:

Դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան.

$$\gamma(x) = \frac{1}{4} [(x+2)_+^3 - 4(x+1)_+^3 + (x)_+^3 - 4(x-1)_+^3 + (x-2)_+^3]$$

Ստորև ներկայացվում է  $\gamma$  ֆունկցիան և նրա մինչև երրորդ կարգի ածանցյալները.



Նկար 4

Ենթադրենք տրված է  $[x_0, x_N]$  ինտերվալը, և տրոհված է  $N$  հավասար մասերի  $h$  քայլով: Յուրաքանչյուր հանգուցային կետի ( $i = 2, \dots, N-2$ ) համար բազիսային ֆունկցիան տրվում է հետևյալ բանաձևով.

$$B_i\left(\frac{x}{h}\right) = \gamma\left(\frac{x-x_0}{h} - i\right)$$

Այս ֆունկցիաները և նրանց մինչև երկրորդ կարգի ածանցյալները հավասար են զրոյի  $\mathbb{R} \setminus [x_{i-2}, x_{i+2}]$  տիրույթում:

Մնացած բազիսային ֆունկցիաները պետք է կառուցել այլ կերպ, քանի որ դրանց մի մասը դուրս է ըկած  $[x_0, x_N]$  ինտերվալից:

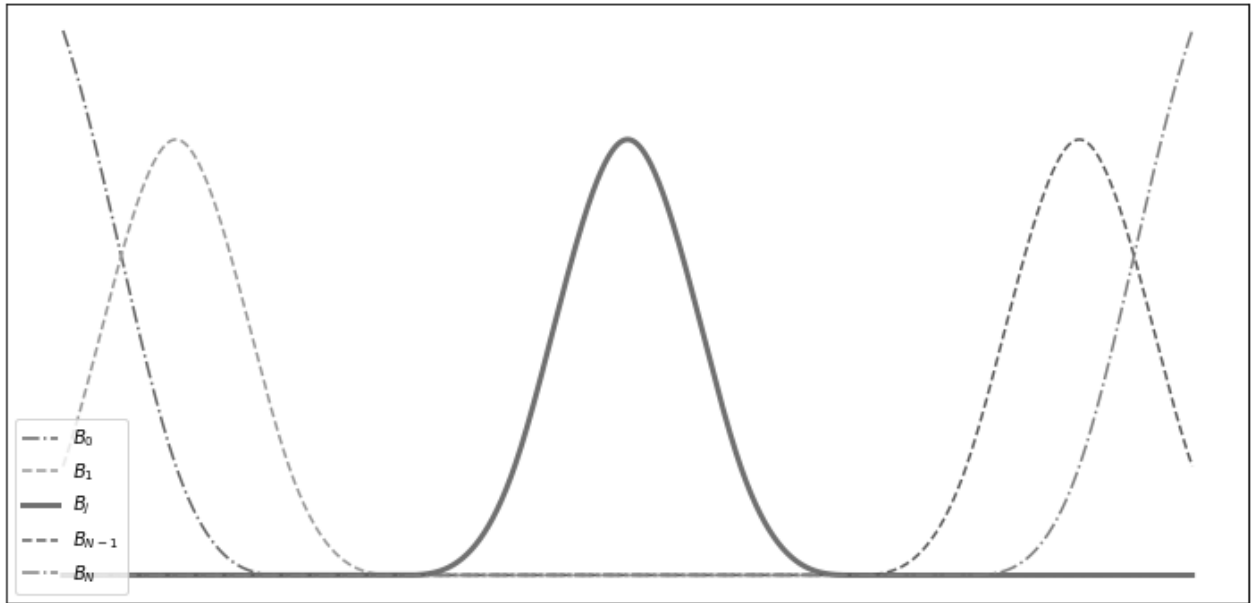
$$B_0\left(\frac{x}{h}\right) = \gamma\left(\frac{x}{h}\right) + \left(\frac{h-x}{4h}\right)_+^3, \quad x \in [x_0, x_2]$$

$$B_1\left(\frac{x}{h}\right) = \gamma\left(\frac{x}{h}\right), \quad x \in [x_0, x_3]$$

$$B_{N-1}\left(\frac{x}{h}\right) = \gamma\left(\frac{x}{h}\right), \quad x \in [x_{N-3}, x_N]$$

$$B_N\left(\frac{x}{h}\right) = \gamma\left(\frac{x}{h}\right) + \left(\frac{x - (N-1)h}{4h}\right)_+^3, \quad x \in [x_{N-2}, x_N]$$

Ստորև ներկայացվում է  $B_j$  բազիսների գծագիրը.



Նկար 5

Տրված  $\{f_j\}$  ինտերպոլացիոն տվյալներով կառուցենք սփլայն.

$$F(x) = \sum_{i=0}^N \alpha_i B_i\left(\frac{x}{h}\right)$$

Հաշվի առնելով ինտերպոլացիոն պայմանները.

$$F(x_i) = f_i$$

կստանանք հետևյալ հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} \frac{5}{4}\alpha_0 + \frac{1}{4}\alpha_0 & = f_0 \\ \frac{1}{4}\alpha_{j-1} + \alpha_j + \frac{1}{4}\alpha_{j+1} & = f_j \\ \frac{5}{4}\alpha_{N-1} + \frac{1}{4}\alpha_N & = f_N \end{cases}$$



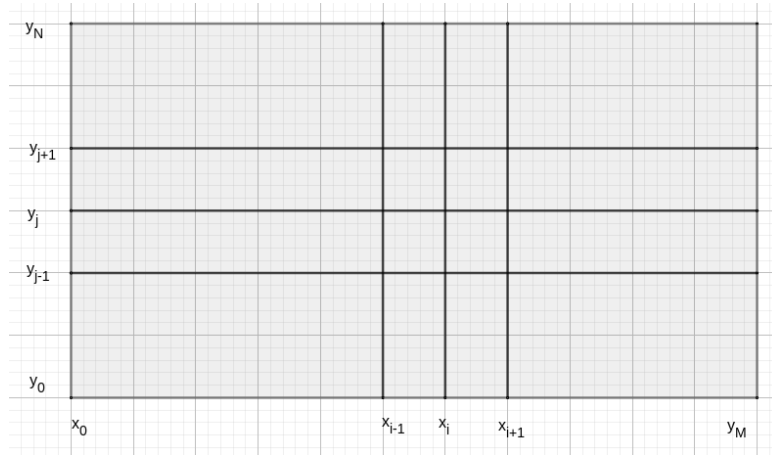
## Երկչափ մոտարկում

Այժմ դիտարկենք երկու փոփոխականի կտոր առ կտոր անընդհատ մոտարկման խնդիրը  $\partial R$  եզրով սահմանափակ  $R$  տիրույթում: Տիրույթը տրոհվում է որոշակի թվով էլեմենտների: Կախված  $R$  տիրույթից, առանձնացվում են հետևյալ մոտակման ձևերը.

### Ուղղանկյուն տիրույթ

Դիցուք տրված են  $f : \Omega \mapsto \Theta$ ,  $\Theta \subset \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = [x_0, x_M] \times [y_0, y_N]$ , ուղղանկյուն տիրույթը, որը տրոհված է  $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ , ուղղանկյուն էլեմենտների:

$$x_{i+1} - x_i = h_1, \quad y_{j+1} - y_j = h_2, \quad i = \overline{0, M-1}, j = \overline{0, N-1}$$



Նկար 6

### $C^{(0,0)}$ մոտարկում

Յուրաքանչյուր  $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$  էլեմենտի վրա  $f$  ֆունկցիան մոտարկվում հետևյալ քառակուսային ֆունկցիայով:

$$p_1^{(i,j)}(x, y) = \alpha_{i,j}(x, y)f(x_i, y_j) + \beta_{i+1,j}(x, y)f(x_{i+1}, y_j) + \gamma_{i,j+1}(x, y)f(x_i, y_{j+1}) + \delta_{i+1,j+1}(x, y)f(x_{i+1}, y_{j+1})$$

որտեղ

$$\alpha_{i,j}(x, y) = \frac{1}{h_1 h_2} (x_{i+1} - x)(y_{j+1} - y)$$

$$\beta_{i+1,j}(x, y) = \frac{1}{h_1 h_2} (x - x_i)(y_{j+1} - y)$$

$$\gamma_{i,j+1}(x, y) = \frac{1}{h_1 h_2} (x_{i+1} - x)(y - y_j)$$

$$\delta_{i+,j+1}(x,y) = \frac{1}{h_1 h_2} (x - x_i) (y - y_j)$$

Այսպիսով  $[x_0, x_M] \times [y_0, y_M]$  տիրույթում կտոր առ կտոր մոտարկող ֆունկցիան տրվում է հետևյալ կերպ.

$$p_1(x,y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \varphi_{i,j}(x,y) f(x_i, y_j)$$

որտեղ

$$\varphi_{i,j}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{h_1 h_2} (x - x_{i-1}) (y - y_{j-1}), & (x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \\ \frac{1}{h_1 h_2} (x - x_{i-1}) (y_{j+1} - y), & (x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_j, y_{j+1}] \\ \frac{1}{h_1 h_2} (x_{i+1} - x) (y - y_{j-1}), & (x,y) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j] \\ \frac{1}{h_1 h_2} (x_{i+1} - x) (y_{j+1} - y), & (x,y) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

Վերը դիտարկված մոտարկումը հանդիսանում է երկչափ Հերմիթյան մոտարկման մասնավոր դեպք:

Ընդհանուր դեպքում, տրված  $k \in \mathbb{N}$  թվի և տրված ուղղանկյուն տիրույթի ցանկացած ուղղանկյունաձև տրոհման էլեմենտում կարելի է կառուցել  $C^{k-1,k-1}$  կարգի մոտարկող բազմանդամ, որը  $2k-1$  -րդ կարգի բազմանդամ է ըստ իր յուրաքանչյուր փոփոխականի և, ինտերպոլացիայի պայմանները կարելի է գրել հետևյալ կերպ.

