

# Ներածություն

# Գլուխ 1

## Միաչափ մոտարկում

### 1.1 Էրմիթյան մոտարկում

Նախքան անդրադառնալը բազմաչափ մոտարկման խնդրին, քննարկենք մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի մոտարկման որոշ դետալներ:

Ենթադրենք տրված էն  $f : \Omega \mapsto \Theta, \Omega, \Theta \subset \mathbb{R}$  ֆունկցիան,  $\{x_i\}_{i=0}^N$  կետերը և դրանց համապատասխան  $\{y_i = f(x_i)\}_{i=0}^N$  արժեքները: Յուրաքանչյուր  $[x_i, x_{i+1}]$  հատվածում մոտարկող ֆունկցիան իրենից ներկայացնում է գծային ֆունկցիա, որը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$p_1^{(i)}(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} y_i + \frac{x - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1}, i = \overline{0, N-1} \quad (1)$$

Այսպիսով  $[x_0, x_N]$  հատվածում կտոր առ կտոր մոտարկող ֆունկցիան տրվում է հետևյալ կերպ.

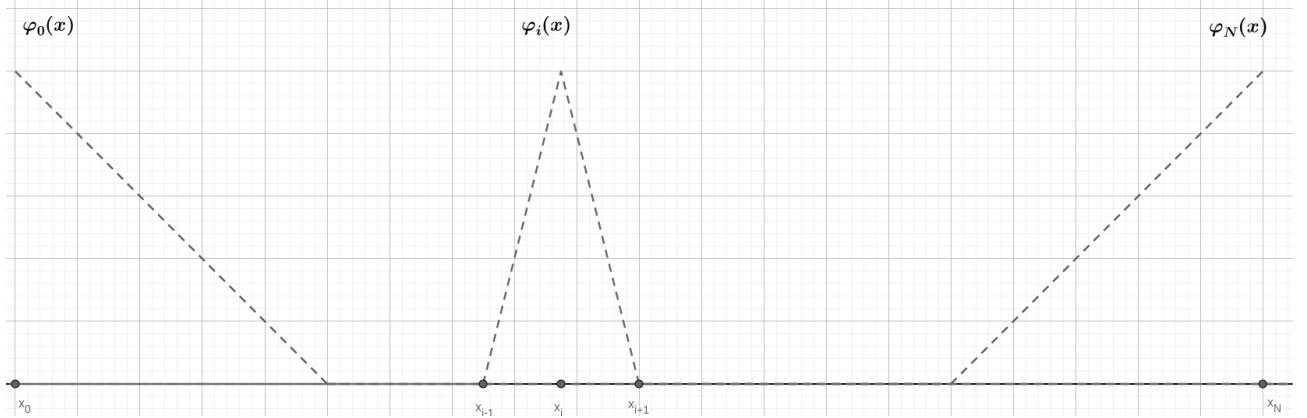
$$p_1(x) = \sum_{i=0}^N \varphi_i(x) y_i \quad (2)$$

Որտեղ

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, & x \in [x_0, x_1] \\ 0, & x \in [x_1, x_N] \end{cases} \\ \varphi_i(x) &= \begin{cases} 0, & x \in [x_0, x_{i-1}] \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & x \in [x_{i+1}, x_N] \end{cases} \\ \varphi_N(x) &= \begin{cases} 0, & x \in [x_0, x_{N-1}] \\ \frac{x - x_{N-1}}{x_N - x_{N-1}}, & x \in [x_{N-1}, x_N] \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

$\varphi_i(x)$  ֆունկցիաները կոչվում են բազիսային ֆունկցիաներ, որոնք ունեն այսպես կոչված լոկալ կրողներ, քանի որ դրանք ոչ զրոյական են որևէ տիրույթում և զրոյական որոշման

տիրույթի մսացած մասերում: Նմանատիպ բազիսային ֆունկցիաների հիմքական հատկությունն այն է, որ դրանք հավասար են մեկի որևէ կոնկրետ հանգույցում և հավասար են զրոյի մսացած բոլոր հանգույցներում: Նշենք սակայն, որ այս տիպի մոտարկումը  $C^0$  դասի է, այսինք միայն անընդհատ է, և հետևաբար կիրառելի չէ այն խնդիրներում, որտեղ պահանջվում է ավելի բարձր կարգի ողորկություն:



Նկար 1.1. Գծային մոտարկման բազիսային ֆունկցիաներ:

Այժմ դիտարկենք հետևյալ խնդիրը. անհրաժեշտ է կառուցել կտոր առ կտոր մոտարկող ֆունկցիա, որը ֆունկցիայի արժեքի հետ մեկտեղ կհամընկնի նաև ֆունկցիայի առաջին կարգի ածանցյալի արժեքի հետ մոտարկման հանգույցներում: Այսինքն.

$$\frac{d^j}{dx^j} f(x_i) = \frac{d^j}{dx^j} p_3(x_i), \quad j = 0, 1; \quad i = \overline{0, N-1} \quad (4)$$

Յուրաքանչյուր  $[x_i, x_{i+1}]$  հատվածում մոտարկող ֆունկցիան իրենից ներկայացնում է խորանարդային ֆունկցիա, որը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով:

$$p_3^{(i)} = \alpha_i(x)f(x_i) + \beta_{i+1}(x)f(x_{i+1}) + \gamma_i(x)f'(x_i) + \delta_{i+1}(x)f'(x_{i+1}) \quad (5)$$

որտեղ

$$\begin{aligned} \alpha_i(x) &= \frac{(x_{i+1} - x)^2 [(x_{i+1} - x_i) + 2(x - x_i)]}{(x_{i+1} - x_i)^3} \\ \beta_{i+1}(x) &= \frac{(x - x_i)^2 [(x_{i+1} - x_i) + 2(x_{i+1} - x)]}{(x_{i+1} - x_i)^3} \\ \gamma_i(x) &= \frac{(x - x_i)(x_{i+1} - x)^2}{(x_{i+1} - x_i)^2}, \quad \delta_{i+1}(x) = \frac{(x - x_i)^2 (x - x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)^2} \end{aligned} \quad (6)$$

Այսպիսով  $[x_0, x_N]$  հատվածում կտոր առ կտոր մոտարկող ֆունկցիան ներկայացվում է

բազմային ֆունկցիաների գծային կոմբինացիայի տեսքով.

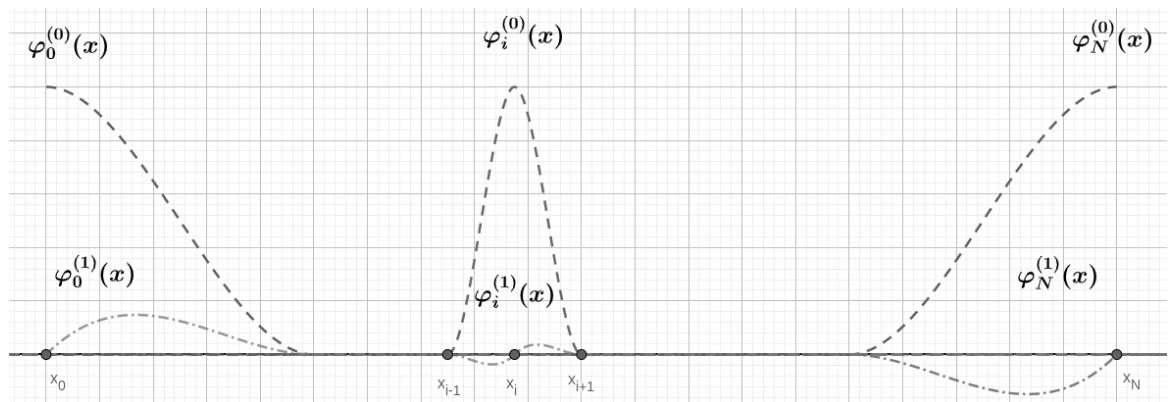
$$p_3(x) = \sum_{i=0}^N \left[ \varphi_i^{(0)} f(x_i) + \varphi_i^{(1)} f'(x_i) \right] \quad (7)$$

որտեղ

$$\begin{aligned} \varphi_0^{(0)}(x) &= \begin{cases} \frac{(x_1 - x)^2 [(x_1 - x_0) + 2(x - x_0)]}{(x_1 - x_0)^3}, & x \in [x_0, x_1] \\ 0, & x \in [x_1, x_N] \end{cases} \\ \varphi_i^{(0)}(x) &= \begin{cases} 0, & x \in [x_0, x_{i-1}] \\ \frac{(x - x_{i-1})^2 [(x_i - x_{i-1}) + 2(x_i - x)]}{(x_i - x_{i-1})^3}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{(x_{i+1} - x)^2 [(x_{i+1} - x_i) + 2(x - x_i)]}{(x_{i+1} - x_i)^3}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & x \in [x_{i+1}, x_N] \end{cases} \\ \varphi_N^{(0)}(x) &= \begin{cases} 0, & x \in [x_0, x_{N-1}] \\ \frac{(x - x_{N-1})^2 [(x_N - x_{N-1}) + 2(x_N - x)]}{(x_N - x_{N-1})^3}, & x \in [x_{N-1}, x_N] \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \varphi_0^{(1)}(x) &= \begin{cases} \frac{(x - x_0)(x_1 - x)^2}{(x_1 - x_0)^2}, & x \in [x_0, x_1] \\ 0, & x \in [x_1, x_N] \end{cases} \\ \varphi_i^{(1)}(x) &= \begin{cases} 0, & x \in [x_0, x_{i-1}] \\ \frac{(x - x_{i-1})^2 (x - x_i)}{(x_i - x_{i-1})^2}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{(x - x_i)(x_{i+1} - x)^2}{(x_{i+1} - x_i)^2}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & x \in [x_{i+1}, x_N] \end{cases} \\ \varphi_N^{(1)}(x) &= \begin{cases} 0, & x \in [x_0, x_{N-1}] \\ \frac{(x - x_{N-1})^2 (x - x_N)}{(x_N - x_{N-1})^2}, & x \in [x_{N-1}, x_N] \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

Վերը ներկայացված մոտարկումների օրինակները էրմիթյան մոտարկման մասնավոր դեպքեր են համապատասխանաբար 1 և 2 կարգերի դեպքում: Ընդհանուր դեպքում ո-րդի



Նկար 1.2. Երկրորդ կարգի էրմիթյան մոտարկող բազիսային ֆունկցիաներ:

Կարգի էրմիթյան մոտարկման պայմանը կարելի է գրել հետևյալ կերպ.

$$\frac{d^k}{dx^k} f(x_i) = \frac{d^k}{dx^k} p_{2m-1}(x_i), \quad i = \overline{0, N}, \quad k = \overline{0, m-1} \quad (10)$$

## 1.2 Քառակուսային և խորանարդային մոտարկում

Խնդիրներում, որտեղ անհրաժեշտ է որոշել միայն տրված ֆունկցիան, ֆունկցիայի ածանցյալներն մոտարկելու փոխարեն դրվում է դրանց անընդհատության պայման հանգուցային կետերում, բավականին հեշտացնելով դրված խնդիրը և դրա լուծումը: Նման տիպի մոտարկման կառուցման պարզագույն օրինակը հետևյալն է. Յուրաքանչյուր  $[x_i, x_{i+1}]$  ինտերվալում կառուցվում է այնպիսի պարաբոլ, որ բոլոր  $x_i$  հանգուցային կետերում առանջին կարգի ածանցյալները լինեն անընդհատ:

$$S_2^{(i)}(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i) + c_i (x - x_i) (x - x_{i+1}) \quad (11)$$

Ածանցյալների անընդհատության պայմանից կհետևի, որ

$$c_i + c_{i-1} = \frac{1}{h^2} (f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})) \quad i = \overline{1, N-1} \quad (12)$$

Քանի որ համակարը պարունակում է  $N - 1$  հավասարում, ապա մասում է մեկ ազատ գործակից, որը կարելի գտնել, որևէ  $x_j$  հանգուցային կետում որոշելով  $S_2^{(j)''}$ -ն:

Առավել կիրառելի են խորանարդային սփլայնները: Այս դեպքում յուրաքանչյուր  $[x_i, x_{i+1}]$  ինտերվալում կառուցվում են երրորդ աստիճանի բազմանդամներ այնպես, որ հանգույցներում առաջին և երկրորդ կարգի ածանցյալները լինեն անընդհատ: Բազմանդամը դիտարկելու փոխարեն դիտարկենք նրա երկրորդ կարգի ածանցյալը: Այն գծային ֆունկցիա է, հետևաբար այն կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$S_3^{(i)''}(x) = c_i \frac{x_{i+1} - x}{x - x_i} + c_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (13)$$

Որտեղ  $c_i$  և  $c_{i+1}$ -ը  $x_i$  և  $x_{i+1}$  կետերում երկրորդ կարգի ածանցյալների արժենքներն են: Հաշվի առնելով մոտարկման և անընդհատության պայմանները.

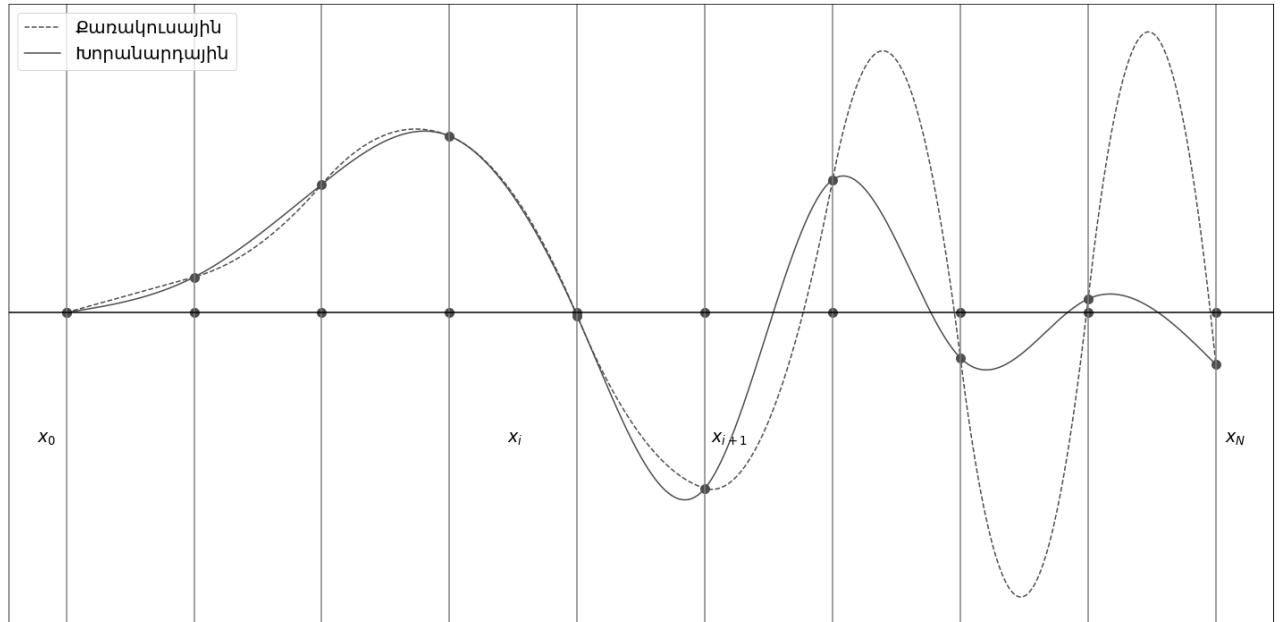
$$\begin{cases} S_3^{(i)}(x_i) &= f_i \\ S_3^{(i)}(x_{i+1}) &= f_{i+1} \\ S_3^{(i-1)'}(x_i) &= S_3^{(i)'}(x_i) \end{cases} \quad (14)$$

կստանանք հետևյալ տեսքի խորանարդային սփլայն.

$$S_3^{(i)}(x) = \frac{c_i}{6h} (x_{i+1} - x)^3 + \frac{c_{i+1}}{6h} (x - x_i)^3 + \left( \frac{f_i}{h} - \frac{hc_i}{6} \right) (x_{i+1} - x) + \left( \frac{f_{i+1}}{h} - \frac{hc_{i+1}}{6} \right) (x - x_i) \quad (15)$$

որտեղից  $c_i$  զորձակիցների համար կստացվի հետևյալ հավասարությունների համակարգը.

$$\begin{cases} c_{i+1} + 4c_i + c_{i-1} = \frac{6}{h^2} (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) & i = \overline{1, N-1} \\ c_0 = A \\ c_N = B \end{cases} \quad (16)$$



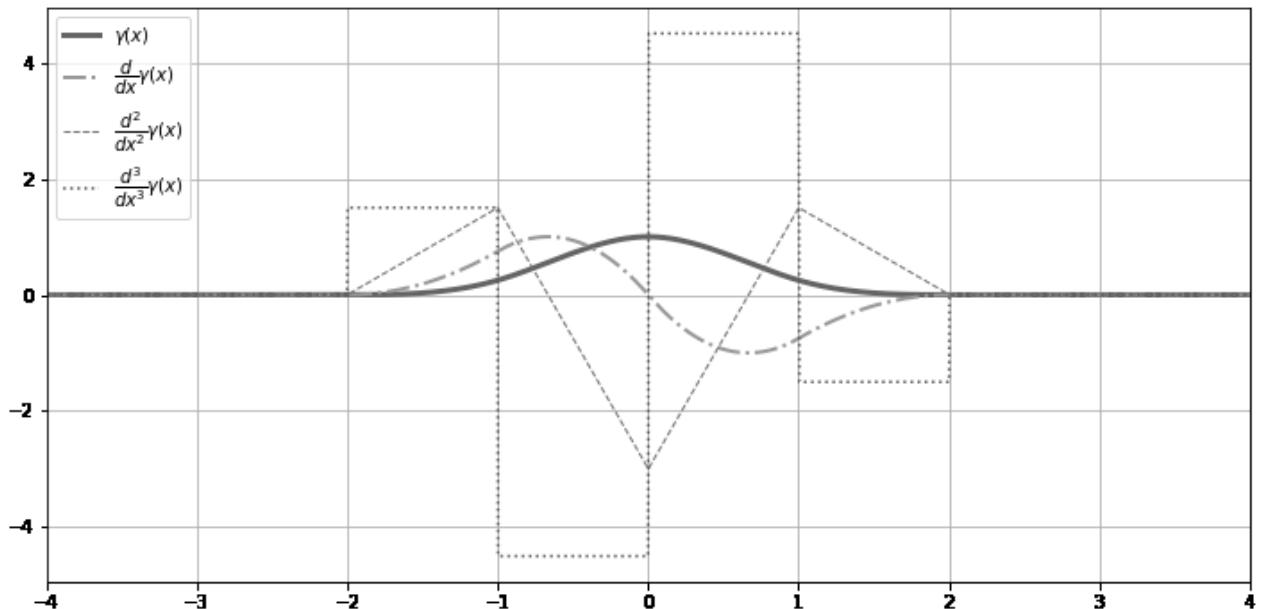
Նկար 1.3. Քառակուսային և խորանարդային մոտարկությունների համեմատում:

Այժմ դիտարկենք լոկալ կրող ունեցող խորանարդային սփլայնները: Այդպիսի սփլայններ առաջարկել է ավստրիացի մաթեմատիկոս Առնոլդ Շնեբերգը: Դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան.

$$\gamma(x) = \frac{1}{4} [\{x+2\}_+^3 - 4\{x+1\}_+^3 + 6\{x\}_+^3 - 4\{x-1\}_+^3 + \{x-2\}_+^3] \quad (17)$$

որտեղ

$$\{x\}_+ = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (18)$$



Նկար 1.4.  $\gamma(x)$  ֆունկցիան և նրա մինչև երրորդ կարգի ածանցյալները:

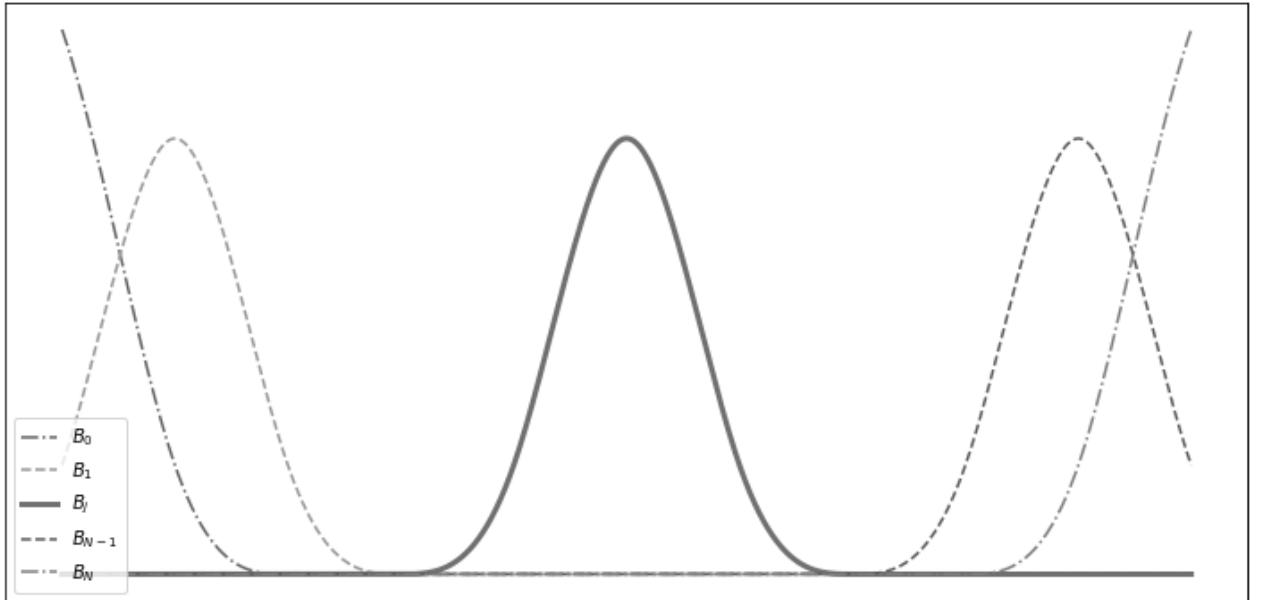
Ենթադրենք տրված է  $[x_0, x_N]$  ինտերվալը տրոհված  $N$  հավասար մասերի հ քայլով: Յուրաքանչյուր  $x_i$  հանգույցի ( $i = \overline{2, N-2}$ ) համար բազիսային ֆունկցիան տրվում է հետևյալ բանաձևով.

$$B_i\left(\frac{x}{h}\right) = \gamma\left(\frac{x-x_0}{h} - i\right) \quad (19)$$

Այս ֆունկցիաները և նրանց մինչև երկրորդ կարգի ածանցյալները հավասար են գրոյի  $\mathbb{R} \setminus (x_{i-2}, x_{i+2})$  տիրույթում: Մնացած բազիսային ֆունկիաները պետք է կառուցել այլ կերպ,

քանի որ դրանց մի մասը դուրս է ընկած  $[x_0, x_N]$  ինտերվալից:

$$\begin{aligned} B_0\left(\frac{x}{h}\right) &= \gamma\left(\frac{x}{h}\right) + \left\{\frac{h-x}{4h}\right\}_+^3, \quad x \in [x_0, x_2] \\ B_1\left(\frac{x}{h}\right) &= \gamma\left(\frac{x}{h}\right), \quad x \in [x_0, x_3] \\ B_{N-1}\left(\frac{x}{h}\right) &= \gamma\left(\frac{x}{h}\right), \quad x \in [x_{N-3}, x_N] \\ B_N\left(\frac{x}{h}\right) &= \gamma\left(\frac{x}{h}\right) + \left\{\frac{x-(N-1)h}{4h}\right\}_+^3, \quad x \in [x_{N-2}, x_N] \end{aligned} \tag{20}$$



Նկար 1.5.  $B_j$  բազիսային ֆունկցիաների գրաֆիկական ներկայացում:

Տրված  $\{(x_j, f_j)\}_{j=0}^N$  մոտարկման տվյալներվ կառուցենք սփլայն.

$$F(x) = \sum_{i=0}^N \alpha_i B_i\left(\frac{x}{h}\right) \tag{21}$$

Հաշվի առնելով մոտարկման պայմանները կստանանք հետևյալ հավասարությունների համակարգը.

$$\begin{cases} \frac{5}{4}\alpha_0 + \frac{1}{4}\alpha_0 = f_0 \\ \frac{1}{4}\alpha_{j-1} + \alpha_j + \frac{1}{4}\alpha_{j+1} = f_j, \quad j = \overline{1, N-1} \\ \frac{5}{4}\alpha_{N-1} + \frac{1}{4}\alpha_N = f_N \end{cases} \tag{22}$$

## Գլուխ 2

### Երկչափ մոտարկում

Այժմ դիտարկենք երկու փոփոխականի ֆունկցիայի մոտարկման խնդիրը: Ի տարբերություն մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի մոտարկման, այս դեպքում տիրույթի տրոհումը կարելի է իրականացնել կամայական ձևով:

#### Սահմանում.

Կասենք, որ տրված  $f(x, y)$  ֆունկցիան  $C^{(p,q)}$  կարգի ֆունկիա է, եթե

$$\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}, \quad i = \overline{0, p}, \quad j = \overline{0, q}$$

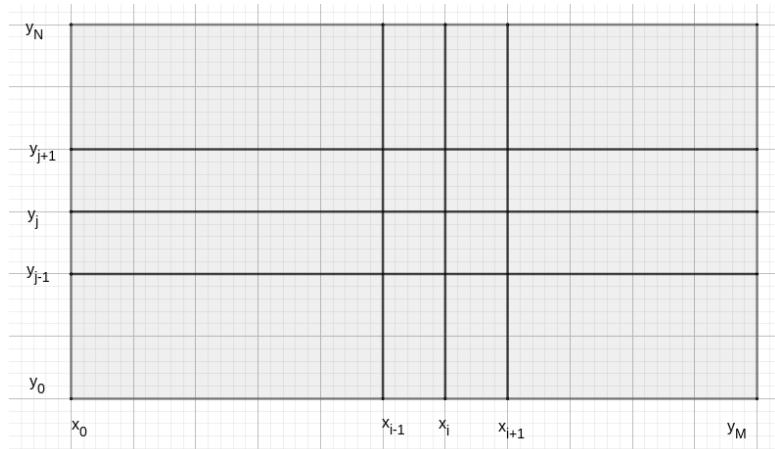
ֆունկցիաները անընդհատ են:

Կախված տրված տիրույթից և դրա տրոհման ձևից, առանձնացվում են հետևյալ մոտակման ձևերը.

#### 2.1. Ուղղանկյուն տիրույթ

Դիցուք տրված են  $f : \Omega \mapsto \Theta$ ,  $\Theta \subset \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = [x_0, x_M] \times [y_0, y_N]$  ուղղանկյուն տիրույթը, որը տրոհված է  $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ , ուղղանկյուն էլեմենտների:

$$x_{i+1} - x_i = h_1, \quad y_{j+1} - y_j = h_2, \quad i = \overline{0, M-1}, \quad j = \overline{0, N-1}$$



Նկար 2.1. Ուղղանկյունաձև տիրույթի տրոհում ուղղանկյուն էլեմենտների:

### 2.1.1. Էրմիթյան մոտարկում

#### Երկգծային մոտարկում:

Յուրաքանչյուր  $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$  էլեմենտի վրա  $f$  ֆունկցիան մոտարկվում է հետևյալ քառակուսային ֆունկցիայով.

$$p_1^{(i,j)}(x, y) = f_{ij}\alpha_{i,j}(x, y) + f_{i+1,j}\beta_{i+1,j}(x, y) + f_{i,j+1}\gamma_{i,j+1}(x, y) + f_{i+1,j+1}\delta_{i+1,j+1}(x, y) \quad (1)$$

որտեղ

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j}(x, y) &= \frac{1}{h_1 h_2} (x_{i+1} - x)(y_{j+1} - y) \\ \beta_{i+1,j}(x, y) &= \frac{1}{h_1 h_2} (x - x_i)(y_{j+1} - y) \\ \gamma_{i,j+1}(x, y) &= \frac{1}{h_1 h_2} (x_{i+1} - x)(y - y_j) \\ \delta_{i+1,j+1}(x, y) &= \frac{1}{h_1 h_2} (x - x_i)(y - y_j) \end{aligned} \quad (2)$$

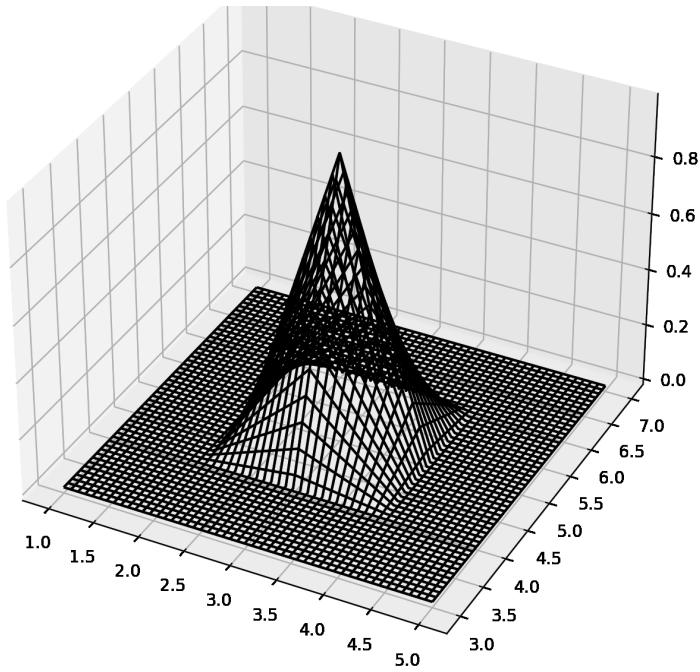
Այսպիսով  $[x_0, x_M] \times [y_0, y_M]$  տիրույթում կտոր առ կտոր մոտարկող ֆունկցիան տրվում է հետևյալ բանաձևով.

$$p_1(x, y) = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N f_{ij} \varphi^{(ij)}(x, y) \quad (3)$$

որտեղ

$$\varphi^{(ij)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{h_1 h_2} (x - x_{i-1})(y - y_{j-1}), & (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \\ \frac{1}{h_1 h_2} (x - x_{i-1})(y_{j+1} - y), & (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_j, y_{j+1}] \\ \frac{1}{h_1 h_2} (x_{i+1} - x)(y - y_{j-1}), & (x, y) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j] \\ \frac{1}{h_1 h_2} (x_{i+1} - x)(y_{j+1} - y), & (x, y) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \\ 0, & \text{մասցած դեպքերում} \end{cases} \quad (4)$$

Պարզ է, որ ստացված բազիսային ֆունկցիան  $C^{(0,0)}$  ֆունկիա է:

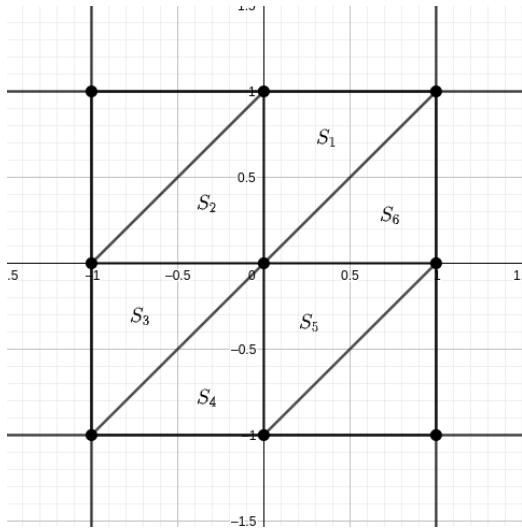


Նկար 2.2. Երկգծային մոտարկման բազիսային ֆունկցիայի գրաֆիկ:

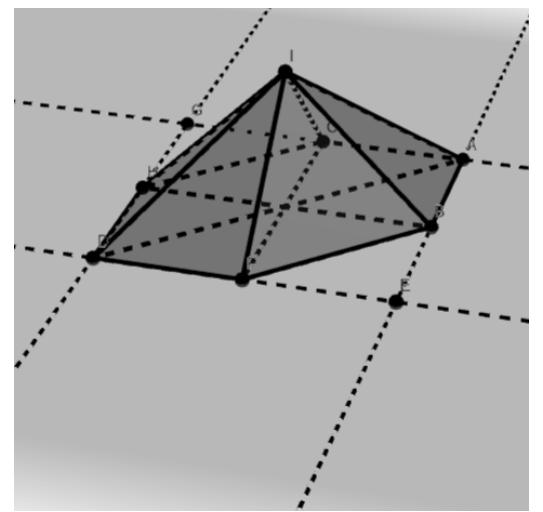
### Կուրանտի գծային ֆունկցիա

Այժմ դիտարկենք ուղղանկյուն տիրույթի տրոհման և բազիսային ֆունկցիաների կառուցման այլ տարրերակ: Այս դեպքում տիրույթը տրոհենք ինչպես նախորդ դեպքում, ի հավելում յուրաքանչյուր ուղղանկյուն էլեմենտ տրոհելով երկու ուղղանկյուն եռանկյունների, ինչպես ցույց է տրված նկ. 2.3-ում: Դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան.

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1 - y, & (x, y) \in S_1 \\ 1 + x - y, & (x, y) \in S_2 \\ 1 + x, & (x, y) \in S_3 \\ 1 + y, & (x, y) \in S_4 \\ 1 - x + y, & (x, y) \in S_5 \\ 1 - x, & (x, y) \in S_6 \\ 0, & \text{մյացած դեպքում} \end{cases} \quad (5)$$



Նկար 2.3. Ուղղանկյուն կեմենտի տրոհումը եռանկյունների:



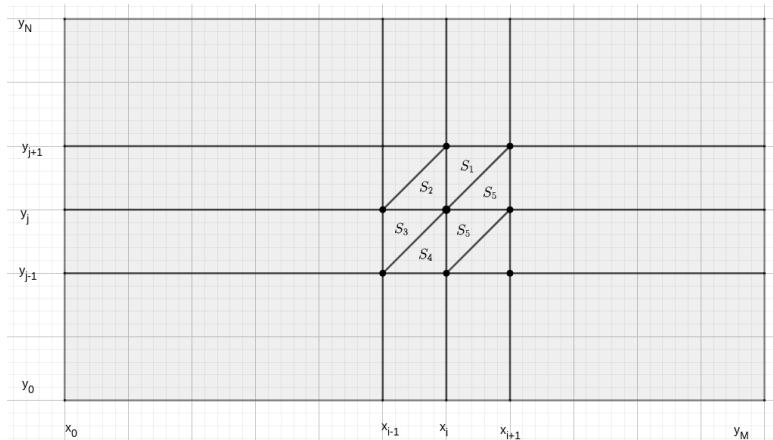
Նկար 2.4. Բազիսային ֆունկցիայի տեսքը:

Պարզ է, որ այն  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  տիրույթում  $C^{(0,0)}$  ֆունկցիա է: Այն հայտնի է որպես Կուրանտի բազիսային ֆունկցիա, ի պատիվ գերմանացի մաթեմատիկոս Ռիխարդ Կուրանտի: Այժմ յուրաքանչյուր  $(x_i, y_j)$  հանգուցային կետի համար կառուցենք բազիսային ֆունկցիա օգտվելով (6)-ից.

$$\varphi^{(ij)}(x, y) = \varphi\left(\frac{x - x_i}{h_1}, \frac{y - y_j}{h_2}\right) \quad (6)$$

Յուրաքանչյուր կետի համար ունենալով բազիսային ֆունկցիա,  $f$  ֆունկցիայի մոտարկման բանաձևը կտվրի հետևյալ կերպ:

$$p_1(x, y) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \varphi^{(ij)}(x, y) f(x_i, y_j) \quad (7)$$



Նկար 2.5. Տիրույթի տրոհումը ուղղանկյուն եռանկյունների:

## Երկխորանարդային մոտարկում

Միավոր քառակուսու վրա կառուցենք մոտարկող ֆունկցիա, որը լրիվ խորանարդային բազմանդամ է ըստ երկու փոփոխականի.

$$p_3^{(i,j)}(x, y) = \sum_{i,j=0}^3 \alpha_{ij} x^i y^j \quad (8)$$

որտեղ  $\alpha_{ij}$  գործակիցները միարժեքորեն որոշվում են գագաթների վրա  $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  ֆունկցիաների արժեքներով: Դրանք որոշելով (8) գումարը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$p_3^{(i,j)}(x, y) = \sum_{0 \leq i,j,k,l \leq 1} \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} \psi_i^{(k)}(x) \psi_j^{(l)}(y) \quad (9)$$

## որտեղ

$$\psi_0^{(0)}(t) = (1-t)^2 (1+2t)$$

$$\psi_0^{(1)}(t) = (1-t)^2 t$$

$$\psi_1^{(0)}(t) = t^2 (3-2t)$$

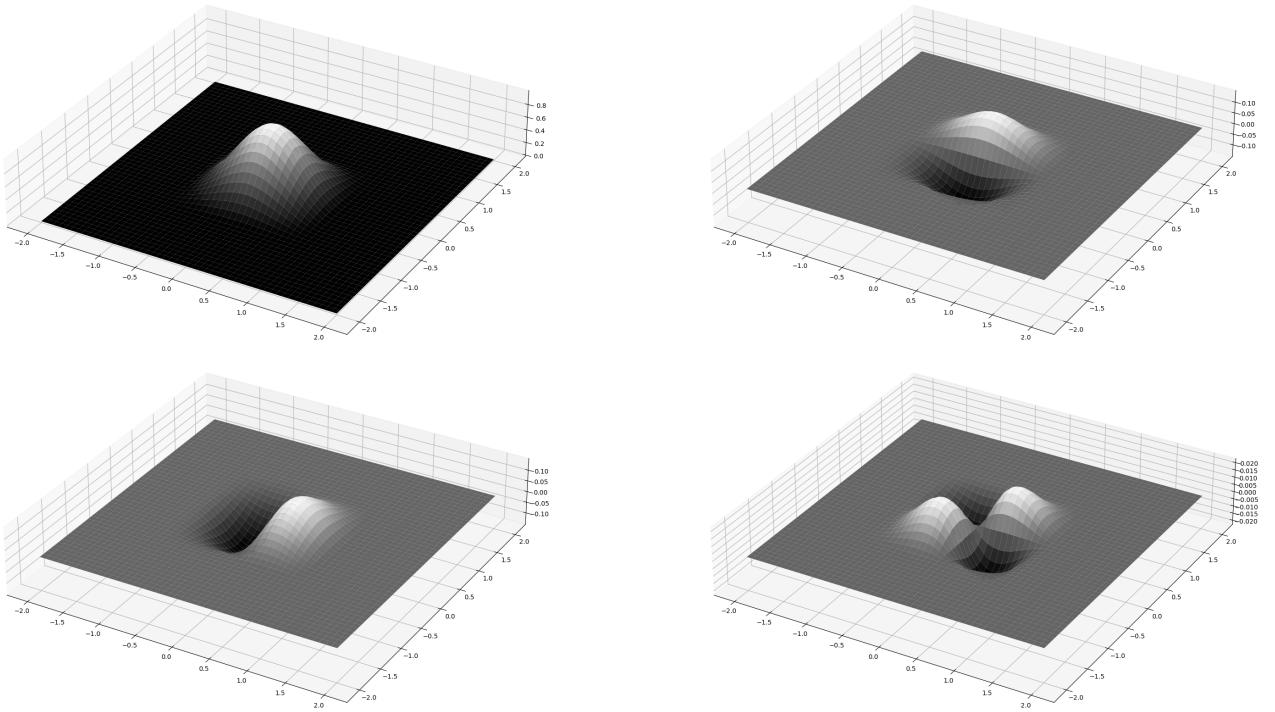
$$\psi_1^{(1)}(t) = t^2 (t-1)$$

Այժմ օգտվելով (8) բանաձևից և ունենալով տրված տիրույթի տրոհման  $h_1$  և  $h_2$  քայլերը, յուրաքանչյուր գագաթի համար կարող ենք կազմել բազիսային ֆունկցիա, և ամբողջ տիրույթում մոտարկող ֆունկցիան կունենա հետևյալ տեսքը.

$$p_3(x) = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \left[ f_{ij} \alpha^{(ij)}(x, y) + \frac{\partial f_{ij}}{\partial x} \beta^{(ij)}(x, y) + \frac{\partial f_{ij}}{\partial y} \gamma^{(ij)}(x, y) + \frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial x \partial y} \delta^{(ij)}(x, y) \right] \quad (10)$$

## որտեղ

$$\begin{aligned} \alpha^{(ij)} &= \varphi^{(0)} \left( \frac{x-x_0}{h_1} - i \right) \varphi^{(0)} \left( \frac{y-y_0}{h_2} - j \right), \beta^{(ij)} = \varphi^{(1)} \left( \frac{x-x_0}{h_1} - i \right) \varphi^{(0)} \left( \frac{y-y_0}{h_2} - j \right), \\ \gamma^{(ij)} &= \varphi^{(0)} \left( \frac{x-x_0}{h_1} - i \right) \varphi^{(1)} \left( \frac{y-y_0}{h_2} - j \right), \delta^{(ij)} = \varphi^{(1)} \left( \frac{x-x_0}{h_1} - i \right) \varphi^{(1)} \left( \frac{y-y_0}{h_2} - j \right) \\ \varphi^{(0)} &= \begin{cases} (1+t)^2 (1-2t), & -1 \leq x \leq 0 \\ (1-t)^2 (1+2t), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}, \varphi^{(1)} = \begin{cases} (1+t)^2 t, & -1 \leq x \leq 0 \\ (1-t)^2 t, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$



