ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
Կիրառական մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի ֆակուլտետ

Բազմաչափ մոտարկման ալգորիթմների մշակում և կիրառում

Խումբ՝ ՄԹ 940-2
Ուսանող՝ Կամո Սևոյան
Ղեկավար՝ ֆ.մ.գ.դ. Արմենակ Բաբայան

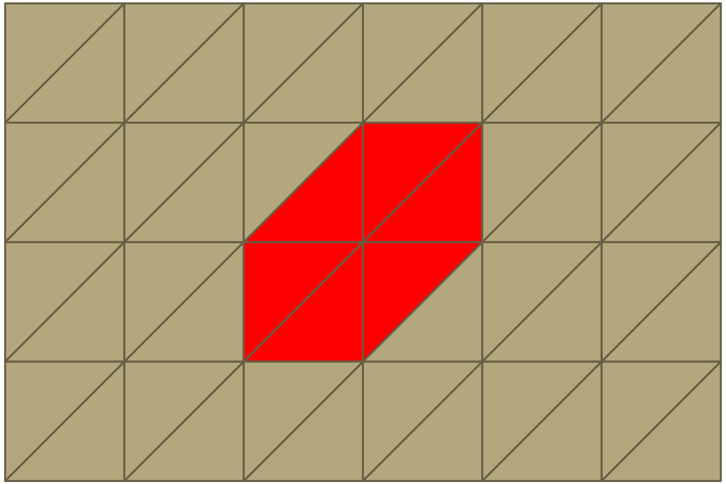
ԵՐԵՎԱՆ 2023

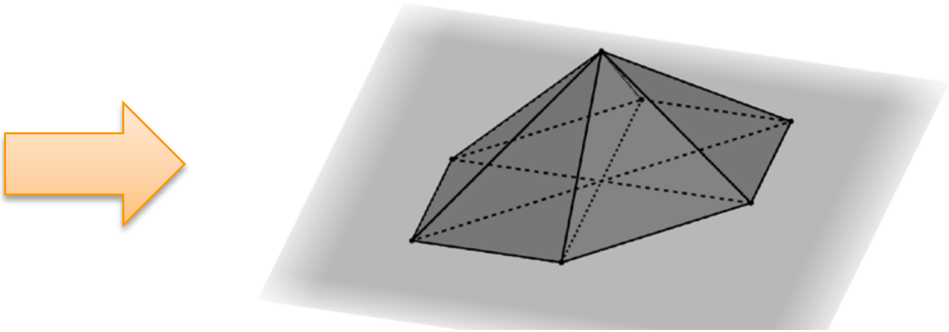
Խնդրի դրվածքը

Կառուցել մոտարկման բանաձև երկու փոփոխականի ֆունկցիաների համար: Մոտարկման բանաձևերը պետք է ապահովեն պահանջվող կարգի դիֆերենցելիություն: Կառուցումը կատարել ուղղանկյուն և եռանկյուն տարրերի վրա: Կառուցված բանաձևերը կիրառել Պուասոնի և բիհարմոնիկ հավասարումների համար Դիրիխլեի խնդիրները վարիացիոն մեթոդով լուծելու համար:

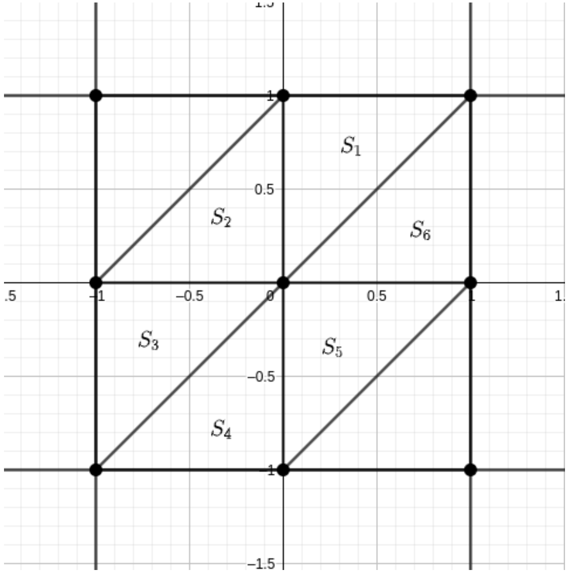
Համասեռ տարրերով մոտարկում

Տիրույթը հավասար քայլերով տրոհվում է ուղղանկյուն եռանկյունների: Կառուցվում է Կուրանտի բազիսային ֆունկցիան: Թույլ է տալիս կառուցել անընդհատ մոտարկում:





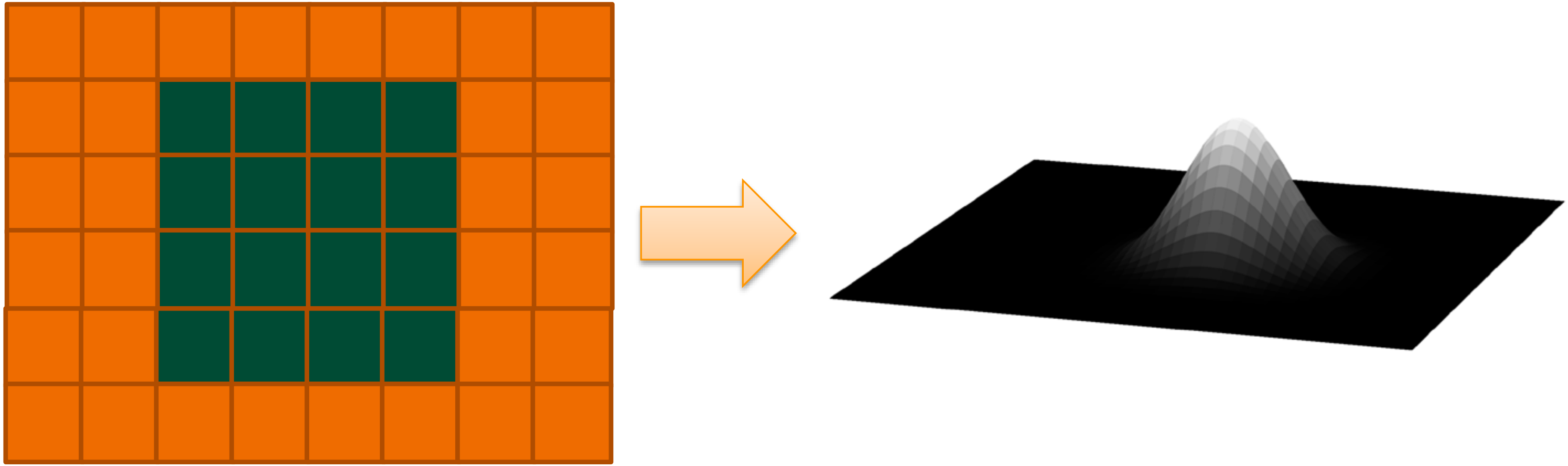
Կուրանտի ֆունկցիա



$$\varphi(x,y)=\begin{cases}1-y, & (x,y)\in S_1\\ 1+x-y, & (x,y)\in S_2\\ 1+x, & (x,y)\in S_3\\ 1+y, & (x,y)\in S_4\\ 1-x+y, & (x,y)\in S_5\\ 1-x, & (x,y)\in S_6\\ 0, & \text{մնացած դեպքերում}\end{cases}$$

Համասեռ տարրերով մոտարկում

Տիրույթը հավասար քայլերով տրոհվում է ուղղանկյունների: Կառուցվում է երկխորանարդային սփլայն թենզորական արտադրյալի միջոցով:



Երկխորանարդային սփլայն

Թույլ է տալիս իրականացնել երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի մոտարկում:

$$\gamma(x) = \frac{1}{4}\left(\{x+2\}_+^3 - 4\{x+1\}_+^3 + 6\{x\}_+^3 - 4\{x-1\}_+^3 + \{x-2\}_+^3\right)$$

$$\varphi^{(ij)}(x,y) = \gamma_i\left(\frac{x}{h_1}\right)\gamma_j\left(\frac{y}{h_2}\right)$$