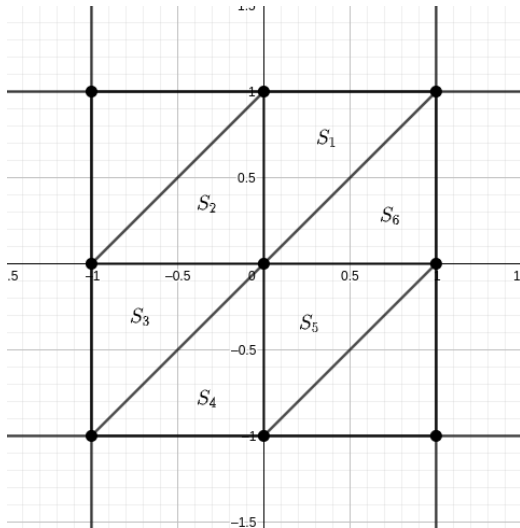
$$\frac{d^{p+q}}{dx^p dy^q} f(x_i, y_j) = \frac{d^{p+q}}{dx^p dy^q} p_{2k-1}(x_i, y_j)$$

$$p, q = \overline{0, k-1}; \quad i = \overline{0, M}; \quad j = \overline{0, N}$$

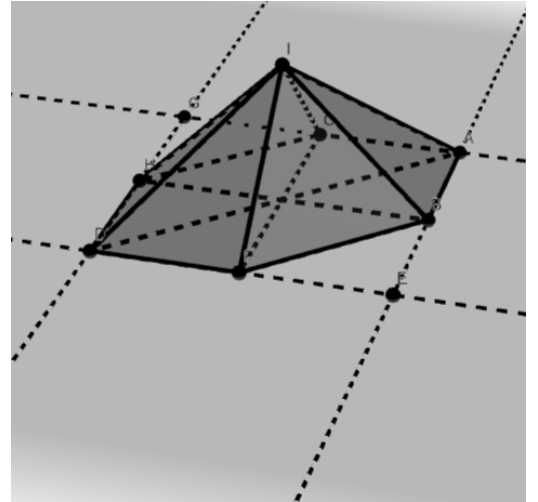
Այժմ դիտարկենք ուղղանկյուն տիրույթի տրոհման և բազիսային ֆունկցիաների կառուցման այլ տարբերակ: Այս դեպքում տիրույթը տրոհենք ըստ նախորդ տարբերակի, ի հավելումն յուրաքանչյուր ուղղանկյուն էլեմենտ տրոհելով երկու ուղղանկյուն եռանկյունների.

Դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան.

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1 - y, & (x, y) \in S_1 \\ 1 + x - y, & (x, y) \in S_2 \\ 1 + x, & (x, y) \in S_3 \\ 1 + y, & (x, y) \in S_4 \\ 1 - x + y, & (x, y) \in S_5 \\ 1 - x, & (x, y) \in S_6 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$



Նկար 7



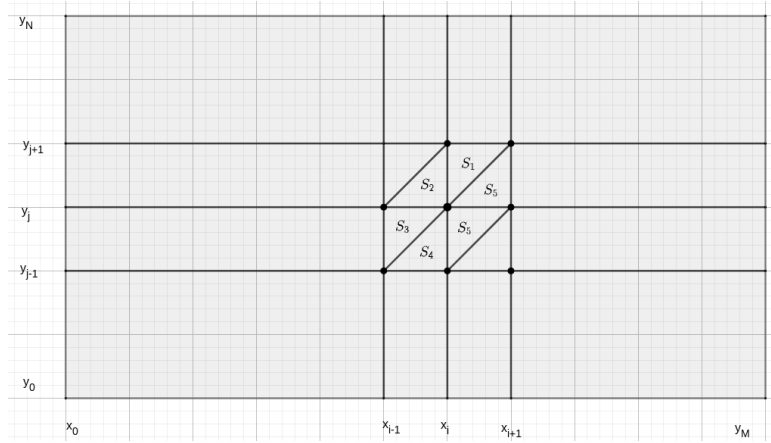
Նկար 8

Պարզ է, որ այն յուրաքանչյուր ուղղանկյուն էլեմենտում  $C^{(0,0)}$  ֆունկցիա է: Այժմ յուրաքանչյուր  $x_i, y_j$  կետի վրա կառուցենք հետևյալ ֆունկցիան.

$$\varphi_{i,j}(x, y) = \varphi\left(\frac{x - x_i}{h_1}, \frac{y - y_j}{h_2}\right)$$

Այդ դեպքում  $f$  ֆունկցիայի մոտարկման բանաձևը կտվրի հետևյալ կերպ:

$$p_1(x, y) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \varphi_{i,j}(x, y) f(x_i, y_j)$$



Նկար 9

### $C^{(2,2)}$ մոտարկում

Մեկ փոփոխականի մոտարկան խնդրը դիտարկելից քննարկեցինք Շներբերգի կողմից առաջարկված խորանարդային բազիսային սփյառումները: Այս սփյառումները կարող ենք օգտագործել երկչափ մոտարկման համար: Յուրաքանչյուր  $(x_i, y_j)$  հանգույցի վրա կառուցենք բազիսային ֆունկցիա կազմելով  $B_i\left(\frac{x}{h_1}\right)$  և  $B_j\left(\frac{y}{h_2}\right)$  ֆունկցիաների թենզորական արտադրյալը:

$$\varphi^{ij}(x, y) = B_i\left(\frac{x}{h_1}\right) B_j\left(\frac{y}{h_2}\right)$$

Տրված  $\{f_{ij}\}$  ինտերպոլացիոն տվյալներով կառուցենք սփյառ.

$$F(x, y) = \sum_{i=0}^N \alpha_{ij} \varphi^{ji}(x, y)$$

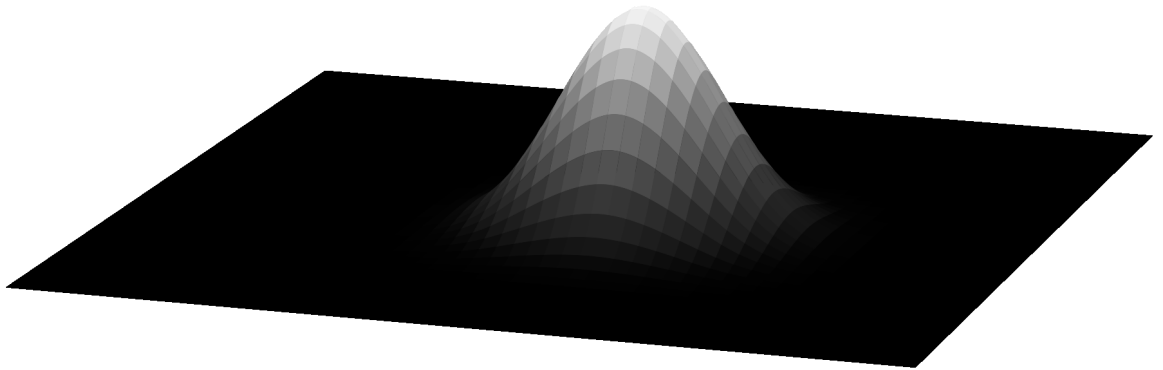
Հաշվի առնելով ինտերպոլացիոն պայմանները.