Նկար 2.6 Երկխորանարդային մոտարկման բազիսային ֆունկցիաների գծապատկեր:

Նկատենք, որ մոտարկումը կարելի էր ստանալ նաև միաչափ խորանարդային էրմիթյան բազիսային ֆունկցիաների թենզորական արտադրյալի միջոցով:

Վերը ներկայացված երկու մոտարկումները էրմիթյան մոտարկման մասնովոր դեպքեր են: Ընդհանուր դեպքում ցանկացած  $k$  բնական թվի և տրված ուղղանկյունաձև տրոհման յուրաքանչյուր էլեմենտի վրա կարելի է կառուցել  $C^{(k-1,k-1)}$  մոտարկող ֆունկցիա, որը ըստ յուրաքանչյուր փոփոխականի  $(2k-1)$ -րդ կարգի բազմանդամ է և բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} f(x_i, y_j) = \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} p_{2k-1}(x_i, y_j), \quad p, q = \overline{0, k-1}, \quad i = \overline{0, M}, \quad j = \overline{0, N} \quad (12)$$

## 2.1.2 Խորանարդային մոտարկում: Երկխորանարդային սփլայն

Մեկ փոփոխականի մոտարկան խնդիրը դիտարկելիս քննարկեցինք Շներբերգի կողմից առաջարկված խորանարդային բազիսային սփլայնները: Այս սփլայնները կարող ենք օգտագործել երկչափ մոտարկման համար: Յուրաքանչյուր  $(x_i, y_j)$  հանգույցի վրա կառուցենք բազիսային ֆունկցիա կազմելով  $B_i\left(\frac{x}{h_1}\right)$  և  $B_j\left(\frac{x}{h_2}\right)$  ֆունկցիաների թենզորական արտադրյալը:

$$\varphi^{(ij)}(x, y) = B_i\left(\frac{x}{h_1}\right) B_j\left(\frac{x}{h_2}\right) \quad (13)$$

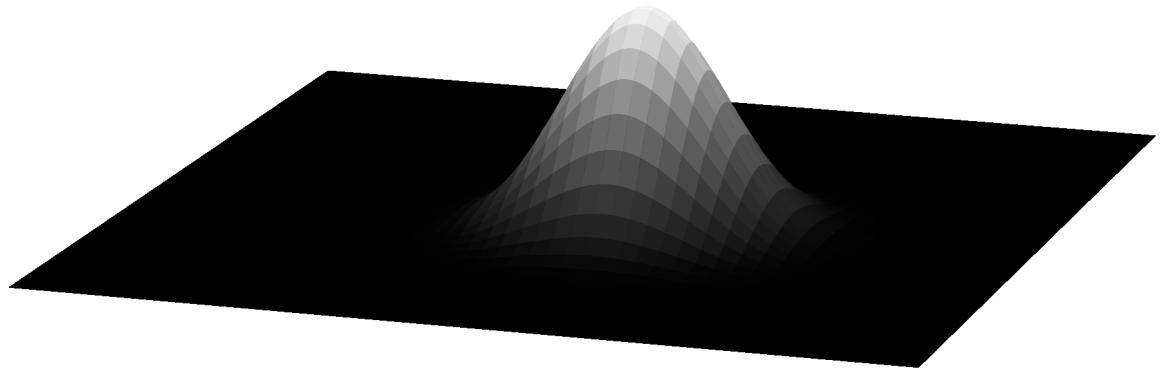
Ստացված բազիսային ֆունկցիան  $C^{(2,2)}$  ֆունկցիա է:

Տրված  $\{(x_{ij}, y_{ij}, f_{ij})\}$  մոտարկման տվյալներով կառուցենք սփլայն.

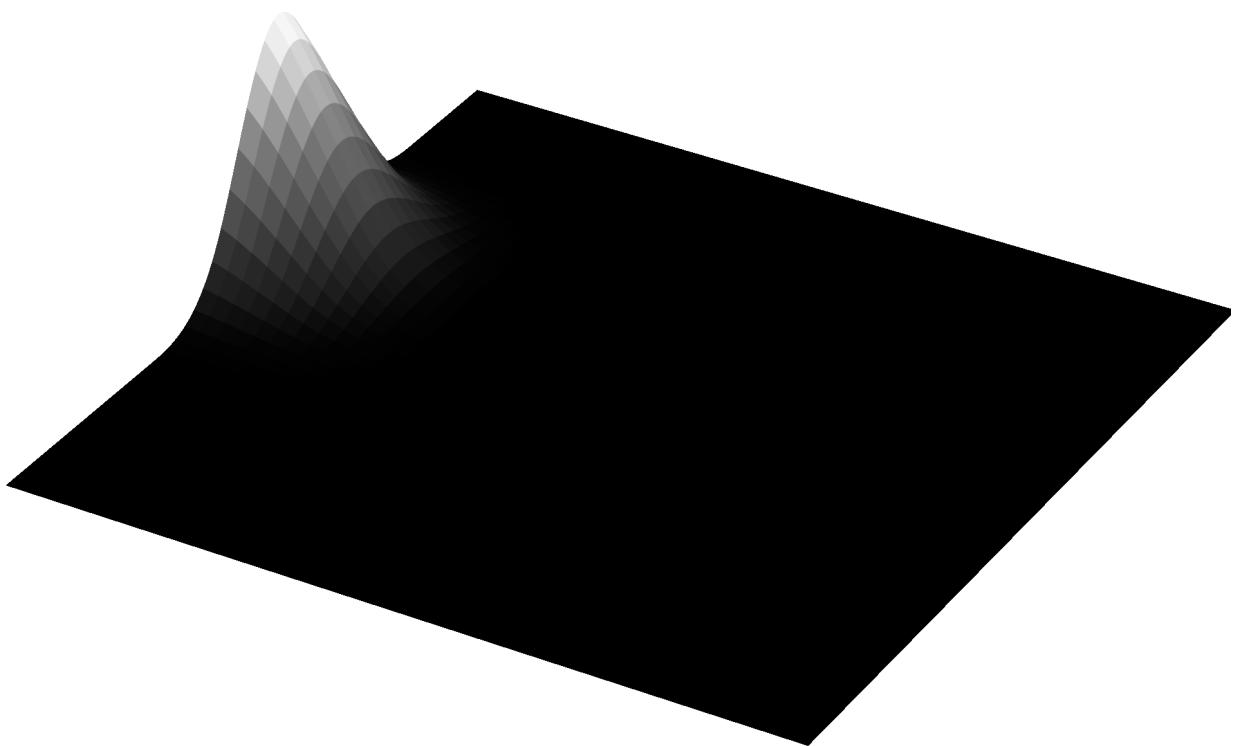
$$F(x, y) = \sum_{i=0}^N \alpha_{ij} \varphi^{(ij)}(x, y) \quad (14)$$

Հաշվի առնելով մոտարկման պայմանները կստանանք հետևյալ հավասարումերի համակարգը.

$$\begin{cases} \alpha_{00} + \frac{5}{16}(\alpha_{01} + \alpha_{10}) + \frac{1}{16}\alpha_{11} = f_{00} \\ \alpha_{M0} + \frac{5}{16}(\alpha_{M1} + \alpha_{M-1,0}) + \frac{1}{16}\alpha_{M-1,1} = f_{M0} \\ \alpha_{0N} + \frac{5}{16}(\alpha_{1N} + \alpha_{0,N-1}) + \frac{1}{16}\alpha_{N-1,1} = f_{0N} \\ \alpha_{MN} + \frac{5}{16}(\alpha_{M-1,N} + \alpha_{M,N-1}) + \frac{1}{16}\alpha_{M-1,N-1} = f_{MN} \\ \frac{5}{4}\alpha_{i,1} + \frac{5}{16}(\alpha_{i-1,0} + \alpha_{i+1,0}) + \frac{1}{4}\alpha_{i,1} + \frac{1}{16}(\alpha_{i-1,1} + \alpha_{i+1,1}) = f_{i0} \\ \frac{5}{4}\alpha_{i,N-1} + \frac{5}{16}(\alpha_{i-1,N} + \alpha_{i+1,N}) + \frac{1}{4}\alpha_{i,N-1} + \frac{1}{16}(\alpha_{i-1,N-1} + \alpha_{i+1,N-1}) = f_{iN} \\ \frac{5}{4}\alpha_{1,j} + \frac{5}{16}(\alpha_{0,j-1} + \alpha_{0,j+1}) + \frac{1}{4}\alpha_{1,j} + \frac{1}{16}(\alpha_{1,j-1} + \alpha_{1,j+1}) = f_{0j} \\ \frac{5}{4}\alpha_{M-1,j} + \frac{5}{16}(\alpha_{M,j-1} + \alpha_{M,j+1}) + \frac{1}{4}\alpha_{M-1,j} + \frac{1}{16}(\alpha_{M-1,j-1} + \alpha_{M-1,j+1}) = f_{Mj} \\ \alpha_{ij} + \frac{1}{4}(\alpha_{i,j-1} + \alpha_{i,j+1} + \alpha_{i-1,j} + \alpha_{i+1,j}) + \frac{1}{16}(\alpha_{i-1,j-1} + \alpha_{i-1,j+1} + \alpha_{i+1,j-1} + \alpha_{i+1,j+1}) = f_{ij} \end{cases} \quad (15)$$



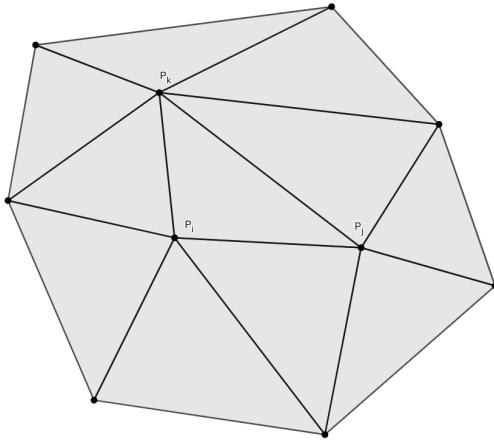
Նկար 2.7.  $\varphi^{(ij)}$  բազիսային ֆունկցիաների պատկեր:



Նկար 2.8 Տիրույթի եզրի վրա գտնվող բազիսային ֆունկցիա:

## 2.2 Բազմանկյուն տիրույթ

Բազմանկյուն տիրույթ ասելով կհասկանանք կամ հենց բազմանկյունաձև տիրույթը, կամ դրա բազմանկյուններով մոտարկումը: Դիցուք տրված են  $f : \Omega \mapsto \Theta, \Theta \subset \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$  բազմանկյուն տիրույթը, որը կամայական ձևով տրոհված է եռանկյուն կեմենտների:



Նկար 2.9. Տիրույթի եռանկյունաձև տրոհման օրինակ:

### 2.2.1 Լազրանժի մոտարկում

Յուրաքանչյուր եռանկյուն կեմենտի վրա դիտարկենք  $m$ -րդ կարգի լրիվ բազմանդամ

$$F_m(x, y) = \sum_{k+l=0}^m \alpha_{kl} x^k y^l \quad (16)$$

որը կարող է օգտագործվել որպես մոտարկող ֆունկցիա  $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$  սիմետրիկ դասավորված կետերի վրա: Դիտարկենք հետևյալ մասնավոր դեպքերը.

#### 1. Գծային մոտարկում ( $m=1$ )

Յուրաքանչյուր  $P_1, P_2, P_3$  գագաթներով եռանկյուն կեմենտի համար դիտարկենք հետևյալ մոտարկող ֆունկցիան.

$$F_1(x, y) = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^3 p_i^{(1)}(x, y) f(x_i, y_i) \quad (17)$$

որտեղ  $S$ -ը  $P_1, P_2, P_3$  կետերով կազմված եռանկյան մակերեսի կրկնապատիկն է, իսկ  $p_i^{(1)}$  ֆունկցիաները սահմանվում են հետևյալ կերպ.

$$p_i^{(1)}(x, y) = x_j y_k - x_k y_j + \eta_{kl} x - \xi_{kl} y \quad (18)$$

որտեղ

$$\eta_{kl} = y_k - y_l, \quad \xi_{kl} = x_k - x_l$$

$$S = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

որտեղ  $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3$  տրված եռանկյուն էլեմենտի գագաթներն են (հերթականությունը ժամկանքին հակառակ ուղղությամբ):

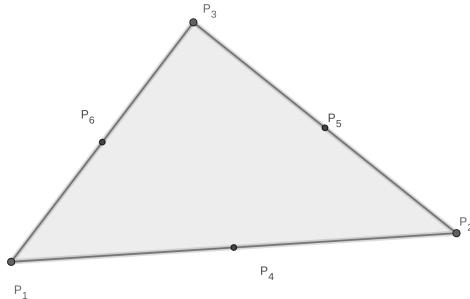
## 2. Քառակուսային մոտարկում ( $m=2$ )

Յուրաքանչյուր եռանկյուն էլեմենտի վրա գագաթներից բացի դիտարկենք նաև միջնակետերը: Մոտարկող բազմանդամը ունի հետևյալ տեսքը.

$$F_2(x, y) = \frac{1}{S^2} \sum_{i=1}^6 p_i^{(2)}(x, y) f(x_i, y_i) \quad (19)$$

որտեղ

$$\begin{aligned} p_i^{(2)}(x, y) &= p_i^{(1)}(x, y) \left( 2p_i^{(1)}(x, y) - 1 \right), \quad i = 1, 2, 3 \\ p_4^{(2)}(x, y) &= 4p_1^{(1)}(x, y)p_2^{(1)}(x, y) \\ p_5^{(2)}(x, y) &= 4p_2^{(1)}(x, y)p_3^{(1)}(x, y) \\ p_6^{(2)}(x, y) &= 4p_1^{(1)}(x, y)p_3^{(1)}(x, y) \end{aligned} \quad (20)$$



Նկար 2.8. Կետերի դասավորվածությունը կամայական եռանկյան վրա:

## 3. Խորանարդային մոտարկում ( $m=3$ )

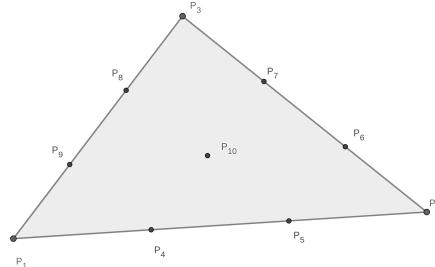
Այս տեպքում յուրականչյուր կողի վրա ավելացնենք ևս երկու կետ այն տրոհելով երեք հավասար մասի և դրանց ավելացնելով եռանկյան կենտրոնը: Մոտարկող բազմանդամը

ունի հետևյալ տեսքը.

$$F_3(x, y) = \frac{1}{S^3} \sum_{i=1}^{10} p_i^{(3)}(x, y) f(x_i, y_i) \quad (21)$$

որտեղ

$$\begin{aligned} p_i^{(3)}(x, y) &= \frac{1}{2} p_i^{(1)}(x, y) \left( 3p_i^{(1)}(x, y) - 1 \right) \left( 3p_i^{(1)}(x, y) - 2 \right), \quad i = 1, 2, 3 \\ p_4^{(3)}(x, y) &= \frac{9}{2} p_1^{(1)}(x, y) p_2^{(1)}(x, y) \left( 3p_1^{(1)}(x, y) - 1 \right) \\ p_5^{(3)}(x, y) &= \frac{9}{2} p_1^{(1)}(x, y) p_2^{(1)}(x, y) \left( 3p_2^{(1)}(x, y) - 1 \right) \\ p_6^{(3)}(x, y) &= \frac{9}{2} p_2^{(1)}(x, y) p_3^{(1)}(x, y) \left( 3p_3^{(1)}(x, y) - 1 \right) \\ p_7^{(3)}(x, y) &= \frac{9}{2} p_2^{(1)}(x, y) p_3^{(1)}(x, y) \left( 3p_3^{(1)}(x, y) - 1 \right) \\ p_8^{(3)}(x, y) &= \frac{9}{2} p_3^{(1)}(x, y) p_1^{(1)}(x, y) \left( 3p_3^{(1)}(x, y) - 1 \right) \\ p_9^{(3)}(x, y) &= \frac{9}{2} p_3^{(1)}(x, y) p_1^{(1)}(x, y) \left( 3p_1^{(1)}(x, y) - 1 \right) \\ p_{10}^{(3)}(x, y) &= 27 p_1^{(1)}(x, y) p_2^{(1)}(x, y) p_3^{(1)}(x, y) \end{aligned} \quad (22)$$



Նկար 2.9. Կետերի դասավորվածությունը կամայական եռանկյան վրա:

Բնական է, որ որևէ կետի նկատմամբ լրիվ բազիսային ֆունկցիայի կառուցելու համար անհրաժեշտ է իրար գումարել այն բոլոր եռանկյուն էլեմենտների այդ կետին համապատասխան ֆունկցիաները, որոնց համար տվյալ կետը գագաթ է:

## Ստանդարտ եռանկյուն

(2.17) ից կարելի է հեշտորեն ստանալ, որ

$$1. \sum_{i=1}^3 p_i(x, y) = 1$$

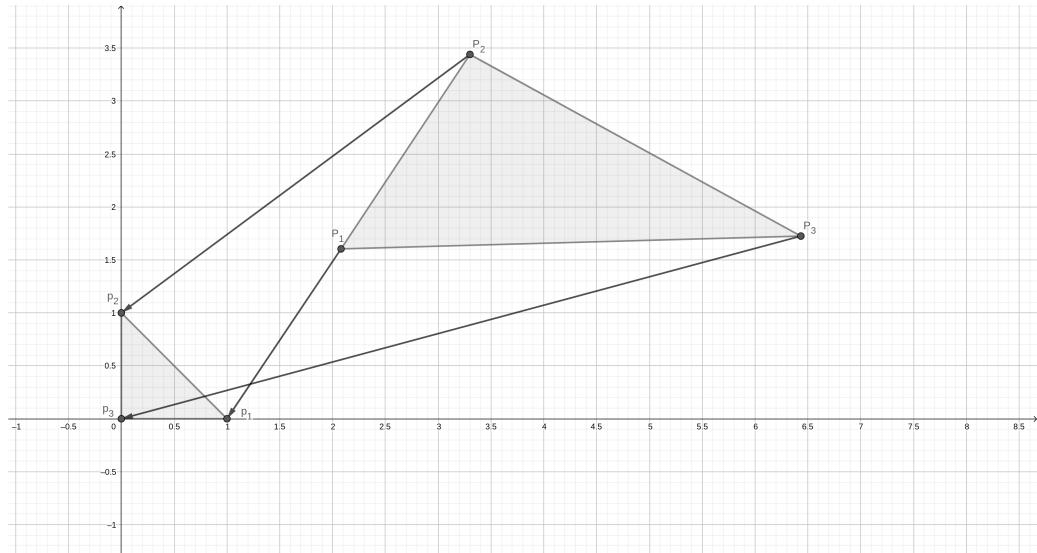
2.  $p_i(x, y) = 0$  գծային հավասարումները եռանկյան համապատասխանաբար  $P_2P_3$ ,  $P_3P_1$  և  $P_1P_2$  կողերն են:

3.  $p_i(x, y) = 1$  գծային հավասարումները եռանկյան համապատասխանաբար  $P_1$ ,  $P_2$  և  $P_3$  գագաթներն են:

Այսինքն, կարող ենք ասել, որ  $P_1P_2P_3$  եռանկյունը  $(x, y)$  կոորդինատական հարթությունից ձևափոխվում է այսպես կոչված ստանդարտ եռանկյան, որի գագաթներն են  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  և  $(0, 0)$  կետերը: Հակադարձ ձևափոխությունը տրվում է հետևյալ բանաձևերով.

$$\begin{aligned} x &= x_3 + \xi_{13}p_1 + \xi_{23}p_2 \\ y &= y_3 + \eta_{13}p_1 + \eta_{23}p_2 \end{aligned} \tag{23}$$

Հաշվարկները և բանաձևերը հեշտանցնելու համար հետազայտմ կօգտվենք այս ձևափոխությունից:



Նկար 2.10. Կամայական եռանկյան ձևափոխում ստանդարտ եռանկյան:

Նշենք սակայն, որ որոշ գրականություններում հանդիպում են ստանդարտ եռանկյան գագաթների համարակալման այլ հաջորդականություն, բայց անցումը մի եղանակից մյուսը տրիվիալ է:

## 2.2.2 Էրմիթյան մոտարկում

Նախորդ ենթագլխում տեսանք, որ ավելի բարձր կարգի մոտարկում իրականացնելու համար անհրաժեշտ է մեկ եռանկյան վրա դիտարկել մեծ քանակությամբ կետեր: Որպես այլընտրանք դիտարկենք Էրմիթի մոտարկումը, որի դեպքում դիտարկվող կետերի քանակը ավելի քիչ է: կ-րդ աստիճանի բազմանդամների դասը նշանակենք  $G_k$ -ով: (2.12)-ի նմանությամբ, այս դեպքում ևս տրված եռանկյուն կենտրոնի վրա ընդհանուր դեպքում  $2k+1$ -րդ կարգի Էրմիթյան մոտարկման գործակիցները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով:

$$\frac{\partial^k G_n}{\partial p_1^{k_1} \partial p_2^{k_2}} (P_i), i = \overline{1, 3} \quad (24)$$

որտեղ  $P_1, P_2, P_3$  տրված եռանկյան գագաթներն են:

Դիտարկենք երրորդ աստիճանի ( $k=1$ ) դեպքը:

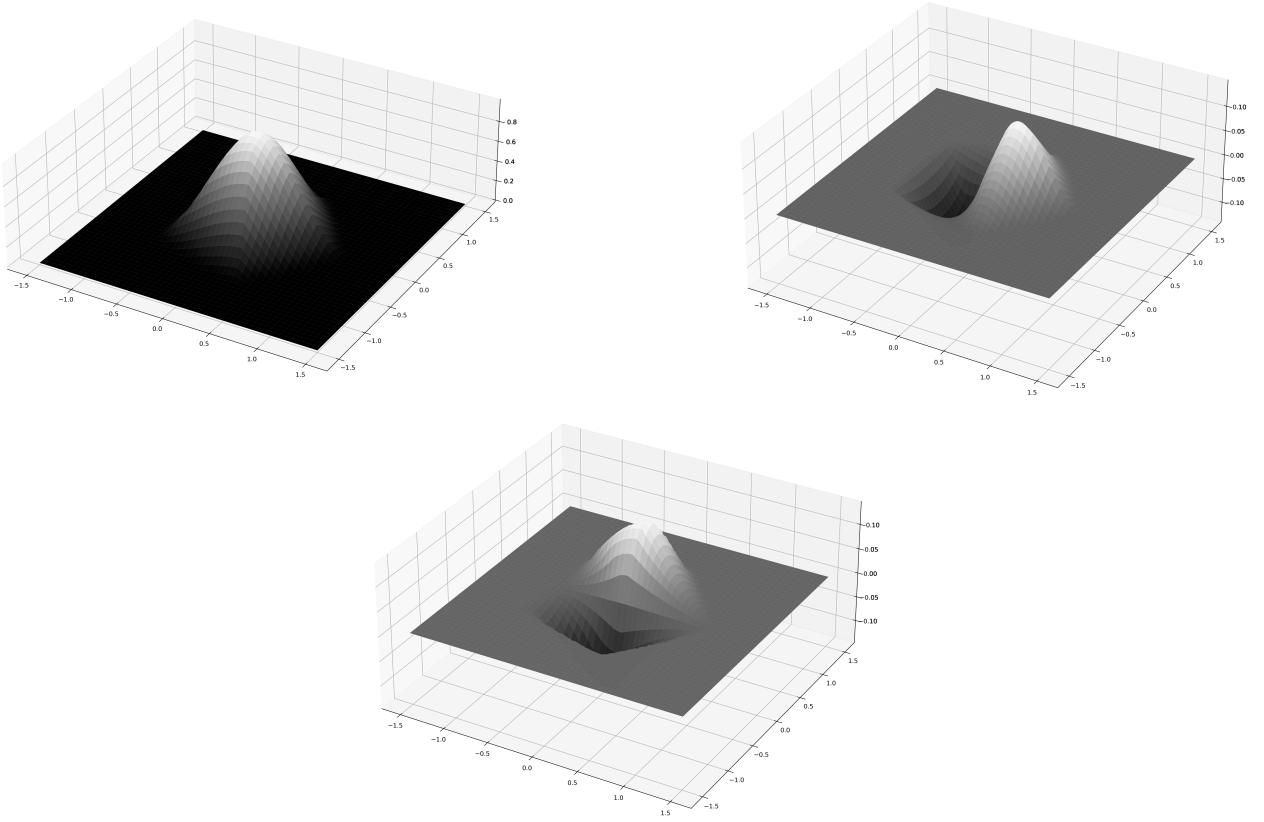
Այս դեպքում տրված եռանկյուն ելեմենտի վրա մոտարկող բազմանդամը ունի 9 պարամետր, որոնք միարժեքորեն որոշվում են գագաթներում ֆունկցիայի և նրա առաջին կարգի ածանցյալների արժեքներով: Ըստ այդմ մոտարկող ֆունկցիան կներկայացնենք հետևյալ տեսքով.

$$G_1 (p_1, p_2) = \sum_{j=1}^3 \left[ U_j q_j^{(3)} + \left( \frac{\partial U}{\partial p_1} \right)_j r_j^{(3)} + \left( \frac{\partial U}{\partial p_2} \right)_j s_j^{(3)} \right] \quad (25)$$

որտեղ

$$\begin{aligned} q_j^{(3)} (x, y) &= p_j^2 (3 - 2p_j) + 2p_1 p_2 p_3 \\ r_1^{(3)} &= p_1^2 (p_1 - 1) - p_1 p_2 p_3 \\ r_2^{(3)} &= p_2^2 p_1 + \frac{p_1 p_2 p_3}{2} \\ r_3^{(3)} &= p_3^2 p_1 + \frac{p_1 p_2 p_3}{2} \\ s_1^{(3)} &= p_1^2 p_2 + \frac{p_1 p_2 p_3}{2} \\ s_2^{(3)} &= p_2^2 (p_2 - 1) - p_1 p_2 p_3 \\ s_3^{(3)} &= p_3^2 p_2 + \frac{p_1 p_2 p_3}{2} \end{aligned} \quad (26)$$

Ստորև ներկայացված են կառուցված բազմային ֆունկցիաներ հինգ եռանկյուն կենտրոնների վրա  $U, \frac{\partial U}{\partial p_1}, \frac{\partial U}{\partial p_2}$  հերթականությամբ:



Նկար 2.10. Երրորդ կարգի Էրմիթի մոտարկման բազմային ֆունկցիաները կառուցված հինգ եռանկյունների վրա:

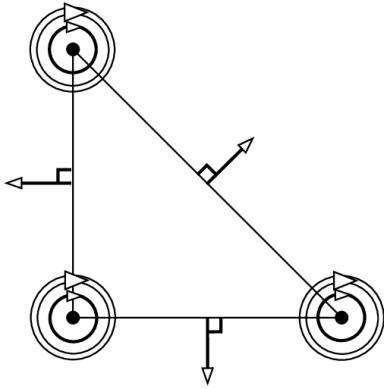
Նկատենք սակայն, որ նախորդիվ դիտարկված մոտարկումը  $C^0$  կարգի է: Այժմ դիտարկենք  $C^1$  կարգի մոտարկման մի եղանակ, որն անվանում են Արգիրիսի կեմենտ:

Այս դեպքում, ստանդարտ եռանյան գագաթների համարակալման հաջորդականությունը հետևյալն է՝  $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ :

Ստանդարտ եռանկյան վրա դիտարկենք հիգերորդ աստիճանի լրիվ բազմանդամ, որն ունի 21 պարամետր:

$$U(p_1, p_2) = \sum_{j+k \leq 5} \alpha_{jk} p_1^j p_2^k \quad (27)$$

$\alpha_{jk}$  պարամետրերը որոշվում են գագաթներում ֆունկցիայի և նրա մինչև երկրորդ կարգի բոլոր ածանցյալների արժեքներով և կողերի միջնակետերում նորմալի ուղղությամբ ածանցյալի արժեքներով: Միջնակետերը կհամարակելենք հետևյալ կերպ:  $j$ -րդ գագաթին համապատասխանող միջնակետին կհամապատասխանեցնենք այն կողի միջնակետը, որին այն չի պատկանում:



Նկար 2.11. Արգիրիսի եռանկյան սխեմատիկ ներկայացում:

Ստորև ներկայացվում են բազիսային ֆունկցիաները:

Առաջին գագաթի համար՝

$$\begin{aligned}
 \varphi_1^{(0,0)} &= -6p_1^5 + 15p_1^4 + 30p_1^3p_2^2 - 10p_1^3 + 30p_1^2p_2^3 - 30p_1^2p_2^2 - 6p_2^5 + 15p_2^4 - 10p_2^3 + 1 \\
 \varphi_1^{(1,0)} &= p_1 (-3p_1^4 + 8p_1^3 + p_1^2p_2^2 - 6p_1^2 - 10p_1p_2^3 + 10p_1p_2^2 - 8p_2^4 + 18p_2^3 - 11p_2^2 + 1) \\
 \varphi_1^{(0,1)} &= p_2 (-8p_1^4 - 10p_1^3p_2 + 18p_1^3 + p_1^2p_2^2 + 10p_1^2p_2 - 11p_1^2 - 3p_2^4 + 8p_2^3 - 6p_2^2 + 1) \\
 \varphi_1^{(2,0)} &= \frac{p_1^2 (-p_1^3 + 3p_1^2 + 3p_1p_2^2 - 3p_1 + 2p_2^3 - 3p_2^2 + 1)}{2} \\
 \varphi_1^{(1,1)} &= p_1p_2 (-2p_1^3 - 6p_1^2p_2 + 5p_1^2 - 6p_1p_2^2 + 10p_1p_2 - 4p_1 - 2p_2^3 + 5p_2^2 - 4p_2 + 1) \\
 \varphi_1^{(0,2)} &= \frac{p_2^2 \cdot (2p_1^3 + 3p_1^2p_2 - 3p_1^2 - p_2^3 + 3p_2^2 - 3p_2 + 1)}{2}
 \end{aligned} \tag{28}$$

Երկրորդ գագաթի համար՝

$$\begin{aligned}
 \varphi_2^{(0,0)} &= p_1^2 \cdot (6p_1^3 - 15p_1^2 - 15p_1p_2^2 + 10p_1 - 15p_2^3 + 15p_2^2) \\
 \varphi_2^{(1,0)} &= \frac{p_1^2 (-6p_1^3 + 14p_1^2 + 7p_1p_2^2 - 8p_1 + 7p_2^3 - 7p_2^2)}{2} \\
 \varphi_2^{(0,1)} &= \frac{p_1^2 p_2 (-16p_1^2 - 37p_1p_2 + 28p_1 - 27p_2^2 + 37p_2 - 10)}{2} \\
 \varphi_2^{(2,0)} &= \frac{p_1^2 \cdot (2p_1^3 - 4p_1^2 - p_1p_2^2 + 2p_1 - p_2^3 + p_2^2)}{4} \\
 \varphi_2^{(1,1)} &= \frac{p_1^2 p_2 (4p_1^2 + 7p_1p_2 - 6p_1 + 5p_2^2 - 7p_2 + 2)}{2} \\
 \varphi_2^{(0,2)} &= \frac{p_1^2 p_2^2 (-3p_1 - 5p_2 + 5)}{4}
 \end{aligned} \tag{29}$$

Երրորդ գագաթի համար՝

$$\begin{aligned}
 \varphi_3^{(0,0)} &= p_2^2 (-15p_1^3 - 15p_1^2p_2 + 15p_1^2 + 6p_2^3 - 15p_2^2 + 10p_2) \\
 \varphi_3^{(1,0)} &= \frac{p_1p_2^2 (-27p_1^2 - 37p_1p_2 + 37p_1 - 16p_2^2 + 28p_2 - 10)}{2} \\
 \varphi_3^{(0,1)} &= \frac{p_2^2 \cdot (7p_1^3 + 7p_1^2p_2 - 7p_1^2 - 6p_2^3 + 14p_2^2 - 8p_2)}{2} \\
 \varphi_3^{(2,0)} &= \frac{p_1^2p_2^2 (-5p_1 - 3p_2 + 5)}{4} \\
 \varphi_3^{(1,1)} &= \frac{p_1p_2^2 \cdot (5p_1^2 + 7p_1p_2 - 7p_1 + 4p_2^2 - 6p_2 + 2)}{2} \\
 \varphi_3^{(0,2)} &= \frac{p_2^2 (-p_1^3 - p_1^2p_2 + p_1^2 + 2p_2^3 - 4p_2^2 + 2p_2)}{4}
 \end{aligned} \tag{30}$$

Միջնակետերի համար՝

$$\begin{aligned}
 \hat{\varphi}_1 &= 8\sqrt{2}p_1^2p_2^2 (p_1 + p_2 - 1) \\
 \hat{\varphi}_2 &= 16p_1p_2^2 (-p_1^2 - 2p_1p_2 + 2p_1 - p_2^2 + 2p_2 - 1) \\
 \hat{\varphi}_3 &= 16p_1^2p_2 (-p_1^2 - 2p_1p_2 + 2p_1 - p_2^2 + 2p_2 - 1)
 \end{aligned} \tag{31}$$

Այսպիսով, մոտարկող ֆունկցիան ստանդարտ եռանկյան վրա կունենա հետևյալ տեսքը.

$$U(p_1, p_2) = \sum_{i=1}^3 \sum_{|j| \leq 2} D^j U_i \varphi_i^j(p_1, p_2) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U_i}{\partial n} \hat{\varphi}_i(p_1, p_2) \tag{32}$$

որտեղ

$$D^j U_i = \frac{\partial^{|i|} U}{\partial p_1^{i_1} \partial p_2^{i_2}}, \quad |i| = i_1 + i_2$$

ածանցյալի մուլտիինդեքսային ներկայացման եղանակն է:

Ստանդարտ եռանկյունից ցանկացած եռանկյան վրա արտապատկերելու համար կօգտվենք Պիոլայի ձևափոխությունից: Կատարենք ձևափոխության համար անհրաժեշտ սահամբույրը:

$\hat{\Psi}$ -ով նշանակենք ստանդարտ եռանկյան բազիսները, իսկ  $\Psi$  -ով՝ դրանք արտապարկերված եռանկյան վրա:

Նշանակենք

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J^{-T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J^{-T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Theta^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J^{-T} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Theta^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B^3 \end{bmatrix} \quad (33)$$

որտեղ՝

$$J = \frac{\partial(p_1, p_2)}{\partial(x, y)} \quad (34)$$

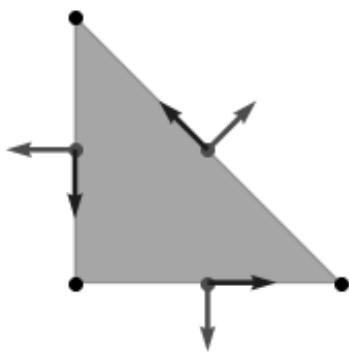
$$\Theta = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x}\right)^2 & 2\frac{\partial p_1}{\partial x}\frac{\partial p_2}{\partial x} & \left(\frac{\partial p_2}{\partial x}\right)^2 \\ \frac{\partial p_1}{\partial y}\frac{\partial p_1}{\partial x} & \frac{\partial p_1}{\partial y}\frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial x}\frac{\partial p_2}{\partial y} & \frac{\partial p_2}{\partial y}\frac{\partial p_2}{\partial x} \\ \left(\frac{\partial p_1}{\partial y}\right)^2 & 2\frac{\partial p_1}{\partial y}\frac{\partial p_2}{\partial y} & \left(\frac{\partial p_2}{\partial y}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} B^i &= \hat{G}_i J^{-T} G_i^T \\ \hat{G}_i &= \begin{bmatrix} \hat{n}_i & \hat{t}_i \end{bmatrix}^T \\ G_i &= \begin{bmatrix} n_i & t_i \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (36)$$

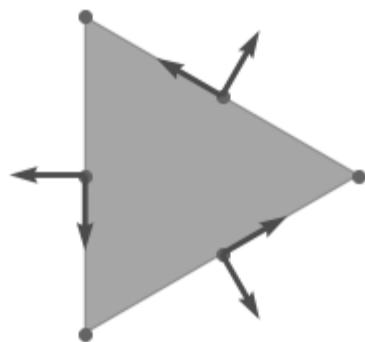
$\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3$ -ը ստանդարտ եռանկյան կողերի միջնակետերի արտաքին նորմալներն են, իսկ  $\hat{t}_1, \hat{t}_2, \hat{t}_3$ -ը՝ ուղղորդ վեկտորները: Ավելի կոնկրետ՝

$$\begin{aligned} \hat{n}_1 &= \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right], \quad \hat{n}_2 = [-1, 0], \quad \hat{n}_3 = [0, -1] \\ \hat{t}_1 &= \left[ -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right], \quad \hat{t}_2 = [0, -1], \quad \hat{t}_3 = [1, 0] \end{aligned} \quad (37)$$

$n_i$ -ն և  $t_i$ -ն արտապարկերված եռանկյան համապատասխան միջնակետերի նորմալներն ու ուղղորդ վեկտորներն են (տես նկ. 2.11., 2.12):



Նկար 2.12. Նորմալ և ուղղորդ վեկտորները ստանդարտ եռանկյան համար:



Նկար 2.13. Նորմալ և ուղղորդ վեկտորները կամայական եռանկյան համար:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{8l_1} & -\frac{7t_1}{16} & -\frac{\tau_1 l_1}{32} & \frac{15}{8l_1} & -\frac{7t_1}{16} & \frac{\tau_1 l_1}{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{15}{8l_2} & -\frac{7t_2}{16} & \frac{\tau_2 l_2}{32} & 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{8l_2} & -\frac{7t_2}{16} & -\frac{\tau_2 l_2}{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{15}{8l_3} & -\frac{7t_3}{16} & -\frac{\tau_3 l_3}{32} & \frac{15}{8l_3} & -\frac{7t_3}{16} & \frac{\tau_3 l_3}{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

որտեղ  $l_j$ -ն  $j$ -րդ տողի երկարությունն է, իսկ  $\tau_j$ -ն սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$\tau_i = \left[ (t_i^x)^2, 2t_i^x t_i^y, (t_i^x)^2 \right] \quad (39)$$

## Նշանակենք նաև

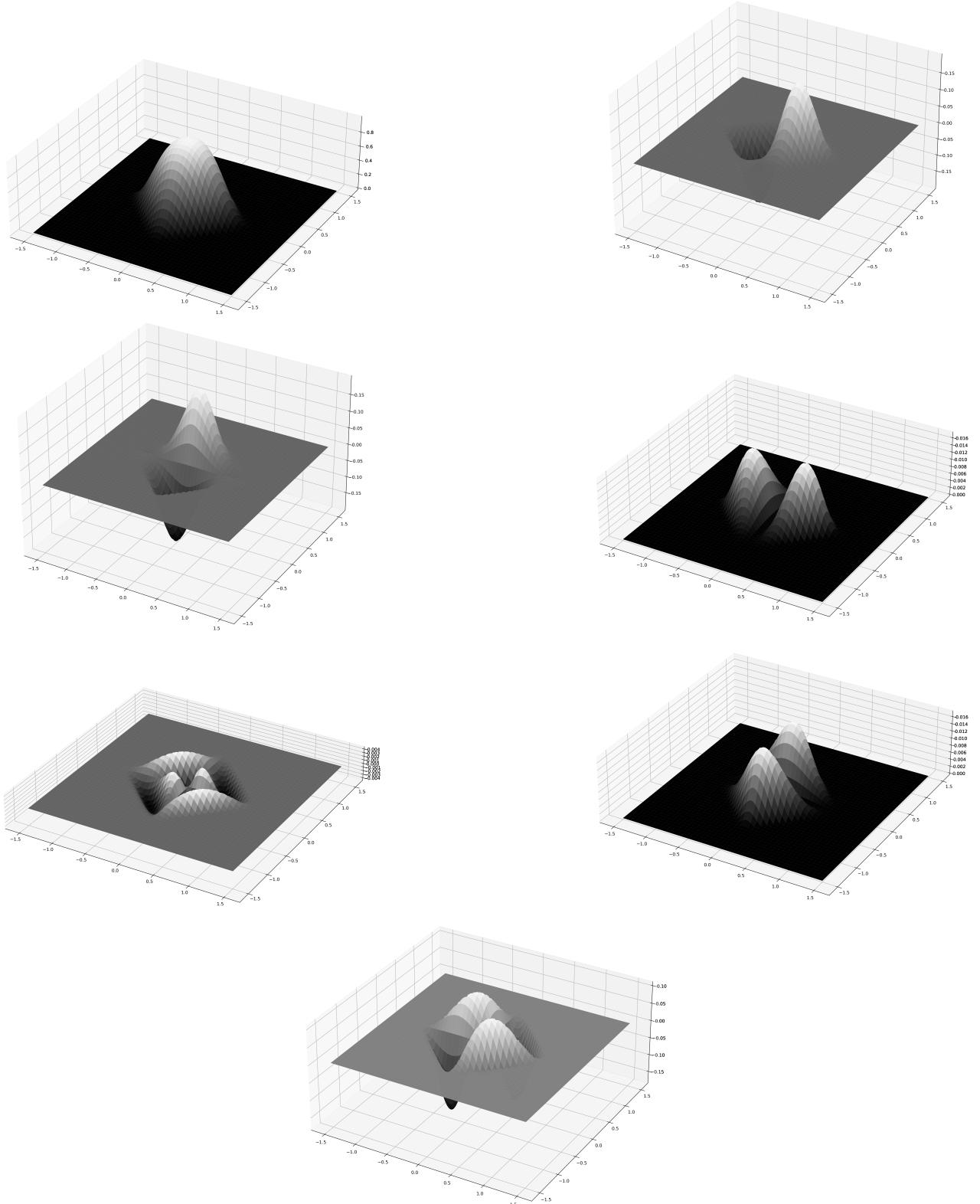
$$E = E_{ij} = \begin{cases} 1, & 1 \leq i = j \leq 19 \text{ կամ } (i, j) \in \{(20, 21), (21, 23)\}, \\ 0, & \text{հակառակ դեպքում} \end{cases} \quad (40)$$

$$F(f) = f \circ \left( \begin{bmatrix} \xi_{23} & \xi_{31} \\ \eta_{23} & \eta_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \right) \quad (41)$$

Այժմ, ունենալով ստանդարտ եռանկյան  $\hat{\Psi}$  բազիսները, կարող ենք ստանալ արտապատկերված եռանկյան բազիսները հետևյալ բանաձևով.

$$\Psi = MF(\hat{\Psi}) \quad (42)$$

Ստորև ներկայացված են կառուցված բազիսային ֆունկցիաներ չորս եռանկյուն էլեմենտների վրա  $U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$  հերթականությամբ:



Նկար 2.14. Արգիրիսի բազիսային ֆունկցիաները կառուցված չորս եռանկյունների վրա:

## Գլուխ 3

### Եռաչափ մոտարկում

Այժմ դիտարկենք երեք փոփոխականի ֆունկցիայի մոտարկման խնդիրը: Ինչպես նախորդ գլուխում, այս դեպքում տիրույթի տրոհումը կարելի է իրականացնել կամայական ձևով:

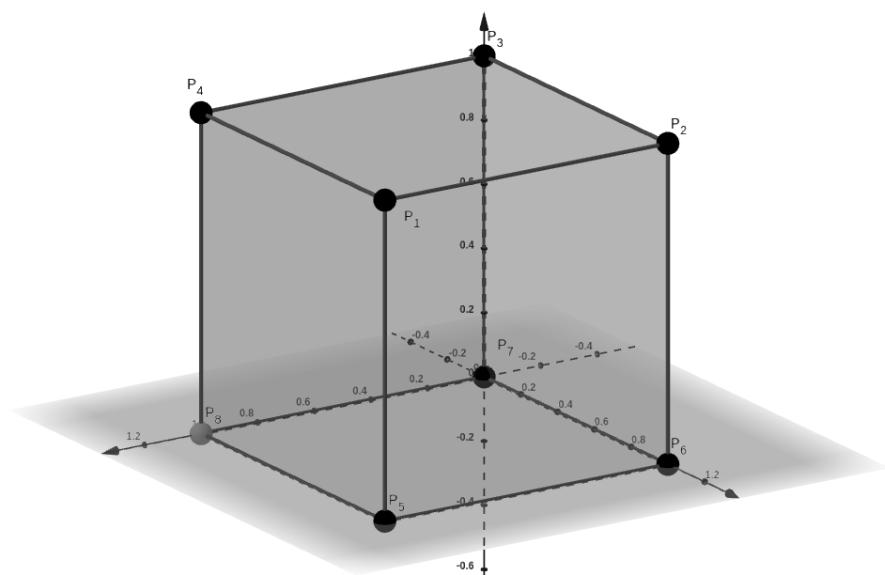
#### 3.1 Ուղղանկյունանիստ տիրույթ

Դիցուք տրված են  $f : \Omega \mapsto \Theta$ ,  $\Theta \subset \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^3 = [x_0, x_M] \times [y_0, y_N] \times [z_0, z_K]$  ուղղանկյունանիստ տիրույթը, որը տրոհված է  $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$ , ուղղանկյունանիստ կեմենտների:

$$x_{i+1} - x_i = h_1, \quad y_{j+1} - y_j = h_2, \quad z_{k+1} - z_k = h_3, \quad i = \overline{0, M-1}, j = \overline{0, N-1}, k = \overline{0, K-1}$$

##### 3.1.1. Լազրանժի մոտարկում

Լազրանժի մոտարկման բանաձևերը ստանալու համար հարմար է տրված ուղղանկյունը արտապատկերել միավոր խորանարդի վրա, ինչպես արել էինք երկչափ դեպքում: Միավոր խորանարդի կոորդինատական համակարգը նշանակենք  $(p, q, r)$ -ով: Ստորև ներկայացված է գազաթների համարակալման հաջորդականությունը.



Նկար 3.1. Գազաթների համարակալման հաջորդականությունը միավոր խորանարդի վրա:

Միավոր խորանարդի վրա բազիսային ֆունկցիաները տրվում են հետևյալ բանաձևերով:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1^{(1)} &= pqr \\
 \varphi_2^{(1)} &= (1-p)qr \\
 \varphi_3^{(1)} &= (1-p)(1-q)r \\
 \varphi_4^{(1)} &= p(1-q)r \\
 \varphi_5^{(1)} &= pq(1-r) \\
 \varphi_6^{(1)} &= (1-p)q(1-r) \\
 \varphi_7^{(1)} &= (1-p)(1-q)(1-r) \\
 \varphi_8^{(1)} &= p(1-q)(1-r)
 \end{aligned} \tag{1}$$

Տրված  $\{x_i, y_i, z_i\}$  ուղղանկյունանիստից դեպի միավոր խորանարդ արտապատկերման բանաձևերը հետևյալներն են.

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{i=1}^8 \varphi_i(p, q, r) x_i \\
 y &= \sum_{i=1}^8 \varphi_i(p, q, r) y_i \\
 z &= \sum_{i=1}^8 \varphi_i(p, q, r) z_i
 \end{aligned} \tag{2}$$

### 3.1.2. Էրմիթյան մոտարկում

**Եռգծային մոտարկում** Որպես բազիսային ֆունկցիա վերցնենք (1.3)-ում տրված ֆունկցիաների թենգորական արտադրյալները:

$$\varphi^{(ijk)}(x, y, z) = \varphi^{(i)}(x)\varphi^{(j)}(y)\varphi^{(k)}(z) \tag{3}$$

Ավելի բարձր կարգի էրմիթյան մոտարկում ստանալու համար անհրաժեշտ է ստանալ համապատասխան բազիսային ֆունկցիաների թենգորական արտադրյալները (տես գլուխ 2):

### 3.2 Քառանիստներով մոտարկվող տիրույթ

Դիցուք տրված են  $f : \Omega \mapsto \Theta, \Theta \subset \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^3$  եռաչափ տիրույթը, որը կամայական ձևով տրոհված է քառանկյուն էլեմենտների:

#### 3.2.1. Լազրանժի մոտարկում

Յուրաքանչյուր քառանիստ էլեմենտի վրա դիտարկենք  $m$ -րդ կարգի լրիվ բազմանդամ

$$F_m(x, y, z) = \sum_{i+j+k=0}^m \alpha_{ijk} x^i y^j z^k \quad (4)$$

որը կարող է օգտագործվել որպես մոտարկող ֆունկցիա  $\frac{1}{6} (m+1)(m+2)(m+3)$  սիմետրիկ դասավորված կետերի վրա:

Յուրաքանչյուր  $P_1, P_2, P_3, P_4$  գագաթներով քառանկյուն էլեմենտի համար դիտարկենք հետևյալ մոտարկող ֆունկցիան.

$$F_1(x, y, z) = \sum_{i=1}^4 p_i^{(1)}(x, y, z) f(x_i, y_i, z_i) \quad (5)$$

$p_i^{(1)}$  ֆունկցիաները սահմանվում են հետևյալ կերպ.

$$p_i^{(1)}(x, y) = \frac{1}{\Gamma_{ijkl}} (E_{jkl} - A_{jkl}x + B_{jkl}y - C_{jkl}z) \quad (6)$$

որտեղ

$$\Gamma_{ijkl} = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_l & y_l & z_l \end{vmatrix} \quad (7)$$

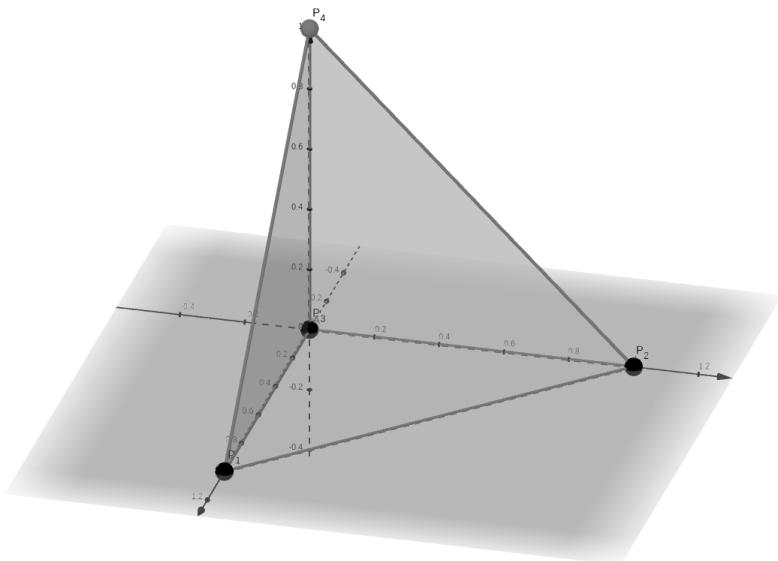
$$E_{jkl} = \begin{vmatrix} x_i & y_j & z_j \\ x_j & y_k & z_k \\ x_k & y_l & z_l \end{vmatrix}, A_{jkl} = \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix}, B_{jkl} = \begin{vmatrix} 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_k & z_k \\ 1 & x_l & z_l \end{vmatrix}, C_{jkl} = \begin{vmatrix} 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_l & y_l \end{vmatrix} \quad (8)$$

որտեղ  $(x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, 3, 4$  տրված քառանկյուն էլեմենտի գագաթներն են:

Երկշափ մոտարկման նմանությամբ, այստեղ ևս (3.6) բանաձևը ոչ այլ ինչ է, քան կամայական քառանիստի արտապատկերում դեպի ստանդարտ քառանկյան

գազաթների  $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 0), (0, 0, 1)$  հերթականությամբ (տես նկ. 3.2): Հակադարձ ձևափոխությունը տրվում է հետևյալ բանաձևերով.

$$\begin{aligned}x &= x_3 + x(-x_3 + x_4) + y(x_1 - x_3) + z(x_2 - x_3) \\y &= y_3 + x(-y_3 + y_4) + y(y_1 - y_3) + z(y_2 - y_3) \\z &= z_3 + x(-z_3 + z_4) + y(z_1 - z_3) + z(z_2 - z_3)\end{aligned}\tag{9}$$



Նկար 3.2. Ստանդարտ քառանկյուն:

Քառակուսային և խորանարդային մոտարկումները և դրանց բազիսային ֆունկցիաները կառուցվում են երկչափ մոտարկման նմանությամբ:

## Գլուխ 4

### Վարիացիոն մեթոդ

Մաթեմատիկական ֆիզիկայի բազմաթիվ խնդիրներ կապված են վարիացիոն մեթոդի հետ, որը մաթեմատիկական անալիզի գլխավոր մեթոդներից է:

#### Խնդրի դրվածքը

Վարիացիոն մեթոդի սկզբունքն այն է, որ դիտարկվող ֆունկցիայի ինտեգրալը տրված տիրույթում ընդունում է մեծագույն (փոքրագույն) արժեք տվյալ համակարգի իրական վիճակի համար, համեմատած բոլոր հնարավոր վիճակների բազմության հետ: Ենթախնտեգրալային ֆունկցիան կախված է տրված կոռորդինատներից, ֆունկցիայի արժեքից, նրա ածանցյալներից, իսկ ինտեգրումը կատարվում է տրված կոռորդինատական համակարգում, որը կարող է ներառել նաև ժամանակը: Մինիմումի որոշման խնդիրը հաճախ բերվում է մի քանի դիֆերենցիալ հավասարումների, համապատասխան եզրային պայմաններով: Այն իրական փոփոխականի ֆունկցիայի եքստրեմումի որոնման խնդրի ընդհանրացումն է, որտեղ տրված ֆունկցիայի համար կոմպակտ տիրույթում անհրաժեշտ է գտնել այլիսի կետեր, որոնք մինիմում (մաքսիմում) են իրենց որևէ շրջակայքում: Վարիացիոն մեթոդում ֆունկցիոնալը ինտեգրալ է, որը կախված է ֆունկցիայից, որի որոշման տիրույթը թույլատրելի ֆունկցիաների տարածությունն է: Այս մեթոդի հիմքական դժվարությունը կայանում է նրանում, որ խնդիրները, որոնք կարող են ձևակերպվել որպես վարիացիոն, հնարավոր են, որ լուծում չունենան այն պատճառով, որ ֆունկցիոնալ տարածությունները կոմպակտ չեն: Սակայն վարիացիոն մեթոդի հիմքական առավելությունն այն է, որ դրա կիրառման համար դրվող պահանջները ավելի թույլ են:

## Օրինակներ

Որպես օրինակ դիտարկենք հետևյալ կրկնակի խնտեգրալը.

$$I(f) = \iint_{\Omega} F(x, y, f, f_x, f_y) dx dy \quad (1)$$

որտեղ  $f \in C^2(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  և որի արժեքները որոշված են  $\partial\Omega$ -ում: Այս դեպքում, որպեսզի  $f$  ֆունկցիան (1) ֆունկցիոնալի համար հանդիսանա մինիմում, անհրաժեշտ է, որ  $f(x, y)$  ֆունկցիան բավարարի Էյլեր-Լազրանժի հավասարմանը, հավելելով համապատասխան եզրային պայմանները:

$$\frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} - F_u = 0 \quad (2)$$

Օրինակ,  $F = \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2)$  դեպքում խնդիրը բերվում է Լապլասի հավասարմանը.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

Այժմ պարզ է, որ երկրորդ կարգի ածանցյալների անընդհատությունը անհրաժեշտ է Էյլեր-Լազրանժի հավասարման գոյության համար: Բայց վարիացիոն մեթոդը պահանջում է միայն  $f$ -ի անընդհատություն և առաջին կարգի մասնակի ածանցյալների կտոր առ կտոր անընդհատություն:

Դիֆերենցիալ հավասարումը, որը կապված է վարիացիոն խնդրի հետ, կոչվում է Էյլեր-Լազրանժի հավասարում: Այն միայն անհրաժեշտ պայման է, որին պետք է բավարարի ֆունկցիան, որը մինիմիզացնում (մաքսիմիզացնում) է ֆունկցիոնալը:

Ստորև դիտարկվում են խնդիրների մի քանի տարբերակներ.

1. Մեկ փոփոխականի ֆունկցիա.

$$f \in \Omega \mapsto \Theta, \quad \Omega, \Theta \subset \mathbb{R}$$

Այս դեպքում ֆունկցիոնալն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$I(f) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, f, f') dx$$

որտեղ  $f(x_0)$  և  $f(x_1)$ ,  $x_0, x_1 \in \Theta$  ը տրված են: Մինիմումի գոյության անհրաժեշտ պայման է հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} = 0$$

Որը համարժեք է.

$$\frac{d^2 f}{dx^2} F_{f'f'} + \frac{df}{dx} F_{f'f} + F_{f'x} - F_f = 0$$

2. Մի քանի անհայտ ֆունկցիաներ.

$$f, g \in \Omega \mapsto \Theta, \quad \Omega, \Theta \subset \mathbb{R}$$

Այս դեպքում ֆունկցիոնալն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$I(f) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, f, g, f', g') dx$$

որտեղ  $f(x_0), f(x_1), g(x_0), g(x_1), x_0, x_1 \in \Theta$  ը տրված են: Մինիմումի գոյության անհրաժեշտ պայման է հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը.

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial g} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial g'} = 0$$

3. Բարձր կարգի ածանցյալներ.

$$f \in \Omega \mapsto \Theta, \quad \Omega, \Theta \subset \mathbb{R}$$

Այս դեպքում ֆունկցիոնալն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$I(f) = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, f, f', f'', \dots, f^{(n)}\right) dx$$

որտեղ  $f(x_0), \quad f(x_1), \quad f'(x_0), \quad f'(x_1), \quad x_0, x_1 \in \Theta$  ը տրված են: Մինիմումի գոյության անհրաժեշտ պայման է հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial f''} - \dots (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{\partial F}{\partial f^{(n)}} = 0$$

4. Մի քանի անկախ փոփոխականներ.

$$f \in \Omega \mapsto \Theta, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad \Theta \subset \mathbb{R}$$

Այս դեպքում ֆունկցիոնալն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$I(f) = \int_{\Omega} \dots \int F(x, f, f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}) d\Omega$$

որտեղ  $f$  ֆունկցիայի արժեքները  $\partial\Omega$ -ի վրա տրված են:

Մինիմումի գոյության անհրաժեշտ պայման է հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx_1} \frac{\partial F}{\partial f_{x_1}} - \dots - \frac{d}{dx_n} \frac{\partial F}{\partial f_{x_n}} = 0$$

## Եզրային պայմաններ

Նախորդիվ դիտարկել էինք այնպիսի խնդիրներ, որտեղ ֆունկցիայի արժեքները տրված տիրույթի եզրի տրված են: Սակայն որոշ խնդիրնորում ֆունկցիան տիրույթի եզրում տրված չէ, և տրվում են այլ տիպի եզրային պայմաններ: Նման դեպքերում որպես եզրային պայման դիտարկվում են հետևյալ պայմանները.

Մեկ փոփոխականի ֆունկցիա

$$\frac{\partial F}{\partial f'} = 0$$

Երկու անհայտ ֆունկցիա

$$\frac{\partial F}{\partial f'} = \frac{\partial F}{\partial g'}$$

Երկու փոփոխականի ֆունկցիա

$$F_{u_x} \frac{dy}{ds} - F_{u_y} \frac{dx}{ds} = 0$$

որոնք հայտնի են որպես բնական կամ գլխավոր եզրային պայմաններ:

## Պայմանական էքստրեմում

Այսպիսի վարիացիոն խնդիրներում անհրաշետ է մինիմիզացնել (մաքսիմիզացնել) տրված ֆունկցիոնալը, պայմանով, որ մեկ այլ ֆունկցիոնալ ընդունում է որևէ ֆիքսված արժեք այդ ֆունկցիայի համար: Այսինքն, եթե դիտարկենք ֆունկցիանալ, որի արժեքների բազմությունը մեկ փոփոխականի ֆունկցիաներ են, ապա կունենանք.

$$I(f) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, f, f') dx$$

$$\int_{x_0}^{x_1} G(x, f, f') dx = C$$

Այս խնդրի համար Էյլեր-Լագրանժի հավասարումը հետևյալն է.

$$\frac{\partial (F + \lambda G)}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial (F + \lambda G)}{\partial f'} = 0$$

## Գլուխ 5

### Մոտավոր մեթոդներ: Վերջավոր կեմենտների մեթոդ

Խնդիրների վարիացիոն մեթոդով ձևակերպումը, և վարիացիոն մեթոդների ավելի թույլ պայմանները թույլ են տալիս այդ խնդիրները լուծել մոտավոր մեթոդներով, որոնք հաճախ անվանվում են ուղիղ մեթոդներ: Ուղիղ մեթոդներից է Ոխտցի մինիմիզացնող հաջորդականության մեթոդը, որը քննության կառնենք:

#### Ոխտցի մինիմիզացնող հաջորդականության մեթոդ

Դիտարկենք որևէ վարիացիոն մեթոդով տրված մինիմիզացիայի խնդիր.

$$I(f) \longrightarrow \min, \quad f \in \Gamma$$

որտեղ  $I$  ֆունկցիոնալը տրված տիրույթում որոշյալ ինտեգրալ է: Մոտավոր լուծում կարելի է ստանալ, եթե ֆունկցիոնալի արժեքների բազմությունը սահմանափակենք որևէ վերջավոր չափանի ենթատարածությունով, որն ունի  $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$  բազիս:

$$\Gamma_N \in \Gamma$$

Ենթադրենք, որ  $I$  ֆունկցիոնալի արժեքների տիրույթը ունի ճշգրիտ ստորին եզր, նշանակենք այն  $\alpha_0$  ով: Այդ դեպքում գոյություն ունի  $\{f_j\}_{j=1}^\infty$  հաջորդականություն այնպիսին, որ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} I\left(\sum_{j=1}^n \gamma_j \varphi_j\right) = \alpha_0 \tag{1}$$

և ֆունկցիոնալի որոշման տիրույթի ցանկացած այլ  $g$  ֆունկցիայի համար

$$I(g) \geq \alpha_0$$

լուծումը փնտրենք հետևյալ կերպ.

$$f_0 = \sum_{j=1}^N \gamma_j \varphi_j, \quad \gamma_j \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Այդ դեպքում խնդիրը բերվում է սովորական մինիմումի խնդրի.

$$\frac{\partial I}{\partial \gamma_i} = \frac{\partial}{\partial \gamma_i} I \left( \sum_{j=1}^N \gamma_j \varphi_j \right) = 0 \quad (3)$$

## 5.1 Պուասոնի հավասարման լուծում ուղղանկյուն տիրույթում

Դիտարկենք հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u|_{\partial D} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

որտեղ  $D = [x_0, x_N] \times [y_0, y_M]$ :

Այս դիֆերենցիալ հավասարման համապատասխան վարիացիոն խնդիրը կլինի.

$$I(u) = \frac{1}{2} \iint_D [u_x^2 + u_y^2] dx dy + \iint_D f u dx dy \longrightarrow \min \quad (5)$$

Դ տիրույթը տրոհենք ուղղանկյուն եղանկյունների, և որպես բազիսային ֆունկցիաներ վերցնենք Կուրանտի ֆունկցիաները (2.6): Որոնելի ֆունկցիան կփնտրենք բազիսային ֆունկցիաների գծային կոմբինացիայի տեսքով.

$$u(x, y) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi^{(ij)}(x, y) \quad (6)$$

Ուստի ինտեգրալային ֆունկցիոնալը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$\frac{1}{2} \iint_D \left[ \left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_x^{(ij)}(x, y) \right)^2 + \left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_y^{(ij)}(x, y) \right)^2 + 2f(x, y) \left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi^{(ij)}(x, y) \right) \right] dx dy \quad (7)$$

Համաձայն էքստրեմուլի անհրաժեշտ պայմանի.

$$\frac{\partial I}{\partial u_{kl}} = \frac{\partial}{\partial u_{kl}} I \left( \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi^{(ij)}(x, y) \right) = 0$$

Դիտարկենք առաջին կրկնակի գումարը.

$$\left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_x^{(ij)}(x, y) \right)^2 = [u_{kl} \varphi_x^{(kl)}(x, y)]^2 + 2u_{kl} \varphi_x^{(kl)}(x, y)[\dots] + [\dots]^2$$

որտեղ բազմակետերով արտահայտությունը իր մեջ չի պարունակում  $u_{kl}$  ը: Հանգունորեն,

Երկրորդ կրկնակի գումարի համար՝

$$\left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_y^{(ij)}(x, y) \right)^2 = [u_{kl} \varphi_y^{(kl)}(x, y)]^2 + 2u_{kl} \varphi_y^{(kl)}(x, y)[\dots] + [\dots]^2$$

Այսպիսով ավելի պարզեցված տեսքով համակարգը ունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{\partial}{\partial u_{kl}} I(u) = \iint_D \left[ 2u_{kl} \{ \varphi_x^{(kl)}(x, y) \}^2 + 2\varphi_x^{(kl)}(x, y)[\dots] + 2u_{kl} \{ \varphi_y^{(kl)}(x, y) \}^2 + 2\varphi_y^{(kl)}(x, y)[\dots] + 2f(x, y)\varphi^{(kl)}(x, y) \right] dx dy$$

Դիտարկենք  $\varphi_x^{(kl)}(x, y)$  և  $\varphi_y^{(kl)}(x, y)$  ֆունկցիաները:

$$\varphi_x^{(kl)}(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in S_1 \\ h_1^{-1}, & (x, y) \in S_2 \\ h_1^{-1}, & (x, y) \in S_3 \\ 0, & (x, y) \in S_4 \\ -h_1^{-1}, & (x, y) \in S_5 \\ -h_1^{-1}, & (x, y) \in S_6 \\ 0, & \text{մացած դեպքերում} \end{cases} \quad (8)$$

$$\varphi_y^{(kl)}(x, y) = \begin{cases} -h_2^{-1}, & (x, y) \in S_1 \\ -h_2^{-1}, & (x, y) \in S_2 \\ 0, & (x, y) \in S_3 \\ h_2^{-1}, & (x, y) \in S_4 \\ h_2^{-1}, & (x, y) \in S_5 \\ 0, & (x, y) \in S_6 \\ 0, & \text{մացած դեպքերում} \end{cases} \quad (9)$$

Քանի որ  $\varphi_x^{(kl)}(x, y)$  և  $\varphi_y^{(kl)}(x, y)$  ֆունկցիաները ոչ զրոյական են  $[x_{k-1,l}, x_{k+1,l}] \times [y_{k,l-1}, y_{k,l+1}]$ -ում, ապա

$$\iint_D 2u_{kl} \{ \varphi_x^{(kl)}(x, y) \}^2 dx dy = 4u_{kl} \frac{h_2}{h_1} \quad (10)$$

$$\iint_D 2u_{kl} \left\{ \varphi_y^{(kl)}(x, y) \right\}^2 dx dy = 4u_{kl} \frac{h_1}{h_2} \quad (11)$$

Քանի որ յուրաքանչյուր  $\varphi_{kl}$  բազիսային ֆունկցիա հատվում է  $\varphi_{k-1,l}, \varphi_{k+1,l}, \varphi_{k,l-1}, \varphi_{k,l+1}$  ֆունկցիաների հետ, ապա

$$\iint_D 2\varphi_x^{(kl)}(x, y)[\dots] dx dy = 2 \iint_D \left[ \varphi_x^{(kl)}(x, y) \sum_{\substack{r=k-1 \\ r \neq k}}^{k+1} \sum_{\substack{s=l-1 \\ s \neq l}}^{l+1} u_{rs} \varphi_x^{(rs)} \right] dx dy = -2u_{k-1,l} \frac{h_2}{h_1} - 2u_{k+1,l} \frac{h_2}{h_1} \quad (12)$$

Հանգունորեն՝

$$\iint_D 2\varphi_y^{(kl)}(x, y)[\dots] dx dy = 2 \iint_D \left[ \varphi_y^{(kl)}(x, y) \sum_{\substack{r=k-1 \\ r \neq k}}^{k+1} \sum_{\substack{s=l-1 \\ s \neq l}}^{l+1} u_{rs} \varphi_y^{(rs)} \right] dx dy = -2u_{k,l-1} \frac{h_1}{h_2} - 2u_{k,l+1} \frac{h_1}{h_2} \quad (13)$$

Եվ վերջապես

$$2 \iint_D f(x, y) \varphi^{(kl)}(x, y) dx dy \approx 2f_{kl} h_1 h_2 \quad (14)$$

Դիրիխլի եզրային պայմանների համար կունենանք.

$$u_{0,l} = u_{N,l} = u_{k,0} = u_{k,M} = 0$$

Այսպիսով, ստացանք հետևյալ հավասարությունը՝

$$\begin{cases} 2 \left[ \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right] u_{kl} - \frac{1}{h_1^2} u_{k-1,l} - \frac{1}{h_1^2} u_{k+1,l} - \frac{1}{h_2^2} u_{k,l-1} - \frac{1}{h_2^2} u_{k,l+1} + f_{kl} = 0 \\ u_{0,l} = u_{N,l} = u_{k,0} = u_{k,M} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

## Ծրագրային իրականացում

Պուասոնի հավասարման մոտավոր լուծումը իրականացնելու համար օգտվենք Python ծրագրավորմալ լեզվից, օգտագործելով NumPy գրադարանը, որը հարմար է բազմաչափ գանգվածների հետ մաթեմատիկական գործողություններ իրականացնալու համար: Վիզուալիզացիաները կառուցելու համար կօգտվենք Matplotlib գրադարանից:

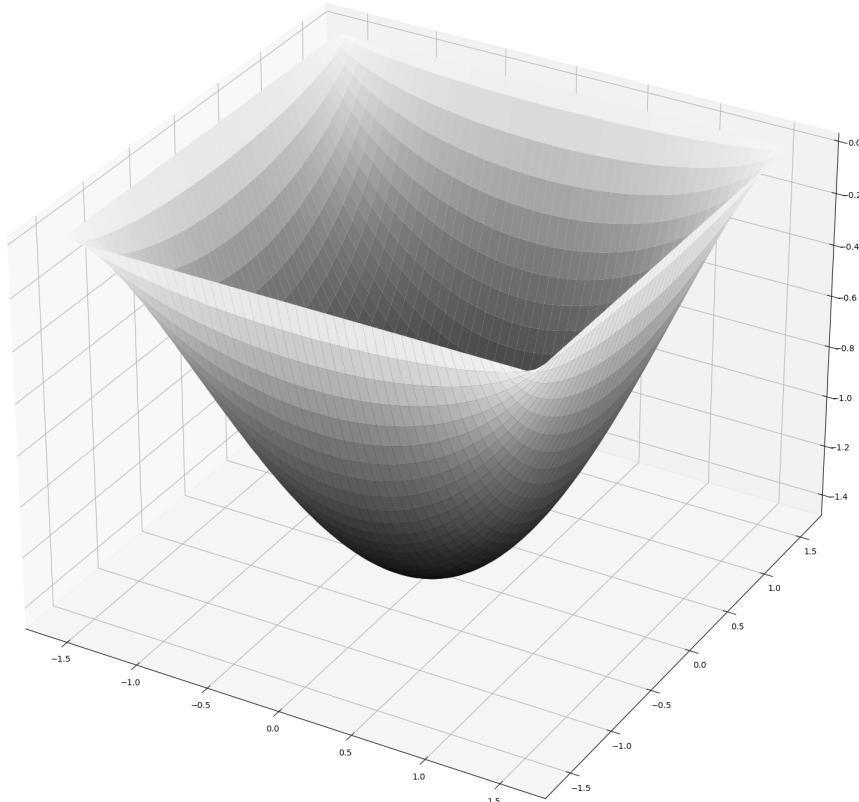
Ծրագրի սկզբում տրվում է ուղղանկյուն տիրույթի սահմանները և դրա տրոհման  $h_1$  և  $h_2$  քայլերը,  $f$  ֆունկցիան: Հաջորդիվ կազմվում է հավասարությունների համակարգը, կանչվում այն լուծող ֆունկցիան: Այսուհետև բազիսային ֆունկցիաների միջոցով կառուցվում է մոտարկող ֆունկցիան:

Օրինակ

$$\begin{cases} \Delta u = 2 \\ u|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

$$D = \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \times \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], h_1 = h_2 = \frac{\pi}{200}$$

Խնդրի համար ստացված լուծումը.



Նկար 5.1. Պուասոնի հավասարման լուծման գրաֆիկական ներկայացում:

## 5.2 Պուասոնի հավասարման լուծում եռանկյունացվող տիրույթում

Դիտարկենք հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

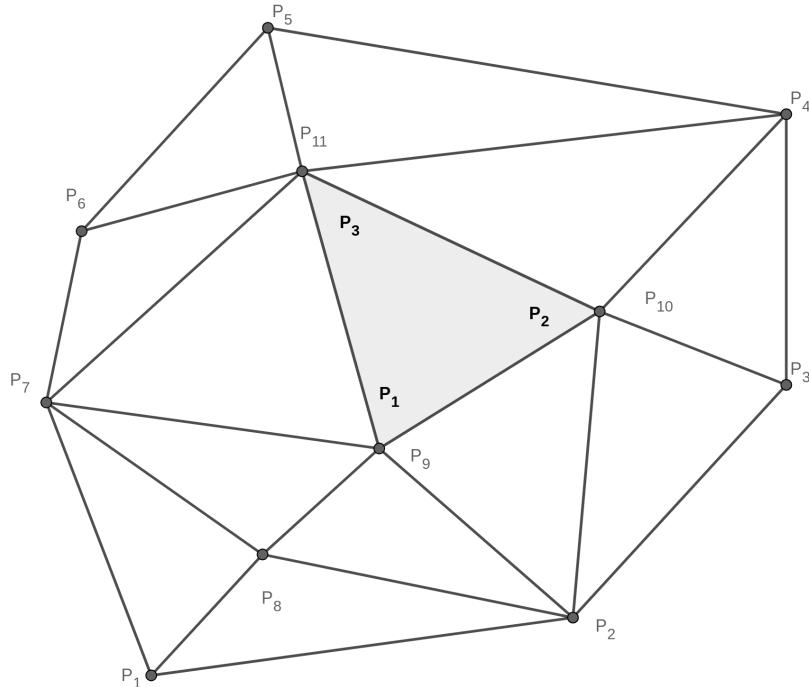
$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u|_{\partial D} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Որտեղ  $D$ -ն կամայական կապակցված միակապ կոմպակտ տիրույթ է:

Այս դիֆերենցիալ հավասարման համապատասխան վարիացիոն խնդիրը կլինի.

$$I(u) = \frac{1}{2} \iint_D [u_x^2 + u_y^2] dx dy + \iint_D f u dx dy \longrightarrow \min \quad (17)$$

$D$  տիրույթը տրոհենք  $N$  եռանկյունների: Գագաթների համարակալումը կկատարենք հետևյալ կերպ. յուրաքանչյուր եռանկյան ներսում գագաթները կհամարակալենք 1, 2, 3 թվերով ժամանակի հակառակ ուղղությամբ, որին կանվանենք լոկալ համարակալում, միևնույն ժամանակ գագաթները համարակալելով ամբողջ տիրույթի համար, որին կանվանենք զլոբալ համարակալում:



Նկար 5.2. Գագաթների լոկալ (թափ տառատեսակ) և զլոբալ համարակալման օրինակ:

Յուրաքանչյուր  $\Delta_n$  եռանկյան վրա ( $n = \overline{1, N}$ ) որպես բազիսային ֆունկցիաներ վերցնենք (2.18)-ում ներկայացված ֆունկցիաները, և որոնելի ֆունկցիան փնտրենք

բազմային ֆունկցիաների գծային կոմբինացիայի տեսքով.

$$u(x, y) = \frac{1}{S_n} \sum_{i=1}^3 u_{ni} p^{(ni)}(x, y) \quad (18)$$

որտեղ  $ni$ -ն  $n$ -րդ եռանկյան  $i$ -րդ գագաթի համապատասխան ինդեքսն է, իսկ  $p^{(ni)}(x, y)$ -ն այդ գագաթի համապատասխան բազմային ֆունկցիան է։ Ուստի ինտեգրալային ֆունկցիոնալը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$\frac{1}{2S_n^2} \iint_{\Delta_n} \left[ \left( \sum_{i=1}^3 u_{ni} p_x^{(ni)}(x, y) \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^3 u_{ni} p_y^{(ni)}(x, y) \right)^2 + 2S_n f(x, y) \left( \sum_{i=1}^3 u_{ni} p^{(ni)}(x, y) \right) \right] dx dy \quad (19)$$

Համաձայն էքստրեմուլի անհրաժեշտ պայմանի.

$$\frac{\partial I}{\partial u_{nk}} = \frac{\partial}{\partial u_{nk}} I \left( \frac{1}{S_n} \sum_{i=1}^3 u_{ni} p^{(ni)}(x, y) \right) = 0 \quad (20)$$

Դիտարկենք (4.18) ինտեգրալի ենթախնտեգրալային արտահայտության ձախ մասի երկու մասերը.

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^3 u_{ni} p_x^{(ni)}(x, y) \right)^2 &= (u_{nk} p_x^{(nk)})^2 + 2u_{nk} u_{nl} p_x^{(nk)} p_x^{(nl)} + 2u_{nk} u_{nm} p_x^{(nk)} p_x^{(nm)} \\ \left( \sum_{i=1}^3 u_{ni} p_y^{(ni)}(x, y) \right)^2 &= (u_{nk} p_y^{(nk)})^2 + 2u_{nk} u_{nl} p_y^{(nk)} p_y^{(nl)} + 2u_{nk} u_{nm} p_y^{(nk)} p_y^{(nm)} \end{aligned} \quad (21)$$

որտեղ  $k, l, m$ -ը գագաթների հաջորդականությունն է լոկալ համարակալման մեջ:

Այսպիսով ավելի պարզեցված տեսքով համակարգը ունի հետևյալ տեսքը.

$$\iint_{\Delta_n} \left[ u_{nk} \left( (p_x^{(nk)})^2 + (p_y^{(nk)})^2 \right) + u_{nl} (p_x^{(nk)} p_x^{(nl)} + p_y^{(nk)} p_y^{(nl)}) + u_{nm} (p_x^{(nk)} p_x^{(nm)} + p_y^{(nk)} p_y^{(nm)}) + S_n u_{nk} p^{(nk)} \right] dx dy = 0 \quad (22)$$

Քանի որ

$$p_x^{(nk)} = (y_{nl} - y_{nm})$$

$$p_y^{(nk)} = -(x_{nl} - x_{nm})$$

ապա

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Delta_n} 2u_{nk} (p_x^{(nk)})^2 dx dy = 2u_{nk} S_n (y_{nl} - y_{nm})^2 \\
 & \iint_{\Delta_n} 2u_{nl} p_x^{(nk)} p_x^{(l)} dx dy = 2u_{nl} S_n (y_{nl} - y_{nm}) (y_{nm} - y_{nk}) \\
 & \iint_{\Delta_n} 2u_{nm} p_x^{(nk)} p_x^{(nm)} dx dy = 2u_{nm} S_n (y_{nl} - y_{nm}) (y_{nk} - y_{nl}) \\
 & \iint_{\Delta_n} 2u_{nk} (p_y^{(nk)})^2 dx dy = 2u_{nk} S_n (x_{nl} - x_{nm})^2 \\
 & \iint_{\Delta_n} 2u_{nl} p_y^{(nk)} p_y^{(nl)} dx dy = 2u_{nl} S_n (x_{nl} - x_{nm}) (x_{nm} - x_{nk}) \\
 & \iint_{\Delta_n} 2u_{nm} p_y^{(nk)} p_y^{(nm)} dx dy = 2u_{nm} S_n (x_{nl} - x_{nm}) (x_{nk} - x_{nl}) \\
 & \iint_{\Delta_n} 2S_n f(x, y) p^{(nk)} dx dy \approx \frac{2}{3} u_{nk} S_n^2 f_{nk}
 \end{aligned} \tag{23}$$

Նշանակենք

$$y_{ni} - y_{nj} = y_{nij}$$

$$x_{ni} - y_{nj} = x_{nij}$$

Այսպիսով,  $\Delta_n$  եռանկյան համար ստացանք հետևյալ հավասարությունների համակարգը.

$$\begin{cases} 
 2u_{nk} S_n (y_{nlm}^2 + x_{nlm}^2) + 2u_{nl} S_n (y_{nlm} y_{nmk} + x_{nlm} x_{nmk}) + 2u_{nm} S_n (y_{nlm} y_{nkl} + x_{nlm} x_{nkl}) = -\frac{2}{3} u_{nk} S_n^2 f_{nk} \\ 
 u_n = 0, \text{ եթե } u_n-\text{ն տիրույթի եզրի գագաթը } \leftarrow 
 \end{cases} \tag{24}$$

Համախմբելով բոլոր եռանկյունների համար ստացված հավասարությունները, կստանանք գլխավոր համակարգը, և յուրաքանչյուր  $n$ -րդ գագաթի համար կունենանք.

$$\begin{cases} 
 \sum_{r: P_r \in \Delta_r} u_{nk} S_r (y_{rlm}^2 + x_{rlm}^2) + u_{nl} S_r (y_{rlm} y_{rmk} + x_{rlm} x_{rmk}) + u_{nm} S_r (y_{rlm} y_{rkl} + x_{rlm} x_{rkl}) = -\frac{1}{3} \sum_{r: P_r \in \Delta_r} u_{nk} S_r^2 f_{nk} \\ 
 u_{nk} = 0, \text{ եթե } u_{nk}-\text{ն տիրույթի եզրի գագաթը } \leftarrow 
 \end{cases} \tag{25}$$

## Ծրագրային իրականացում

Ինչպես ուղղանկյուն տիրույթի դեպքում, այնպես էլ այս դեպքում կօգտվենք նույն գործիքներից: Տիրույթի եռանկյունացման համար կօգտվենք Python ծրագրավորման լեզվի triangle գրադարանից:

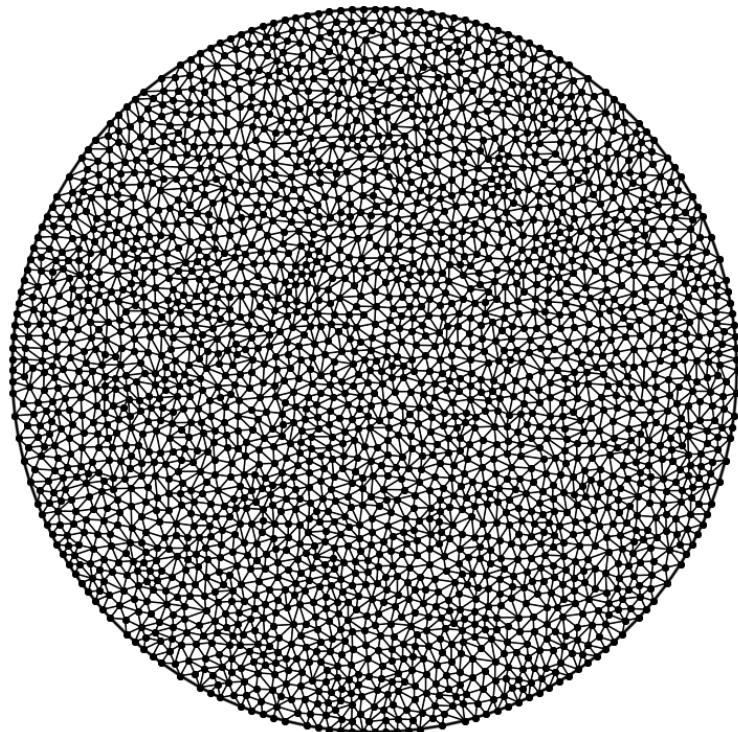
Ծրագրի սկզբում տրվում է տիրույթի եզրագծի կետերը, եզրագծերի կետերի միացման հաջորդականությունը, եռանկյունացման պարամետրերը և  $f$  ֆունկցիան: Հաջորդիվ յուրաքանչյուր եռանկյան համար կազմվում է հավասարությունների համակարգը, հընթաց կառուցելով գլխավոր հավասարությունների համակարգը: Այնուհետև կանչվում է այն լուծող ֆունկցիան: Այնուհետև բազիսային ֆունկցիաների միջոցով կառուցվում է մոտարկող ֆունկցիան:

Օրինակ

$$\begin{cases} \Delta u = 2 \\ u|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

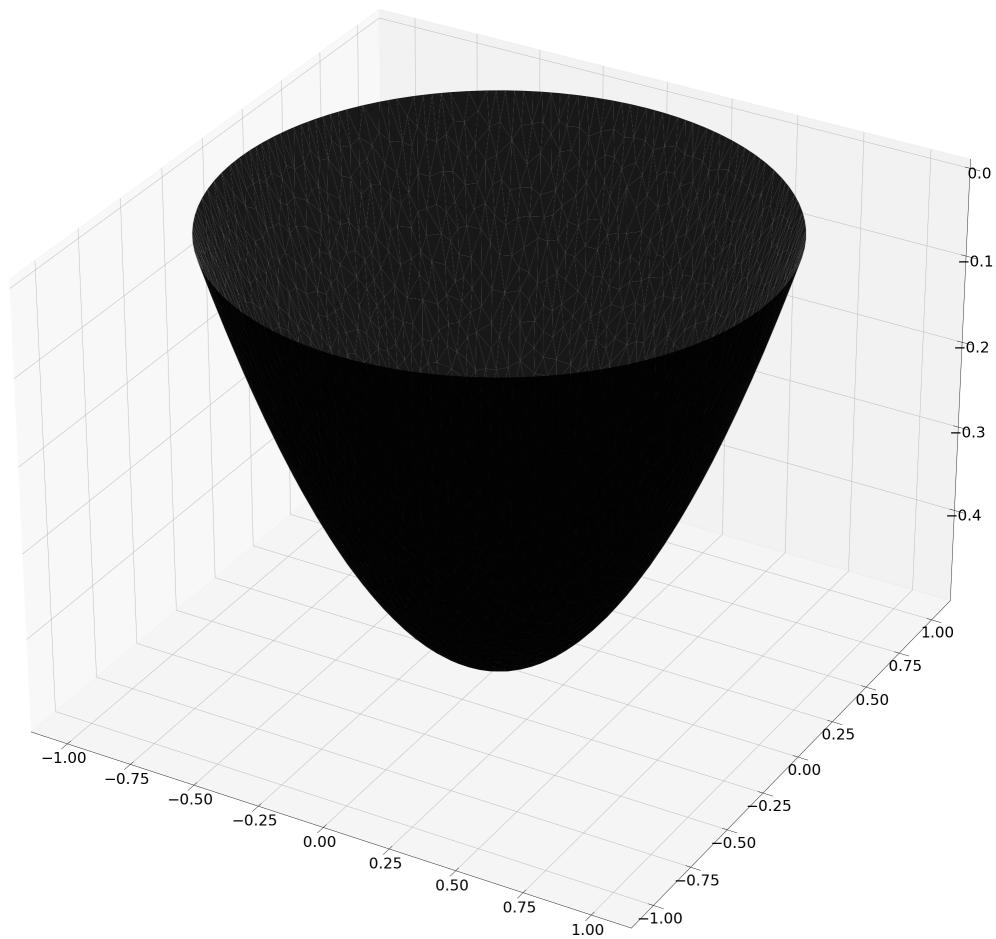
$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Տիրույթի եռանկյունացումը



Նկար 5.3. Շրջանաձև տիրույթի եռանկյունացման գրաֆիկական ներկայացում:

Խնդրի համար ստացված լուծումը.



Նկար 5.4. Պուասոնի հավասարման լուծման գրաֆիկական ներկայացում:

### 5.3 Բիհարմոնիկ հավասարման լուծում ուղղանկյուն տիրույթում

Դիտարկենք հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 u = f \\ u|_{\partial D} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = 0 \end{array} \right. \quad (26)$$

որտեղ  $D = [x_0, x_N] \times [y_0, y_M]$ : Այս դիֆերենցիալ հավասարման համապատասխան վարիացիոն խնդիրը կլինի.

$$I(u) = \frac{1}{2} \iint_D [u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2] dx dy - \iint_D f u dx dy \longrightarrow \min \quad (27)$$

$D$  տիրույթը տրոհենք ուղղանկյուների  $h_1$  և  $h_2$  քայլերով համապատասխանաբար ըստ  $x$  և  $y$  կոորդինատների: Որոնելի ֆունկցիան կփնտրենք (2.13) ում ներկայացված բազիսային ֆունկցիաների գծային կոմբինացիայի տեսքով.

$$u(x, y) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi^{(ij)}(x, y) \quad (28)$$

Հետևաբար ինտեգրալ ֆունկցիոնալը կունենք հետևյալ տեսքը.

$$\frac{1}{2} \iint_D \left[ \left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_{xx}^{(ij)}(x, y) \right)^2 + 2 \left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_{xy}^{(ij)}(x, y) \right)^2 + \left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_{yy}^{(ij)}(x, y) \right)^2 - 2f(x, y) \left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi^{(ij)}(x, y) \right) \right] dx dy \quad (29)$$

Համաձայն էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանի.

$$\frac{\partial I}{\partial u_{kl}} = \frac{\partial}{\partial u_{kl}} I \left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi^{(ij)}(x, y) \right) = 0 \quad (30)$$

Դիտարկենք (29)-ի առաջին կրկնակի գումարը.

$$\left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_{xx}^{(ij)}(x, y) \right)^2 = [u_{kl} \varphi_{xx}^{(kl)}(x, y)]^2 + 2u_{kl} \varphi_{xx}^{(kl)}(x, y)[\dots] + [\dots]^2$$

որտեղ բազմակետերով արտահայտությունը իր մեջ չի պարունակում  $u_{kl}$  ը: Հանգունորեն երկրորդ կրկնակի գումարի համար.

$$\left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_{xy}^{(ij)}(x, y) \right)^2 = [u_{kl} \varphi_{xy}^{(kl)}(x, y)]^2 + 2u_{kl} \varphi_{xy}^{(kl)}(x, y)[\dots] + [\dots]^2$$

Հանգունորեն երրորդ կրկնակի գումարի համար.

$$\left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} \varphi_{yy}^{(ij)}(x, y) \right)^2 = [u_{kl} \varphi_{yy}^{(kl)}(x, y)]^2 + 2u_{kl} \varphi_{yy}^{(kl)}(x, y)[\dots] + [\dots]^2$$

Այսպիսով ավելի պարզեցված տեսքով համակարգը ունի հետևյալ տեսքը.

$$2 \iint_D \left[ u_{kl} \{ \varphi_{xx}^{kl}(x, y) \}^2 + \varphi_{xx}^{kl}(x, y)[\dots] + 2u_{kl} \{ \varphi_{xy}^{kl}(x, y) \}^2 + 2\varphi_{xy}^{kl}(x, y)[\dots] + \{ \varphi_{yy}^{kl}(x, y) \}^2 + u_{kl} \varphi_{yy}^{kl}(x, y)[\dots] + f(x, y) \varphi_{kl}(x, y) \right] dx dy = 0 \quad (31)$$

Քանի որ տրված են Դիրիխլեի և Նեյմանի եզրային պայմանները, կոխտարկենք միայն  $2 \leq k \leq M - 2, 2 \leq l \leq N - 2$  դեպքերը: (19) ինտեգրալը հաշվենք անդամ առ անդամ:

$$\iint_D 2u_{kl} \{ \varphi_{xx}^{(kl)}(x, y) \}^2 dx dy = 2u_{kl} \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} \left\{ B_k''(x) B_l(y) \right\}^2 dx dy = 2u_{kl} \cdot \frac{6}{h_1^3} \cdot \frac{151}{140} h_2 \quad (32)$$

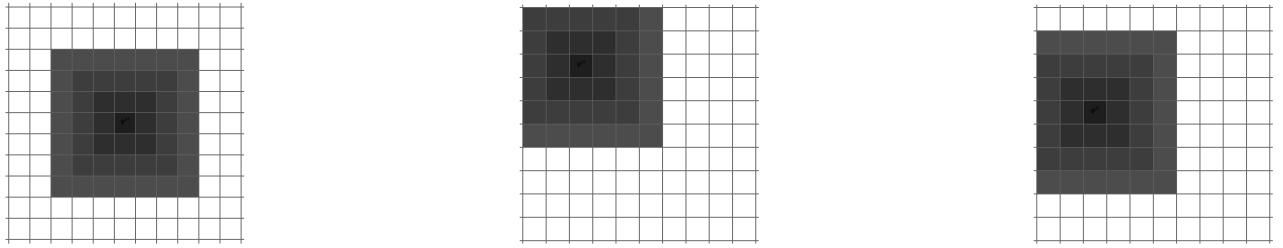
$$\iint_D 4u_{kl} \{ \varphi_{xy}^{(kl)}(x, y) \}^2 dx dy = 4u_{kl} \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} \left\{ B_k'(x) B_l'(y) \right\}^2 dx dy = 4u_{kl} \cdot \frac{3}{2h_1} \cdot \frac{3}{2h_2} \quad (33)$$

$$\iint_D 2u_{kl} \{ \varphi_{yy}^{(kl)}(x, y) \}^2 dx dy = 2u_{kl} \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} \left\{ B_k(x) B_l''(y) \right\}^2 dx dy = 2u_{kl} \cdot \frac{151}{140} h_2 \cdot \frac{6}{h_1^3} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \iint_D 2f(x, y) \varphi^{(kl)}(x, y) dx dy &= 2 \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} f(x, y) B_k(x) B_l(y) dx dy \approx \\ &\approx \frac{2}{9} h_1 h_2 [f_{k-1,l} + 2f_{k,l} + f_{k+1,l}] [f_{k,l-1} + 2f_{k,l} + f_{k,l+1}] \end{aligned} \quad (35)$$

Դիտարկենք մյուս ինտեգրալները: Քանի որ  $\varphi^{(ij)}$  բազիսային ֆունկցիաները ունեն լոկալ կրողներ  $4 \times 4 = 16$  ուղղանկյուն էլեմենտներում, ապա տրված  $\varphi^{kl}$  ֆունկցիան հատվում է 49 այլ բազիսային ֆունկցիաների հետ: Բացառություն են կազմում  $i = 2, M - 2, j = 2, N - 2$  դեպքերը, որոնց համար լոկալ կրողը  $6 \times 7 = 42$  է եզրին հարող հանգույցների համար, և  $6 \times 6 = 36$  անկյուններին հարող հանգույցների համար: Ստորև ներկայացվում է երեք

հնարավոր դեքերը (արտապատկերման համար հանգույցները պատկերված են ներկված ուղղանկյունների տեսքով):



Նկար 5.5. Բազիսային ֆունկցիաների հատումների ներկայացում տիրույթի ներսում, անկյունի վրա և եզրի վրա:

$$\iint_D 2\varphi_{xx}^{(kl)}(x, y)[\dots]dxdy, \iint_D 4\varphi_{xy}^{(kl)}(x, y)[\dots]dxdy, \iint_D 2\varphi_{yy}^{(kl)}(x, y)[\dots]dxdy$$

ինտեգրալները ներկայացնենք կրկնակի ինտեգրալների տեսքով:

$$\iint_D 2\varphi_{xx}^{(kl)}(x, y)[\dots]dxdy = 2 \sum_{\substack{i=k-3 \\ i \neq k}}^{k+3} \sum_{\substack{j=l-3 \\ j \neq l}}^{l+3} u_{ij} \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k''(x) B_i''(x) dx \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y) B_j(y) dy \quad (36)$$

$$\iint_D 4\varphi_{xy}^{(kl)}(x, y)[\dots]dxdy = 4 \sum_{\substack{i=k-3 \\ i \neq k}}^{k+3} \sum_{\substack{j=l-3 \\ j \neq l}}^{l+3} u_{ij} \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k'(x) B_i'(x) dx \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l'(y) B_j'(y) dy \quad (37)$$

$$\iint_D 2\varphi_{yy}^{(kl)}(x, y)[\dots]dxdy = 2 \sum_{\substack{i=k-3 \\ i \neq k}}^{k+3} \sum_{\substack{j=l-3 \\ j \neq l}}^{l+3} u_{ij} \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x) B_i(x) dx \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l''(y) B_j''(y) dy \quad (38)$$

Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը.

1. Եթե  $3 \leq k \leq M - 3$ ,  $3 \leq l \leq N - 3$

Առաջին ինտեգրալի համար

$$\begin{aligned}
\int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k''(x)B_{k-3}(x)dx &= \frac{3}{8h_1^3}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k''(x)B_{k-2}(x)dx = 0, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k''(x)B_{k-1}(x)dx = -\frac{27}{8h_1^3} \\
\int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k''(x)B_{k+1}(x)dx &= -\frac{27}{8h_1^3}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k''(x)B_{k+2}(x)dx = 0, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k''(x)B_{k+3}(x)dx = \frac{3}{8h_1^3} \\
\int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y)B_{l-3}(y)dy &= \frac{h_2}{2240}, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y)B_{l-2}(y)dy = \frac{3h_2}{56}, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y)B_{l-1}(y)dy = \frac{1991h_2}{2240} \\
\int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y)B_{l+1}(y)dy &= \frac{1991h_2}{2240}, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y)B_{l+2}(y)dy = \frac{3h_2}{56}, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y)B_{l+3}(y)dy = \frac{h_2}{2240}
\end{aligned} \tag{39}$$

Երկրորդ ինտեգրալի համար

$$\begin{aligned}
\int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k'(x)B_{k-3}'(x)dx &= \frac{-3}{160h_1}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k'(x)B_{k-2}'(x)dx = \frac{-9}{20h_1}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k'(x)B_{k-1}'(x)dx = \frac{-9}{32h_1} \\
\int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k'(x)B_{k+1}'(x)dx &= \frac{-9}{32h_1}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k'(x)B_{k+2}'(x)dx = \frac{-9}{20h_1}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k'(x)B_{k+3}'(x)dx = \frac{-3}{160h_1} \\
\int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l'(y)B_{l-3}'(y)dy &= \frac{-3}{160h_2}, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l'(y)B_{l-2}'(y)dy = \frac{-9}{20h_2}, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l'(y)B_{l-1}'(y)dy = \frac{-9}{32h_2} \\
\int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l'(y)B_{l+1}'(y)dy &= \frac{-9}{32h_2}, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l'(y)B_{l+2}'(y)dy = \frac{-9}{20h_2}, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l'(y)B_{l+3}'(y)dy = \frac{-3}{160h_2}
\end{aligned} \tag{40}$$

Երբորդի ինտեգրալի համար

$$\begin{aligned}
\int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x) B_{k-3}(x) dx &= \frac{h_1}{2240}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x) B_{k-2}(x) dx = \frac{3h_1}{56}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x) B_{k-1}(x) dx = \frac{1991h_1}{2240} \\
\int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x) B_{k+1}(x) dx &= \frac{1991h_1}{2240}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x) B_{k+2}(x) dx = \frac{3h_1}{56}, \quad \int_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x) B_{k+3}(x) dx = \frac{h_1}{2240} \\
\int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l''(y) B_{l-3}(y) dy &= \frac{3}{8h_2^3}, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l''(y) B_{l-2}(y) dy = 0, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l''(y) B_{l-1}(y) dy = -\frac{27}{8h_2^3} \\
\int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l''(y) B_{l+1}(y) dy &= -\frac{27}{8h_2^3}, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l''(y) B_{l+2}(y) dy = 0, \quad \int_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l''(y) B_{l+3}(y) dy = \frac{3}{8h_2^3}
\end{aligned} \tag{41}$$

2.  $k = 2, l = 2$

Առաջին ինտեգրալի համար

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_4} B_2''(x) B_0''(x) dx &= \frac{3}{8h_1^3}, \quad \int_{x_0}^{x_4} B_2''(x) B_1''(x) dx = -\frac{27}{8h_1^3} \\
\int_{x_0}^{x_4} B_2''(x) B_3''(x) dx &= -\frac{27}{8h_1^3}, \quad \int_{x_0}^{x_4} B_2''(x) B_4''(x) dx = 0, \quad \int_{x_0}^{x_4} B_2''(x) B_5''(x) dx = \frac{3}{8h_1^3} \\
\int_{y_0}^{y_4} B_2(y) B_0(y) dy &= \frac{121h_2}{2240}, \quad \int_{y_0}^{y_4} B_2(y) B_1(y) dy = \frac{1991h_2}{2240} \\
\int_{y_0}^{y_4} B_2(y) B_3(y) dy &= \frac{1991h_2}{2240}, \quad \int_{y_0}^{y_4} B_2(y) B_4(y) dy = \frac{3h_2}{56}, \quad \int_{y_0}^{y_4} B_2(y) B_5(y) dy = \frac{h_2}{2240}
\end{aligned} \tag{42}$$

Երկրորդ ինտեգրալի համար

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^{x_4} B'_2(x) B'_0(x) dx &= -\frac{15}{32h_1}, \quad \int_{x_0}^{x_4} B'_2(x) B'_1(x) dx = -\frac{9}{32h_1} \\
 \int_{x_0}^{x_4} B'_2(x) B'_3(x) dx &= \frac{-9}{32h_1}, \quad \int_{x_0}^{x_4} B'_2(x) B'_4(x) dx = \frac{-9}{20h_1}, \quad \int_{x_0}^{x_4} B'_2(x) B'_5(x) dx = \frac{-3}{160h_1} \\
 \int_{y_0}^{y_4} B'_2(y) B'_0(y) dy &= -\frac{9}{32h_2}, \quad \int_{y_0}^{y_4} B'_2(y) B'_1(y) dy = -\frac{9}{32h_2} \\
 \int_{y_0}^{y_4} B'_2(y) B'_3(y) dy &= \frac{-9}{32h_2}, \quad \int_{y_0}^{y_4} B'_2(y) B'_4(y) dy = \frac{-9}{20h_2}, \quad \int_{y_0}^{y_4} B'_2(y) B'_5(y) dy = \frac{-3}{160h_2}
 \end{aligned} \tag{43}$$

Երրորդ ինտեգրալի համար

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^{x_4} B_2(x) B_0(x) dx &= \frac{121h_1}{2240}, \quad \int_{x_0}^{x_4} B_2(x) B_1(x) dx = \frac{1991h_1}{2240} \\
 \int_{x_0}^{x_4} B_2(x) B_3(x) dx &= \frac{1991h_1}{2240}, \quad \int_{x_0}^{x_4} B_2(x) B_4(x) dx = \frac{3h_1}{56}, \quad \int_{x_0}^{x_4} B_2(x) B_5(x) dx = \frac{h_1}{2240} \\
 \int_{y_0}^{y_4} B''_2(y) B''_0(y) dy &= -\frac{3}{8h_1^2}, \quad \int_{y_0}^{y_4} B''_2(y) B''_1(y) dy = -\frac{27}{8h_2^3} \\
 \int_{y_0}^{y_4} B''_2(y) B''_3(y) dy &= -\frac{27}{8h_2^3}, \quad \int_{y_0}^{y_4} B''_2(y) B''_4(y) dy = 0, \quad \int_{y_0}^{y_4} B''_2(y) B''_5(y) dy = \frac{3}{8h_2^3}
 \end{aligned} \tag{44}$$

3.  $k = M - 2, l = N - 2$  Քանի որ բազմային ֆունկցիաները սիմետրիկ են, ապա այդ դեպքում կատարվում են նույն հաշվարկները, ինչ նախորդ կետում:

Հաշվի առնելով նախորդիկ հաշվարկված ինտեգրալները, ինչպես նաև Դիրիխլեի և Նեյմանի եզրային պայմանները, կստանանք հետևյալ հավասարումների համակարգը. Դիրիխլեի եզրային պայմաններ.

$$\begin{cases} u_{00} + \frac{5}{16}(u_{01} + u_{10}) + \frac{1}{16}u_{11} &= 0 \\ u_{M0} + \frac{5}{16}(u_{M1} + u_{M-1,0}) + \frac{1}{16}u_{M-1,1} &= 0 \\ u_{0N} + \frac{5}{16}(u_{1N} + u_{0,N-1}) + \frac{1}{16}u_{N-1,1} &= 0 \\ u_{MN} + \frac{5}{16}(u_{M-1,N} + u_{M,N-1}) + \frac{1}{16}u_{M-1,N-1} &= 0 \end{cases} \tag{45}$$

Նեյմանի եզրային պայմաններ.

$$\begin{cases} \frac{3}{4h_2} (u_{i1} - u_{i0}) + \frac{3}{16h_2} (u_{i-1,0} + u_{i+1,0} + u_{i-1,1} + u_{i+1,1}) = 0 \\ \frac{3}{4h_2} (u_{iN} - u_{i,N-1}) + \frac{3}{16h_2} (u_{i-1,N-1} + u_{i+1,N-1} + u_{i-1,N-1} + u_{i+1,N-1}) = 0 \\ \frac{3}{4h_1} (u_{1j} - u_{0j}) + \frac{3}{16h_1} (u_{0,j-1} + u_{0,j+1} + u_{1,j-1} + u_{1,j+1}) = 0 \\ \frac{3}{4h_1} (u_{Mj} - u_{M-1,j}) + \frac{3}{16h_1} (u_{M-1,j-1} + u_{M-1,j+1} + u_{M-1,j-1} + u_{M-1,j+1}) = 0 \end{cases} \quad (46)$$

Մինիմումի պայմաններ.

$$\left( \begin{bmatrix} 3/sh_1^2 \\ 0 \\ -27/sh_1^3 \\ 6/h_1^3 \\ -27/sh_1^3 \\ 0 \\ 3/sh_1^2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} h_2/2240 \\ 3h_2/56 \\ 1991h_2/2240 \\ 151h_2/140 \\ 1991h_2/2240 \\ 3h_2/56 \\ h_2/2240 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3/160h_1 \\ -9/20h_1 \\ -9/32h_1 \\ -9/2h_1 \\ -9/32h_1 \\ -9/20h_1 \\ -3/160h_1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3/160h_1 \\ -9/20h_1 \\ -9/32h_1 \\ 3/2h_1 \\ -9/32h_1 \\ -9/20h_1 \\ -3/160h_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_2/2240 \\ 3h_2/56 \\ 1991h_2/2240 \\ 151h_2/140 \\ 1991h_2/2240 \\ 3h_2/56 \\ h_2/2240 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3/sh_1^2 \\ 0 \\ -27/sh_1^3 \\ 6/h_1^3 \\ -27/sh_1^3 \\ 0 \\ 3/8h_1^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_{k-3,l-3} & u_{k-2,l-3} & u_{k-1,l-3} & u_{k,l-3} & u_{k+1,l-3} & u_{k+2,l-3} & u_{k+3,l-3} \\ u_{k-3,l-2} & u_{k-2,l-2} & u_{k-1,l-2} & u_{k,l-2} & u_{k+1,l-2} & u_{k+2,l-2} & u_{k+3,l-2} \\ u_{k-3,l-1} & u_{k-2,l-1} & u_{k-1,l-1} & u_{k,l-1} & u_{k+1,l-1} & u_{k+2,l-1} & u_{k+3,l-1} \\ u_{k-3,l} & u_{k-2,l} & u_{k-1,l} & u_{k,l} & u_{k+1,l} & u_{k+2,l} & u_{k+3,l} \\ u_{k-3,l+1} & u_{k-2,l+1} & u_{k-1,l+1} & u_{k,l+1} & u_{k+1,l+1} & u_{k+2,l+1} & u_{k+3,l+1} \\ u_{k-3,l+2} & u_{k-2,l+2} & u_{k-1,l+2} & u_{k,l+2} & u_{k+1,l+2} & u_{k+2,l+2} & u_{k+3,l+2} \\ u_{k-3,l+3} & u_{k-2,l+3} & u_{k-1,l+3} & u_{k,l+3} & u_{k+1,l+3} & u_{k+2,l+3} & u_{k+3,l+3} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{9} h_1 h_2 [f_{k-1,l} + 2f_{k,l} + f_{k+1,l}] [f_{k,l-1} + 2f_{k,l} + f_{k,l+1}] \quad (47)$$

$k = 2, M-2$ , ինչպես նաև  $l = 2, N-2$ -ի համար կազմվում է նույն հավասարումը, փոխելով միայն համապասխան գործակիցները և դրանց քանակը:

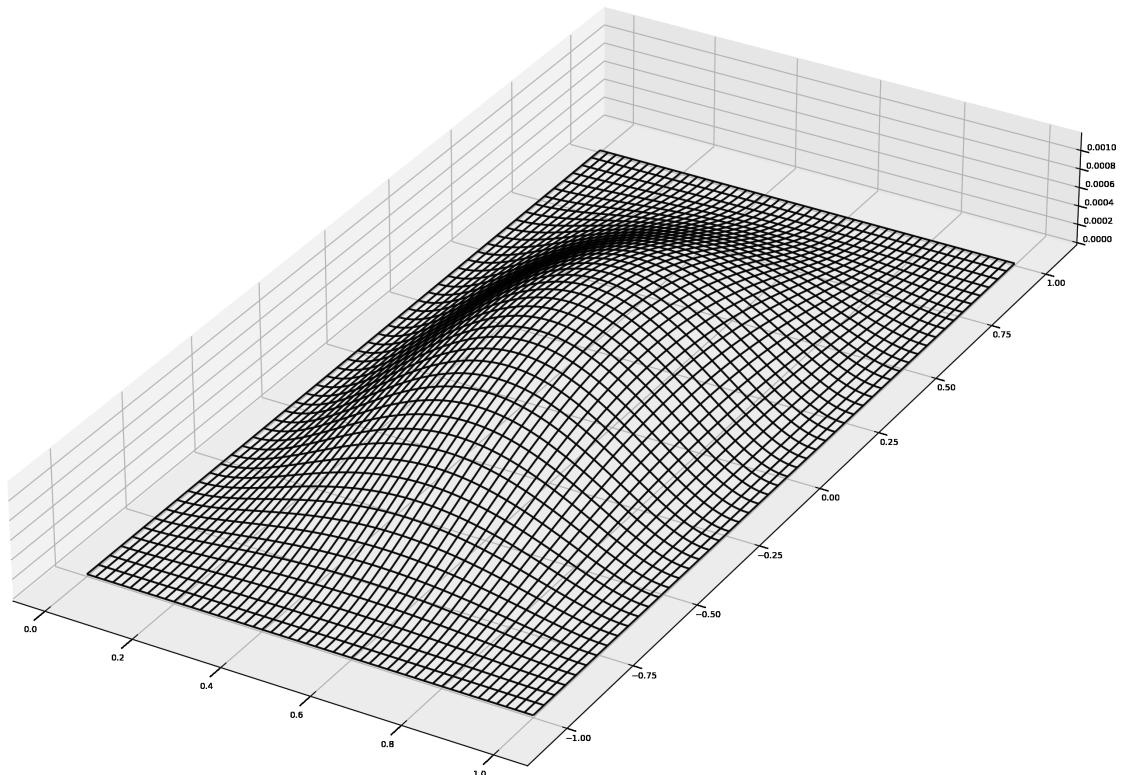
## Ծրագրային իրականացում

Ինչպես Պուասոնի հավասարման դեպքում, այնպես էլ այս դեպքում կօգտվենք նույն գործիքներից: Որպես օրինակ լուծենք հետևյալ հավասարումը տրված կոնկրետ տիրույթով և  $f$  ֆունկցիայով:

$$\begin{cases} \Delta^2 u &= 1 \\ u|_{\partial D} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} &= 0 \end{cases}$$

որտեղ  $D = [0, 1] \times [-1, 1]$ ,  $h_1 = 0.01, h_2 = 0.02$ :

Խնդրի համար ստացված լուծումը.



Նկար 5.6. Բիհարմոնիկ հավասարման լուծման գրաֆիկական ներկայացում:

## 5.4 Բիհարմոնիկ հավասարման լուծում եռանկյունացվող տիրույթում

Դիտարկենք հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 u = f \\ u \Big|_{\partial D} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial D} = 0 \end{array} \right. \quad (48)$$

Որտեղ  $D$ -ն կամայական կապակցված միակապ կոմպակտ տիրույթ է: Այս դիֆերենցիալ հավասարման համապատասխան վարիացիոն խնդիրը կլինի:

$$I(u) = \frac{1}{2} \iint_D [u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2] dx dy - \iint_D f u dx dy \longrightarrow \min \quad (49)$$

Ինչպես Պուասոնի հավասարման լուծման դեպքում, այստեղ ևս տիրույթը կտրոհենք եռանկյունների, սակայն քանի որ այս դեպքում պահանջվում է բազիսային ֆունկցիաների առնվազն  $C^1$  կարգ, ուստի որպես բազիսային ֆունկցիաներ կվերցնենք Արգիրիսի բազիսային ֆունկցիաները:

Հաշվարկների և բանաձևերի ներկայացման հեշտության համար բազիսային ֆունկցիաները դասավորենք ըստ գագաթների հետևյալ հաջորդականությամբ.

$$\begin{aligned} \Psi_{(p,q)}, \quad p &= \overline{1, 3}, \quad q = \overline{1, 7} \\ \Psi^{(p,q)} &= [\varphi_p^{(0,0)}, \varphi_p^{(1,0)}, \varphi_p^{(0,1)}, \varphi_p^{(2,0)}, \varphi_p^{(1,1)}, \varphi_p^{(0,2)}, \hat{\varphi}_p] \end{aligned} \quad (50)$$

Յուրաքանչյուր  $\Delta_n$  եռանկյան վրա ( $n = \overline{1, N}$ ) որոնելի ֆունկցիան փնտրենք բազիսային ֆունկցիաների գծային կոմբինացիայի տեսքով.

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^7 u_{nij} \Psi^{(ni,j)}(x, y) \quad (51)$$

Որտեղ  $nij$ -ն  $n$ -րդ եռանկյան  $i$ -րդ գագաթի  $j$ -րդ ֆունկցիայի համապատասխան ինդեքսն է, իսկ  $\Psi^{(ni,j)}(x, y)$ -ն այդ գագաթի համապատասխան բազիսային ֆունկցիան է:

Համաձայն էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանի.

$$\frac{\partial I}{\partial u_{nkl}} = \frac{\partial}{\partial u_{nkl}} I \left( \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^7 u_{nij} \Psi^{(ni,j)} \right) = 0 \quad (52)$$

(5.51)-ը հերթով տեղադրենք (5.49)-ի  $u_{xx}^2$ ,  $u_{xy}^2$ ,  $u_{yy}^2$ , և  $fu$ -ի մեջ և հաշվենք (5.52)-ը:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u_{nkl}} u_{xx}^2 &= \frac{\partial}{\partial u_{nkl}} \left[ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^7 u_{nij} \Psi_{xx}^{(ni,j)} \right]^2 = 2\Psi_{xx}^{(ni,j)} \left[ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^7 u_{nij} \Psi_{xx}^{(ni,j)} \right] \\ \frac{\partial}{\partial u_{nkl}} u_{xy}^2 &= \frac{\partial}{\partial u_{nkl}} \left[ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^7 u_{nij} \Psi_{xy}^{(ni,j)} \right]^2 = 2\Psi_{xy}^{(ni,j)} \left[ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^7 u_{nij} \Psi_{xy}^{(ni,j)} \right] \\ \frac{\partial}{\partial u_{nkl}} u_{yy}^2 &= \frac{\partial}{\partial u_{nkl}} \left[ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^7 u_{nij} \Psi_{yy}^{(ni,j)} \right]^2 = 2\Psi_{yy}^{(ni,j)} \left[ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^7 u_{nij} \Psi_{yy}^{(ni,j)} \right]\end{aligned}\quad (53)$$

Ազ մասի  $f$  ֆունկցիան ևս ներկայացնենք բազիսային ֆունկցիաների գծային կամբինացիաների տեսքով:

$$\frac{\partial}{\partial u_{nkl}} fu = \Psi^{(nk,l)} \left[ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^7 f_{nij} \Psi^{(ni,j)} \right] \quad (54)$$

Հիմնավելով (5.53) և (5.54)-ի վրա, կունենանք.

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial u_{nkl}} &= \frac{1}{2} \iint_{\Delta_n} \left[ \frac{\partial}{\partial u_{nkl}} u_{xx}^2 + 2 \frac{\partial}{\partial u_{nkl}} u_{xy}^2 + \frac{\partial}{\partial u_{nkl}} u_{yy}^2 \right] dx dy - \iint_{\Delta_n} \frac{\partial}{\partial u_{nkl}} fu dx dy = \\ &\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^7 \left\{ u_{nij} \iint_{\Delta_n} [\Psi_{xx}^{(ni,j)} \Psi_{xx}^{(nk,l)} + 2\Psi_{xy}^{(ni,j)} \Psi_{xy}^{(nk,l)} + \Psi_{yy}^{(ni,j)} \Psi_{yy}^{(nk,l)}] dx dy - f_{nij} \iint_{\Delta_n} [\Psi^{(nk,l)} \Psi^{(ni,j)}] dx dy \right\} = 0\end{aligned}\quad (55)$$

Հաշվենք (5.55)-ի առաջին և երկրորդ ինտեգրալները:

**Նշանակենք**

$$\begin{aligned}\hat{A}_{ij} &= \iint_{\Delta_n} F \left( \hat{\Psi}_{xx}^{(ni,j)} \right) F \left( \hat{\Psi}_{xx}^{(nk,l)} \right) + 2F \left( \hat{\Psi}_{xy}^{(ni,j)} \right) F \left( \hat{\Psi}_{xy}^{(nk,l)} \right) + F \left( \hat{\Psi}_{yy}^{(ni,j)} \right) F \left( \hat{\Psi}_{yy}^{(nk,l)} \right) dx dy \\ \hat{B}_{ij} &= \iint_{\Delta_n} F \left( \hat{\Psi}^{(ni,j)} \right) F \left( \hat{\Psi}^{(nk,l)} \right) dx dy\end{aligned}\quad (56)$$

Ինտեգրալների համար կունենանք.

$$\begin{aligned}A_{ij} &= M \hat{A}_{ij} M^T \\ B_{ij} &= M \hat{B}_{ij}\end{aligned}\quad (57)$$

որտեղ  $F$ -ը (2.41)-ում սահմանված աֆինյան ձևափոխությունն է, իսկ  $M$ -ը՝

տրանսֆորմացիան:

Համախմբելով բոլոր եռանկյունների համար ստացված հավասարությունը, կստանանք գլխավոր համակարգը, և յուրաքանչյուր  $n$ -րդ գագաթի համար կունենանք.

$$\begin{cases} \sum_{r:P_n \in \Delta r} \sum_{j=1}^7 A_{nrj} = \sum_{r:P_n \in \Delta r} \sum_{j=1}^7 B_{nrj} \\ u_{n1} = 0, \text{եթե } u_n\text{-ն տիրույթի եզրի գագաթ է} \\ u_{n7} = 0, \text{եթե } u_n\text{-ին համապատասխանող միջնակետը տիրույթի եզրի գագաթ է} \end{cases} \quad (58)$$

## Ծրագրային իրականացում

Ինչպես նախորդ դեպքերում, այնպես էլ այս դեպքում կօգտվենք նույն գործիքներից: Հաշվարկները հեշտացնելու համար օգտագործվենք  $\text{sympy}$  գրադարանը, որը թույլ է տալիս կատարել սիմվոլիկ հաշվարկներ, ավելի կոնկրետ, դիֆերենցում և ինտեգրում: Նախորդը հաշվարկվել և ֆունկցիաների տեսքով պահպանվել են (5.56) կետում նշված ինտեգրալները: Հետագայում ծրագրի ընթացքում այդ ֆունկցիաներին տրվում են (5.57) բանաձևի անհրաժեշտ փոփոխականները: Այսպիսով, լուծումն ավելի ճշգրիտ է ստացվում, ի հաշիվ այն բանի, որ չեն օգտագործվում ինտեգրալների արժեքները մոտարկող քառակուսացման բանաձևեր:

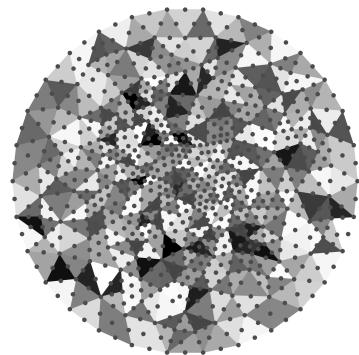
Ծրագրի սկզբում տրվում է տիրույթի եզրագծի կետերը, եզրագծերի կետերի միացման հաջորդականությունը, եռանկյունացման պարամետրերը և  $f$  ֆունկցիան: Հաջորդիվ յուրաքանչյուր եռանկյան համար կազմվում է հավասարությունը համակարգը, հընթաց կառուցելով գլխավոր հավասարությունը համակարգը: Այնուհետև կանչվում է այն լուծող ֆունկցիան: Այնուհետև բազիսային ֆունկցիաների միջոցով կառուցվում է մոտարկող ֆունկցիան:

Օրինակ

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 1 \\ u|_{\partial D} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

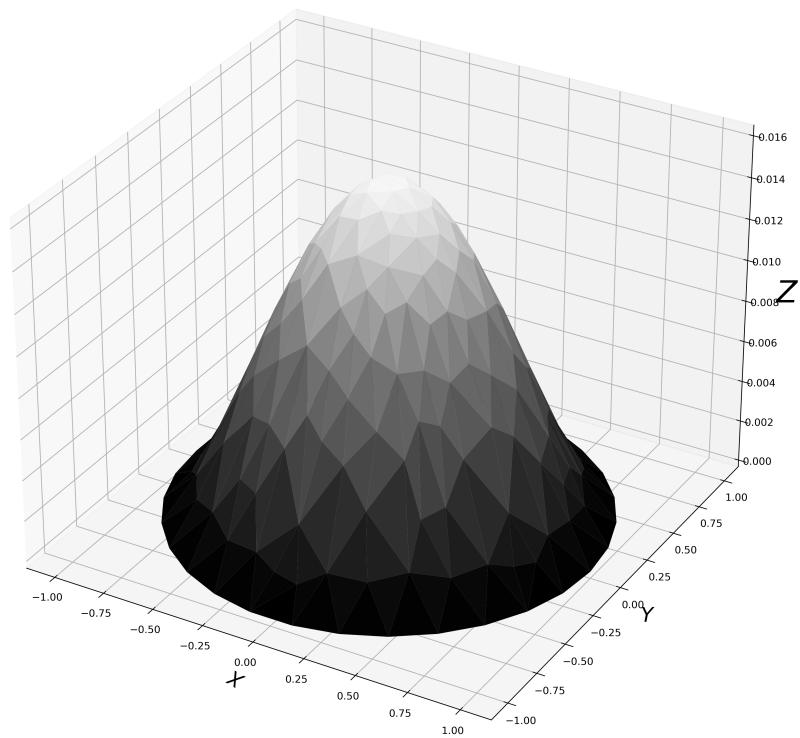
$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Տիրույթի եռանկյունացումը



Նկար 5.7. Շրջանաձև տիրույթի եռանկյունացման գրաֆիկական ներկայացում:

Խնդրի համար ստացված լուծումը.



Նկար 5.8. Պուասոնի հավասարման լուծման գրաֆիկական ներկայացում: