Գլուխ 1
Միաչափ ինտերպոլյացիա

1.1 Էրմիթյան ինտերպոլյացիա

Նախքան անդրադառնալը բազմաչափ ինտերպոլյացիայի խնդրին, քննարկենք մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի ինտերպոլյացիայի որոշ դետալներ:

Ենթադրենք տրված են $f : \Omega \mapsto \Theta, \Omega, \Theta \subset \mathbb{R}$ ֆունկցիան, $\{x_i\}_{i=0}^N$ կետերը և դրանց համապատասխան $\{y_i = f(x_i)\}_{i=0}^N$ արժեքները: Յուրաքանչյուր $[x_i, x_{i+1}]$ հատվածում ինտերպոլացնող ֆունկցիան իրենից ներկայացնում է գծային ֆունկցիա, որը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$p_1^{(i)}(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} y_i + \frac{x - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1}, i = \overline{0, N-1} \tag{1}$$

Այսպիսով $[x_0, x_N]$ հատվածում կտոր առ կտոր մոտարկող ֆունկցիան տրվում է հետևյալ կերպ.

$$p_1(x) = \sum_{i=0}^{N} \varphi_i(x) y_i \tag{2}$$

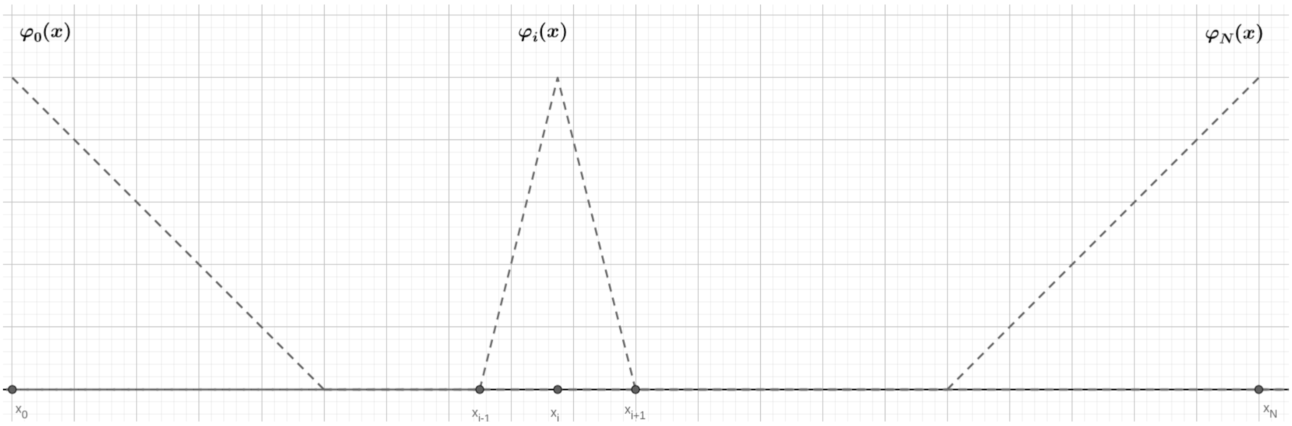
Որտեղ

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, x \in [x_0, x_1] \\ 0, x \in [x_1, x_N] \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, x \in [x_0, x_{i-1}] \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, x \in [x_{i+1}, x_N] \end{cases} \tag{3}$$

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} 0, x \in [x_0, x_{N-1}] \\ \dfrac{x - x_{N-1}}{x_N - x_{N-1}}, x \in [x_{N-1}, x_N] \end{cases}$$

$\varphi_i(x)$ ֆունկցիաները կոչվում են բազիսային ֆունկցիաներ, որոնք ունեն այսպես կոչված լոկալ կրողներ, քանի որ դրանք ոչ զրոյական են որևէ տիրույթում և զրոյական որոշման տիրույթի մնացած մասերում: Նմանատիպ բազիսային ֆունկցիաների հիմնական հատկությունն այն է, որ դրանք հավասար են մեկի որևէ կոնկրետ հանգույցում և հավասար են զրոյի մնացած բոլոր հանգույցներում: Նշենք սակայն, որ այս տիպի ինտերպոլյացիան C^0 դասի է, այսինքն միայն անընդհատ է, և հետևաբար կիրառելի չէ այն խնդիրներում, որտեղ պահանջվում է ավելի բարձր կարգի ողորկություն:



Նկար 1.1. Գծային ինտերպոլյացիայի բազիսային ֆունկցիաներ:

Այժմ դիտարկենք հետևյալ խնդիրը. անհրաժեշտ է կառուցել կտոր առ կտոր մոտարկող ֆունկցիա, որը ֆունկցիայի արժեքի հետ մեկտեղ կհամընկնի նաև ֆունկցիայի առաջին կարգի ածանցյալի արժեքի հետ ինտերպոլյացիոն հանգույցներում: Այսինքն.

$$\frac{d^j}{dx^j}f(x_i) = \frac{d^j}{dx^j}p_3(x_i),\ j = 0,1;\ i = \overline{0, N-1} \tag{4}$$

Յուրաքանչյուր $[x_i, x_{i+1}]$ հատվածում ինտերպոլյացիոն ֆունկցիան իրենից ներկայացնում է խորանարդային ֆունկցիա, որը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով:

$$p_3^{(i)} = \alpha_i(x)f(x_i) + \beta_{i+1}(x)f(x_{i+1}) + \gamma_i(x)f'(x_i) + \delta_{i+1}(x)f'(x_{i+1}) \tag{5}$$

որտեղ

$$\begin{aligned}
&\alpha_i(x) = \frac{(x_{i+1}-x)^2\left[(x_{i+1}-x_i)+2\,(x-x_i)\right]}{(x_{i+1}-x_i)^3}\\
&\beta_{i+1}(x) = \frac{(x-x_i)^2\left[(x_{i+1}-x_i)+2\,(x_{i+1}-x)\right]}{(x_{i+1}-x_i)^3}\\
&\gamma_i(x) = \frac{(x-x_i)\,(x_{i+1}-x)^2}{(x_{i+1}-x_i)^2},\ \delta_{i+1}(x) = \frac{(x-x_i)^2\,(x-x_{i+1})}{(x_{i+1}-x_i)^2}
\end{aligned} \tag{6}$$

Այսպիսով $[x_0, x_N]$ հատվածում կտոր առ կտոր մոտարկող ֆունկցիան ներկայացվում է բազիսային ֆունկցիաների գծային կոմբինացիայի տեսքով.

$$p_3(x) = \sum_{i=0}^{N} \left[\varphi_i^{(0)} f(x_i) + \varphi_i^{(1)} f'(x_i)\right] \tag{7}$$

որտեղ

$$\varphi_0^{(0)}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x_1 - x)^2\left[(x_1 - x_0) + 2(x - x_0)\right]}{(x_1 - x_0)^3}, x \in [x_0, x_1] \\ 0, x \in [x_1, x_N] \end{cases}$$

$$\varphi_i^{(0)}(x) = \begin{cases} 0, x \in [x_0, x_{i-1}] \\ \dfrac{(x - x_{i-1})^2\left[(x_i - x_{i-1}) + 2(x_i - x)\right]}{(x_i - x_{i-1})^3}, x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{(x_{i+1} - x)^2\left[(x_{i+1} - x_i) + 2(x - x_i)\right]}{(x_{i+1} - x_i)^3}, x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, x \in [x_{i+1}, x_N] \end{cases} \tag{8}$$

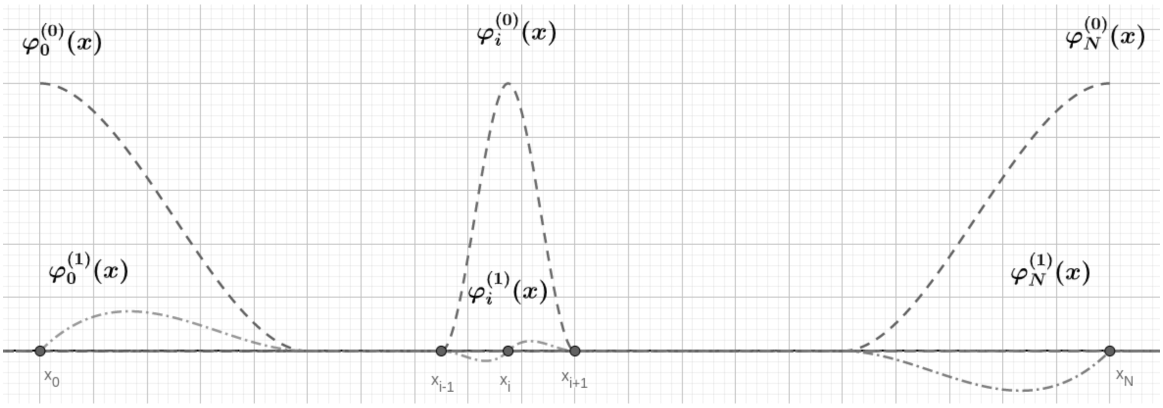
$$\varphi_N^{(0)}(x) = \begin{cases} 0, x \in [x_0, x_{N-1}] \\ \dfrac{(x - x_{N-1})^2\left[(x_N - x_{N-1}) + 2(x_N - x)\right]}{(x_N - x_{N-1})^3}, x \in [x_{N-1}, x_N] \end{cases}$$

$$\varphi_0^{(1)}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - x_0)(x_1 - x)^2}{(x_1 - x_0)^2}, x \in [x_0, x_1] \\ 0, x \in [x_1, x_N] \end{cases}$$

$$\varphi_i^{(1)}(x) = \begin{cases} 0, x \in [x_0, x_{i-1}] \\ \dfrac{(x - x_{i-1})^2(x - x_i)}{(x_i - x_{i-1})^2}, x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{(x - x_i)(x_{i+1} - x)^2}{(x_{i+1} - x_i)^2}, x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, x \in [x_{i+1}, x_N] \end{cases} \tag{9}$$

$$\varphi_N^{(1)}(x) = \begin{cases} 0, x \in [x_0, x_{N-1}] \\ \dfrac{(x - x_{N-1})^2(x - x_N)}{(x_N - x_{N-1})^2}, x \in [x_{N-1}, x_N] \end{cases}$$

Վերը ներկայացված ինտերպոլյացիաների օրինակները էրմիթյան



Նկար 1.2. երկրորդ կարգի էրմիթյան ինտերպոլյացիայի բազիսային ֆունկցիաներ:

ինտերպոլյացիայի մասնովոր դեպքեր են համապատասխանաբար 1 և 2 կարգերի դեպքում: Ընդհանուր դեպքում m-րդ կարգի էրմիթյան ինտերպոլյացիայի պայմանը կարելի է գրել հետևյալ կերպ.

$$\frac{d^k}{dx^k} f\left(x_i\right) = \frac{d^k}{dx^k} p_{2m-1}\left(x_i\right),\ i = \overline{0, N},\ k = \overline{0, m-1} \tag{10}$$

1.2 Քառակուսային և խորանարդային ինտերպոլյացիա

Խնդիրներում, որտեղ անհրաժեշտ է որոշել միայն տրված ֆունկիցիան, ֆունկցիայի ածանցյալներն ինտերպոլացնելու փոխարեն դրվում է դրանց անընդհատության պայման հանգուցային կետերում, բավականին հեշտացնելով դրված խնդիրը և դրա լուծումը: Նման տիպի ինտերպոլյացիայի կառուցման պարզագույն օրինակը հետևյալն է. Յուրաքանչյուր $[x_i, x_{i+1}]$ ինտերվալում կառուցվում է այպիսի պարաբոլ, որ բոլոր x_i հանգուցային կետերում առանջին կարգի ածանցյալները լինեն անընդհատ:

$$S_2^{(i)}(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + c_i (x - x_i)(x - x_{i+1}) \tag{11}$$

Ածանցյալների անընդհատության պայմանից կհետևի, որ

$$c_i + c_{i-1} = \frac{1}{h^2}\left(f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})\right) \; i = \overline{1, N-1} \tag{12}$$

Քանի որ համակարը պարունակում է $N-1$ հավասարում, ապա մնում է մեկ ազատ գործակից, որը կարելի գտնել, որևէ x_j հանգուցային կետում որոշելով $S_2^{(j)''}$-ն:

Առավել կիրառելի են խորանարդային սփլայնները: Այս դեպքում յուրաքանչյուր $[x_i, x_{i+1}]$ ինտերվալում կառուցվում են երրորդ աստիճանի բազմանդամներ այնպես, որ հանգույցներում առաջին և երկրորդ կարգի ածանցյալները լինեն անընդհատ: Բազմանդամը դիտարկելու փոխարեն դիտարկենք նրա երկրորդ կարգի ածանցյալը: Այն գծային ֆունկցիա է, հետևաբար այն կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$S_3^{(i)''}(x) = c_i \frac{x_{i+1} - x}{x - x_i} + c_{i+1}\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \tag{13}$$

որտեղ c_i և c_{i+1}-ը x_i և x_{i+1} կետերում երկրորդ կարգի ածանցյալների արժենքներն են: Հաշվի առնելով ինտերպոլյացիոն և անընդհատության պայմանները.

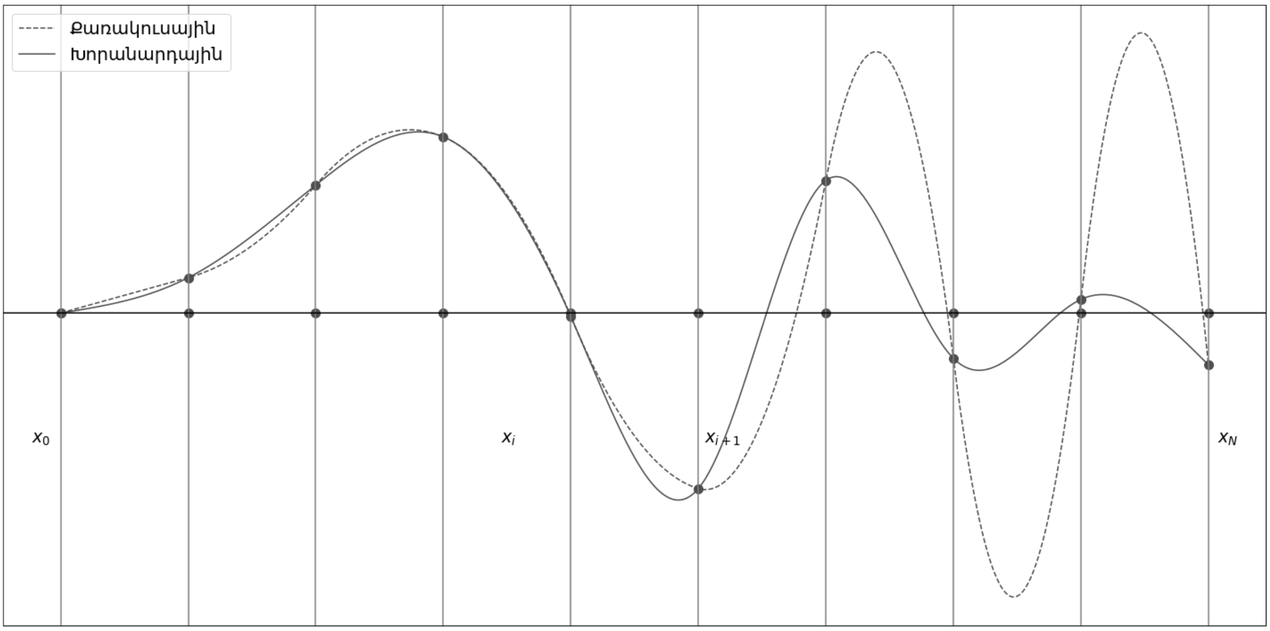
$$\begin{cases} S_3^{(i)}(x_i) &= f_i \\ S_3^{(i)}(x_{i+1}) &= f_{i+1} \\ S_3^{(i-1)'}(x_i) &= S_3^{(i)'}(x_i) \end{cases} \tag{14}$$

կստանանք հետևյալ տեսքի խորանարդային սփլայն.

$$S_3^{(i)}(x) = \frac{c_i}{6h}\left(x_{i+1}-x\right)^3 + \frac{c_{i+1}}{6h}\left(x-x_i\right)^3 + \left(\frac{f_i}{h}-\frac{hc_i}{6}\right)\left(x_{i+1}-x\right) + \left(\frac{f_{i+1}}{h}-\frac{hc_{i+1}}{6}\right)\left(x-x_i\right) \tag{15}$$

որտեղից c_i գործակիցների համար կստացվի հետևյալ հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} c_{i+1}+4c_i+c_{i-1} = \dfrac{6}{h^2}\left(f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}\right) \; i=\overline{1,N-1} \\ c_0 = A \\ c_N = B \end{cases} \tag{16}$$



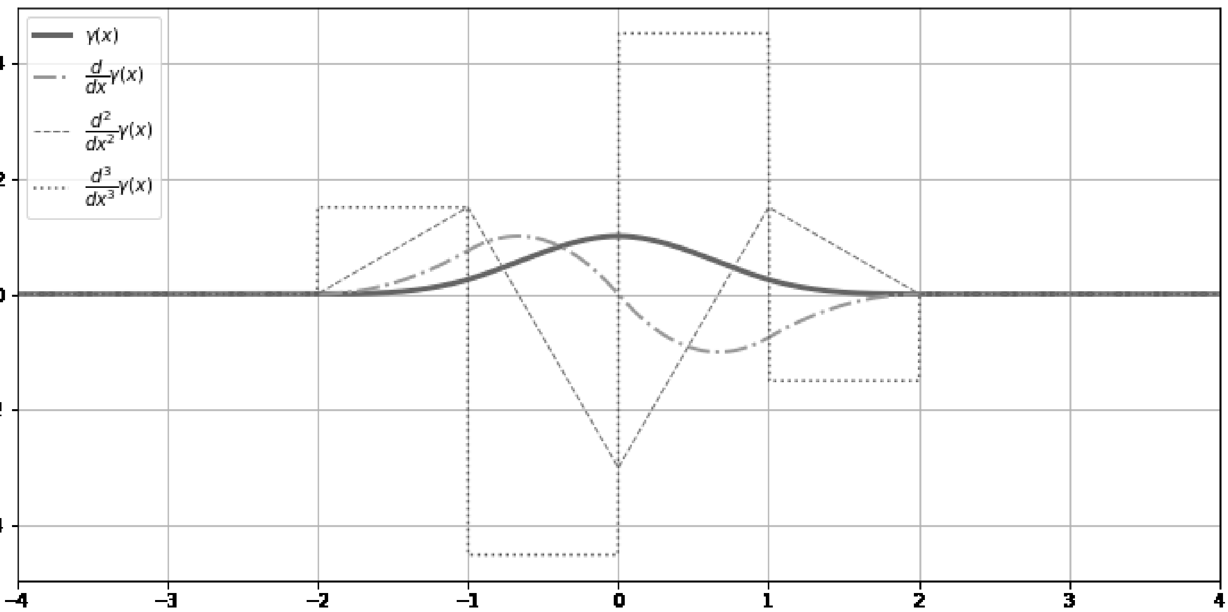
Նկար 1.3. Քառակուսային և խորանարդային ինտերպոլյացիաների համեմատում:

Այժմ դիտարկենք լոկալ կրող ունեցող խորանարդային սփլայները: Այդպիսի սփլայններ առաջարկել է ավստրիացի մաթեմատիկոս Առնոլդ Շնեբերգը: Դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան.

$$\gamma(x) = \frac{1}{4}\left[(x+2)_+^3 - 4\,(x+1)_+^3 + 6\,(x)_+^3 - 4\,(x-1)_+^3 + (x-2)_+^3\right] \tag{17}$$

որտեղ

$$(x)_+ = \begin{cases} x, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases} \tag{18}$$



Նկար 1.4. γ(x) ֆունկցիան և նրա մինչև երրորդ կարգի ածանցյալները.

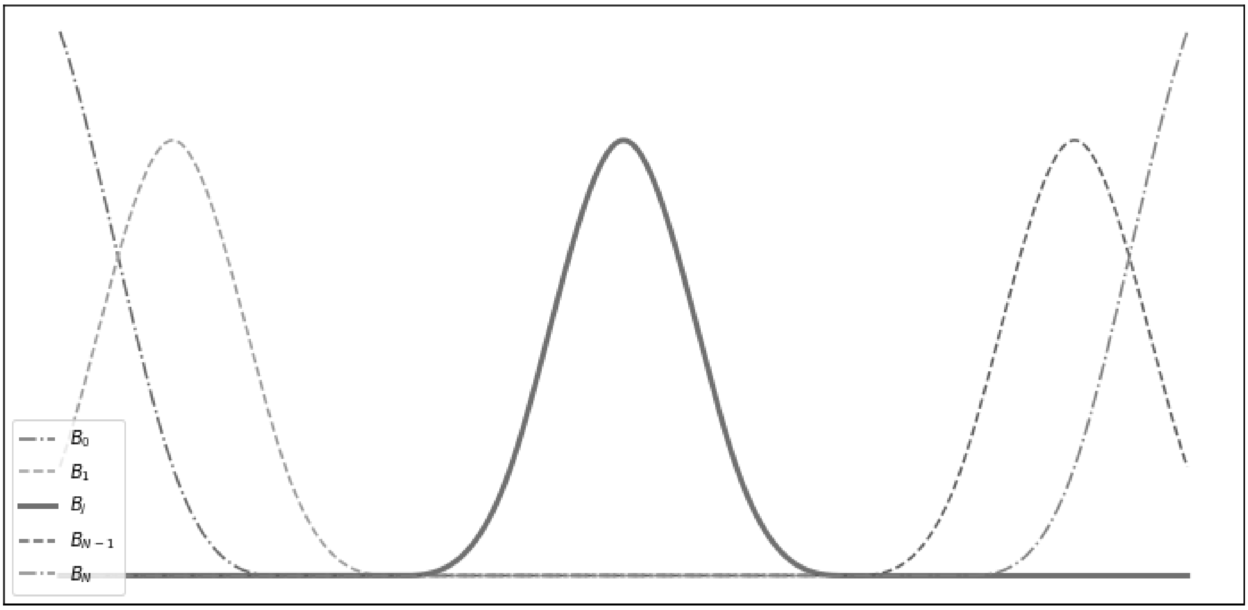
Ենթադրենք տրված է $[x_0, x_N]$ ինտերվալը տրոհված N հավասար մասերի h քայլով: Յուրաքանչյուր x_i հանգույցի $(i = \overline{2, N-2})$ համար բազիսային ֆունկցիան տրվում է հետևյալ բանաձևով.

$$B_i\left(\frac{x}{h}\right) = \gamma\left(\frac{x - x_0}{h} - i\right) \tag{19}$$

Այս ֆունկցիաները և նրանց մինչև երկրորդ կարգի ածանցյալները հավասար են զրոյի $\mathbb{R} \backslash (x_{i-2}, x_{i+2})$ տիրույթում: Մնացած բազիսային ֆունկիաները պետք է կառուցել այլ կերպ, քանի որ դրանց մի մասը դուրս է ընկած $[x_0, x_N]$ ինտերվալից:

$$\begin{aligned}
&B_0\left(\frac{x}{h}\right) = \gamma\left(\frac{x}{h}\right) + \left(\frac{h-x}{4h}\right)_+^3,\ x \in [x_0, x_2] \\
&B_1\left(\frac{x}{h}\right) = \gamma\left(\frac{x}{h}\right),\ x \in [x_0, x_3] \\
&B_{N-1}\left(\frac{x}{h}\right) = \gamma\left(\frac{x}{h}\right),\ x \in [x_{N-3}, x_N] \\
&B_N\left(\frac{x}{h}\right) = \gamma\left(\frac{x}{h}\right) + \left(\frac{x-(N-1)h}{4h}\right)_+^3,\ x \in [x_{N-2}, x_N]
\end{aligned} \tag{20}$$

Տրված $\{(x_j, f_j)\}_{j=0}^N$ ինտերպոլյացիոն տվյալներով կառուցենք սփլայն.