$$F(x_{ij}) = f_{ij}$$

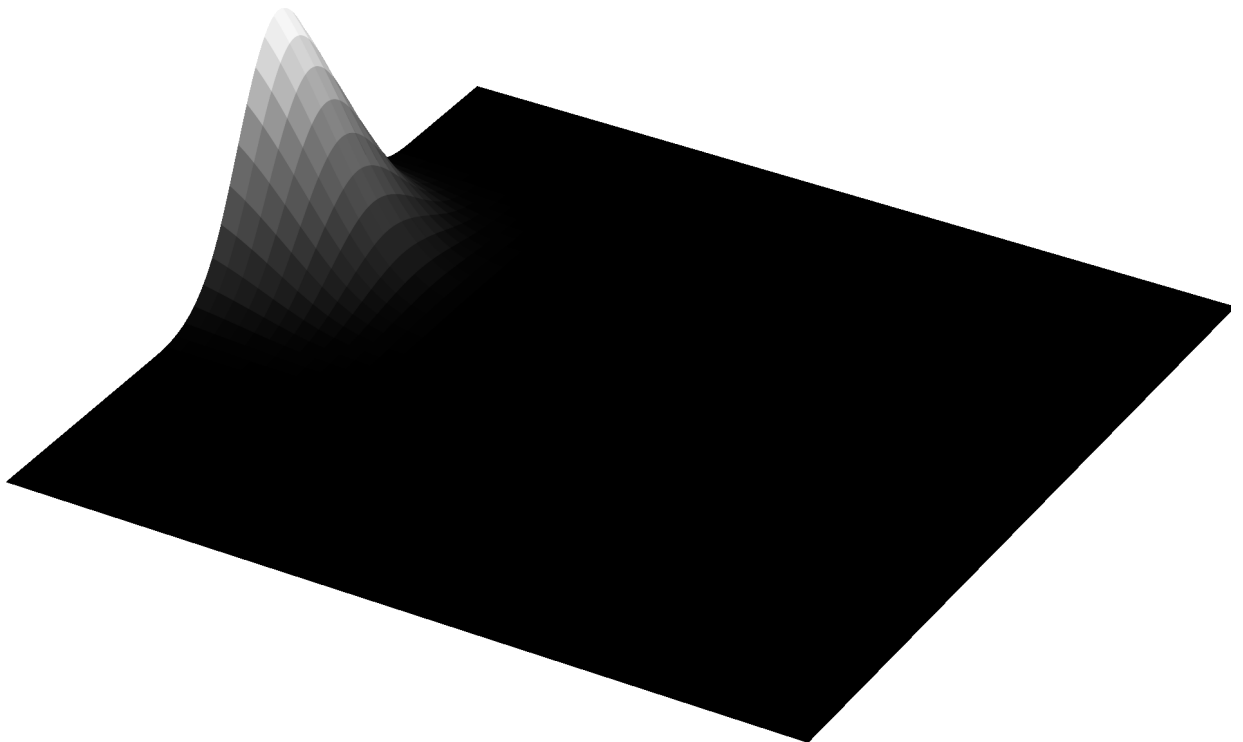
կստանանք հետևյալ հավասարումների համակարգը.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{00} + \frac{5}{16}(\alpha_{01} + \alpha_{10}) + \frac{1}{16}\alpha_{11} \\ \alpha_{M0} + \frac{5}{16}(\alpha_{M1} + \alpha_{M-1,0}) + \frac{1}{16}\alpha_{M-1,1} \\ \alpha_{0N} + \frac{5}{16}(\alpha_{1N} + \alpha_{0,N-1}) + \frac{1}{16}\alpha_{N-1,1} \\ \alpha_{MN} + \frac{5}{16}(\alpha_{M-1,N} + \alpha_{M,N-1}) + \frac{1}{16}\alpha_{M-1,N-1} \\ \frac{5}{4}\alpha_{i,1} + \frac{5}{16}(\alpha_{i-1,0} + \alpha_{i+1,0}) + \frac{1}{4}\alpha_{i,1} + \frac{1}{16}(\alpha_{i-1,1} + \alpha_{i+1,1}) \\ \frac{5}{4}\alpha_{i,N-1} + \frac{5}{16}(\alpha_{i-1,N} + \alpha_{i+1,N}) + \frac{1}{4}\alpha_{i,N-1} + \frac{1}{16}(\alpha_{i-1,N-1} + \alpha_{i+1,N-1}) \\ \frac{5}{4}\alpha_{1,j} + \frac{5}{16}(\alpha_{0,j-1} + \alpha_{0,j+1}) + \frac{1}{4}\alpha_{1,j} + \frac{1}{16}(\alpha_{1,j-1} + \alpha_{1,j+1}) \\ \frac{5}{4}\alpha_{M-1,j} + \frac{5}{16}(\alpha_{M,j-1} + \alpha_{M,j+1}) + \frac{1}{4}\alpha_{M-1,j} + \frac{1}{16}(\alpha_{M-1,j-1} + \alpha_{M-1,j+1}) \\ \alpha_{ij} + \frac{1}{4}(\alpha_{i,j-1} + \alpha_{i,j+1} + \alpha_{i-1,j} + \alpha_{i+1,j}) + \frac{1}{16}(\alpha_{i-1,j-1} + \alpha_{i-1,j+1} + \alpha_{i+1,j-1} + \alpha_{i+1,j+1}) \end{array} \right. = \begin{array}{l} f_{00} \\ f_{M0} \\ f_{0N} \\ f_{MN} \\ f_{i0} \\ f_{iN} \\ f_{0j} \\ f_{Mj} \\ f_{ij} \end{array}$$

Ստորև ներկայացվում է  $\varphi^{ij}$  բազիսային ֆունկցիաների գծագիրը.



Նկար 10



Նկար 11

### Բազմանկյուն տիրույթ

Բազմանկյուն տիրույթ ասելով կհասկանանք կամ հենց բազմանկյունաձև տիրույթը, կամ դրա՝ բազմանկյունով մոտարկումը:

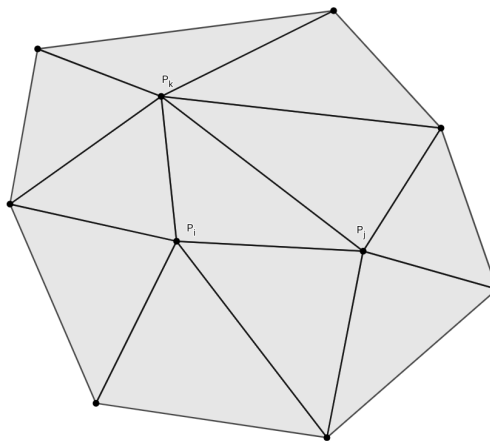
Դիցուք տրված են  $f : \Omega \mapsto \Theta$ ,  $\Theta \subset \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  բազմանկյուն տիրույթը, որը կամայական ձևով տրոհված է եռանկյուն էլեմենտների: Յուրաքանչյուր այդպիսի  $P_1, P_2, P_3$  գագաթներով եռանկյան համար դիտարկենք հետևյալ մոտարկող ֆունկցիան.

$$p_1(x, y) = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^3 p_i^{(1)}(x, y) f(x_i, y_i)$$

$$S = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$p_i^{(1)}(x, y) = x_j y_k - x_k y_j + x(y_j - y_k) - y(x_j - x_k)$$

որտեղ  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  տրված եռանկյուն էլեմենտի գագաթներն են (հերթականությունը ժամսլաքին հակառակ ուղղությամբ):



Նկար 12

Բնական է, որ որևէ կետի նկատմամբ լրիվ բազիսային ֆունկցիայի կառուցելու համար անհրաժեշտ է իրար գումարել այն բոլոր եռանկյուն էլեմենտների՝ այդ կետին համապատասխան ֆունկցիաները, որոնց համար տվյալ կետը գագաթ է: Հետևաբար, ընդհանուր դեպքում վերը նշված մոտարկան եղանակը հաշվողական տեսակետից հարմար չէ:

## Վարիացիոն մեթոդ

Վարիացիոն մեթոդները հանդիպում են բազմաթիվ ֆիզիկական և այլ խնդիրներում, և այդ խնդիրների մոտավոր լուծումը հիմնված է համապատասխան վարիացիոն մեթոդների վրա:

### Սահմանումներ

$f : \Omega \mapsto \Theta$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\Theta \subset \mathbb{R}$  ֆունկցիայի  $\epsilon$  շրջակայք ասելով կհասկանանք այն բոլոր  $g$  ֆունկցիաների բազմությունը, որոնց համար տեղի ունի

$$|f - g| < \epsilon$$

պայմանը:

### Խնդրի դրվածքը

Վարիացիոն մեթոդի սկզբունքն այն է, որ դիտարկվող ֆունկցիայի ինտեգրալը տրված տիրույթում ընդունում է մեծագույն (փոքրագույն) արժեք տվյալ համակարգի իրական վիճակի համար, համեմատած բոլոր հնարավոր վիճակների բազմության հետ: Ենթաինտեգրալային ֆունկցիան կախված է տրված կոորդինատներից, ֆունկցիայի արժեքից, նրա ածանցյալներից, իսկ ինտեգրումը կատարվում է տրված կոորդինատական համակարգում, որը կարող է ներառել նաև ժամանակը: Մինիմումի որոշման խնդիրը հաճախ բերվում է մի քանի դիֆերենցիալ հավասարումների, համապատասխան եզրային պայմաններով:

Այն հանդիսանում է իրական փոփոխականի ֆունկցիայի էքստրեմումի որոնման խնդրի ընդհանրացում, որտեղ տվյալ ֆունկցիայի համար կոմպակտ տիրույթում անհրաժեշտ է գտնել այսպիսի կետեր, որոնք հանդիսանում են մինիմում (մաքսիմում) այդ տիրույթի որևէ շրջակայքում:

Վարիացիոն մեթոդում ինտեգրալը հանդիսանում է ֆունկցիոնալ, որը կախված է ֆունկցիայից, որի որոշման տիրույթը հանդիսանում է թույլատրելի ֆունկցիաների տարածությունն է:

Այս մեթոդի հիմնական դժվարությունը կայանում է նրանում, որ խնդիրները, որոնք կարող են ձևակերպվել որպես վարիացիոն, հնարավոր է, որ լուծում չունենան այն պատճառով, որ ֆունկցիոնալ տարածությունները կոմպակտ չեն:

Սակայն վարիացիոն մեթոդի հիմնական առավելությունն այն է, որ դրա կիրառման համար դրվող պահանջները ավելի թույլ են, որը թույլ է տալիս միայն անընդհատ



Ֆունկցիաներով կառուցել մոտավոր լուծում, առանց ածանցյալների անընդհատության պայմանի:

## Օրինակներ

Որպես օրինակ դիտարկենք հետևյալ կրկնակի ինտեգրալը.

$$I(f) = \iint_{\Omega} F(x, y, f, f_x, f_y) dx dy$$

որտեղ  $f \in C^2(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  և որի արժեքները որոշված են  $\partial\Omega$  ում: Այս դեպքում մինիմումի անհրաժեշտ է, որ  $f(x, y)$  ֆունկցիան բավարարի Էյլեր-Լագրանժի հավասարմանը, հավելելով համապատասխան եզրային պայմանները:

$$\frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} - F_u = 0$$

Օրինակ,  $F = \frac{1}{2} (u_x^2 + u_y^2)$  դեպքում խնդիրը բերվում է Լապլասի հավասարմանը.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Այժմ պարզ է, որ երկրորդ կարգի ածանցյալների անընդհատությունը անհրաժեշտ է Էյլեր-Լագրանժի հավասարման գոյության համար: Բայց վարիացիոն մեթոդը պահանջում է միայն  $f$  ի անընդհատություն և առաջին կարգի մասնակի ածանցյալների կտոր առ կտոր անընդհատություն:

## Ստացիոնար խնդիրներ

Դիֆերենցիալ հավասարումը, որը կապված է վարիավիոն խնդրի հետ, կոչվում է Էյլեր-Լագրանժի հավասարում: Այս հանդիսանում է միայն անհրաժեշտ պայման, որին պետք է բավարարի ֆունկցիան, որը մինիմիզացնում (մաքսիմիզացնում) է ֆունկցիոնալը: Դիտարկենք հետևյալ օրինակները.

1. Մեկ փոփոխականի ֆունկցիա.

$$f \in \Omega \mapsto \Theta, \quad \Omega, \Theta \subset \mathbb{R}$$

Այս դեպքում ֆունկցիոնալն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$I(f) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, f, f') dx$$

որտեղ  $f(x_0)$  և  $f(x_1)$ ,  $x_0, x_1 \in \Theta$  ը տրված են: Մինիմումում գոյության անհրաժեշտ պայման է հանդիսանում հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} = 0$$

Որը համարժեք է.

$$\frac{d^2 f}{dx^2} F_{f' f'} + \frac{df}{dx} F_{f' f} + F_{f' x} - F_f = 0$$

2. Մի քանի անհատ ֆունկցիաներ ֆունկցիա.

$$f, g \in \Omega \mapsto \Theta, \Omega, \Theta \subset \mathbb{R}$$

Այս դեպքում ֆունկցիոնալն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$I(f) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, f, g, f', g') dx$$

որտեղ  $f(x_0), f(x_1), g(x_0), g(x_1), x_0, x_1 \in \Theta$  ը տրված են: Մինիմիում գոյության անհրաժեշտ պայման է հանդիսանում հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը.

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial g} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial g'} = 0$$

3. Բարձր կարգի ածանցյալներ.

$$f \in \Omega \mapsto \Theta, \Omega, \Theta \subset \mathbb{R}$$

Այս դեպքում ֆունկցիոնալն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$I(f) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, f, f', f'', \dots, f^{(n)}) dx$$

որտեղ  $f(x_0), f(x_1), f'(x_0), f'(x_1), x_0, x_1 \in \Theta$  ը տրված են: Մինիմիում գոյության անհրաժեշտ պայման է հանդիսանում հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial f''} - \dots (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{\partial F}{\partial f^{(n)}} = 0$$

4. Մի քանի անկախ փոփոխականներ.

$$f \in \Omega \mapsto \Theta, \Omega \subset \mathbb{R}^n, \Theta \subset \mathbb{R}$$

Այս դեպքում ֆունկցիոնալն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$I(f) = \int_{\Omega} \cdots \int F(x, f, f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}) d\Omega$$

որտեղ  $f$  ֆունկցիայի արժեքները  $\partial\Omega$ -ի վրա տրված են:

Մինիմիում գոյության անհրաժեշտ պայման է հանդիսանում հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx_1} \frac{\partial F}{\partial f_{x_1}} - \cdots - \frac{d}{dx_n} \frac{\partial F}{\partial f_{x_n}} = 0$$

### Եզրային պայմաններ

Նախորդիվ դիտարկել էինք այնպիսի խնդիրներ, որտեղ ֆունկցիան արժեքները տրված տիրույթի եզրի տրված են: Սակայն որոշ խնդիրներում ֆունկցիան տիրույթի եզրում տրված չէ, և տրվում են այլ տիպի եզրային պայմաններ: Նման դեպքերում որպես եզրային պայման դիտարկվում են հետևյալ պայմանները.

Մեկ փոփոխականի ֆունկցիա

$$\frac{\partial F}{\partial f'} = 0$$

Երկու անհայտ ֆունկցիա

$$\frac{\partial F}{\partial f'} = \frac{\partial F}{\partial g'}$$

Երկու փոփոխականի ֆունկցիա

$$F_{u_x} \frac{dy}{ds} - F_{u_y} \frac{dx}{ds} = 0$$

որոնք հայտնի են որպես *բնական կամ գլխավոր* եզրային պայմաններ:

### Պայմանական էքստրեմում

Այսպիսի վարիացիոն խնդիրներում անհրաժեշտ է մինիմիզացնել (մաքսիմիզացնել) տրված ֆունկցիոնալը, պայմանով, որ մեկ այլ ֆունկցիոնալ ընդունում է որևէ արժեք այդ ֆունկցիայի համար: Այսինքն, եթե դիտարկենք ֆունկցիանալ, որի արժեքների բազմությունը մեկ փոփոխականի ֆունկցիաներ են, ապա կունենանք.

$$I(f) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, f, f') dx$$

$$\int_{x_0}^{x_1} G(x, f, f') dx = C$$

Այս խնդրի համար Էյլեր-Լագրանժի հավասարումը հետևյալն է.

$$\frac{\partial (F + \lambda G)}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial (F + \lambda G)}{\partial f'} = 0$$

## Մոտավոր մեթոդներ. Վերջավոր էլեմենտների մեթոդ

Խնդիրների վարիացիոն մեթոդով ձևակերպումը, և վարիացիոն մեթոդների ավելի թույն պայմանները թույլ են տալիս այդ խնդիրները լուծել մոտավոր մեթոդներով, որոնք հաճախ անվանվում են ուղիղ մեթոդներ: Ուղիղ մեթոդներից է Ռիտցի մինիմիզացնող հաջորդականության մեթոդը, որը քննության կառնենք:

### Ռիտցի մեթոդ

Դիտարկենք որևէ վարիացիոն մեթոդով տրված մինիմիզացիայի խնդիր.

$$I(f) \longrightarrow \min, f \in \Gamma$$

որտեղ  $I$  ֆունկցիոնալը տրված տիրույթում որոշյալ ինտեգրալ է:

Մոտավոր լուծում կարելի է ստանալ, եթե ֆունկցիոնալի արժեքների բազմությունը սահմանափակենք որևէ վերջավոր չափանի ենթատարածությունով, որն ունի  $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$  բազիս:

$$\Gamma_N \in \Gamma$$

Ենթադրենք, որ  $I$  ֆունկցիոնալի արժեքների տիրույթը ունի ճշգրիտ ստորին եզր, նշանակենք այն  $\alpha_0$  ով: Այդ դեպքում գոյություն ունի  $\{f_j\}_{j=1}^\infty$  հաջորդականություն այնպիսին, որ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} I\left(\sum_{j=1}^n \gamma_j \varphi_j\right) = \alpha_0$$