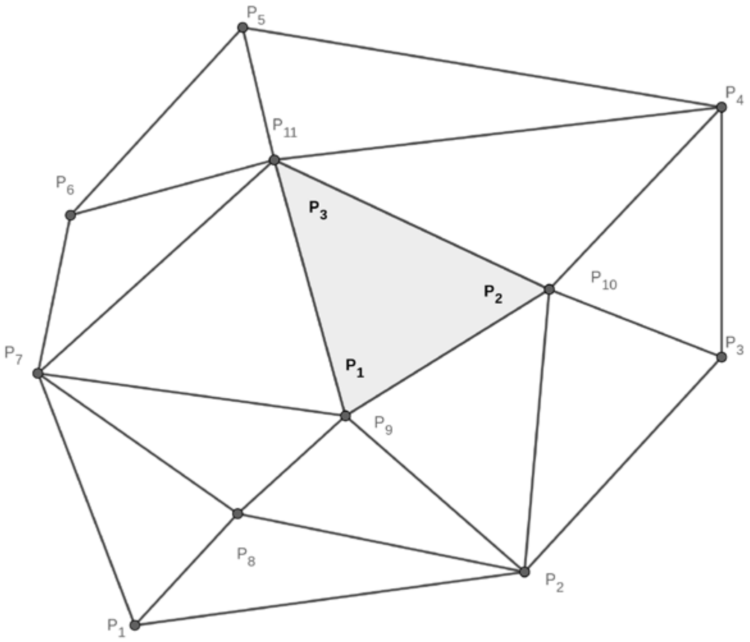
$$\{x\}_+ = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

Մոտարկում եռանկյուններով

Տիրույթը տրոհվում է եռանկյուն էլեմենտների (օրինակ Դելոնեի եռանկյունացում)

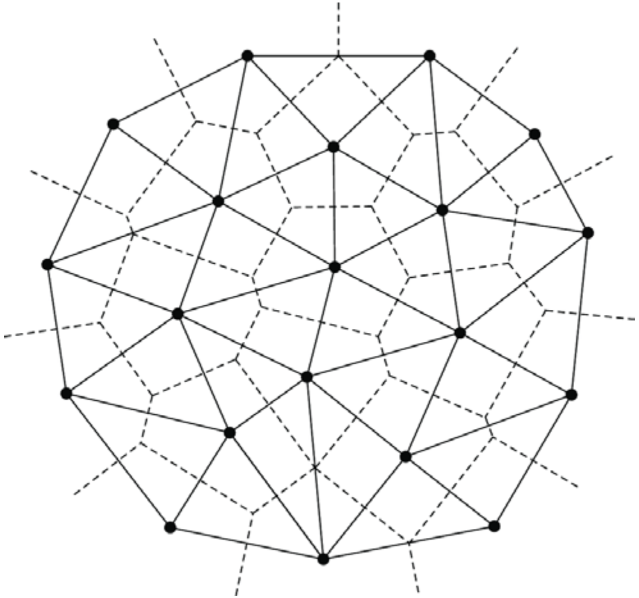
Գագաթները համարակալվում են ընդհանուր տիրույթի և ամեն եռանկյան համար:

Եռանկյան մեջ համարակալումը կատարվում է ժամսլաքի հակառակ ուղղությամբ:



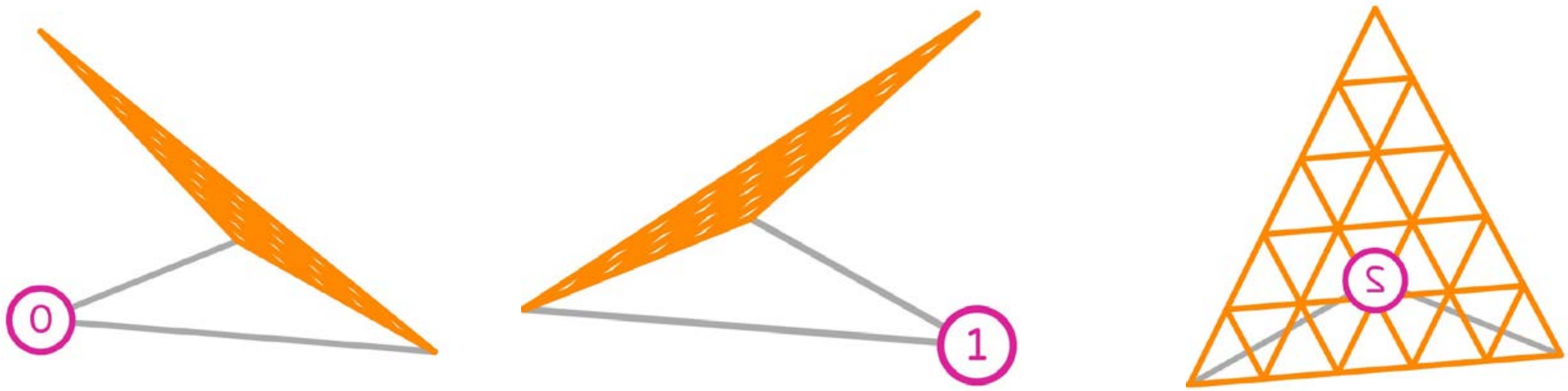
Դելոնեի եռանկյունացում

Եռանկյունացումը կատարվում է այնպես, որ եռանկյունները մոտ են կանոնավոր եռանկյունների:



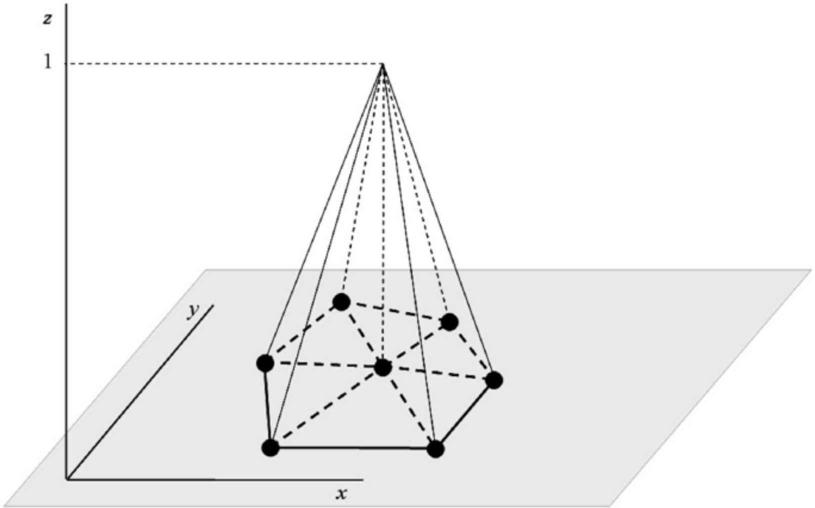
Ոչ համասեռ տարրերով մոտարկում

Յուրաքանչյուր եռանկյան վրա կառուցվում են գծային բազիսային ֆունկցիաներ: Յուրաքանչյուր գագաթի բազիսային ֆունկցիան կազմված է իրեն պարունակող եռանկյունների բազիսների միավորումից:



Ոչ համասեռ տարրերով մոտարկում

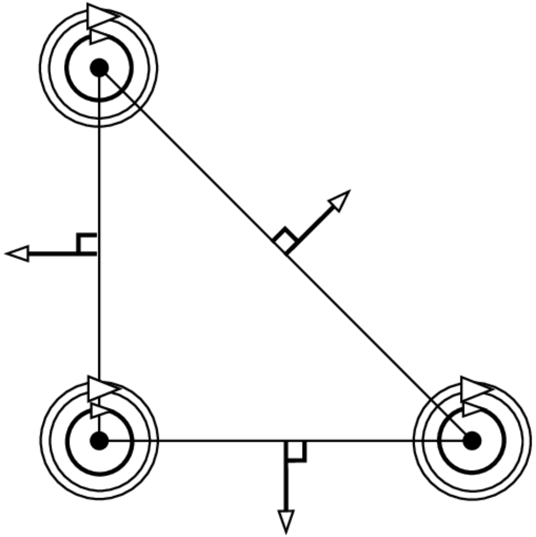
Այն թույլ է տալիս կատարել անընդհատ մոտարկում



Մոտարկում եռանկյուններով

Անընդհատ դիֆերենցելի մոտարկում եռանկյունացման վրա:

Արգիրիսի մոտարկում:



Գագաթների վրա մոտարկում է մինչև երկրորդ կարգի բոլոր ածանցյալները ներառյալ, միջնակետերում՝ նորմալ ածանցյալը: Մոտարկման աստիճանը 5-րդ:

Պուասոնի հավասարում

Վարիացիոն մեթոդի օգնությամբ հավասարումը բերվում է հետևյալ ֆունկցիոնալի մինիմումի որոնման խնդրի: Կարող ենք օգտվել կտոր առ կտոր դիֆերենցելի մոտարկումից:

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u\Big|_{\partial D} = 0 \end{cases} \implies \frac{1}{2}\iint\limits_D \left[u_x^2 + u_y^2\right] dxdy + \iint\limits_D fudxdy \longrightarrow min$$

Մեթոդը թույլ է տալիս կտոր առ կտոր դիֆերենցելի ֆունկցիաներով մոտարկել հավասարման լուծումը:

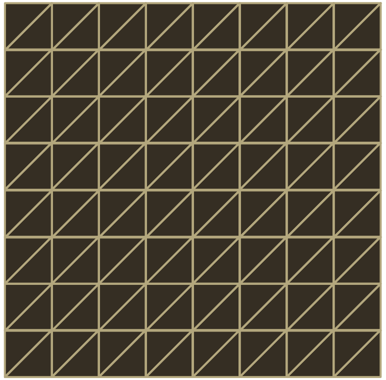
$$u(x,y) \approx \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \varphi^{(ij)}(x,y)$$

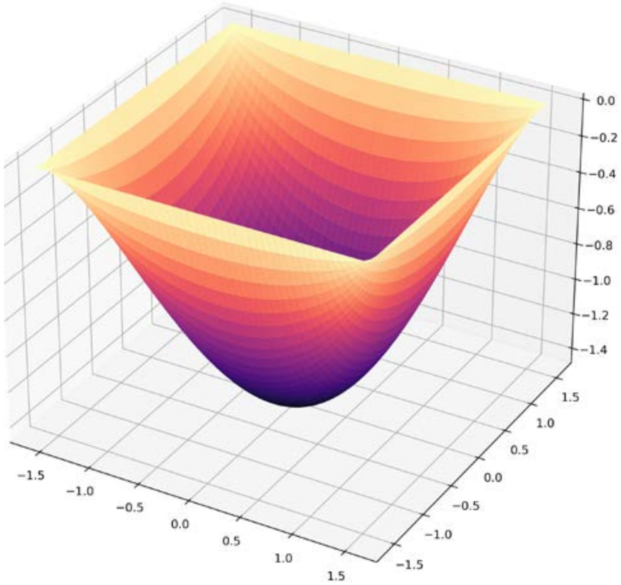
Պուասոնի հավասարում

Թվային լուծում.

$$\begin{cases} \Delta u = 2 \\ u\big|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

$$D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^2$$



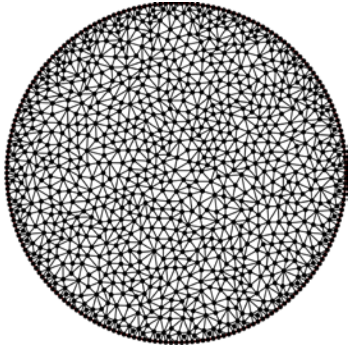


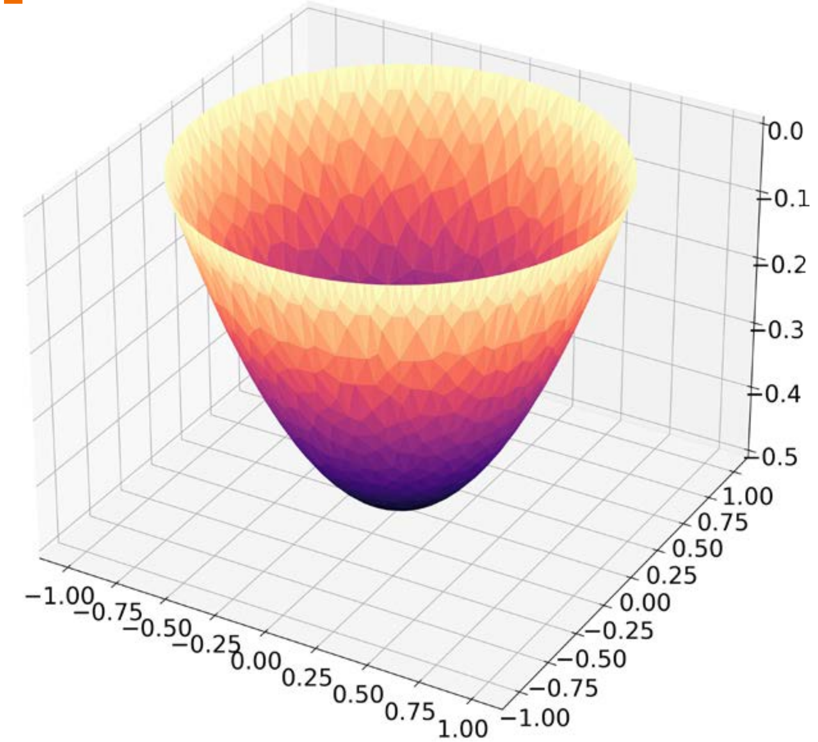
Պուասոնի հավասարում

Թվային լուծում.

$$\begin{cases} \Delta u = 2 \\ = u\Big|_{\partial D} 0 \end{cases}$$

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$$





Բիհարմոնիկ հավասարում

Վարիացիոն մեթոդի օգնությամբ հավասարումը բերվում է հետևյալ ֆունկցիոնալի մինիմումի որոնման խնդրի: Անհրաժեշտ է դիֆերենցելի մոտարկում:

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f \\ u\Big|_{\partial D} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial D} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \frac{1}{2}\iint\limits_D \left[u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2\right] dxdy - \iint\limits_D fudxdy \longrightarrow min$$

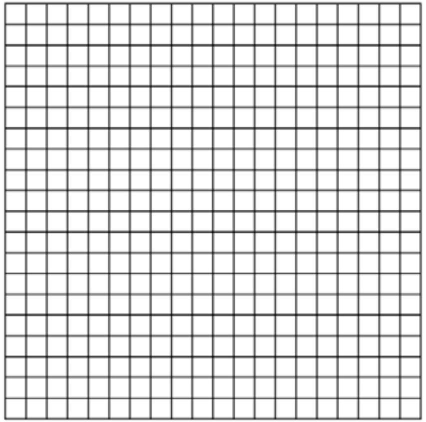
$$u(x,y) \approx \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \varphi^{(ij)}(x,y)$$

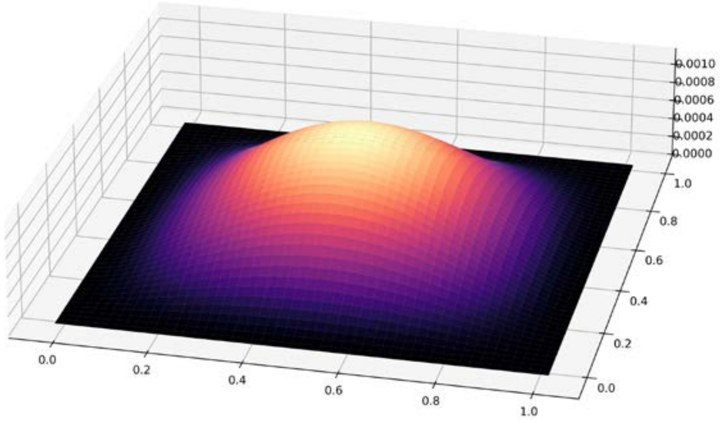
Բիհարմոնիկ հավասարում

Թվային լուծում.

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 1 \\ u|_{\partial D} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

$$D = [0,1]^2$$



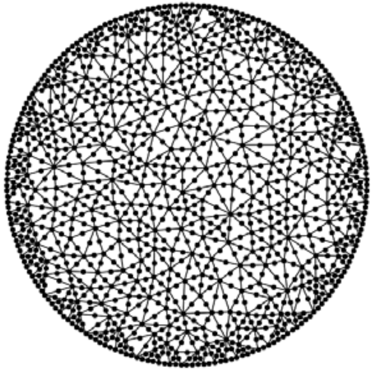


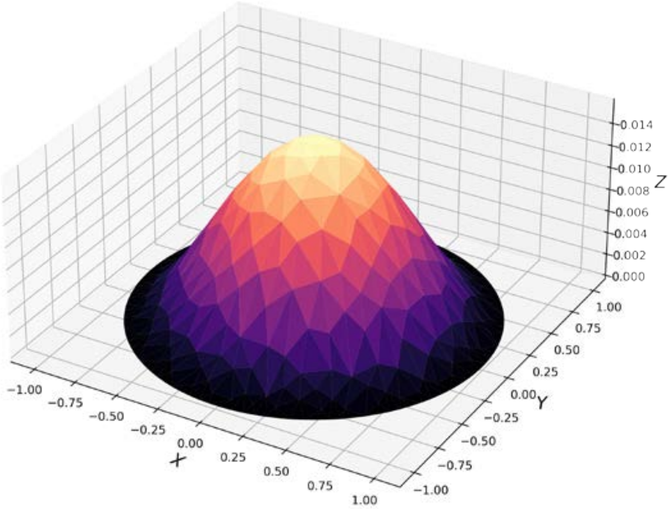
Բիհարմոնիկ հավասարում

Թվային լուծում.

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 1 \\ u\big|_{\partial D} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$$

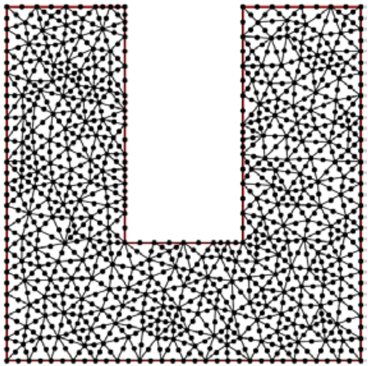


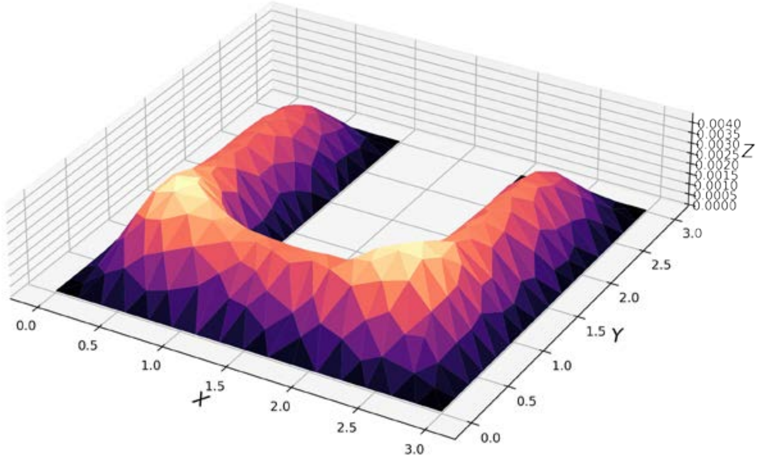


Բիհարմոնիկ հավասարում

Թվային լուծում.

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 1 \\ u\Big|_{\partial D} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$





Շնորհակալություն