Ներածություն

Հերմիթյան ինտերպոլյացիա

Նախքան անդրադառնալը բազմաչափ ինտերպոլյացիայի խնդրին, քննարկենք մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի ինտերպոլյացիայի որոշ դետալներ:

Ենթադրենք տրված են $f : A \mapsto B, A, B \subset \mathbb{R}$ ֆունկցիան, $\{x_i\}_{i=0}^N$ կետերը և դրանց համապատասխան $\{y_i = f(x_i)\}_{i=0}^N$ արժեքները: Յուրաքանչյուր $[x_i, x_{i+1}]$ հատվածում ինտերպո ֆունկցիան իրենից ներկայացնում է գծային ֆունկցիա, որը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$p_1^{(i)}(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} y_i + \frac{x - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1}, i = \overline{0, N-1}$$

Այսպիսով $[x_0, x_N]$ հատվածում կտոր առ կտոր մոտարկող ֆունկցիան տրվում է հետևյալ կերպ.

$$p_1(x) = \sum_{i=0}^{N} \varphi_i(x) y_i$$

Որտեղ

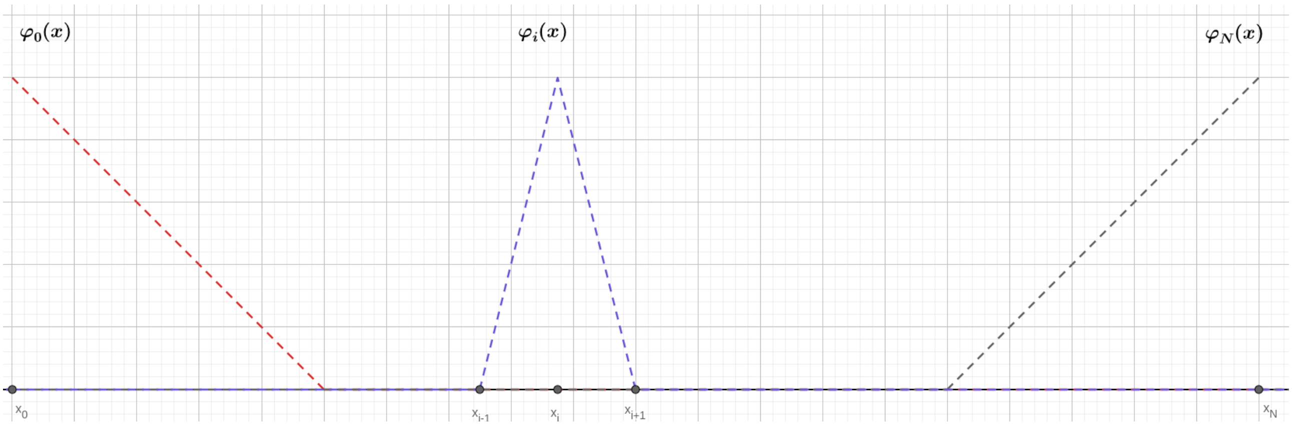
$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, x \in [x_0, x_1] \\ 0, x \in [x_1, x_N] \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, x \in [x_0, x_{i-1}] \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, x \in [x_{i+1}, x_N] \end{cases}$$

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} 0, x \in [x_0, x_{N-1}] \\ \dfrac{x - x_{N-1}}{x_N - x_{N-1}}, x \in [x_{N-1}, x_N] \end{cases}$$

$\varphi_i(x)$ ֆունկցիաները կոչվում են բազիսային ֆունկցիաներ, որոնք ունեն այսպես կոչված լոկալ կրողներ, քանի որ դրանք ոչ զրոյական են որևէ տիրույթում և զրոյական որոշման տիրույթի մնացած մասերում: Նշենք սակայն, որ այս տիպի ինտերպոլյացիան C^0 դասի է, այսինքն միայն անընդհատ է, և հետևաբար կիրառելի չէ այն խնդիրներում, որտեղ պահանջվում է ավելի բարձր կարգի ողորկություն: Նմանատիպ բազիսային ֆունկցիան հիմնական հատկությունն այն է, որ դրանք հավասար են մեկի որևէ կոնկրետ հանգույցում և հավասար են զրոյի մնացած բոլոր հանգույցներում:

Ստորև տրված է բազիսային ֆունկցիաների սխեմատիկ ներկայացում.



Նկար 1

Այժմ դիտարկենք հետևյալ խնդիրը. Անհրաժեշտ է կառուցել կտոր առ կտեր մոտարկող ֆունկցիա, որը ֆունկցիայի արժեքի հետ մեկտեղ կհամընկնի նաև ֆունկցիայի առաջին կարգի ածանցյալի հետ ինտերպոլյացիոն կետերում: Այսինքն.

$$\frac{d^j}{dx^j}f(x_i) = \frac{d^j}{dx^j}p_3(x_i),\ j=0,1;\ i=\overline{0,N-1}$$

Յուրաքանչյուր $[x_i, x_{i+1}]$ հատվածում ինտերպոլյացիոն ֆունկցիան իրենից ներկայացնում է խորանարդային ֆունկցիա, որը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով:

$$p_3^{(i)} = \alpha_i(x)f(x_i) + \beta_{i+1}(x)f(x_{i+1}) + \gamma_i(x)f^{'}(x_i) + \delta_{i+1}(x)f^{'}(x_{i+1})$$

որտեղ

$$\alpha_i(x) = \frac{(x_{i+1}-x)^2\left[(x_{i+1}-x_i)+2\,(x-x_i)\right]}{(x_{i+1}-x_i)^3}, \beta_{i+1}(x) = \frac{(x-x_i)^2\left[(x_{i+1}-x_i)+2\,(x_{i+1}-x)\right]}{(x_{i+1}-x_i)^3}$$

$$\gamma_i(x) = \frac{(x-x_i)\,(x_{i+1}-x)^2}{(x_{i+1}-x_i)^2}, \delta_{i+1}(x) = \frac{(x-x_i)^2\,(x-x_{i+1})}{(x_{i+1}-x_i)^2}$$

Այսպիսով $[x_0, x_N]$ հատվածում կտոր առ կտոր մոտարկող ֆունկցիան տրվում է հետևյալ կերպ.

$$p_3(x) = \sum_{i=0}^{N}\left[\varphi_i^{(0)}f(x_i) + \varphi_i^{(1)}f^{'}(x_i)\right]$$

որտեղ

$$\varphi_0^{(0)}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x_1-x)^2\left[(x_1-x_0)+2\,(x-x_0)\right]}{(x_1-x_0)^3}, x\in[x_0,x_1] \\ 0, x\in[x_1,x_N] \end{cases}$$

$$\varphi_i^{(0)}(x) = \begin{cases} 0, x\in[x_0,x_{i-1}] \\ \dfrac{(x-x_{i-1})^2\left[(x_i-x_{i-1})+2\,(x_i-x)\right]}{(x_i-x_{i-1})^3}, x\in[x_{i-1},x_i] \\ \dfrac{(x_{i+1}-x)^2\left[(x_{i+1}-x_i)+2\,(x-x_i)\right]}{(x_{i+1}-x_i)^3}, x\in[x_i,x_{i+1}] \\ 0, x\in[x_{i+1},x_N] \end{cases}$$

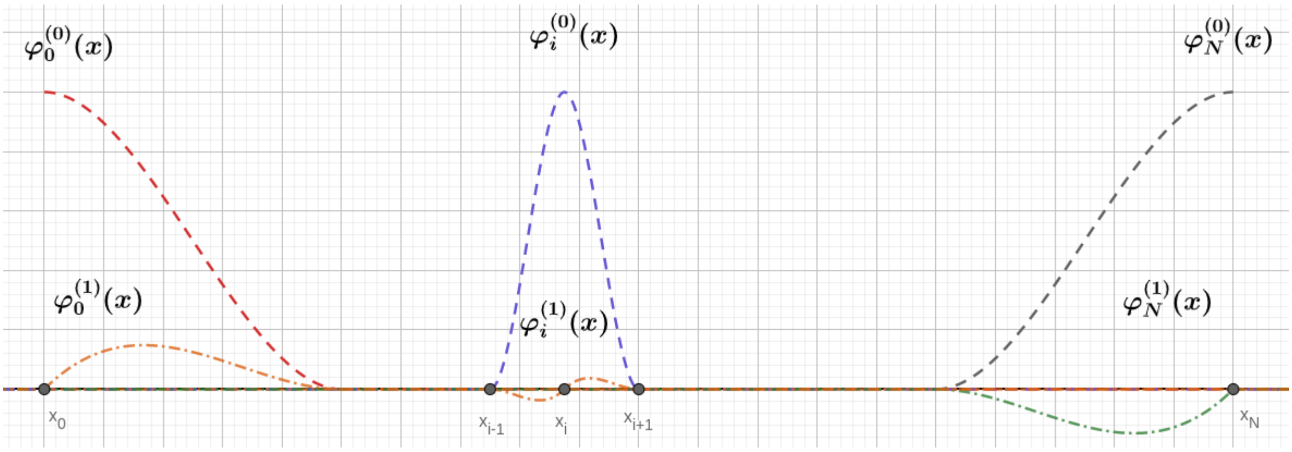
$$\varphi_N^{(0)}(x) = \begin{cases} 0, x\in[x_0,x_{N-1}] \\ \dfrac{(x-x_{N-1})^2\left[(x_N-x_{N-1})+2\,(x_N-x)\right]}{(x_N-x_{N-1})^3}, x\in[x_{N-1},x_N] \end{cases}$$

$$\varphi_0^{(1)}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-x_0)(x_1-x)^2}{(x_1-x_0)^2}, x \in [x_0, x_1] \\ 0, x \in [x_1, x_N] \end{cases}$$

$$\varphi_i^{(1)}(x) = \begin{cases} 0, x \in [x_0, x_{i-1}] \\ \dfrac{(x-x_{i-1})^2 (x-x_i)}{(x_i-x_{i-1})^2}, x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{(x-x_i)(x_{i+1}-x)^2}{(x_{i+1}-x_i)^2}, x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, x \in [x_{i+1}, x_N] \end{cases}$$

$$\varphi_N^{(1)}(x) = \begin{cases} 0, x \in [x_0, x_{N-1}] \\ \dfrac{(x-x_{N-1})^2 (x-x_N)}{(x_N-x_{N-1})^2}, x \in [x_{N-1}, x_N] \end{cases}$$

Ստորև տրված է բազիսային ֆունկցիաների սխեմատիկ ներկայացում.



Նկար 2

Ընդհանուր դեպքում Հերմիթյան ինտերպոլյացիայի պայմանը կարելի է գրել հետևյալ կերպ.

$$\frac{d^k}{dx^k} f(x_i) = \frac{d^k}{dx^k} p_{2m-1}(x_i), \ i = \overline{0, N}, \ k = \overline{0, m-1}$$

Խորանարդային ինտերպոլյացիա

Խնդիրներում, որտեղ անհրաժեշտ է որոշել միայն տրված ֆունկիցիան, ֆունկցիայի ածանցյալներն ինտերպոլացնելու փոխարեն դրվում է դրանց անընդհատության պայման բազիսային ֆուկցիաների միացման կետերում, բավականին հեշտացնելով դրված խնդիրը և դրա լուծումը:

Երկչափ մոտարկում

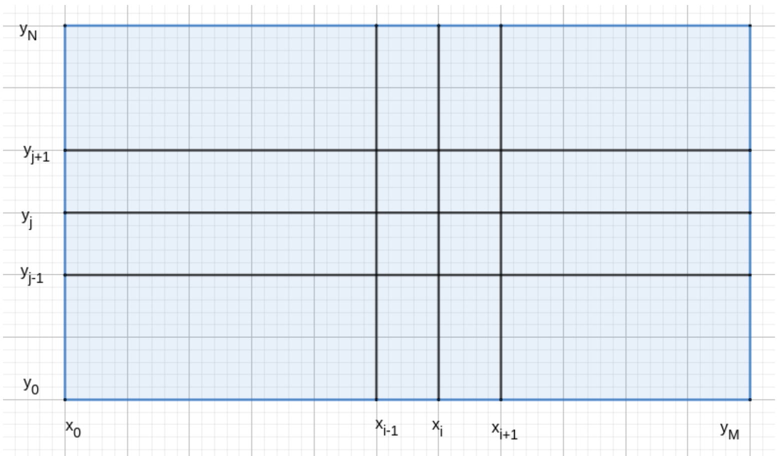
Այժմ դիտարկենք երկու փոփոխականի կտոր առ կտոր անընդհատ մոտարկման խնդիրը ∂R եզրով սահմանափակ R տիրույթում: Տիրույթը տրոհվում է որոշակի թվով էլեմենտների: Կախված R տիրույթից, առանձնացվում են հետևյալ մոտակման ձևերը.

Ուղղանկյուն տիրույթ

C^0 մոտարկում

Դիցուք տրված են $f : \Omega \mapsto B$, $B \subset \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = [x_0, x_M] \times [y_0, y_M]$, ուղղանկյուն տիրույթը, որը տրոհված է $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, ուղղանկյուն էլեմենտների:

$$x_{i+1} - x_i = h_1,\ y_{j+1} - y_j = h_2,\ i = \overline{0, M-1}, j = \overline{0, N-1}$$



Նկար 3

Յուրաքանչյուր $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ էլեմենտի վրա f ֆունկցիան մոտարկվում հետևյալ քառակուսային ֆունկցիայով:

$$p_1^{(i,j)}(x, y) = \alpha_{i,j}(x, y) f(x_i, y_j) + \beta_{i+1,j}(x, y) f(x_{i+1}, y_j) + \gamma_{i,j+1}(x, y) f(x_i, y_{j+1}) + \delta_{i+1,j+1}(x, y) f(x_{i+1}, y_{j+1})$$

որտեղ

$$\alpha_{i,j}(x, y) = \frac{1}{h_1 h_2}\left(x_{i+1} - x\right)\left(y_{j+1} - y\right)$$

$$\beta_{i+1,j}(x, y) = \frac{1}{h_1 h_2}\left(x - x_i\right)\left(y_{j+1} - y\right)$$

$$\gamma_{i,j+1}(x, y) = \frac{1}{h_1 h_2}\left(x_{i+1} - x\right)\left(y - y_j\right)$$

$$\delta_{i+,j+1}(x, y) = \frac{1}{h_1 h_2}\left(x - x_i\right)\left(y - y_j\right)$$

Այսպիսով $[x_0, x_M]\times[y_0, y_M]$ տիրույթում կտոր առ կտոր մոտարկող ֆունկցիան տրվում է հետևյալ կերպ.

$$p_1(x,y) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\varphi_{i,j}(x,y)f(x_i,y_j)$$

որտեղ

$$\varphi_{i,j}\left(x,y\right) = \begin{cases} \frac{1}{h_1h_2}\left(x-x_{i-1}\right)\left(y-y_{j-1}\right), (x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j] \\ \frac{1}{h_1h_2}\left(x-x_{i-1}\right)\left(y_{j+1}-y\right), (x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_j,y_{j+1}] \\ \frac{1}{h_1h_2}\left(x_{i+1}-x\right)\left(y-y_{j-1}\right), (x,y)\in[x_i,x_{i+1}]\times[y_{j-1},y_j] \\ \frac{1}{h_1h_2}\left(x_{i+1}-x\right)\left(y_{j+1}-y\right), (x,y)\in[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}] \\ 0, otherwise \end{cases}$$

Վերը դիտարկված մոտարկումը հանդիսանում է երկչափ Հերմիթյան մոտարկման մասնավոր դեպք:

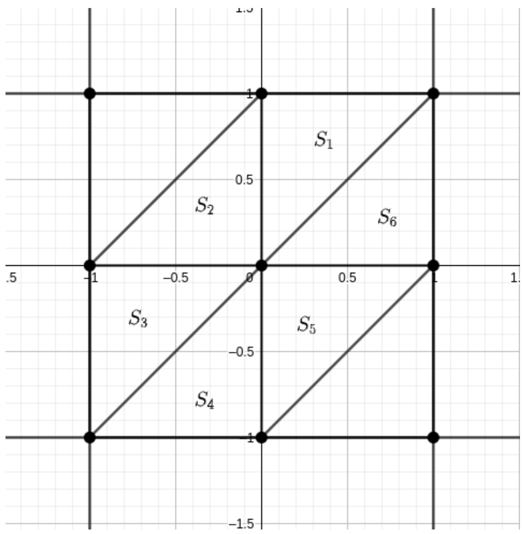
Ընդհանուր դեպքում, տրված $k\in\mathbb{N}$ թվի և տրված ուղղանկյուն տիրույթի ցանկացած ուղղանկյունաձև տրոհման էլեմենտում կարելի է կառուցել $C^{k-1,k-1}$ կարգի մոտարկող բազմանդամ, որը $2k-1$ -րդ կարգի բազմանդամ է ըստ իր յուրաքանչյուր փոփոխականի և, ինտերպոլյացիայի պայմանները կարելի է գրել հետևյալ կերպ.

$$\frac{d^{p+q}}{dx^pdy^q}f(x_i,y_j) = \frac{d^{p+q}}{dx^pdy^q}p_{2k-1}(x_i,y_j)$$
$$p,q=\overline{0,k-1};\ i=\overline{0,M};\ j=\overline{0,N}$$

Այժմ դիտարկենք ուղղանկյուն տիրույթը տրոհման մեկ այլ տարբերակ: Այս դեպքում տիրույթը տրոհենք ըստ նախորդ տարբերակի, ի հավելումն յուրաքանչյուր ուղղանկյուն էլէմենտ տրոհելով երկու ուղղանկյուն եռանկյունների.

դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան.

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} 1-y, & (x,y) \in S_1 \\ 1-x+y, & (x,y) \in S_2 \\ 1+x, & (x,y) \in S_3 \\ 1+y, & (x,y) \in S_4 \\ 1-x+y, & (x,y) \in S_5 \\ 1-x, & (x,y) \in S_6 \\ 0, otherwise \end{cases}$$



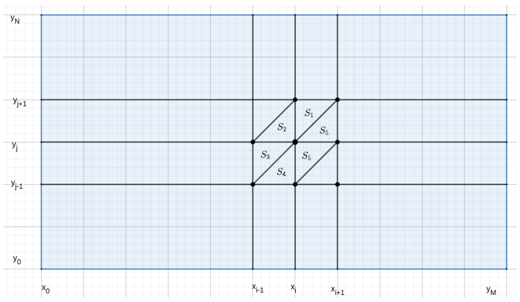
Նկար 4

Պարզ է, որ այն յուրաքանչյուր ուղղանկյուն էլեմենտում $C^{(0,0)}$ ֆունկցիա է:
Այժմ յուրաքանչյուր x_i, y_j կետի վրա կառուցենք հետևյալ ֆունկցիան.

$$\varphi_{i,j}(x,y) = \varphi\left(\frac{x-x_i}{h_1}, \frac{y-y_j}{h_2}\right)$$

Այդ դեպքում f ֆունկցիայի մոտարկման բանաձևը կտվրի հետևյալ կերպ:

$$p_1(x,y) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} \varphi_{i,j}(x,y) f(x_i, y_j)$$



Նկար 5