և ֆունկցիոնալի որոշման տիրույթի ցանկացած այլ  $g$  ֆունկցիայի համար

$$I(g) \geq \alpha_0$$

լուծումը փնտրենք հետևյալ կերպ.

$$f_0 = \sum_{j=1}^N \gamma_j \varphi_j, \quad \gamma_j \in \mathbb{R}$$

Այդ դեպքում խնդիրը բերվում է սովորական մինիմումի խնդրի.

$$\frac{\partial I}{\partial \gamma_i} = \frac{\partial}{\partial \gamma_i} I\left(\sum_{j=1}^N \gamma_j \varphi_j\right) = 0$$

## Պուասոնի հավասարման լուծում Ռիտցի մեթոդով

Դիտարկենք հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

որտեղ  $D = [x_0, x_N] \times [y_0, y_M]$ :

Այս դիֆերենցիալ հավասարման համապատասխան վարիացիոն խնդիրը կլինի.

$$I(u) = \frac{1}{2} \iint_D [u_x^2 + u_y^2] dx dy + \iint_D f u dx dy \longrightarrow \min$$

$D$  տիրույթը տրոհենք ուղղանկյուն եղանակյունների, և որպես բազիսային ֆունկցիաներ վերցնենք Կուրանտի ֆունկցիաները.

$$\varphi_{i,j}(x, y) = \varphi \left( \frac{x - x_i}{h_1}, \frac{y - y_j}{h_2} \right)$$

Որոնելի ֆունկցիան կփնտրենք բազիսային ֆունկցիաների գծային կոմբինացիայի տեսքով.

$$u(x, y) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_{i,j}(x, y)$$

Ուստի ինտեգրալային ֆունկցիոնալը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$\frac{1}{2} \iint_D \left[ \left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_{x,ij}(x, y) \right)^2 + \left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_{y,ij}(x, y) \right)^2 \right] dx dy + \iint_D f(x, y) \left[ \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_{ij}(x, y) \right] dx dy$$

Համաձայն էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանի.

$$\frac{\partial I}{\partial u_{kl}} = \frac{\partial}{\partial u_{kl}} I \left( \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_{i,j}(x, y) \right) = 0$$

Դիտարկենք առաջին կրկնակի գումարը.

$$\left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_{x,ij}(x, y) \right)^2 = u_{kl}^2 \varphi_{x,kl}^2(x, y) + 2u_{kl} \varphi_{x,kl}(x, y)[\dots] + [\dots]^2$$

որտեղ բազմակետերով արտահայտությունը իր մեջ չի պարունակում  $u_{kl}$  ը:

Հանգումորեն, երկրորդ կրկնակի գումարի համար՝

$$\left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_{y,ij}(x, y) \right)^2 = u_{kl}^2 \varphi_{y,kl}^2(x, y) + 2u_{kl} \varphi_{y,kl}(x, y)[\dots] + [\dots]^2$$

Այսպիսով ավելի պարզեցված տեսքով համակարգը ունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{\partial}{\partial u_{kl}} I(u) = \iint_D [2u_{kl}\varphi_{x,kl}^2(x,y) + 2\varphi_{x,kl}(x,y)[\dots] + 2u_{kl}\varphi_{y,kl}^2(x,y) + 2\varphi_{y,kl}(x,y)[\dots] + 2f(x,y)\varphi_{kl}(x,y)] dx dy$$

Դիտարկենք  $\varphi_{x,kl}(x,y)$  և  $\varphi_{y,kl}(x,y)$  ֆունկցիաները:

$$\varphi_{x,kl}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in S_1 \\ \frac{1}{h_1}, & (x,y) \in S_2 \\ -\frac{1}{h_1}, & (x,y) \in S_3 \\ 0, & (x,y) \in S_4 \\ -\frac{1}{h_1}, & (x,y) \in S_5 \\ -\frac{1}{h_1}, & (x,y) \in S_6 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad \varphi_{y,kl}(x,y) = \begin{cases} -\frac{1}{h_2}, & (x,y) \in S_1 \\ \frac{1}{h_2}, & (x,y) \in S_2 \\ 0, & (x,y) \in S_3 \\ \frac{1}{h_2}, & (x,y) \in S_4 \\ -\frac{1}{h_2}, & (x,y) \in S_5 \\ 0, & (x,y) \in S_6 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Քանի որ  $\varphi_{x,kl}^2(x,y)$  և  $\varphi_{y,kl}^2(x,y)$  ֆունկցիաները ոչ զրոյական են  $[x_{k-1,l}, x_{k+1,l}] \times [y_{k,l-1}, y_{k,l+1}]$  ում, ապա

$$\iint_D 2u_{kl}\varphi_{x,kl}^2(x,y) dx dy = 4u_{kl} \frac{h_2}{h_1}$$

$$\iint_D 2u_{kl}\varphi_{y,kl}^2(x,y) dx dy = 4u_{kl} \frac{h_1}{h_2}$$

Քանի որ յուրաքանչյուր  $\varphi_{kl}$  բազիսային ֆունկցիա հատվում է  $\varphi_{k-1,l}$ ,  $\varphi_{k+1,l}$ ,  $\varphi_{k,l-1}$ ,  $\varphi_{k,l+1}$  ֆունկցիաների հետ, ապա

$$\begin{aligned} \iint_D 2\varphi_{x,kl}(x,y)[\dots] dx dy = \\ 2 \iint_D \varphi_{x,kl}(x,y)[u_{k-1,l}\varphi_{x,k-1,l}(x,y) + u_{k+1,l}\varphi_{x,k+1,l}(x,y) + u_{k,l-1}\varphi_{x,k,l-1}(x,y) + u_{k,l+1}\varphi_{x,k,l+1}(x,y)] dx dy = \\ = -2u_{k-1,l} \frac{h_2}{h_1} - 2u_{k+1,l} \frac{h_2}{h_1} \end{aligned}$$

Հանգումորեն՝

$$2 \iint_D \varphi_{y,kl}(x,y)[\dots] dx dy = -2u_{k,l-1} \frac{h_1}{h_2} - 2u_{k,l+1} \frac{h_1}{h_2}$$



Եվ վերջապես

$$2 \iint_D f(x, y) \varphi_{kl}(x, y) dx dy \approx 2 f_{kl} h_1 h_2$$

Դիրիխլեի եզրային պայմանների համար կունենանք:

$$u_{0,l} = u_{N,l} = u_{k,0} = u_{k,M} = 0$$

Այսպիսով, ստացանք հետևյալ հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} 2 \left[ \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right] u_{kl} - \frac{1}{h_1^2} u_{k-1,l} - \frac{1}{h_1^2} u_{k+1,l} - \frac{1}{h_2^2} u_{k,l-1} - \frac{1}{h_2^2} u_{k,l+1} + f_{kl} = 0 \\ u_{0,l} = u_{N,l} = u_{k,0} = u_{k,M} = 0 \end{cases}$$

## Ծրագրային իրականացում

Պուասոնի հավասարման մոտավոր լուծումը իրականացնելու համար օգտվենք Python ծրագրավորման լեզվից, օգտագործելով Numpy գրադարանը, որը հարմար է բազմաչափ զանգվածների հետ մաթեմատիկական գործողություններ իրականացնելու համար: Վիզուալիզացիայի համար կօգտվենք Matplotlib գրադարանից:

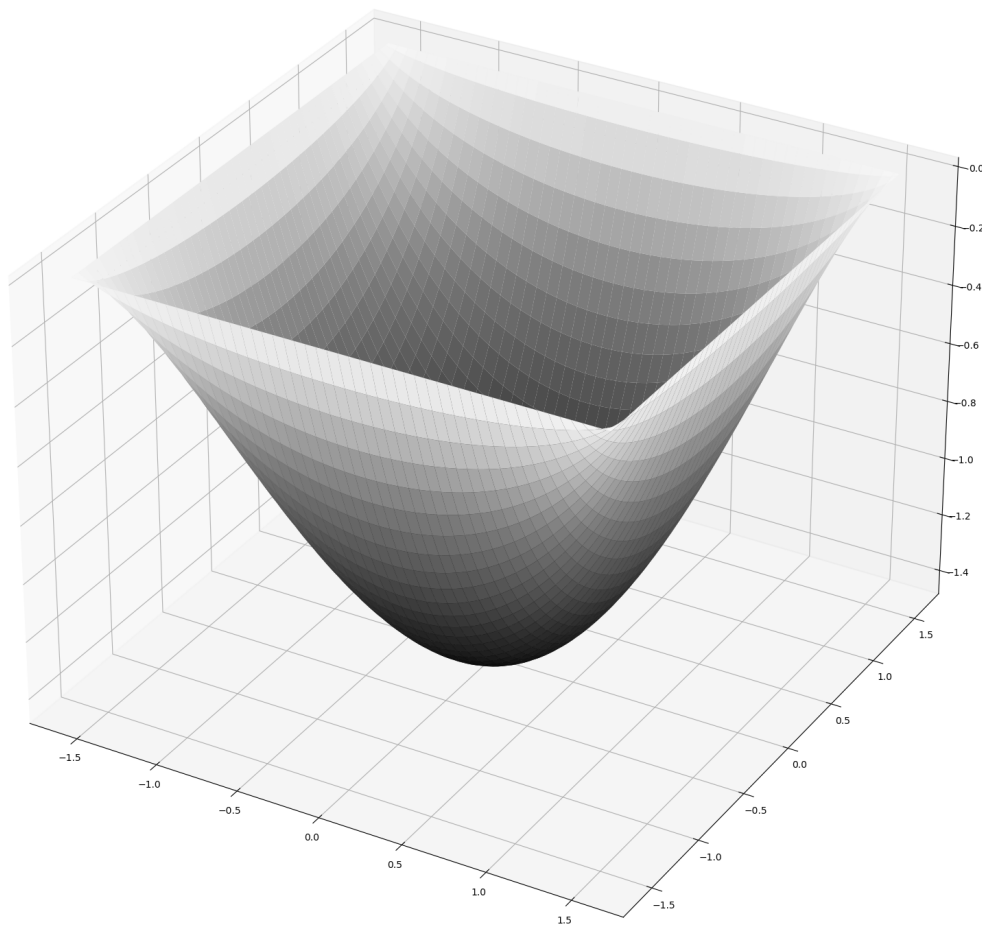
Ծրագրի սկզբում տրվում է ուղղանկյուն տիրույթի սահմանները և դրա տրոհման  $h_1$  և  $h_2$  քայլերը,  $f$  ֆունկցիան: Հաջորդիվ կազմվում է հավասարումների համակարգը, կանչվում այն լուծող ֆունկցիան: Այսնուհետև բազիսային ֆունկցիաների միջոցով կառուցվում է մոտարկող ֆունկցիան:

Օրինակ

$$\begin{cases} \Delta u = 2 \\ u|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

$$D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad h_1 = h_2 = \frac{\pi}{200}$$

Խնդրի համար ստացված լուծումը.



Նկար 13

## Բիհարմոնիկ հավասարում

Դիտարկենք հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\begin{cases} \Delta^2 u &= f \\ u|_{\partial D} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} &= 0 \end{cases}$$

որտեղ  $D = [x_0, x_N] \times [y_0, y_M]$ :

Այս դիֆերենցիալ հավասարման համապատասխան վարիացիոն խնդիրը կլինի.

$$I(u) = \frac{1}{2} \iint_D [u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2] dx dy - \iint_D f u dx dy \longrightarrow \min$$

$D$  տիրույթը տրոհենք ուղղանկյունների  $h_1$  և  $h_2$  քայլերով համապատասխանաբար ըստ  $x$  և  $y$  կոորդինատների: Որոնելի ֆունկցիան կփնտրենք բազիսային ֆունկցիաների գծային կոմբինացիայի տեսքով.

$$u(x, y) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi^{ij}(x, y)$$

Հետևաբար ինտեգրալ ֆունկցիոնալը կունենք հետևյալ տեսքը.

$$\frac{1}{2} \iint_D \left[ \left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_{xx}^{ij}(x, y) \right)^2 + 2 \left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_{xy}^{ij}(x, y) \right)^2 + \left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_{yy}^{ij}(x, y) \right)^2 \right] dx dy - \iint_D f(x, y) \left[ \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi^{ij}(x, y) \right] dx dy$$

Համաձայն էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանի.

$$\frac{\partial I}{\partial u_{kl}} = \frac{\partial}{\partial u_{kl}} I \left( \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi^{ij}(x, y) \right) = 0$$

Դիտարկենք առաջին կրկնակի գումարը.

$$\left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_{xx}^{ij}(x, y) \right)^2 = [u_{kl} \varphi_{xx}^{kl}(x, y)]^2 + 2u_{kl} \varphi_{xx}^{kl}(x, y)[\dots] + [\dots]^2$$

որտեղ բազմակետերով արտահայտությունը իր մեջ չի պարունակում  $u_{kl}$  ը: Հանգումորեն երկրորդ կրկնակի գումարի համար.

$$\left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_{xy}^{ij}(x, y) \right)^2 = [u_{kl} \varphi_{xy}^{kl}(x, y)]^2 + 2u_{kl} \varphi_{xy}^{kl}(x, y)[\dots] + [\dots]^2$$

Հանգումորեն երրորդ կրկնակի գումարի համար.

$$\left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_{yy}^{ij}(x, y) \right)^2 = [u_{kl} \varphi_{yy}^{kl}(x, y)]^2 + 2u_{kl} \varphi_{yy}^{kl}(x, y)[\dots] + [\dots]^2$$

Այսպիսով ավելի պարզեցված տեսքով համակարգը ունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{\partial}{\partial u_{kl}} I(u) = \iint_D [2u_{kl} \{ \varphi_{xx}^{kl}(x, y) \}^2 + 2\varphi_{xx}^{kl}(x, y)[\dots] + 4u_{kl} \{ \varphi_{xy}^{kl}(x, y) \}^2 + 4\varphi_{xy}^{kl}(x, y)[\dots] + 2 \{ \varphi_{yy}^{kl}(x, y) \}^2 + 2u_{kl} \varphi_{yy}^{kl}(x, y)[\dots] + 2f(x, y) \varphi_{kl}(x, y)] dx dy$$

Քանի որ տրված են Դիրիխլեի և Նեյմանի եզրային պայմանները, կոդիտարկենք միայն  $2 \leq k \leq M-2, 2 \leq l \leq N-2$  դեպքերը:  
Ինտեգրալը հաշվենք անդամ առ անդամ:

$$\iint_D 2u_{kl} \{ \varphi_{xx}^{kl}(x, y) \}^2 dx dy = 2u_{kl} \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} \{ B_k''(x) B_l(y) \}^2 dx dy = 2u_{kl} \cdot \frac{6}{h_1^3} \cdot \frac{151}{140} h_2$$

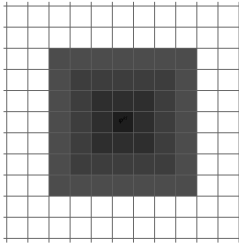
$$\iint_D 4u_{kl} \{ \varphi_{xy}^{kl}(x, y) \}^2 dx dy = 4u_{kl} \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} \{ B_k'(x) B_l'(y) \}^2 dx dy = 4u_{kl} \cdot \frac{3}{2h_1} \cdot \frac{3}{2h_2}$$

$$\iint_D 2u_{kl} \{ \varphi_{yy}^{kl}(x, y) \}^2 dx dy = 2u_{kl} \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} \{ B_k(x) B_l''(y) \}^2 dx dy = 2u_{kl} \cdot \frac{151}{140} h_2 \cdot \frac{6}{h_1^3}$$

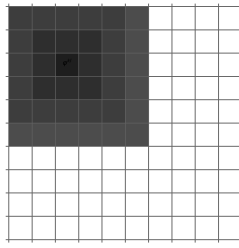
$$\begin{aligned} \iint_D 2f(x, y) \varphi^{kl}(x, y) dx dy &= 2 \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} f(x, y) B_k(x) B_l(y) dx dy \approx \\ &\approx \frac{2}{9} h_1 h_2 [f_{k-1,l} + 2f_{k,l} + f_{k+1,l}] [f_{k,l-1} + 2f_{k,l} + f_{k,l+1}] \end{aligned}$$

Դիտարկենք մյուս ինտեգրալները: Քանի որ  $\varphi^{ij}$  բազիսային ֆունկցիաները ունեն լոկալ կրողներ  $4 \times 4 = 16$  ուղղանկյուն էլեմենտներում, ապա տրված  $\varphi^{kl}$  ֆունկցիան հատվում է 49 այլ բազիսային ֆունկցիաների հետ: Բացառություն են կազմում  $i = 2, M-2, j = 2, N-2$  դեպքերը, որոնց համար լոկալ կրողը  $6 \times 7 = 42$  է եզրին հարող հանգույցների համար, և  $6 \times 6 = 36$  անկյուններին հարող հանգույցների համար: Ստորև ներկայացվում է երեք հնարավոր դեքերը (արտակատկերման համար ներկված հանգույցները պատկերված են ուղղանկյունների տեսքով):

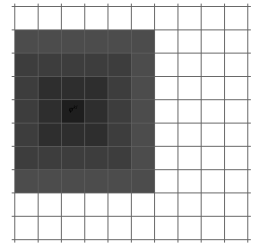
$$\iint_D 2\varphi_{xx}^{kl}(x, y)[\dots] dx dy, \iint_D 4\varphi_{xy}^{kl}(x, y)[\dots] dx dy, \iint_D 2\varphi_{yy}^{kl}(x, y)[\dots] dx dy$$



Նկար 14



Նկար 15



Նկար 16

ինտեգրալները ներկայացնենք կրկնակի ինտեգրալների տեսքով:

$$\iint_D 2\varphi_{xx}^{kl}(x, y)[\dots]dxdy = 2 \sum_{\substack{i=k-3 \\ i \neq k}}^{k+3} \sum_{\substack{j=l-3 \\ j \neq l}}^{l+3} u_{ij} \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k''(x)B_i''(x)dx \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y)B_j(y)dy$$

$$\iint_D 4\varphi_{xy}^{kl}(x, y)[\dots]dxdy = 4 \sum_{\substack{i=k-3 \\ i \neq k}}^{k+3} \sum_{\substack{j=l-3 \\ j \neq l}}^{l+3} u_{ij} \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k'(x)B_i'(x)dx \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l'(y)B_j'(y)dy$$

$$\iint_D 2\varphi_{yy}^{kl}(x, y)[\dots]dxdy = 2 \sum_{\substack{i=k-3 \\ i \neq k}}^{k+3} \sum_{\substack{j=l-3 \\ j \neq l}}^{l+3} u_{ij} \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x)B_i(x)dx \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l''(y)B_j''(y)dy$$

Դիտարկենք հետևյալ դեքայերը.

$$1. \quad 3 \leq k \leq M-3, \quad 3 \leq l \leq N-3$$

Առաջին ինտեգրալի համար

$$\int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k''(x)B_{k-3}''(x)dx = \frac{3}{8h_1^3}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k''(x)B_{k-2}''(x)dx = 0, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k''(x)B_{k-1}''(x)dx = -\frac{27}{8h_1^3}$$

$$\int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k''(x)B_{k+1}''(x)dx = -\frac{27}{8h_1^3}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k''(x)B_{k+2}''(x)dx = 0, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k''(x)B_{k+3}''(x)dx = \frac{3}{8h_1^3}$$

$$\int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y)B_{l-3}(y)dy = \frac{h_2}{2240}, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y)B_{l-2}(y)dy = \frac{3h_2}{56}, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y)B_{l-1}(y)dy = \frac{1991h_2}{2240}$$

$$\int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y)B_{l+1}(y)dy = \frac{1991h_2}{2240}, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y)B_{l+2}(y)dy = \frac{3h_2}{56}, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y)B_{l+3}(y)dy = \frac{h_2}{2240}$$

### Երկրորդ ինտեգրալի համար

$$\int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B'_k(x) B'_{k-3}(x) dx = \frac{-3}{160h_1}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B'_k(x) B'_{k-2}(x) dx = \frac{-9}{20h_1}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B'_k(x) B'_{k-1}(x) dx = \frac{-9}{32h_1},$$

$$\int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B'_k(x) B'_{k+1}(x) dx = \frac{-9}{32h_1}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B'_k(x) B'_{k+2}(x) dx = \frac{-9}{20h_1}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B'_k(x) B'_{k+3}(x) dx = \frac{-3}{160h_1},$$

$$\int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B'_l(y) B'_{l-3}(y) dy = \frac{-3}{160h_2}, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B'_l(y) B'_{l-2}(y) dy = \frac{-9}{20h_2}, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B'_l(y) B'_{l-1}(y) dy = \frac{-9}{32h_2},$$

$$\int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B'_l(y) B'_{l+1}(y) dy = \frac{-9}{32h_2}, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B'_l(y) B'_{l+2}(y) dy = \frac{-9}{20h_2}, \quad \int_{y_{l+2}}^{y_{l+2}} B'_l(y) B'_{l+3}(y) dy = \frac{-3}{160h_2},$$

### Երրորդ ինտեգրալի համար

$$\int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x) B_{k-3}(x) dx = \frac{h_1}{2240}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x) B_{k-2}(x) dx = \frac{3h_1}{56}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x) B_{k-1}(x) dx = \frac{1991h_1}{2240}$$

$$\int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x) B_{k+1}(x) dx = \frac{1991h_1}{2240}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x) B_{k+2}(x) dx = \frac{3h_1}{56}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x) B_{k+3}(x) dx = \frac{h_1}{2240}$$

$$\int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B''_l(y) B''_{l-3}(y) dy = \frac{3}{8h_2^3}, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B''_l(y) B''_{l-2}(y) dy = 0, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B''_l(y) B''_{l-1}(y) dy = -\frac{27}{8h_2^3}$$

$$\int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B''_l(y) B''_{l+1}(y) dy = -\frac{27}{8h_2^3}, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B''_l(y) B''_{l+2}(y) dy = 0, \quad \int_{y_{l+2}}^{y_{l+2}} B''_l(y) B''_{l+3}(y) dy = \frac{3}{8h_2^3}$$

2.  $k = 2, l = 2$

### Առաջին ինտեգրալի համար

$$\int_{x_0}^{x_4} B''_2(x) B''_0(x) dx = \frac{3}{8h_1^3}, \quad \int_{x_0}^{x_4} B''_2(x) B''_1(x) dx = -\frac{27}{8h_1^3}$$

$$\int_{x_0}^{x_4} B''_2(x) B''_3(x) dx = -\frac{27}{8h_1^3}, \quad \int_{x_0}^{x_4} B''_2(x) B''_4(x) dx = 0, \quad \int_{x_0}^{x_4} B''_2(x) B''_5(x) dx = \frac{3}{8h_1^3}$$

$$\int_{y_0}^{y_4} B_2(y) B_0(y) dy = \frac{121h_2}{2240}, \quad \int_{y_0}^{y_4} B_2(y) B_1(y) dy = \frac{1991h_2}{2240}$$

$$\int_{y_0}^{y_4} B_2(y)B_3(y)dy = \frac{1991h_2}{2240}, \int_{y_0}^{y_4} B_l(y)B_4(y)dy = \frac{3h_2}{56}, \int_{y_0}^{y_4} B_l(y)B_{l+3}(y)dy = \frac{h_2}{2240}$$

Երկրորդ ինտեգրալի համար

$$\int_{x_0}^{x_4} B'_2(x)B'_0(x)dx = -\frac{15}{32h_1}, \int_{x_0}^{x_4} B'_2(x)B'_1(x)dx = -\frac{9}{32h_1},$$

$$\int_{x_0}^{x_4} B'_2(x)B'_3(x)dx = \frac{-9}{32h_1}, \int_{x_0}^{x_4} B'_k(x)B'_3(x)dx = \frac{-9}{20h_1}, \int_{x_0}^{x_4} B'_k(x)B'_5(x)dx = \frac{-3}{160h_1},$$

$$\int_{y_0}^{y_4} B'_2(y)B'_0(y)dy = -\frac{9}{32h_2}, \int_{y_0}^{y_4} B'_l(y)B'_1(y)dy = -\frac{9}{32h_2},$$

$$\int_{y_0}^{y_4} B'_2(y)B'_3(y)dy = \frac{-9}{32h_2}, \int_{y_0}^{y_4} B'_l(y)B'_3(y)dy = \frac{-9}{20h_2}, \int_{y_0}^{y_4} B'_l(y)B'_5(y)dy = \frac{-3}{160h_2},$$

Երրորդ ինտեգրալի համար

$$\int_{x_0}^{x_4} B_2(x)B_0(x)dx = \frac{121h_1}{2240}, \int_{x_0}^{x_4} B_2(x)B_1(x)dx = \frac{1991h_1}{2240}$$

$$\int_{x_0}^{x_4} B_2(x)B_3(x)dx = \frac{1991h_1}{2240}, \int_{x_0}^{x_4} B_2(x)B_4(x)dx = \frac{3h_1}{56}, \int_{x_0}^{x_4} B_2(x)B_5(x)dx = \frac{h_1}{2240}$$

$$\int_{y_0}^{y_4} B''_2(y)B''_0(y)dy = -\frac{3}{8h_1^2}, \int_{y_0}^{y_4} B''_2(y)B''_1(y)dy = -\frac{27}{8h_2^3}$$

$$\int_{y_0}^{y_4} B''_2(y)B''_3(y)dy = -\frac{27}{8h_2^3}, \int_{y_0}^{y_4} B''_2(y)B''_4(y)dy = 0, \int_{y_0}^{y_4} B''_2(y)B''_5(y)dy = \frac{3}{8h_2^3}$$

3.  $k = M - 2, l = N - 2$

Քանի որ բազիսային ֆունկցիաները սիմետրիկ են, ապա այդ դեպքում կատարվում են նույն հաշվարկները, ինչ նախորդ կետում:

Հաշվի առնելով նախորդիվ հաշվարկված ինտեգրալները, ինչպես նաև Դիրիխլեի և Նեյմանի եզրային պայմանները, կստանանք հետևյալ հավասարումների համակարգը. Դիրիխլեի եզրային պայմաններ.

$$\begin{cases} u_{00} + \frac{5}{16}(u_{01} + u_{10}) + \frac{1}{16}u_{11} & = 0 \\ u_{M0} + \frac{5}{16}(u_{M1} + u_{M-1,0}) + \frac{1}{16}u_{M-1,1} & = 0 \\ u_{0N} + \frac{5}{16}(u_{1N} + u_{0,N-1}) + \frac{1}{16}u_{N-1,1} & = 0 \\ u_{MN} + \frac{5}{16}(u_{M-1,N} + u_{M,N-1}) + \frac{1}{16}u_{M-1,N-1} & = 0 \end{cases}$$

Նեյմանի եզրային պայմաններ.

$$\begin{cases} \frac{3}{4h_2}(u_{i1} - u_{i0}) + \frac{3}{16h_2}(u_{i-1,0} + u_{i+1,0} + u_{i-1,1} + u_{i+1,1}) & = 0 \\ \frac{3}{4h_2}(u_{iN} - u_{i,N-1}) + \frac{3}{16h_2}(u_{i-1,N-1} + u_{i+1,N-1} + u_{i-1,N-1} + u_{i+1,N-1}) & = 0 \\ \frac{3}{4h_1}(u_{1j} - u_{0j}) + \frac{3}{16h_1}(u_{0,j-1} + u_{0,j+1} + u_{1,j-1} + u_{1,j+1}) & = 0 \\ \frac{3}{4h_1}(u_{Mj} - u_{M-1,j}) + \frac{3}{16h_1}(u_{M-1,j-1} + u_{M-1,j+1} + u_{M-1,j-1} + u_{M-1,j+1}) & = 0 \end{cases}$$

Մինիմումի պայմաններ.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{8h_1^2} \\ 0 \\ -\frac{27}{8h_1^3} \\ \frac{6}{h_1^3} \\ -\frac{27}{8h_1^3} \\ 0 \\ \frac{3}{8h_1^2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \frac{h_2}{2240} \\ \frac{3h_2}{56} \\ 1991h_2/2240 \\ 151h_2/140 \\ 1991h_2/2240 \\ \frac{3h_2}{56} \\ h_2/2240 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{160h_1} \\ -\frac{9}{20h_1} \\ -\frac{9}{32h_1} \\ \frac{3}{2h_1} \\ -\frac{9}{32h_1} \\ -\frac{9}{20h_1} \\ -\frac{3}{160h_1} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -\frac{3}{160h_1} \\ -\frac{9}{20h_1} \\ -\frac{9}{32h_1} \\ \frac{3}{2h_1} \\ -\frac{9}{32h_1} \\ -\frac{9}{20h_1} \\ -\frac{3}{160h_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{h_2}{2240} \\ \frac{3h_2}{56} \\ 1991h_2/2240 \\ 151h_2/140 \\ 1991h_2/2240 \\ \frac{3h_2}{56} \\ h_2/2240 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \frac{3}{8h_1^2} \\ 0 \\ -\frac{27}{8h_1^3} \\ \frac{6}{h_1^3} \\ -\frac{27}{8h_1^3} \\ 0 \\ \frac{3}{8h_1^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{k-3,l-3} & u_{k-2,l-3} & u_{k-1,l-3} & u_{k,l-3} & u_{k+1,l-3} & u_{k+2,l-3} & u_{k+3,l-3} \\ u_{k-3,l-2} & u_{k-2,l-2} & u_{k-1,l-2} & u_{k,l-2} & u_{k+1,l-2} & u_{k+2,l-2} & u_{k+3,l-2} \\ u_{k-3,l-1} & u_{k-2,l-1} & u_{k-1,l-1} & u_{k,l-1} & u_{k+1,l-1} & u_{k+2,l-1} & u_{k+3,l-1} \\ u_{k-3,l} & u_{k-2,l} & u_{k-1,l} & u_{k,l} & u_{k+1,l} & u_{k+2,l} & u_{k+3,l} \\ u_{k-3,l+1} & u_{k-2,l+1} & u_{k-1,l+1} & u_{k,l+1} & u_{k+1,l+1} & u_{k+2,l+1} & u_{k+3,l+1} \\ u_{k-3,l+2} & u_{k-2,l+2} & u_{k-1,l+2} & u_{k,l+2} & u_{k+1,l+2} & u_{k+2,l+2} & u_{k+3,l+2} \\ u_{k-3,l+3} & u_{k-2,l+3} & u_{k-1,l+3} & u_{k,l+3} & u_{k+1,l+3} & u_{k+2,l+3} & u_{k+3,l+3} \end{pmatrix} = \frac{2}{9}h_1h_2[f_{k-1,l} + 2f_{k,l} + f_{k+1,l}][f_{k,l-1} + 2f_{k,l} + f_{k,l+1}]$$

$k = 2, M-2$ , ինչպես նաև  $l = 2, N-2$  -ի համար կազմվում է նույն հավասարումը, փոխելով միայն համապատասխան գործակիցները և դրանց քանակը:



### Ծրագրային իրականացում

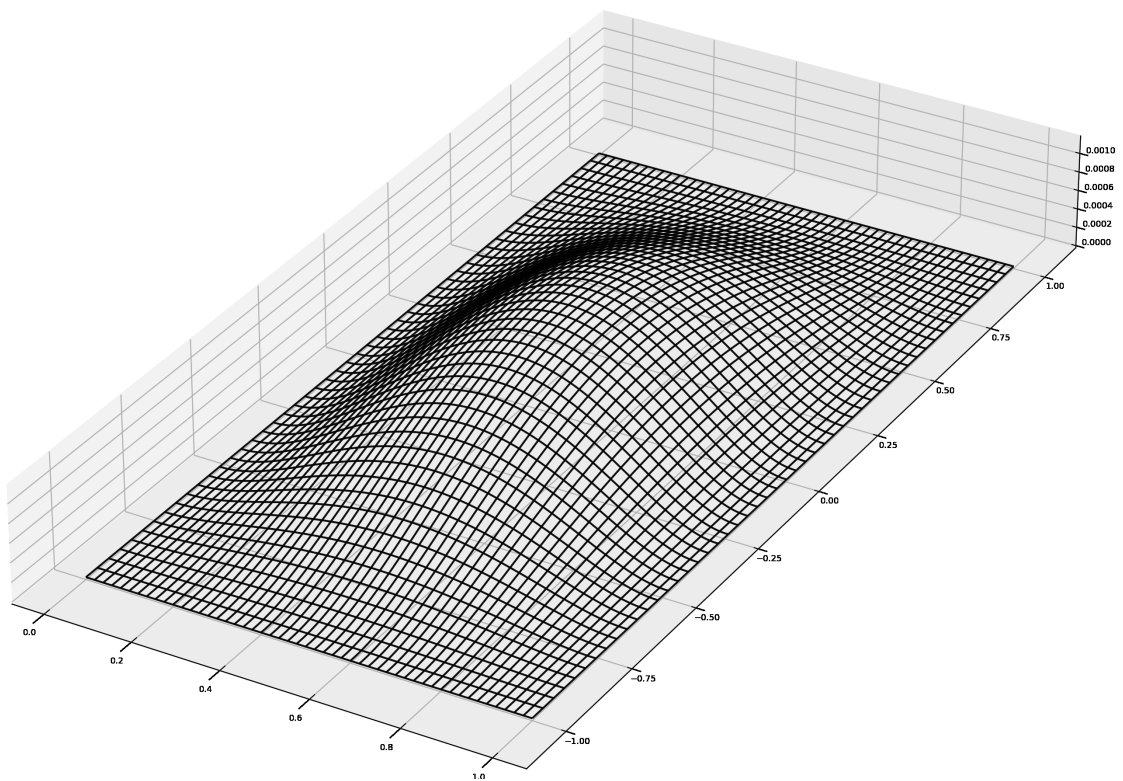
Ինչպես Պուասոնի հավասարման դեպքում, այնպես էլ այս դեպքում կօգտվենք նույն գործիքներից:

Որպես օրինակ լուծենք հետևյալ հավասարումը տրված կոնկրետ տիրույթով և  $f$  ֆունկցիայով:

$$\begin{cases} \Delta^2 u &= 1 \\ u|_{\partial D} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} &= 0 \end{cases}$$

որտեղ  $D = [0, 1] \times [-1, 1]$ ,  $h_1 = 0.01$ ,  $h_2 = 0.02$

Խնդրի համար ստացված լուծումը.



Նկար 17