Метод Ритца

Решение задачи $\mathscr{A}u = f$ эквивалентно поиску минимума функционала $I[u] = (\mathscr{A}u, u) - 2(u, f)$ в том случае, если $\mathscr{A}$ — самосопряженный ($(\mathscr{A}u, v) = (u, \mathscr{A}v)$) и положительно определенный ($(\mathscr{A}u, u) > 0$) линейный оператор в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$. Введем последовательность конечномерных пространств $\mathbb{V}_n$ с базисными функциями $\left\{\varphi_i^{(n)}\right\}_{i=1}^{n}$. Будем искать приближение $u_n \in \mathbb{V}_n$ к искомому решению u так, чтобы оно доставляло минимум функционалу $I[u]$ в $\mathbb{V}_n$. Будем искать u_n в виде

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} y_j \varphi_j,$$

тогда функционал $I[u_n]$ в $\mathbb{V}_n$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} I[u_n] &= \left(\mathscr{A}\sum_{j=1}^{n} y_j\varphi_j, \sum_{k=1}^{n} y_k\varphi_k\right) - 2\left(\sum_{l=l}^{n} y_l\varphi_l, f\right) = \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} y_j y_k (\mathscr{A}\varphi_j, \varphi_k) - 2\sum_{l=l}^{n} y_l(\varphi_l, f) \\ &= \sum_{=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_{j,k} y_j y_k - 2\sum_{l=1}^{n} \beta_l y_l, \end{aligned}$$

где $\alpha_{j,k} = (\mathscr{A}\varphi_j, \varphi_k)\,; \beta_l = (\varphi_l, f)$, причем $\alpha_{j,k} = \alpha_{k,j}$, поскольку $\mathscr{A}$ — самосопрояжен. Учитывая этот факт получаем для y_i n уравнений

$$\frac{\partial I[u_n]}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_j - \beta_j = 0.$$

Построим методом Ритца разностную схему для задачи

$$(ku')' - qu = -f(x)\,, x \in [0,1]\,, u(0) = u(1) = 0.$$

Т.е. $\mathscr{A}u = -(ku')' + qu$.

Примечание. *В случае, если $u(0) = a, u(1) = b$ сделаем замену переменных $v(x) = u(x) + \xi x + \psi$ и потребуем $v(0) = 0, v(1) = 0$, т.е. $u(0) + \psi = 0$ и $u(1) + \xi + \psi = 0$. В результате $\psi = -a, \xi = a - b$ и $v(x) = u(x) + (a-b)\,x - a$. Подставляя $u(x) = v(x) + (b-a)\,x + a$ в исходный оператор получаем эквивалентную краевую задачу*

$$\mathscr{A}v = (kv')' - qv = -f(x) + (a-b)\,k' + q((b-a)\,x + a)\,, x \in [0,1]\,, v(0) = v(1) = 0.$$

Вкачестве базисных выберем следующие функции

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant x_{i-1} \text{ или } x \geqslant x_{i+1} \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{h}, x_{i-1} < x \leqslant x_i \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h}, x_i < x < x_{i+1} \end{cases} \qquad \varphi_i'(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant x_{i-1} \text{ или } x \geqslant x_{i+1} \\ \dfrac{1}{h}, x_{i-1} < x \leqslant x_i \\ -\dfrac{1}{h}, x_i < x < x_{i+1} \end{cases}.$$

С помощью интегрирования по частям находим

$$\alpha_{i\,j} = \int\limits_0^1 \left(-(k\varphi_i')' + q\varphi_i\right)\varphi_j dx = -(k\varphi_i'\varphi_j)\big|_0^1 + \int\limits_0^1 \left(k\varphi_i'\varphi_j' + q\varphi_i\varphi_j\right)dx.$$

$$\alpha_{i\,i} = -\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (k\varphi_i')'\,\varphi_i dx + \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} q\varphi_i^2 dx = -(k\varphi_i)\big|_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} + \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} k\varphi_i' dx = \frac{1}{h}\left[\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} kdx - \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} kdx\right].$$

$$\alpha_{i\,i-1} = -\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (k\varphi_i')'\,\varphi_{i-1} dx + \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} q\varphi_i\varphi_{i-1} dx = \frac{1}{h^2}\left[\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_i)\,k'dx - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_{i-1})(x-x_i)\,qdx\right].$$

$$\alpha_{i\,i+1} = -\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (k\varphi_i')'\,\varphi_{i+1} dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} q\varphi_i\varphi_{i+1} dx = \frac{1}{h^2}\left[\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_{i+1})\,k'dx - \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_{i+1})(x-x_i)\,qdx\right].$$

Если $|i-j| \geqslant 2$, то $\alpha_{ij} = 0$.

$$\beta_i = \int\limits_0^1 \varphi_i f dx = \frac{1}{h}\left[\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_{i-1})\,f(x)\,dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-x)\,f(x)\,dx\right].$$

$$\alpha_{i\,i-1}y_{i-1} + \alpha_{i\,i}y_i + \alpha_{i\,i+1}y_{i+1} = \beta_i, i = 1, \ldots, N-1.$$

Задача. При каких c для решения задачи применим метод Ритца?

$$\frac{d^2u}{dx^2} + cu = f(x)\,;\, x \in [0,1]\,;\, u(0) = u(1) = 0.$$

Решение. Условия применимости метода Ритца: 1) самосопряженность $((\mathscr{L}u, v) = (u, \mathscr{L}v))$ и 2) положительная определнность $((\mathscr{L}u, u) \geqslant 0)$ дифференциального оператора $\mathscr{L}u = -u'' - cu$.

1. $(\mathscr{L}u, v) = \int\limits_0^1 \left(-\frac{d^2u}{dx^2} - cu\right) v = \left[-\frac{du}{dx}v\right]_0^1 + \int\limits_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx - c\int\limits_0^1 uvdx = \left[-u\frac{dv}{dx}\right]_0^1 - \int\limits_0^1 u\frac{d^2v}{dx^2}dx - c\int\limits_0^1 uvdx = (u, \mathscr{L}v)$. Т.е. оператор является самосопряженным для $\forall c$.

2. Решение дифференциальной задачи $u = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \tilde{u}$ — ограниченная на отрезке $[0,1]$ функция ($\tilde{u}$ — частное решение неоднородной задачи). Разложим ее в ряд Фурье

$$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cos \pi kx + b_k \sin \pi kx]\,.$$

Поскольку рассматриваются функции для которых $u(0) = u(1) = 0$, то $a_k = 0, k = 0, \ldots, +\infty$ и решение следует искать в виде

$$u = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin \pi kx.$$

$$\mathscr{L}u = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \left(\pi^2 k^2 - c\right) \sin \pi kx.$$

$$(\mathscr{L}u, u) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \left(\pi^2 k^2 - c\right) \sum_{j=1}^{+\infty} b_j \int\limits_0^1 \sin \pi kx \sin \pi jx dx.$$

Т.к. $\int\limits_0^1 \sin \pi kx \sin \pi jx dx = \delta_{j,k}$, то $(\mathscr{L}u, u) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (\pi^2 k^2 - c)\, b_k^2$. Поскольку коэффицинеты ряда Фурье абсолютно интегрируемой фунцкции стремятся к нулю, то условие положительной определенности: $\boxed{c < \pi^2}$.

__**Метод Бубнова-Галеркина**__ Последовательность приближенных решений задачи $\mathscr{A}u = f$, где $\mathscr{A}$ — может быть и несамосопряженным и/или знаконеопределенным оператором может быть найдено с помощью разложения u по базисным функциям соответствующего конечномерного пространства $\mathbb{V}_n : \left\{\varphi_i^{(n)}\right\}_{i=1}^{n}$. Будем искать приближение $u_n \in \mathbb{V}_n$ к искомому решению u так, чтобы невязка была бы ортогональна всем базисным функциям: $\left(\mathscr{A}u_n - f, \varphi_i^{(n)}\right) = 0$.

В качестве базисных выберем следующие функции

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant x_{i-1} \text{ или } x \geqslant x_{i+1} \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{h}, x_{i-1} < x \leqslant x_i \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h}, x_i < x < x_{i+1} \end{cases} \qquad \varphi_i'(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant x_{i-1} \text{ или } x \geqslant x_{i+1} \\ \dfrac{1}{h}, x_{i-1} < x \leqslant x_i \\ -\dfrac{1}{h}, x_i < x < x_{i+1} \end{cases} .$$

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} y_j \varphi_j,$$

$$(k(x)\,u')' + r(x)\,u' - q(x) = -f(x)\,, 0 \leqslant x \leqslant 1, u(0) = u(1) = 0, k(x) > 0, q(x) \geqslant 0$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} \alpha_{i\,j} y_j - \beta_i = 0, i = 1, \ldots, N-1$$

$$\alpha_{i\,j} = \int_0^1 \left[k(x)\,\frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx} - r(x)\,\frac{d\varphi_i}{dx}\varphi_j + q(x)\,\varphi_i\varphi_j\right] dx, i, j = 1, \ldots, N-1$$

$$\beta_i = \int_0^1 f(x)\,\varphi_i dx$$

Задача. Построить двухточечную аппроксимацию 2-го порядка левого краевого условия $u' + 5u = 1 (x = 0)$ для уравнения $u''_{xx} - e^x u = \sin x$.
Решение. Всевозможные аппроксимации данного краевого условия по двум точкам могут быть записаны как $au_0 + bu_1 = 1$. Выберем a и b так, чтобы это условие имело 2-ой порядок.

$$\begin{aligned}\delta f &= a[u(x)]_0 + b[u(x)]_1 - 1 = au(0) + bu(h) - 1 = \\ &= au(0) + b\left(u(0) + hu'(0) + \frac{h^2}{2}u''(0) + O\big(h^3\big)\right) - 1 = \\ &= (a+b)\,u(0) + bhu'(0) + \frac{bh^2}{2}u''(0) + O\big(h^3\big) - 1.\end{aligned}$$

Найдем значение второй производной в нуле из основного уравнения

$$u''(0) - e^0 u(0) = \sin 0 \Rightarrow u''(0) = u(0)\,.$$

Теперь

$$\delta f = \left(a + b\left(1 + \frac{h^2}{2}\right)\right)u(0) + bhu'(0) - 1 + O\big(h^3\big)$$

и, приравнивая соответствующие кэффициенты, получаем

$$a + b\left(1 + \frac{h^2}{2}\right) = 5; bh = 1$$

$$a = 5 - \frac{1}{h} - \frac{h}{2}; b = \frac{1}{h}.$$

Условие аппроксимации имеет вид

$$\frac{u_1 - u_0}{h} + 5u_0 - \frac{h}{2}u_0 = 1.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что это условие имеет второй порядок аппроксимации.