Նկար 1.5. B_j բազիսային ֆունկցիաների գրաֆիկական ներկայացում:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i B_i\left(\frac{x}{h}\right) \tag{21}$$

Հաշվի առնելով ինտերպոլյացիոն պայմանները կստանանք հետևյալ հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases}
\frac{5}{4}\alpha_0 + \frac{1}{4}\alpha_0 & = f_0 \\
\frac{1}{4}\alpha_{j-1} + \alpha_j + \frac{1}{4}\alpha_{j+1} & = f_j,\ j = \overline{1, N-1} \\
\frac{5}{4}\alpha_{N-1} + \frac{1}{4}\alpha_N & = f_N
\end{cases} \tag{22}$$

Գլուխ 2

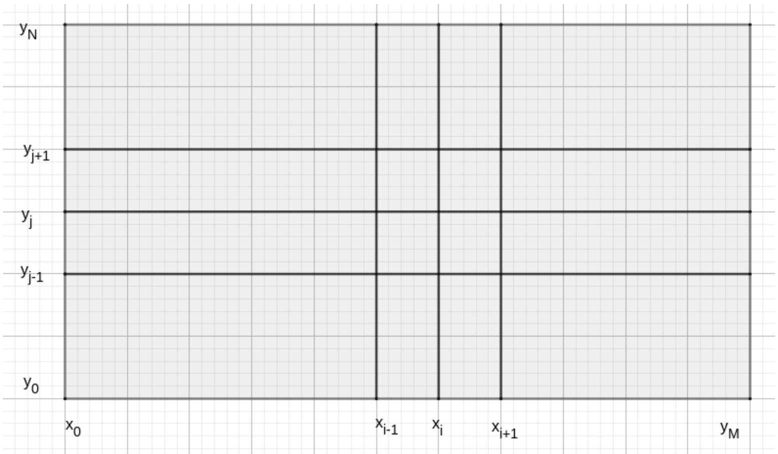
Երկչափ մոտարկում

Այժմ դիտարկենք երկու փոփոխականի ֆունկցիայի մոտարկման խնդիրը: Ի տարբերություն մեկ փոփոխականի ֆունկիցայի ինտերպոլյացիայի, այս դեպքում տիրույթի տրոհումը կարելի է իրականացնել կամայական ձևով: Կախված տրված տիրույթի և տրոհման ձևից, առանձնացվում են հետևյալ մոտակման ձևերը.

2.1 Ուղղանկյուն տիրույթ

Դիցուք տրված են $f : \Omega \mapsto \Theta$, $\Theta \subset \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = [x_0, x_M] \times [y_0, y_N]$ ուղղանկյուն տիրույթը, որը տրոհված է $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, ուղղանկյուն էլեմենտների:

$$x_{i+1} - x_i = h_1,\ y_{j+1} - y_j = h_2,\ i = \overline{0, M-1}, j = \overline{0, N-1}$$



Նկար 2.1. Ուղղանկյունաձև տիրույթի տրոհում ուղղանկյուն էլեմենտների:

2.1.Էրմիթյան ինտերպոլյացիա

$C^{(0,0)}$ մոտարկում

Յուրաքանչյուր $[x_i, x_{i+1}]\times[y_j, y_{j+1}]$ էլեմենտի վրա f ֆունկցիան մոտարկվում է հետևյալ քառակուսային ֆունկցիայով:

$$p_1^{(i,j)}(x,y) = \alpha_{i,j}(x,y)f(x_i,y_j) + \beta_{i+1,j}(x,y)f(x_{i+1},y_j)\,\gamma_{i,j+1}(x,y)f(x_i,y_{j+1}) + \delta_{i+1,j+1}(x,y)f(x_{i+1},y_{j+1}) \tag{1}$$

որտեղ

$$\begin{aligned}
\alpha_{i,j}(x,y) &= \frac{1}{h_1h_2}\left(x_{i+1}-x\right)\left(y_{j+1}-y\right)\\
\beta_{i+1,j}(x,y) &= \frac{1}{h_1h_2}\left(x-x_i\right)\left(y_{j+1}-y\right)\\
\gamma_{i,j+1}(x,y) &= \frac{1}{h_1h_2}\left(x_{i+1}-x\right)\left(y-y_j\right)\\
\delta_{i+,j+1}(x,y) &= \frac{1}{h_1h_2}\left(x-x_i\right)\left(y-y_j\right)
\end{aligned} \tag{2}$$

Այսպիսով $[x_0, x_M]\times[y_0, y_M]$ տիրույթում կտոր առ կտոր մոտարկող ֆունկցիան տրվում է հետևյալ բանաձևով.

$$p_1(x,y) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\varphi_{i,j}(x,y)f(x_i,y_j) \tag{3}$$

որտեղ

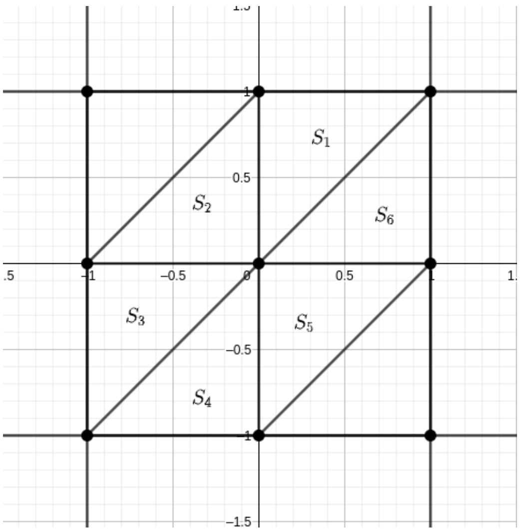
$$\varphi_{i,j}\left(x,y\right) = \begin{cases}
\frac{1}{h_1h_2}\left(x-x_{i-1}\right)\left(y-y_{j-1}\right), (x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\\
\frac{1}{h_1h_2}\left(x-x_{i-1}\right)\left(y_{j+1}-y\right), (x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_j,y_{j+1}]\\
\frac{1}{h_1h_2}\left(x_{i+1}-x\right)\left(y-y_{j-1}\right), (x,y)\in[x_i,x_{i+1}]\times[y_{j-1},y_j]\\
\frac{1}{h_1h_2}\left(x_{i+1}-x\right)\left(y_{j+1}-y\right), (x,y)\in[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]\\
0, \text{մնացած դեպքերում}
\end{cases} \tag{4}$$

Վերը ներկայացված ինտերպոլյացիան էրմիթյան ինտերպոլյացիայի մասնովոր դեպք է: Ընդհանուր դեպքում ցանկացած k բնական թվի և տրված ուղղանկյունաձև տրոհման յուրաքանչյուր էլեմենտի վրա կարելի է կառուցել $C^{(k-1,k-1)}$ ինտերպոլացնող ֆունկցիա, որը ըստ յուրաքանչյուր փոփոխականի $(2k-1)$-րդ կարգի բազմանդամ է և բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

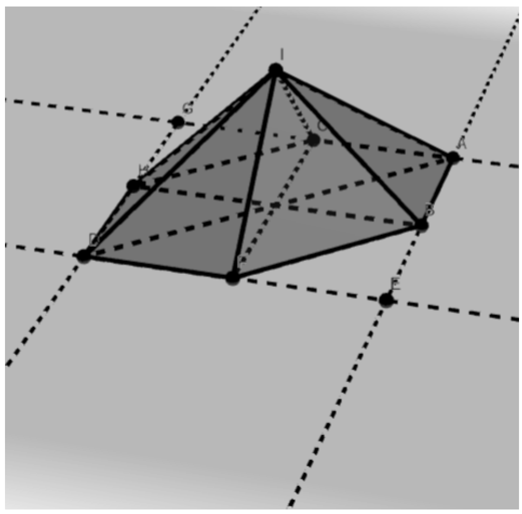
$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial x^q} f\left(x_i, y_j\right) = \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial x^q} p_{2k-1}\left(x_i, y_j\right), \; p, q = \overline{0, k-1}, \; i = \overline{0, M-1}, \; j = \overline{0, N-1} \quad (5)$$

Այժմ դիտարկենք ուղղանկյուն տիրույթի տրոհման և բազիսային ֆունկցիաների կառուցման այլ տարբերակ: Այս դեպքում տիրույթը տրոհենք ինչպես նախորդ դեպքում, ի հավելումն յուրաքանչյուր ուղղանկյուն էլեմենտ տրոհելով երկու ուղղանկյուն եռանկյունների, ինչպես ցույց է տրված Նկար 2.2-ում: Դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան.

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1-y, & (x, y) \in S_1 \\ 1+x-y, & (x, y) \in S_2 \\ 1+x, & (x, y) \in S_3 \\ 1+y, & (x, y) \in S_4 \\ 1-x+y, & (x, y) \in S_5 \\ 1-x, & (x, y) \in S_6 \\ 0, \text{մնացած դեպքերում} & \end{cases} \quad (6)$$



Նկար 2.2. Ուղղանկյուն էլեմենտի տրոհումը եռանկյունների:



Նկար 2.3. Բազիսային ֆունկցիայի տեսքը

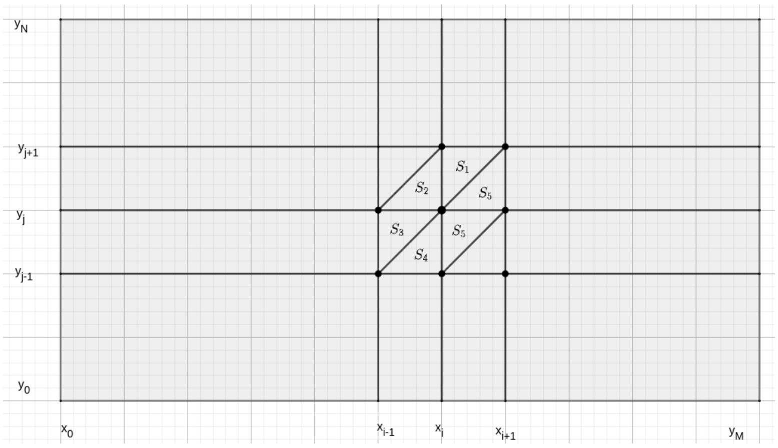
Պարզ է, որ այն $[-1,1] \times [-1,1]$ տիրույթում $C^{(0,0)}$ ֆունկցիա է: Այն հայտնի է որպես Կուրանտի բազիսային ֆունկցիա, ի պատիվ գերմանացի մաթեմատիկոս

Ռիխարդ Կուրանտի: Այժմ յուրաքանչյուր (x_i, y_j) հանգուցային կետի համար կառուցենք բազիսային ֆունկցիա օգտվելով (6)-ից.

$$\varphi^{ij}(x,y) = \varphi\left(\frac{x - x_i}{h_1}, \frac{y - y_j}{h_2}\right) \tag{7}$$

Յուրաքանչյուր կետի համար ունենալով բազիսային ֆունկցիա, f ֆունկցիայի մոտարկման բանաձևը կտվրի հետևյալ կերպ.

$$p_1(x,y) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}\varphi^{ij}(x,y)f(x_i,y_j) \tag{8}$$



Նկար 2.4. Տիրույթի տրոհումը ուղղանկյուն եռանկյունների

$C^{(2,2)}$ **մոտարկում**

Մեկ փոփոխականի մոտարկան խնդրը դիտարկելից քննարկեցինք Շնեռբերգի կողմից առաջարկված խորանարդային բազիսային սփլայնները: Այս սփլայնները կարող ենք օգտագործել երկչափ մոտարկման համար: Յուրաքանչյուր (x_i, y_j) հանգույցի վրա կառուցենք բազիսային ֆունկցիա կազմելով $B_i\left(\frac{x}{h_1}\right)$ և $B_j\left(\frac{x}{h_2}\right)$ ֆունկցիաների թենզորական արտադրյալը:

$$\varphi^{ij}\left(x,y\right)=B_i\left(\frac{x}{h_1}\right)B_j\left(\frac{x}{h_2}\right) \tag{9}$$

Տրված $\{(x_{ij}, y_{ij}, f_{ij})\}$ ինտերպոլյացիոն տվյալնեով կառուցենք սփլայն.

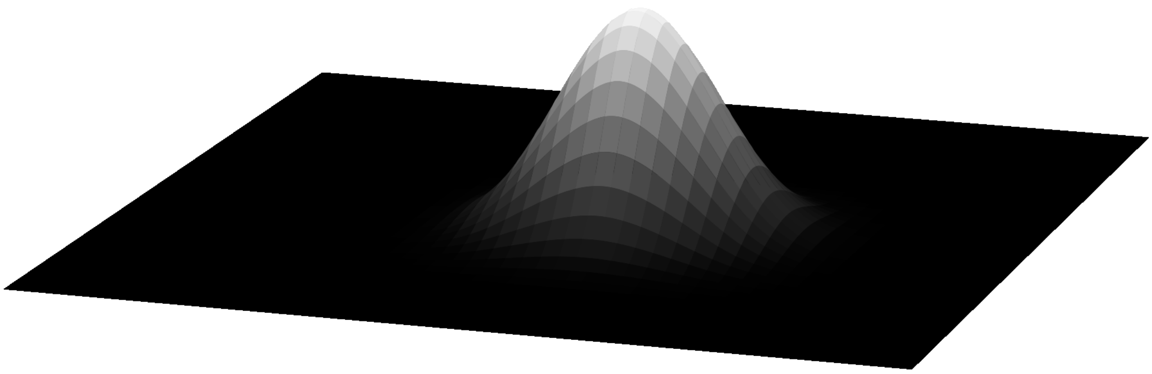
$$F(x,y)=\sum_{i=0}^{N}\alpha_{ij}\varphi^{ji}\left(x,y\right) \tag{10}$$

Հաշվի առնելով ինտերպոլյացիոն պայմանները

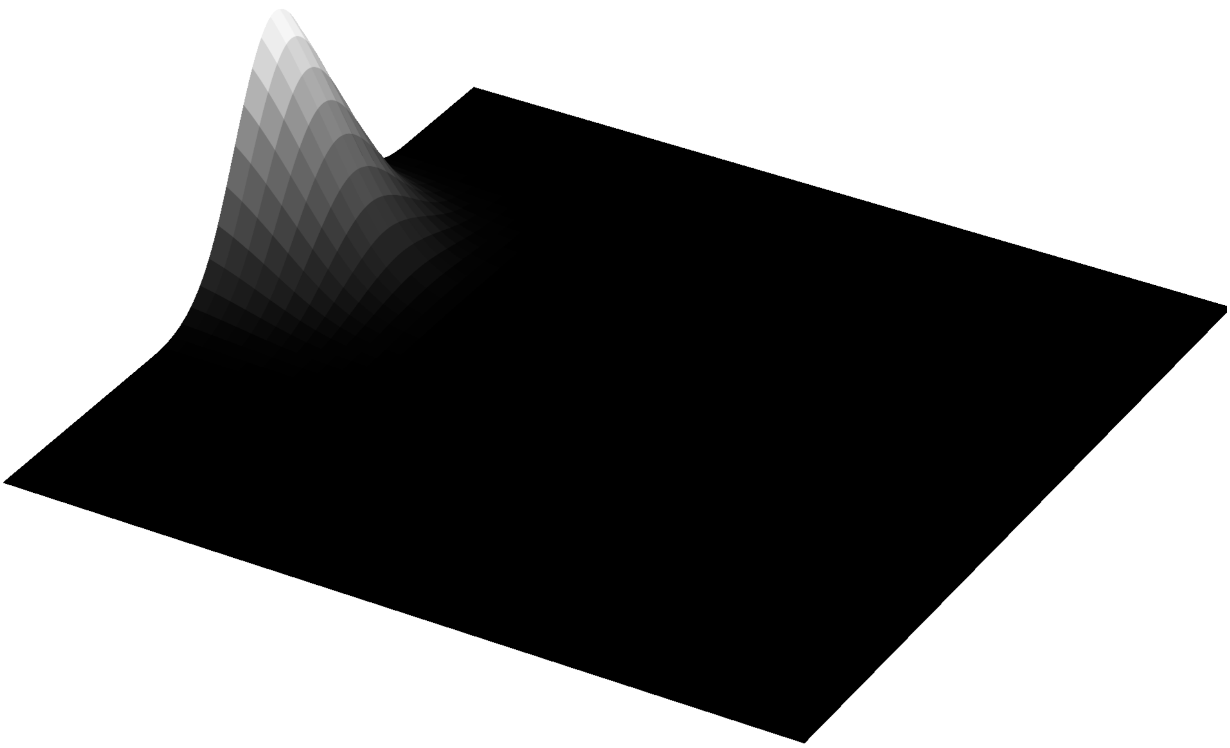
$$F(x_{ij})=f_{ij}$$

կստանանք հետևյալ հավասարումերի համակարգը.

$$\begin{cases}
\alpha_{00}+\frac{5}{16}(\alpha_{01}+\alpha_{10})+\frac{1}{16}\alpha_{11} & =f_{00}\\
\alpha_{M0}+\frac{5}{16}(\alpha_{M1}+\alpha_{M-1,0})+\frac{1}{16}\alpha_{M-1,1} & =f_{M0}\\
\alpha_{0N}+\frac{5}{16}(\alpha_{1N}+\alpha_{0,N-1})+\frac{1}{16}\alpha_{N-1,1} & =f_{0N}\\
\alpha_{MN}+\frac{5}{16}(\alpha_{M-1,N}+\alpha_{M,N-1})+\frac{1}{16}\alpha_{M-1,N-1} & =f_{MN}\\
\frac{5}{4}\alpha_{i,1}+\frac{5}{16}(\alpha_{i-1,0}+\alpha_{i+1,0})+\frac{1}{4}\alpha_{i,1}+\frac{1}{16}(\alpha_{i-1,1}+\alpha_{i+1,1}) & =f_{i0}\\
\frac{5}{4}\alpha_{i,N-1}+\frac{5}{16}(\alpha_{i-1,N}+\alpha_{i+1,N})+\frac{1}{4}\alpha_{i,N-1}+\frac{1}{16}(\alpha_{i-1,N-1}+\alpha_{i+1,N-1}) & =f_{iN}\\
\frac{5}{4}\alpha_{1,j}+\frac{5}{16}(\alpha_{0,j-1}+\alpha_{0,j+1})+\frac{1}{4}\alpha_{1,j}+\frac{1}{16}(\alpha_{1,j-1}+\alpha_{1,j+1}) & =f_{0j}\\
\frac{5}{4}\alpha_{M-1,j}+\frac{5}{16}(\alpha_{M,j-1}+\alpha_{M,j+1})+\frac{1}{4}\alpha_{M-1,j}+\frac{1}{16}(\alpha_{M-1,j-1}+\alpha_{M-1,j+1}) & =f_{Mj}\\
\alpha_{ij}+\frac{1}{4}(\alpha_{i,j-1}+\alpha_{i,j+1}+\alpha_{i-1,j}+\alpha_{i+1,j})+\frac{1}{16}(\alpha_{i-1,j-1}+\alpha_{i-1,j+1}+\alpha_{i+1,j-1}+\alpha_{i+1,j+1}) & =f_{ij}
\end{cases} \tag{11}$$



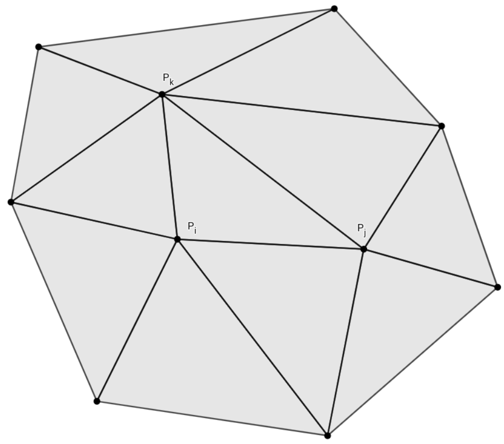
Նկար 2.5. φ^{ij} բազիսային ֆունկցիաների պատկեր:



Նկար 2.6 Տիրույթի եզրի վրա գտնվող բազիսային ֆունկցիա:

Բազմանկյուն տիրույթ

Բազմանկյուն տիրույթ ասելով կհասկանանք կամ հենց բազմանկյունաձև տիրույթը, կամ դրա բազմանկյուններով մոտարկումը: Դիցուք տրված են $f : \Omega \mapsto \Theta, \Theta \subset \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$ բազմանկյուն տիրույթը, որը կամայական ձևով տրոհված է եռանկյուն էլեմենտների:



Նկար 2.7. Տիրույթի եռանկյունաձև տրոհման օրինակ:

2.2 Լագրանժի ինտերպոլյացիա

Յուրաքանչուր եռանկյուն էլեմենտի վրա դիտարկենք m-րդ կարգի լրիվ բազմանդամ

$$F_m(x,y) = \sum_{k+l=0}^{m} \alpha_{kl} x^k y^l \tag{12}$$

որը կարող է օգտագործվել որպես ինտերպոլյացիոն ֆունկցիա $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ սիմետրիկ դասավորված կետերի վրա: Դիտարկենք հետևյալ մասնավոր դեպքերը.

1. Գծային ինտերպոլյացիա (m=1)

   Յուրաքանչյուր P_1, P_2, P_3 գագաթներով եռանկյուն էլեմենտի համար դիտարկենք հետևյալ մոտարկող ֆունկցիան.

$$F_1(x,y) = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{3} p_i^{(1)}(x,y) f(x_i, y_i) \tag{13}$$

   որտեղ S-ը P_1, P_2, P_3 կետերով կազմված եռանկյան մակերեսի կրկնապատիկն է, իսկ $p_i^{(1)}$ ֆունկցիաները սահմանվում են հետևյալ կերպ.

$$S = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$p_i^{(1)}(x,y) = x_j y_k - x_k y_j + x(y_j - y_k) - y(x_j - x_k) \tag{14}$$

որտեղ $(x_i, y_i), \quad i = 1,2,3$ տրված եռանկյուն էլեմենտի գագաթներն են (հերթականությունը ժամսլաքին հակառակ ուղղությամբ)։

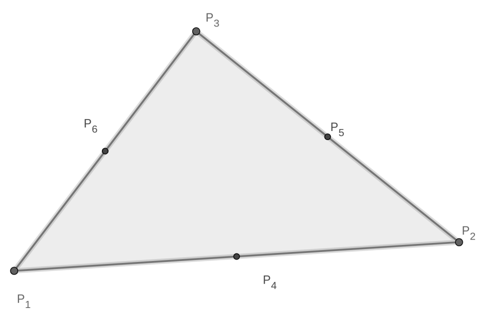
2. Քառակուսային ինտերպոլյացիա (m=2)

Յուրաքանչյուր եռանկյուն էլեմենտի վրա գագաթներից բացի դիտարկենք նաև միջնակետերը։ Ինտերպոլացնող բազմանդամը ունի հետևյալ տեսքը.

$$F_2(x,y) = \frac{1}{S^2} \sum_{i=1}^{6} p_i^{(2)}(x,y) f(x_i, y_i) \tag{15}$$

որտեղ

$$\begin{aligned} p_i^{(2)}(x,y) &= p_i^{(1)}(x,y)\left(2p_i^{(1)}(x,y) - 1\right), \ i = 1,2,3 \\ p_4^{(2)}(x,y) &= 4p_1^{(1)}(x,y)p_2^{(1)}(x,y) \\ p_5^{(2)}(x,y) &= 4p_2^{(1)}(x,y)p_3^{(1)}(x,y) \\ p_6^{(2)}(x,y) &= 4p_1^{(1)}(x,y)p_3^{(1)}(x,y) \end{aligned} \tag{16}$$



Նկար 2.8. Կետերի դասավորվածությունը կամայական եռանկյան վրա։

3. Խորանարդային ինտերպոլյացիա (m=3)

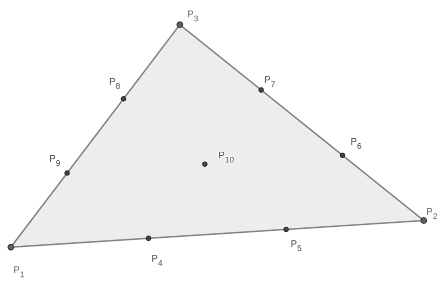
Այս տեպքում յուրականչյուր կողի վրա ավելացնենք ևս երկու կետ այն տրոհելով երեք հավասար մասի և դրանց ավելացնելով եռանկյան կենտրոնը։

Ինտերպոլացնող բազմանդամը ունի հետևյալ տեսքը.

$$F_3(x,y) = \frac{1}{S^3}\sum_{i=1}^{10} p_i^{(3)}(x,y) f(x_i,y_i) \tag{17}$$

որտեղ

$$\begin{aligned}
p_i^{(3)}(x,y) &= \frac{1}{2}p_i^{(1)}(x,y)\left(3p_i^{(1)}(x,y)-1\right)\left(3p_i^{(1)}(x,y)-2\right),\ i=1,2,3\\
p_4^{(3)}(x,y) &= \frac{9}{2}p_1^{(1)}(x,y)p_2^{(1)}(x,y)\left(3p_1^{(1)}(x,y)-1\right)\\
p_5^{(3)}(x,y) &= \frac{9}{2}p_1^{(1)}(x,y)p_2^{(1)}(x,y)\left(3p_2^{(1)}(x,y)-1\right)\\
p_6^{(3)}(x,y) &= \frac{9}{2}p_2^{(1)}(x,y)p_3^{(1)}(x,y)\left(3p_3^{(1)}(x,y)-1\right)\\
p_7^{(3)}(x,y) &= \frac{9}{2}p_2^{(1)}(x,y)p_3^{(1)}(x,y)\left(3p_3^{(1)}(x,y)-1\right)\\
p_8^{(3)}(x,y) &= \frac{9}{2}p_3^{(1)}(x,y)p_1^{(1)}(x,y)\left(3p_3^{(1)}(x,y)-1\right)\\
p_9^{(3)}(x,y) &= \frac{9}{2}p_3^{(1)}(x,y)p_1^{(1)}(x,y)\left(3p_1^{(1)}(x,y)-1\right)\\
p_{10}^{(3)}(x,y) &= 27p_1^{(1)}(x,y)p_2^{(1)}(x,y)p_3^{(1)}(x,y)
\end{aligned} \tag{18}$$



Նկար 2.9. Կետերի դասավորվածությունը կամայական եռանկյան վրա:

Բնական է, որ որևէ կետի նկատմամբ լրիվ բազիսային ֆունկցիայի կառուցելու համար անհրաժեշտ է իրար գումարել այն բոլոր եռանկյուն էլեմենտների այդ կետին համապատասխան ֆունկցիաները, որոնց համար տվյալ կետը գագաթ է:

Գլուխ 3
Վարիացիոն մեթոդ

Վարիացիոն մեթոդները հանդիպում են բազմաթիվ ֆիզիկական խնդիրներում, և այդ խնդիրների մոտավոր լուծումը հիմնված է համապատասխան վարիացիոն մեթոդների վրա:

Սահմանումներ

$f:\Omega\mapsto\Theta,\ \Omega\subset\mathbb{R}^n,\ \Theta\subset\mathbb{R}$ ֆունկցիայի ϵ շրջակայք ասելով կհասկանանք այն բոլոր g ֆունկցիաների բազմությունը, որոնց համար տեղի ունի

$$|f-g|<\epsilon$$

պայմանը:

Խնդրի դրվածքը

Վարիացիոն մեթոդի սկզբունքն այն է, որ դիտարկվող ֆունկցիայի ինտեգրալը տրված տիրույթում ընդունում է մեծագույն (փոքրագույն) արժեք տվյալ համակարգի իրական վիճակի համար, համեմատած բոլոր հնարավոր վիճակների բազմության հետ: Ենթաինտեգրալային ֆունկցիան կախված է տրված կոորդինատներից, ֆունկցիայի արժեքից, նրա ածանցյալներից, իսկ ինտեգրումը կատարվում է տրված կոորդինատական համակարգում, որը կարող է ներառել նաև ժամանակը: Մինիմումի որոշման խնդիրը հաճախ բերվում է մի քանի դիֆերենցիալ հավասարումների, համապատասխան եզրային պայմաններով: Այն իրական փոփոխականի ֆունկցիայի էքստրեմումի որոնման խնդրի ընդհանրացումն է, որտեղ տրված ֆունկցիայի համար կոմպակտ տիրույթում անհրաժեշտ է գտնել այպիսի կետեր, որոնք մինիմում (մաքսիմում) են իրենց որևէ շրջակայքում: Վարիացիոն մեթոդում ֆունկցիոնալը ինտեգրալ է, որը կախված է ֆուկցիայից, որի որոշման տիրույթը թույլատրելի ֆունկցիաների տարածությունն է: Այս մեթոդի հիմնական դժվարությունը կայանում է նրանում, որ խնդիրները, որոնք կարող են ձևակերպվել որպես վարիացիոն, հնարավոր է, որ լուծում չունենան այն պատճառով, որ ֆունկցիոնալ տարածությունները կոմպակտ չեն: Սակայն վարիացիոն մեթոդի հիմնական առավելությունն այն է, որ դրա կիրառման համար դրվող պահանջները ավելի թույլ են:

Օրինակներ

Որպես օրինակ դիտարկենք հետևյալ կրկնակի ինտեգրալը.

$$I(f) = \iint\limits_{\Omega} F(x, y, f, f_x, f_y)\, dxdy \tag{1}$$

որտեղ $f \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ և որի արժեքները որոշված են $\partial\Omega$ ում: Այս դեպքում մինիմումի անհրաժեշտ պայման է, որ $f(x, y)$ ֆունկցիան բավարարի Էյլեր-Լագրանժի հավասարմանը, հավելելով համապատասխան եզրային պայմանները:

$$\frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} - F_u = 0 \tag{2}$$

Օրինակ, $F = \frac{1}{2}\left(u_x^2 + u_y^2\right)$ դեպքում խնդիրը բերվում է Լապլասի հավասարմանը.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{3}$$

Այժմ պարզ է, որ երկրորդ կարգի ածանցյալների անընդհատությունը անհրաժեշտ է Էյլեր-Լագրանժի հավասարման գոյության համար: Բայց վարիացիոն մեթոդը պահանջում է միայն f ի անընդհատություն և առաջին կարգի մասնակի ածանցյալների կտոր առ կտոր անընդհատություն:

Ստացիոնար խնդիրներ

Դիֆերենցիալ հավասարումը, որը կապված է վարիացիոն խնդրի հետ, կոչվում է Էյլեր-Լագրանժի հավասարում: Այս միայն անհրաժեշտ պայման է, որին պետք է բավարարի ֆունկցիան, որը մինիմիզացնում (մաքսիմիզացնում) է ֆունկցիոնալը: Դիտարկենք հետևյալ օրինակները.

1. Մեկ փոփոխականի ֆունկցիա.

$$f \in \Omega \mapsto \Theta,\ \Omega, \Theta \subset \mathbb{R}$$

Այս դեպքում ֆունկցիոնալն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$I(f) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F\left(x, f, f'\right) dx$$

որտեղ $f(x_0)$ և $f(x_1)$, $x_0, x_1 \in \Theta$ ը տրված են: Մինիմիմում գոյության անհրաժեշտ պայման է հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'} = 0$$

Որը համարժեք է.

$$\frac{d^2 f}{dx^2} F_{f' f'} + \frac{df}{dx} F_{f' f} + F_{f' x} - F_f = 0$$

2. Մի քանի անհայտ ֆունկցիաներ.

$$f, g \in \Omega \mapsto \Theta,\ \Omega, \Theta \subset \mathbb{R}$$

Այս դեպքում ֆունկցիոնալն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$I(f) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F\left(x, f, g, f', g'\right) dx$$

որտեղ $f(x_0),\ f(x_1),\ g(x_0),\ g(x_1)$, $x_0, x_1 \in \Theta$ ը տրված են: Մինիմիմում գոյության անհրաժեշտ պայման է հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը.

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial g} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial g'} = 0$$

3. Բարձր կարգի ածանցյալներ.

$$f \in \Omega \mapsto \Theta,\ \Omega, \Theta \subset \mathbb{R}$$

Այս դեպքում ֆունկցիոնալն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$I\left(f\right)=\int\limits_{x_0}^{x_1}F\left(x,f,f^{'},f^{''},\ldots,f^{(n)}\right)dx$$

որտեղ $f(x_0),\ f(x_1),\ f^{'}(x_0),\ f^{'}(x_1)$, $x_0,x_1\in\Theta$ ը տրված են: Մինիմումի գոյության անհրաժեշտ պայման է հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\frac{\partial F}{\partial f}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial f''}-\ldots(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial F}{\partial f^{(n)}}=0$$

4. Մի քանի անկախ փոփոխականներ.

$$f\in\Omega\mapsto\Theta,\ \Omega\subset\mathbb{R}^n,\Theta\subset\mathbb{R}$$

Այս դեպքում ֆունկցիոնալն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$I\left(f\right)=\int\limits_{\Omega}\cdots\int F\left(x,f,f_{x_1},f_{x_2},\ldots f_{x_n}\right)d\Omega$$

որտեղ f ֆունկցիայի արժեքները $\partial\Omega$-ի վրա տրված են:

Մինիմումի գոյության անհրաժեշտ պայման է հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\frac{\partial F}{\partial f}-\frac{d}{dx_1}\frac{\partial F}{\partial f_{x_1}}-\cdots-\frac{d}{dx_n}\frac{\partial F}{\partial f_{x_n}}=0$$

Եզրային պայմաններ

Նախորդիվ դիտարկել էինք այնպիսի խնդիրներ, որտեղ ֆունկցիան արժեքները տրված տիրույթի եզրի տրված են:Սակայն որոշ խնդիրնորում ֆունկցիան տիրույթի եզրում տրված չէ, և տրվում են այլ տիպի եզրային պայմաններ:Նման դեպքերում որպես եզրային պայման դիտարկվում են հետևյալ պայմանները.

Մեկ փոփոխականի ֆունկցիա

$$\frac{\partial F}{\partial f'} = 0$$

Երկու անհայտ ֆունկցիա

$$\frac{\partial F}{\partial f'} = \frac{\partial F}{\partial g'}$$

Երկու փոփոխականի ֆունկցիա

$$F_{u_x}\frac{dy}{ds} - F_{u_y}\frac{dx}{ds} = 0$$

որոնք հայտնի են որպես *բնական կամ գլխավոր* եզրային պայմաններ:

Պայմանական էքստրեմում

Այսպիսի վարիացիոն խնդիրներում անհրաժեշտ է մինիմիզացնել (մաքսիմիզացնել) տրված ֆունկցիոնալը, պայմանով, որ մեկ այլ ֆունկցիոնալ ընդունում է որևէ ֆիքսված արժեք այդ ֆունկցիայի համար: Այսինքն, եթե դիտարկենք ֆունկցիանալ, որի արժեքների բազմությունը մեկ փոփոխականի ֆունկցիաներ են, ապա կունենանք.

$$I(f) = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, f, f'\right) dx$$

$$\int_{x_0}^{x_1} G\left(x, f, f'\right) dx = C$$

Այս խնդրի համար Էյլեր-Լագրանժի հավասարումը հետևյալն է.

$$\frac{\partial (F + \lambda G)}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial (F + \lambda G)}{\partial f'} = 0$$

Գլուխ 4

Մոտավոր մեթոդներ. Վերջավոր էլեմենտների մեթոդ

Խնդիրների վարիացիոն մեթոդով ձևակերպումը, և վարիացիոն մեթոդների ավելի թույլ պայմանները թույլ են տալիս այդ խնդիրները լուծել մոտավոր մեթոդներով, որոնք հաճախ անվանվում են ուղիղ մեթոդներ: Ուղիղ մեթոդներից է Ռիտցի մինիմիզացնող հաջորդականության մեթոդը, որը քննության կառնենք:

Ռիտցի մեթոդ

Դիտարկենք որևէ վարիացիոն մեթոդով տրված մինիմիզացիայի խնդիր.

$$I\left(f\right)\longrightarrow min,\ f\in\Gamma$$

որտեղ I ֆունկցիոնալը տրված տիրույթում որոշյալ ինտեգրալ է: Մոտավոր լուծում կարելի է ստանալ, եթե ֆունկցիոնալի արժեքների բազմությունը սահմանափակենք որևէ վերջավոր չափանի ենթատարածությունով, որն ունի $\{\varphi_j\}_{j=1}^{N}$ բազիս:,

$$\Gamma_N\in\Gamma$$

Ենթադրենք, որ I ֆունկցիոնալի արժեքների տիրույթը ունի ճշգրիտ ստորին եզր, նշանակենք այն α_0 ով: Այդ դեպքում գոյություն ունի $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ հաջորդականություն այնպիսին, որ

$$\lim_{n\to\infty}I\left(f_n\right)=\lim_{n\to\infty}I\left(\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\varphi_j\right)=\alpha_0 \tag{1}$$

և ֆունկցիոնալի որոշման տիրույթի ցանկացած այլ g ֆունկցիայի համար

$$I\left(g\right)\geq\alpha_0$$

լուծումը փնտրենք հետևյալ կերպ.

$$f_0=\sum_{j=1}^{N}\gamma_j\varphi_j,\ \gamma_j\in\mathbb{R} \tag{2}$$

Այդ դեպքում խնդիրը բերվում է սովորական մինիմումի խնդրի.

$$\frac{\partial I}{\partial \gamma_i} = \frac{\partial}{\partial \gamma_i} I\left(\sum_{j=1}^{N} \gamma_j \varphi_j\right) = 0 \qquad (3)$$

4.1 Պուասոնի հավասարման լուծում ուղղանկյուն տիրույթում

Դիտարկենք հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u\Big|_{\partial D} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

որտեղ $D = [x_0, x_N] \times [y_0, y_M]$: Այս դիֆերենցիալ հավասարման համապատասխան վարիացիոն խնդիրը կլինի.

$$I(u) = \frac{1}{2} \iint\limits_D \left[u_x^2 + u_y^2\right] dxdy + \iint\limits_D fudxdy \longrightarrow min \tag{5}$$

D տիրույթը տրոհենք ուղղանկյուն եղանկյունների, և որպես բազիսային ֆունկցիաներ վերցնենք Կուրանտի ֆունկցիաները (2.7): Որոնելի ֆունկցիան կփնտրենք բազիսային ֆունկցիաների գծային կոմբինացիայի տեսքով.

$$u(x, y) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} u_{ij} \varphi_{i,j}(x, y) \tag{6}$$

Ուստի ինտեգրալային ֆունկցիոնալը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$\frac{1}{2} \iint\limits_D \left[\left(\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} u_{ij} \varphi_x^{ij}(x, y) \right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} u_{ij} \varphi_y^{ij}(x, y) \right)^2 \right] dxdy + \iint\limits_D f(x, y) \left[\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} u_{ij} \varphi_{ij}(x, y) \right] dxdy \tag{7}$$

Համաձայն էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանի.

$$\frac{\partial I}{\partial u_{kl}} = \frac{\partial}{\partial u_{kl}} I \left(\sum_{j=0}^{M} u_{ij} \varphi_{i,j}(x, y) \right) = 0$$

Դիտարկենք առաջին կրկնակի գումարը.

$$\left(\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} u_{ij} \varphi_x^{ij}(x, y) \right)^2 = \left[u_{kl} \varphi_x^{kl}(x, y)\right]^2 + 2u_{kl} \varphi_x^{kl}(x, y)[\dots] + [\dots]^2$$

որտեղ բազմակետերով արտահայտությունը իր մեջ չի պարունակում u_{kl} ը: Հանգունորեն, երկրորդ կրկնակի գումարի համար՝

$$\left(\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}u_{ij}\varphi_y^{ij}(x,y)\right)^2 = \left[u_{kl}\varphi_y^{kl}(x,y)\right]^2 + 2u_{kl}\varphi_y^{kl}(x,y)[\ldots] + [\ldots]^2$$

Այսպիսով ավելի պարզեցված տեսքով համակարգը ունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{\partial}{\partial u_{kl}}I\left(u\right) = \iint\limits_{D}\left[2u_{kl}\left\{\varphi_x^{kl}(x,y)\right\}^2 + 2\varphi_x^{kl}(x,y)[\ldots] + 2u_{kl}\left\{\varphi_y^{kl}(x,y)\right\}^2 + 2\varphi_y^{kl}(x,y)[\ldots] + 2f(x,y)\varphi^{kl}(x,y)\right]dxdy$$

Դիտարկենք $\varphi_x^{kl}(x,y)$ և $\varphi_y^{kl}(x,y)$ ֆունկցիաները:

$$\varphi_x^{kl}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y)\in S_1 \\ \dfrac{1}{h_1}, & (x,y)\in S_2 \\ \dfrac{1}{h_1}, & (x,y)\in S_3 \\ 0, & (x,y)\in S_4 \\ -\dfrac{1}{h_1}, & (x,y)\in S_5 \\ -\dfrac{1}{h_1}, & (x,y)\in S_6 \\ 0, \text{մնացած դեպքերում} \end{cases} \tag{8}$$

$$\varphi_y^{kl}(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{h_2}, & (x,y)\in S_1 \\ -\dfrac{1}{h_2}, & (x,y)\in S_2 \\ 0, & (x,y)\in S_3 \\ \dfrac{1}{h_2}, & (x,y)\in S_4 \\ \dfrac{1}{h_2}, & (x,y)\in S_5 \\ 0, & (x,y)\in S_6 \\ 0, \text{մնացած դեպքերում} \end{cases} \tag{9}$$

Քանի որ $\varphi_x^{kl}(x,y)$ և $\varphi_y^{kl}(x,y)$ ֆունկցիաները ոչ զրոյական են $[x_{k-1,l}, x_{k+1,l}]\times[y_{k,l-1}, y_{k,l+1}]$ ում, ապա

$$\iint\limits_D 2u_{kl}\left\{\varphi_x^{kl}(x,y)\right\}^2 dxdy = 4u_{kl}\frac{h_2}{h_1} \tag{10}$$

$$\iint\limits_D 2u_{kl}\left\{\varphi_y^{kl}(x,y)\right\}^2 dxdy = 4u_{kl}\frac{h_1}{h_2} \tag{11}$$

Քանի որ յուրաքանչյուր φ_{kl} բազիսային ֆունկցիա հատվում է $\varphi_{k-1,l}$, $\varphi_{k+1,l}$, $\varphi_{k,l-1}$, $\varphi_{k,l+1}$ ֆունկցիաների հետ, ապա

$$\iint\limits_D 2\varphi_x^{kl}(x,y)[\ldots]dxdy =$$

$$2\iint\limits_D \varphi_x^{kl}(x,y)[u_{k-1,l}\varphi_x^{k-1,l}(x,y) + u_{k+1,l}\varphi_x^{k+1,l}(x,y) + u_{k,l-1}\varphi_x^{k,l-1}(x,y) + u_{k,l+1}\varphi_x^{k,l+1}(x,y)]dxdy =$$

$$= -2u_{k-1,l}\frac{h_2}{h_1} - 2u_{k+1,l}\frac{h_2}{h_1}$$

Հանգունորեն՝

$$2\iint\limits_D \varphi_y^{kl}(x,y)[\ldots]dxdy = -2u_{k,l-1}\frac{h_1}{h_2} - 2u_{k,l+1}\frac{h_1}{h_2} \tag{12}$$

Եվ վերջապես

$$2\iint\limits_D f(x,y)\varphi_{kl}(x,y)dxdy \approx 2f_{kl}h_1h_2 \tag{13}$$

Դիրիխլեի եզրային պայմանների համար կունենանք:

$$u_{0,l} = u_{N,l} = u_{k,0} = u_{k,M} = 0$$

Այսպիսով, ստացանք հետևյալ հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} 2\left[\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right]u_{kl} - \frac{1}{h_1^2}u_{k-1,l} - \frac{1}{h_1^2}u_{k+1,l} - \frac{1}{h_2^2}u_{k,l-1} - \frac{1}{h_2^2}u_{k,l+1} + f_{kl} = 0 \\ u_{0,l} = u_{N,l} = u_{k,0} = u_{k,M} = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Ծրագրային իրականացում

Պուասոնի հավասարման մոտավոր լուծումը իրականացնելու համար օգտվենք Python ծրագրավորմալ լեզվից, օգտագործելով Numpy գրադարանը, որը հարմար է բազմաչափ զանգվածների հետ մաթեմատիկական գործողություններ իրականացնալու համար: Վիզուալիզացիաները կառուցելու համար կօգտվենք Matplotlib գրադարանից:

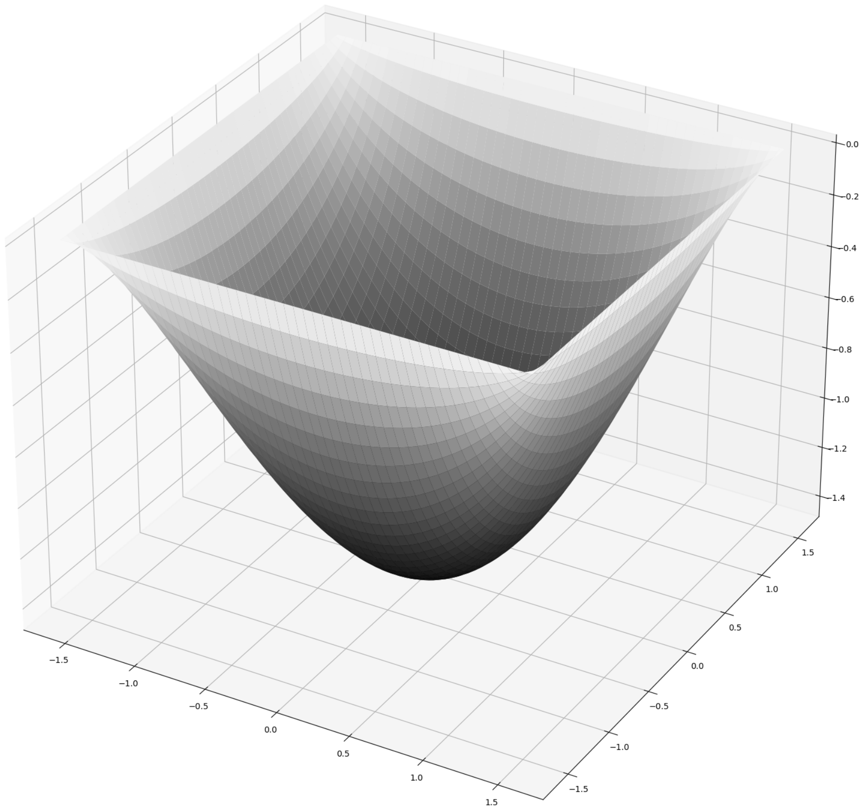
Ծրագրի սկզբում տրվում է ուղղանկյուն տիրույթի սահմանները և դրա տրոհման h_1 և h_2 քայլերը, f ֆունկցիան: Հաջորդիվ կազմվում է հավասարումների համակարգը, կանչվում այն լուծող ֆունկցիան: Այնուհետև բազիսային ֆունկցիաների միջոցով կառուցվում է մոտարկող ֆունկցիան:

Օրինակ

$$\begin{cases} \Delta u = 2 \\ u\Big|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

$$D = \left[-\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}\right] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}\right], \; h_1 = h_2 = \frac{\pi}{200}$$

Խնդրի համար ստացված լուծումը.



Նկար 4.1. Պուասոնի հավասարման լուծման գրաֆիկական ներկայացում:

4.1 Պուասոնի հավասարման լուծում ուղղանկյուն տիրույթում

4.3 Բիհարմոնիկ հավասարման լուծում ուղղանկյուն տիրույթում

Դիտարկենք հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\begin{cases} \Delta^2 u & = f \\ u\Big|_{\partial D} & = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial D} & = 0 \end{cases} \tag{15}$$

որտեղ $D = [x_0, x_N] \times [y_0, y_M]$: Այս դիֆերենցիալ հավասարման համապատասխան վարիացիոն խնդիրը կլինի.

$$I(u) = \frac{1}{2} \iint\limits_D \left[u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2\right] dxdy - \iint\limits_D fudxdy \longrightarrow min \tag{16}$$

D տիրույթը տրոհենք ուղղանկյունների h_1 և h_2 քայլերով համապատասխանաբար ըստ x և y կոորդինատների: Որոնելի ֆունկցիան կփնտրենք (2.9) ում ներկայացված բազիսային ֆունկցիաների գծային կոմբինացիայի տեսքով.

$$u(x, y) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} u_{ij} \varphi^{ij}(x, y) \tag{17}$$

Հետևաբար ինտեգրալ ֆունկցիոնալը կունենք հետևյալ տեսքը.

$$\frac{1}{2} \iint\limits_D \left[\left(\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} u_{ij}\varphi_{xx}^{ij}(x,y)\right)^2 + 2\left(\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} u_{ij}\varphi_{xy}^{ij}(x,y)\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} u_{ij}\varphi_{yy}^{ij}(x,y)\right)^2\right] dxdy - \iint\limits_D f(x,y)\left[\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} u_{ij}\varphi^{ij}(x,y)\right] dxdy \tag{18}$$

Համաձայն էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանի.

$$\frac{\partial I}{\partial u_{kl}} = \frac{\partial}{\partial u_{kl}} I\left(\sum_{j=0}^{M} u_{ij}\varphi^{ij}(x,y)\right) = 0$$

Դիտարկենք (18)-ի առաջին կրկնակի գումարը.

$$\left(\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} u_{ij}\varphi_{xx}^{ij}(x,y)\right)^2 = \left[u_{kl}\varphi_{xx}^{kl}(x,y)\right]^2 + 2u_{kl}\varphi_{xx}^{kl}(x,y)[\dots] + [\dots]^2$$

որտեղ բազմակետերով արտահայտությունը իր մեջ չի պարունակում u_{kl} ը: Հանգունորեն երկրորդ կրկնակի գումարի համար.

$$\left(\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} u_{ij}\varphi_{xy}^{ij}(x,y)\right)^2 = \left[u_{kl}\varphi_{xy}^{kl}(x,y)\right]^2 + 2u_{kl}\varphi_{xy}^{kl}(x,y)[\dots] + [\dots]^2$$

Հանգունորեն երրորդ կրկնակի գումարի համար.

$$\left(\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} u_{ij}\varphi_{yy}^{ij}(x,y)\right)^2 = \left[u_{kl}\varphi_{yy}^{kl}(x,y)\right]^2 + 2u_{kl}\varphi_{yy}^{kl}(x,y)[\dots] + [\dots]^2$$

Այսպիսով ավելի պարզեցված տեսքով համակարգը ունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{\partial}{\partial u_{kl}} I(u) = \iint\limits_D \left[2u_{kl}\left\{\varphi_{xx}^{kl}(x,y)\right\}^2 + 2\varphi_{xx}^{kl}(x,y)[\dots] + 4u_{kl}\left\{\varphi_{xy}^{kl}(x,y)\right\}^2 + 4\varphi_{xy}^{kl}(x,y)[\dots] + 2\left\{\varphi_{yy}^{kl}(x,y)\right\}^2 + 2u_{kl}\varphi_{yy}^{kl}(x,y)[\dots] + 2f(x,y)\varphi_{kl}(x,y)\right] dxdy \tag{19}$$

Քանի որ տրված են Դիրիխլեի և Նեյմանի եզրային պայմանները, կդիտարկենք միայն $2 \le k \le M-2, 2 \le l \le N-2$ դեպքերը: (19) ինտեգրալը հաշվենք անդամ առ անդամ:

$$\iint\limits_D 2u_{kl}\left\{\varphi_{xx}^{kl}(x,y)\right\}^2 dxdy = 2u_{kl}\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}}\int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}}\left\{B_k''(x)B_l(y)\right\}^2 dxdy = 2u_{kl}\cdot\frac{6}{h_1^3}\cdot\frac{151}{140}h_2 \tag{20}$$

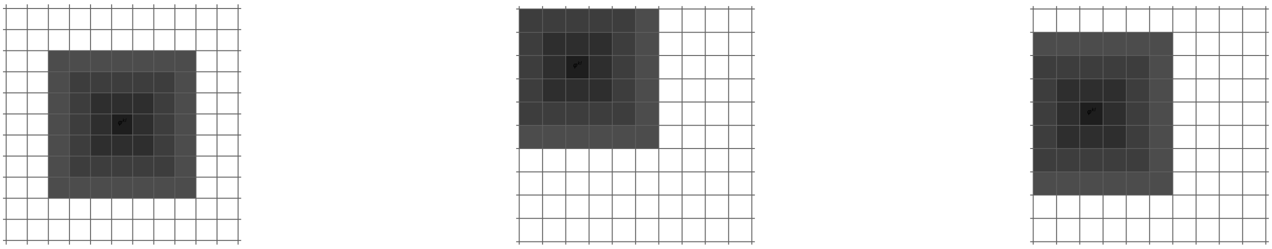
$$\iint\limits_D 4u_{kl}\left\{\varphi_{xy}^{kl}(x,y)\right\}^2 dxdy = 4u_{kl}\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}}\int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}}\left\{B_k'(x)B_l'(y)\right\}^2 dxdy = 4u_{kl}\cdot\frac{3}{2h_1}\cdot\frac{3}{2h_2} \tag{21}$$

$$\iint\limits_D 2u_{kl}\left\{\varphi_{yy}^{kl}(x,y)\right\}^2 dxdy = 2u_{kl}\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}}\int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}}\left\{B_k(x)B_l''(y)\right\}^2 dxdy = 2u_{kl}\cdot\frac{151}{140}h_2\cdot\frac{6}{h_1^3} \tag{22}$$

$$\begin{gathered}\iint\limits_D 2f(x,y)\varphi^{kl}(x,y)dxdy = 2\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}}\int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} f(x,y)B_k(x)B_l(y)dxdy \approx \\ \approx \frac{2}{9}h_1h_2\left[f_{k-1,l}+2f_{k,l}+f_{k+1,l}\right]\left[f_{k,l-1}+2f_{k,l}+f_{k,l+1}\right]\end{gathered} \tag{23}$$

Դիտարկենք մյուս ինտեգրալները: Քանի որ φ^{ij} բազիսային ֆունկցիաները ունեն լոկալ կրողներ $4\times4=16$ ուղղանկյուն էլեմենտներում, ապա տրված φ^{kl} ֆունկցիան հատվում է 49 այլ բազիսային ֆունկցիաների հետ: Բացառություն են կազմում $i=2, M-2$, $j=2, N-2$

դեպքերը, որոնց համար լոկալ կրողը $6 \times 7 = 42$ է եզրին հարող հանգույցների համար, և $6 \times 6 = 36$ անկյուններին հարող հանգույցների համար: Ստորև ներկայացվում է երեք հնարավոր դեքերը (արտակատկերման համար ներկված հանգույցները պատկերված են ուղղանկյունների տեսքով):



Նկար 4.2. Բազիսային ֆունկցիաների հատումների ներկայացում տիրույթի ներսում, անկյունի վրա և եզրի վրա:

$$\iint\limits_D 2\varphi_{xx}^{kl}(x,y)[\ldots]dxdy, \iint\limits_D 4\varphi_{xy}^{kl}(x,y)[\ldots]dxdy, \iint\limits_D 2\varphi_{yy}^{kl}(x,y)[\ldots]dxdy$$

ինտեգրալները ներկայացնենք կրկնակի ինտեգրալների տեսքով:

$$\iint\limits_D 2\varphi_{xx}^{kl}(x,y)[\ldots]dxdy = 2\sum_{\substack{i=k-3\\i\neq k}}^{k+3}\sum_{\substack{j=l-3\\j\neq l}}^{l+3} u_{ij}\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k^{''}(x)B_i^{''}(x)dx\int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y)B_j(y)dy \tag{24}$$

$$\iint\limits_D 4\varphi_{xy}^{kl}(x,y)[\ldots]dxdy = 4\sum_{\substack{i=k-3\\i\neq k}}^{k+3}\sum_{\substack{j=l-3\\j\neq l}}^{l+3} u_{ij}\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k^{'}(x)B_i^{'}(x)dx\int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l^{'}(y)B_j^{'}(y)dy \tag{25}$$

$$\iint\limits_D 2\varphi_{yy}^{kl}(x,y)[\ldots]dxdy = 2\sum_{\substack{i=k-3\\i\neq k}}^{k+3}\sum_{\substack{j=l-3\\j\neq l}}^{l+3} u_{ij}\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x)B_i(x)dx\int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l^{''}(y)B_j^{''}(y)dy \tag{26}$$

Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը.

1. Երբ $3 \le k \le M-3,\ 3 \le l \le N-3$

   Առաջին ինտեգրալի համար

$$\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k^{''}(x)B_{k-3}^{''}(x)dx = \frac{3}{8h_1^3}, \int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k^{''}(x)B_{k-2}^{''}(x)dx = 0, \int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k^{''}(x)B_{k-1}^{''}(x)dx = -\frac{27}{8h_1^3}$$

$$\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k''(x)B_{k+1}''(x)dx = -\frac{27}{8h_1^3}, \int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k''(x)B_{k+2}''(x)dx = 0, \int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k''(x)B_{k+3}''(x)dx = \frac{3}{8h_1^3}$$

$$\int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y)B_{l-3}(y)dy = \frac{h_2}{2240}, \int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y)B_{l-2}(y)dy = \frac{3h_2}{56}, \int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y)B_{l-1}(y)dy = \frac{1991h_2}{2240}$$

$$\int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y)B_{l+1}(y)dy = \frac{1991h_2}{2240}, \int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y)B_{l+2}(y)dy = \frac{3h_2}{56}, \int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l(y)B_{l+3}(y)dy = \frac{h_2}{2240}$$

Երկրորդ ինտեգրալի համար

$$\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k'(x)B_{k-3}'(x)dx = \frac{-3}{160h_1}, \int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k'(x)B_{k-2}'(x)dx = \frac{-9}{20h_1}, \int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k'(x)B_{k-1}'(x)dx = \frac{-9}{32h_1},$$

$$\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k'(x)B_{k+1}'(x)dx = \frac{-9}{32h_1}, \int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k'(x)B_{k+2}'(x)dx = \frac{-9}{20h_1}, \int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k'(x)B_{k+3}'(x)dx = \frac{-3}{160h_1},$$

$$\int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l'(y)B_{l-3}'(y)dy = \frac{-3}{160h_2}, \int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l'(y)B_{l-2}'(y)dy = \frac{-9}{20h_2}, \int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l'(y)B_{l-1}'(y)dy = \frac{-9}{32h_2},$$

$$\int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l'(y)B_{l+1}'(y)dy = \frac{-9}{32h_2}, \int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l'(y)B_{l+2}'(y)dy = \frac{-9}{20h_2}, \int\limits_{y_{l+2}}^{y_{l+2}} B_l'(y)B_{l+3}'(y)dy = \frac{-3}{160h_2},$$

Երրորդ ինտեգրալի համար

$$\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x)B_{k-3}(x)dx = \frac{h_1}{2240}, \int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x)B_{k-2}(x)dx = \frac{3h_1}{56}, \int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x)B_{k-1}(x)dx = \frac{1991h_1}{2240}$$

$$\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x)B_{k+1}(x)dx = \frac{1991h_1}{2240}, \int\limits_{x_{k-2}}^{x_{l+2}} B_k(x)B_{k+2}(x)dx = \frac{3h_1}{56}, \int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k+2}} B_k(x)B_{k+3}(x)dx = \frac{h_1}{2240}$$

$$\int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l''(y)B_{l-3}''(y)dy = \frac{3}{8h_2^3}, \int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l''(y)B_{l-2}''(y)dy = 0, \int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l''(y)B_{l-1}''(y)dy = -\frac{27}{8h_2^3}$$

$$\int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l''(y)B_{l+1}''(y)dy = -\frac{27}{8h_2^3}, \int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l''(y)B_{l+2}''(y)dy = 0, \int\limits_{y_{l-2}}^{y_{l+2}} B_l''(y)B_{l+3}''(y)dy = \frac{3}{8h_2^3}$$

2. $k = 2, l = 2$

Առաջին ինտեգրալի համար

$$\int\limits_{x_0}^{x_4} B_2^{''}(x)B_0^{''}(x)dx = \frac{3}{8h_1^3}, \int\limits_{x_0}^{x_4} B_2^{''}(x)B_1^{''}(x)dx = -\frac{27}{8h_1^3}$$

$$\int\limits_{x_0}^{x_4} B_2^{''}(x)B_3^{''}(x)dx = -\frac{27}{8h_1^3}, \int\limits_{x_0}^{x_4} B_2^{''}(x)B_4^{''}(x)dx = 0, \int\limits_{x_0}^{x_4} B_2^{''}(x)B_5^{''}(x)dx = \frac{3}{8h_1^3}$$

$$\int\limits_{y_0}^{y_4} B_2(y)B_0(y)dy = \frac{121h_2}{2240}, \int\limits_{y_0}^{y_4} B_2(y)B_1(y)dy = \frac{1991h_2}{2240}$$

$$\int\limits_{y_0}^{y_4} B_2(y)B_3(y)dy = \frac{1991h_2}{2240}, \int\limits_{y_0}^{y_4} B_l(y)B_4(y)dy = \frac{3h_2}{56}, \int\limits_{y_0}^{y_4} B_l(y)B_{l+3}(y)dy = \frac{h_2}{2240}$$

Երկրորդ ինտեգրալի համար

$$\int\limits_{x_0}^{x_4} B_2^{'}(x)B_0^{'}(x)dx = -\frac{15}{32h_1}, \int\limits_{x_0}^{x_4} B_2^{'}(x)B_1^{'}(x)dx = -\frac{9}{32h_1},$$

$$\int\limits_{x_0}^{x_4} B_2^{'}(x)B_3^{'}(x)dx = \frac{-9}{32h_1}, \int\limits_{x_0}^{x_4} B_k^{'}(x)B_3^{'}(x)dx = \frac{-9}{20h_1}, \int\limits_{x_0}^{x_4} B_k^{'}(x)B_5^{'}(x)dx = \frac{-3}{160h_1},$$

$$\int\limits_{y_0}^{y_4} B_2^{'}(y)B_0^{'}(y)dy = -\frac{9}{32h_2}, \int\limits_{y_0}^{y_4} B_l^{'}(y)B_1^{'}(y)dy = -\frac{9}{32h_2},$$

$$\int\limits_{y_0}^{y_4} B_2^{'}(y)B_3^{'}(y)dy = \frac{-9}{32h_2}, \int\limits_{y_0}^{y_4} B_l^{'}(y)B_3^{'}(y)dy = \frac{-9}{20h_2}, \int\limits_{y_0}^{y_4} B_l^{'}(y)B_5^{'}(y)dy = \frac{-3}{160h_2},$$

Երրորդ ինտեգրալի համար

$$\int\limits_{x_0}^{x_4} B_2(x)B_0(x)dx = \frac{121h_1}{2240}, \int\limits_{x_0}^{x_4} B_2(x)B_1(x)dx = \frac{1991h_1}{2240}$$

$$\int\limits_{x_0}^{x_4} B_2(x)B_3(x)dx = \frac{1991h_1}{2240}, \int\limits_{x_0}^{x_4} B_2(x)B_4(x)dx = \frac{3h_1}{56}, \int\limits_{x_0}^{x_4} B_2(x)B_5(x)dx = \frac{h_1}{2240}$$

$$\int\limits_{y_0}^{y_4} B_2^{''}(y)B_0^{''}(y)dy = -\frac{3}{8h_1^2}, \int\limits_{y_0}^{y_4} B_2^{''}(y)B_1^{''}(y)dy = -\frac{27}{8h_2^3}$$

$$\int_{y_0}^{y_4} B_2''(y)B_3''(y)dy = -\frac{27}{8h_2^3}, \ \int_{y_0}^{y_4} B_2''(y)B_4''(y)dy = 0, \ \int_{y_0}^{y_4} B_2''(y)B_5''(y)dy = \frac{3}{8h_2^3}$$

3. $k = M-2, l = N-2$ Քանի որ բազիսային ֆունկցիաները սիմետրիկ են, ապա այդ դեպքում կատարվում են նույն հաշվարկները, ինչ նախորդ կետում:

Հաշվի առնելով նախորդիվ հաշվարկված ինտեգրալները, ինչպես նաև Դիրիխլեի և Նեյմանի եզրային պայմանները, կստանանք հետևյալ հավասարումների համակարգը. Դիրիխլեի եզրային պայմաններ.

$$\begin{cases} u_{00} + \frac{5}{16}(u_{01} + u_{10}) + \frac{1}{16}u_{11} & = 0 \\ u_{M0} + \frac{5}{16}(u_{M1} + u_{M-1,0}) + \frac{1}{16}u_{M-1,1} & = 0 \\ u_{0N} + \frac{5}{16}(u_{1N} + u_{0,N-1}) + \frac{1}{16}u_{N-1,1} & = 0 \\ u_{MN} + \frac{5}{16}(u_{M-1,N} + u_{M,N-1}) + \frac{1}{16}u_{M-1,N-1} & = 0 \end{cases} \tag{27}$$

Նեյմանի եզրային պայմաններ.

$$\begin{cases} \frac{3}{4h_2}\left(u_{i1} - u_{i0}\right) + \frac{3}{16h_2}\left(u_{i-1,0} + u_{i+1,0} + u_{i-1,1} + u_{i+1,1}\right) & = 0 \\ \frac{3}{4h_2}\left(u_{iN} - u_{i,N-1}\right) + \frac{3}{16h_2}\left(u_{i-1,N-1} + u_{i+1,N-1} + u_{i-1,N-1} + u_{i+1,N-1}\right) & = 0 \\ \frac{3}{4h_1}\left(u_{1j} - u_{0j}\right) + \frac{3}{16h_1}\left(u_{0,j-1} + u_{0,j+1} + u_{1,j-1} + u_{1,j+1}\right) & = 0 \\ \frac{3}{4h_1}\left(u_{Mj} - u_{M-1,j}\right) + \frac{3}{16h_1}\left(u_{M-1,j-1} + u_{M-1,j+1} + u_{M-1,j-1} + u_{M-1,j+1}\right) & = 0 \end{cases} \tag{28}$$

Մինիմումի պայմաններ.

$$\left(\begin{bmatrix} 3/8h_1^2 \\ 0 \\ -27/8h_1^3 \\ 6/h_1^3 \\ -27/8h_1^3 \\ 0 \\ 3/8h_1^2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} h_2/2240 \\ 3h_2/56 \\ 1991h_2/2240 \\ 151h_2/140 \\ 1991h_2/2240 \\ 3h_2/56 \\ h_2/2240 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3/160h_1 \\ -9/20h_1 \\ -9/32h_1 \\ 3/2h_1 \\ -9/32h_1 \\ -9/20h_1 \\ -3/160h_1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3/160h_1 \\ -9/20h_1 \\ -9/32h_1 \\ 3/2h_1 \\ -9/32h_1 \\ -9/20h_1 \\ -3/160h_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_2/2240 \\ 3h_2/56 \\ 1991h_2/2240 \\ 151h_2/140 \\ 1991h_2/2240 \\ 3h_2/56 \\ h_2/2240 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3/8h_1^2 \\ 0 \\ -27/8h_1^3 \\ 6/h_1^3 \\ -27/8h_1^3 \\ 0 \\ 3/8h_1^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_{k-3,l-3} & u_{k-2,l-3} & u_{k-1,l-3} & u_{k,l-3} & u_{k+1,l-3} & u_{k+2,l-3} & u_{k+3,l-3} \\ u_{k-3,l-2} & u_{k-2,l-2} & u_{k-1,l-2} & u_{k,l-2} & u_{k+1,l-2} & u_{k+2,l-2} & u_{k+3,l-2} \\ u_{k-3,l-1} & u_{k-2,l-1} & u_{k-1,l-1} & u_{k,l-1} & u_{k+1,l-1} & u_{k+2,l-1} & u_{k+3,l-1} \\ u_{k-3,l} & u_{k-2,l} & u_{k-1,l} & u_{k,l} & u_{k+1,l} & u_{k+2,l} & u_{k+3,l} \\ u_{k-3,l+1} & u_{k-2,l+1} & u_{k-1,l+1} & u_{k,l+1} & u_{k+1,l+1} & u_{k+2,l+1} & u_{k+3,l+1} \\ u_{k-3,l+2} & u_{k-2,l+2} & u_{k-1,l+2} & u_{k,l+2} & u_{k+1,l+2} & u_{k+2,l+2} & u_{k+3,l+2} \\ u_{k-3,l+3} & u_{k-2,l+3} & u_{k-1,l+3} & u_{k,l+3} & u_{k+1,l+3} & u_{k+2,l+3} & u_{k+3,l+3} \end{bmatrix} = \frac{2}{9}h_1h_2\left[f_{k-1,l} + 2f_{k,l} + f_{k+1,l}\right]\left[f_{k,l-1} + 2f_{k,l} + f_{k,l+1}\right] \tag{29}$$

=$k = 2, M-2$, ինչպես նաև $l = 2, N-2$ -ի համար կազմվում է նույն հավասարումը, փոխելով միայն համապատասխան գործակիցները և դրանց քանակը:

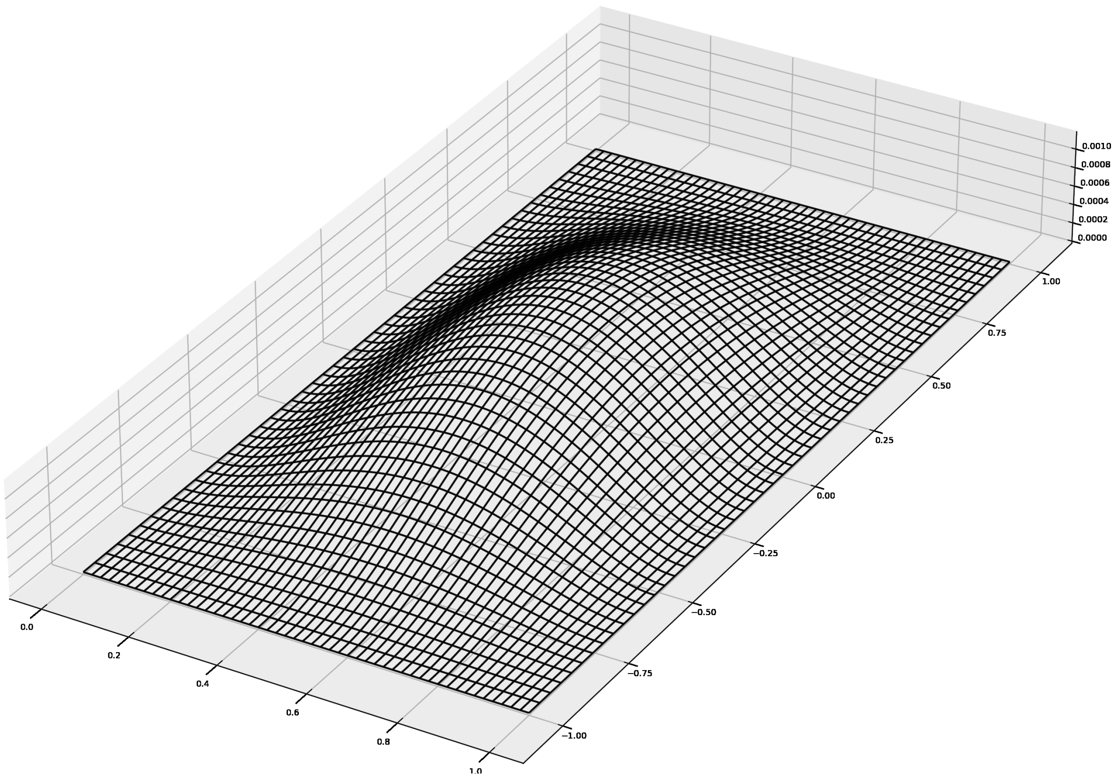
Ծրագրային իրականացում

Ինչպես Պուասոնի հավասարման դեպքում, այնպես էլ այս դեպքում կօգտվենք նույն գործիքներից: Որպես օրինակ լուծենք հետևյալ հավասարումը տրված կոնկրետ տիրույթով և f ֆունկցիայով:

$$\begin{cases} \Delta^2 u & = 1 \\ u\Big|_{\partial D} & = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial D} & = 0 \end{cases}$$

որտեղ $D = [0, 1] \times [-1, 1]\,,\ h_1 = 0.01, h_2 = 0.02$:

Խնդրի համար ստացված լուծումը.



Նկար 4.3. Բիհարմոնիկ հավասարման լուծման գրաֆիկական ներկայացում: