

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Կիրառական մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի ֆակուլտետ

Բազմաչափ մոտարկման ալգորիթմների մշակում և կիրառում

Խումբ՝ ՄԹ 940-2
Ուսանող՝ Կամո Սևոյան
Ղեկավար՝ ֆ.մ.գ.դ. Արմենակ Բաբայան

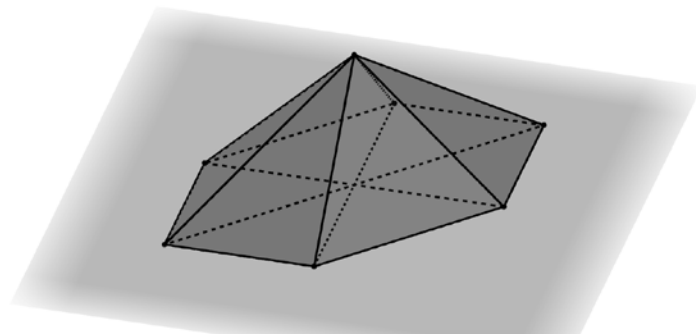
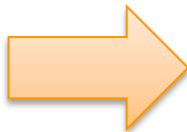
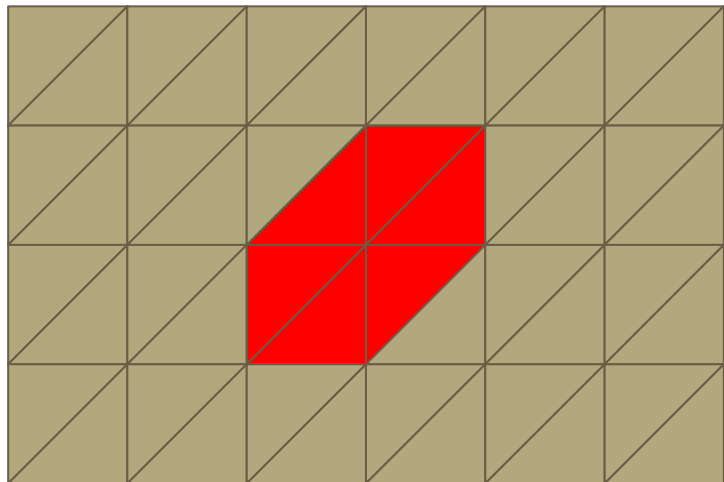
ԵՐԵՎԱՆ 2023

Խնդրի դրվածքը

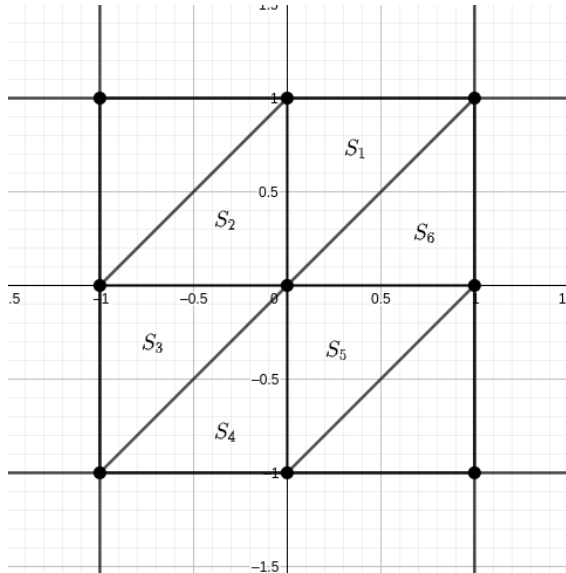
Կառուցել մոտարկման բանաձև երկու փոփոխականի ֆունկցիաների համար:
Մոտարկման բանաձևերը պետք է ապահովեն պահանջվող կարգի
դիֆերենցելիություն: Կառուցումը կատարել ուղղանկյուն և եռանկյուն տարրերի
վրա: Կառուցված բանաձևերը կիրառել Պուլասոնի և բիհարմոնիկ
հավասարումների համար Դիրիխլեյի խնդիրները վարիացիոն մեթոդով լուծելու
համար:

Համասեռ տարրերով մոտարկում

Տիրույթը հավասար քայլերով տրոհվում է ուղղանկյուն եռանկյունների: Կառուցվում է Կուրանտի բազիսային ֆունկցիան: Թույլ է տալիս կառուցել անընդհատ մոտարկում:



Կուրանտի ֆունկցիա

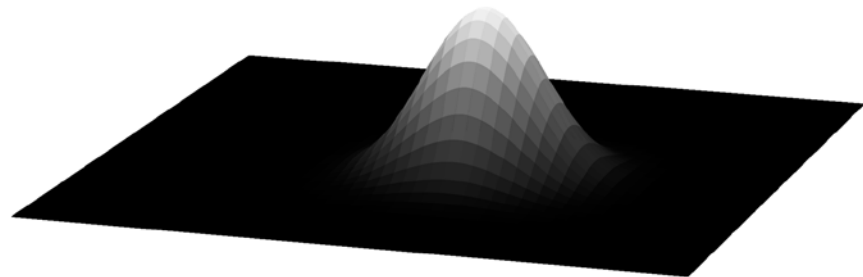
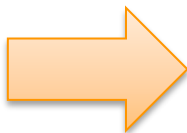
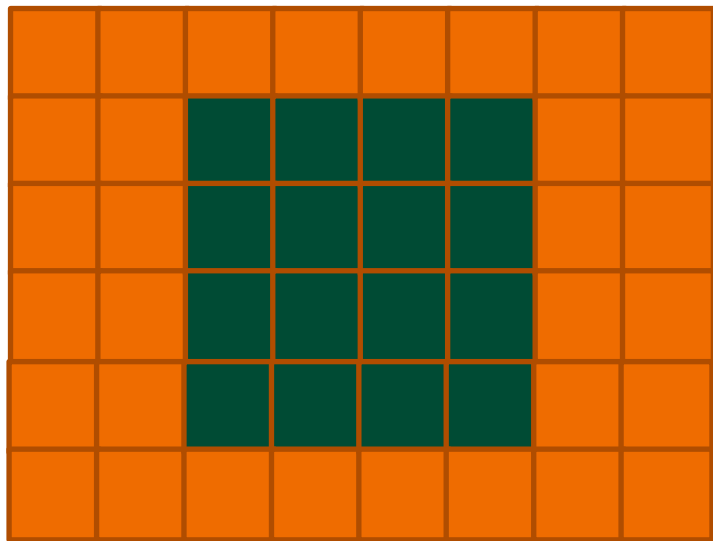


$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1 - y, & (x, y) \in S_1 \\ 1 + x - y, & (x, y) \in S_2 \\ 1 + x, & (x, y) \in S_3 \\ 1 + y, & (x, y) \in S_4 \\ 1 - x + y, & (x, y) \in S_5 \\ 1 - x, & (x, y) \in S_6 \\ 0, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

$$\varphi^{(i,j)}(x, y) = \varphi\left(\frac{x - x_i}{h_1}, \frac{y - y_j}{h_2}\right)$$

Համասեռ տարրերով մոտարկում

Տիրույթը հավասար քայլերով տրոհվում է ուղղանկյունների: Կառուցվում է երկխորանարդային սխեմայի թեկզորական արտադրյալի միջոցով:



Երկխորանարդային սփլայն

Թույլ է տալիս իրականացնել երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի մոտարկում:

$$\gamma(x) = \frac{1}{4} \left(\{x+2\}_+^3 - 4\{x+1\}_+^3 + 6\{x\}_+^3 - 4\{x-1\}_+^3 + \{x-2\}_+^3 \right)$$

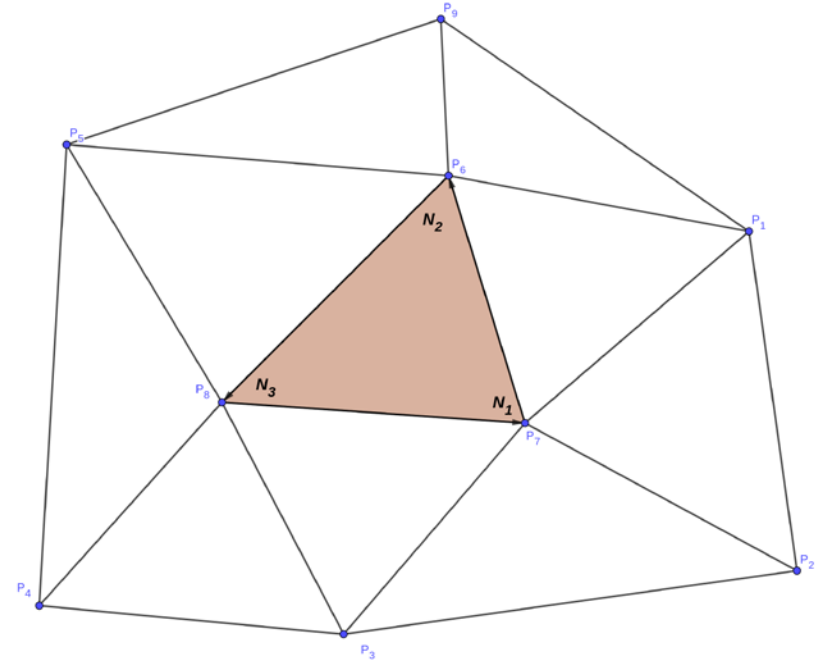
$$\varphi^{(i,j)}(x,y) = \gamma\left(\frac{x-x_i}{h_1}\right) \gamma\left(\frac{y-y_j}{h_2}\right) \quad \{x\}_+ = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Մոտարկում եռանկյուններով

Տիրույթը տրոհվում է եռանկյուն էլեմենտների
(օրինակ Դելոնեի եռանկյունացում)

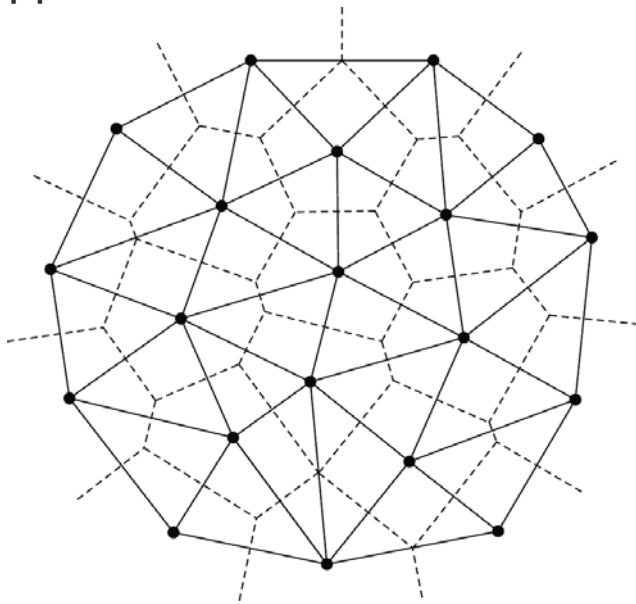
Գագաթները համարակալվում են ընդհանուր
տիրույթի և ամեն եռանկյան համար:

Եռանկյան մեջ համարակալումը կատարվում
է ժամսլաքի հակառակ ուղղությամբ:



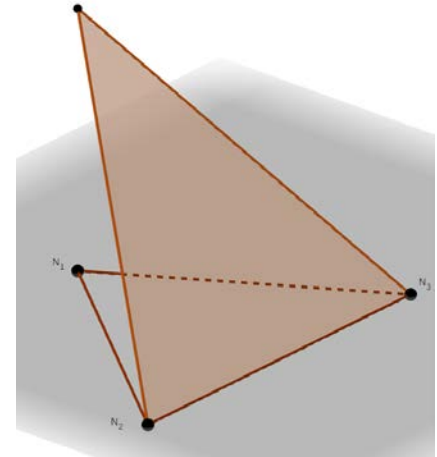
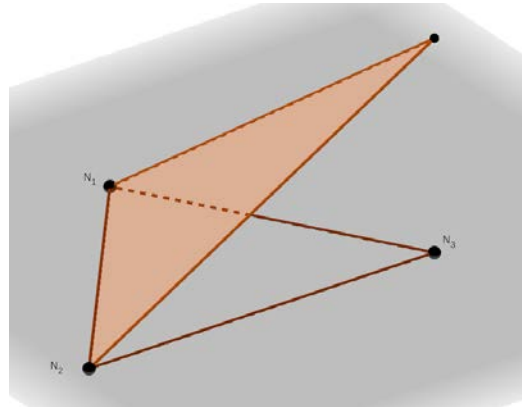
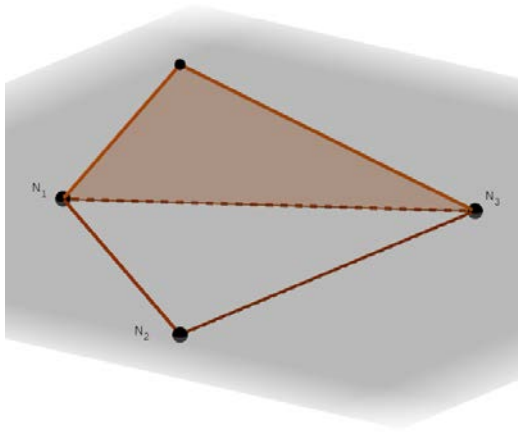
Դելտանի եռանկյունացում

Եռանկյունացումը կատարվում է այնպես, որ եռանկյունները մոտ են կանոնավոր եռանկյունների:



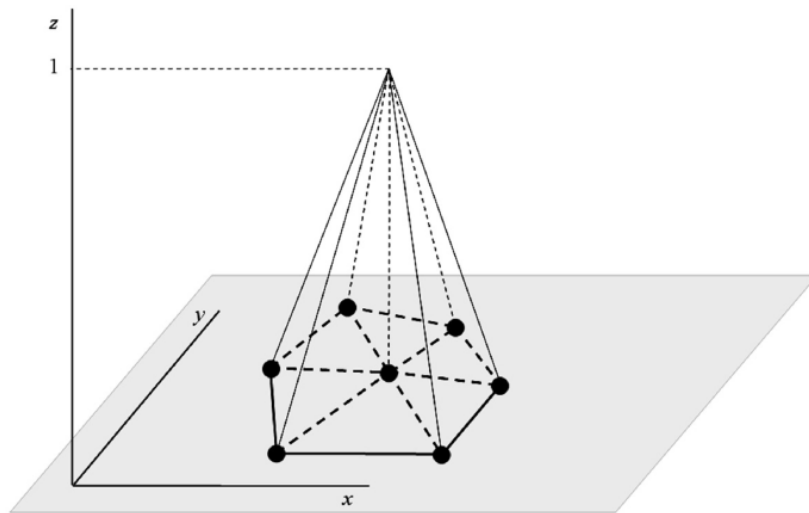
Ոչ համասեռ տարրերով մոտարկում

Յուրաքանչյուր եռանկյան վրա կառուցվում են գծային բազիսային ֆունկցիաներ: Յուրաքանչյուր գագաթի բազիսային ֆունկցիան կազմված է իրեն պարունակող եռանկյունների բազիսների միավորումից:



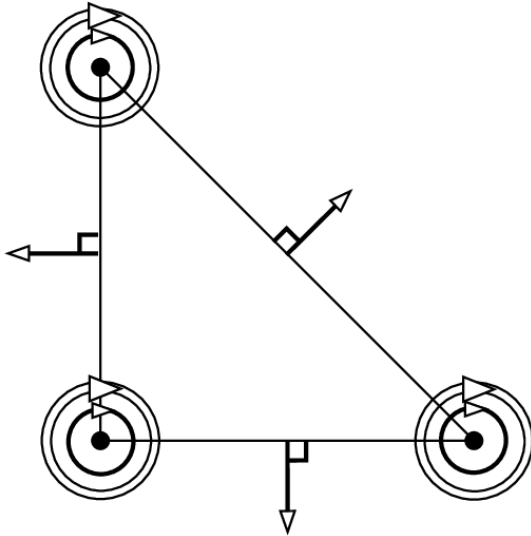
Ոչ համասեռ տարրերով մոտարկում

Այն թույլ է տալիս կատարել անընդհատ մոտարկում



Մոտարկում եռանկյուններով

Անընդհատ դիֆերենցելի մոտարկում եռանկյունացման վրա:
Արգիրիսի մոտարկում:



Գագաթների վրա մոտարկում է միևնույն կարգի բոլոր ածանցյալները ներառյալ, միջնակետերում՝ նորմալ ածանցյալը: Մոտարկման աստիճանը 5-րդ կարգի:

Պոլասոնի հավասարում

Վարիացիոն մեթոդի օգնությամբ հավասարումը բերվում է հետևյալ ֆունկցիոնալի մինիմումի որոնման խնդրի: Կարող ենք օգտվել կտոր առ կտոր դիֆերենցելի մոտարկումից:

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u|_{\partial D} = 0 \end{cases} \implies \frac{1}{2} \iint_D [u_x^2 + u_y^2] dx dy + \iint_D f u dx dy \longrightarrow \min$$

Մեթոդը թույլ է տալիս կտոր առ կտոր անընդհատ ֆունկցիաներով մոտարկել հավասարման լուծումը:

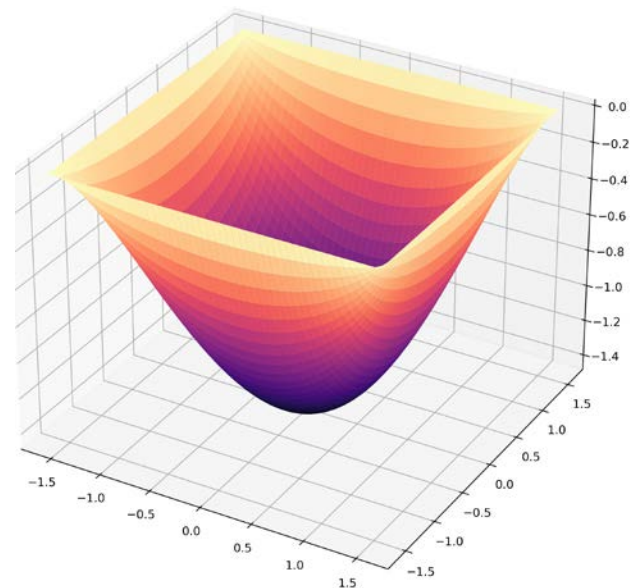
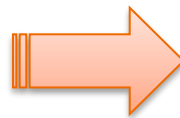
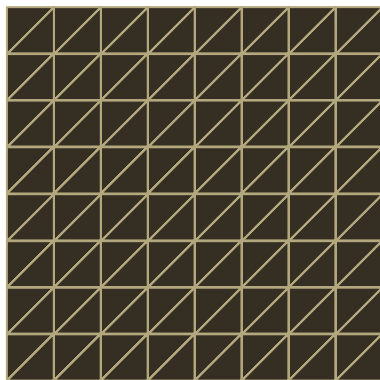
$$u(x, y) \approx \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \varphi^{(ij)}(x, y)$$

Պոլասոնի հավասարում

Թվային լուծում.

$$\begin{cases} \Delta u = 2 \\ u|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

$$D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^2$$

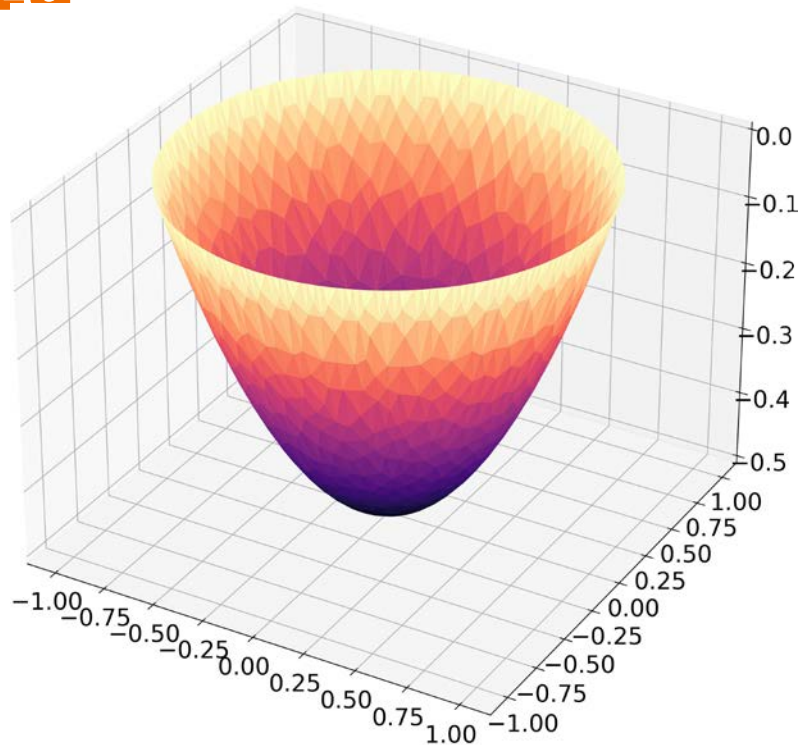
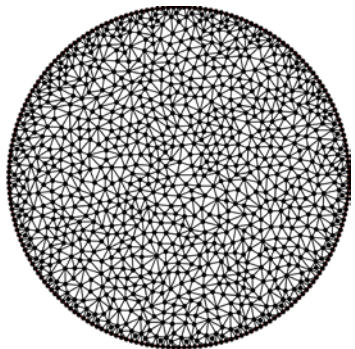


Պոլասոնի հավասարում

Թվային լուծում.

$$\begin{cases} \Delta u = 2 \\ u|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

$$D = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1\}$$



Բիհարմոնիկ հավասարում

Վարիացիոն մեթոդի օգնությամբ հավասարումը բերվում է հետևյալ ֆունկցիոնալի մինիմումի որոնման խնդրի: Անհրաժեշտ է դիֆերենցելի մոտարկում:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 u = f \\ u|_{\partial D} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{1}{2} \iint_D [u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2] dx dy - \iint_D f u dx dy \rightarrow \min$$

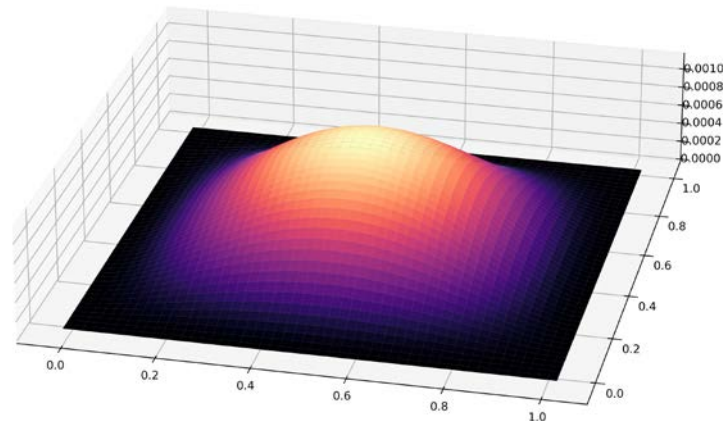
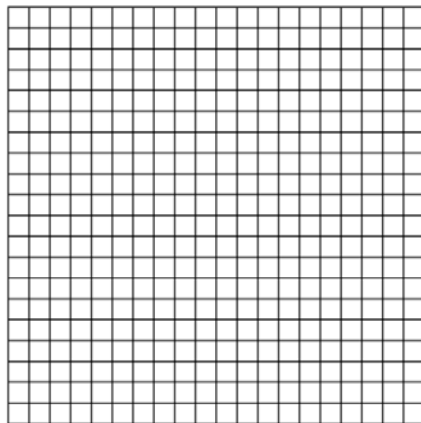
$$u(x, y) \approx \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \varphi^{(ij)}(x, y)$$

Բիհարմոնիկ հավասարում

Թվային լուծում.

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 1 \\ u|_{\partial D} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

$$D = [0,1]^2$$

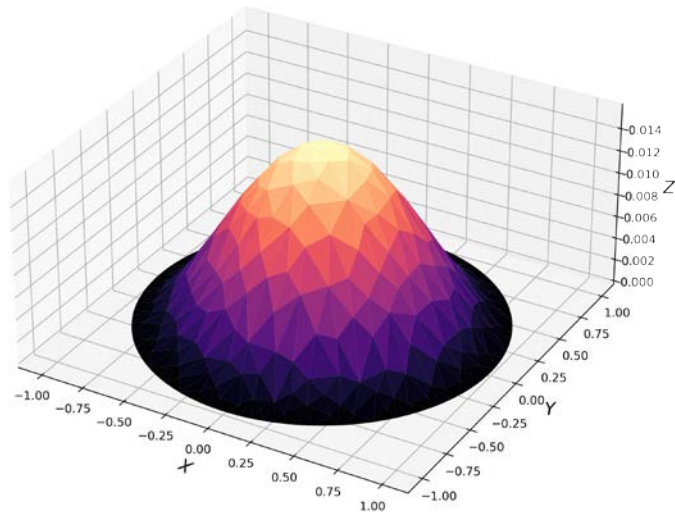
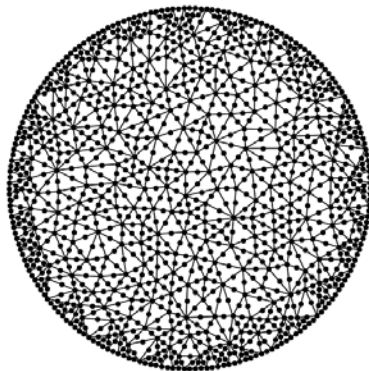


Բիհարմոնիկ հավասարում

Թվային լուծում.

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 1 \\ u|_{\partial D} = 0 \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

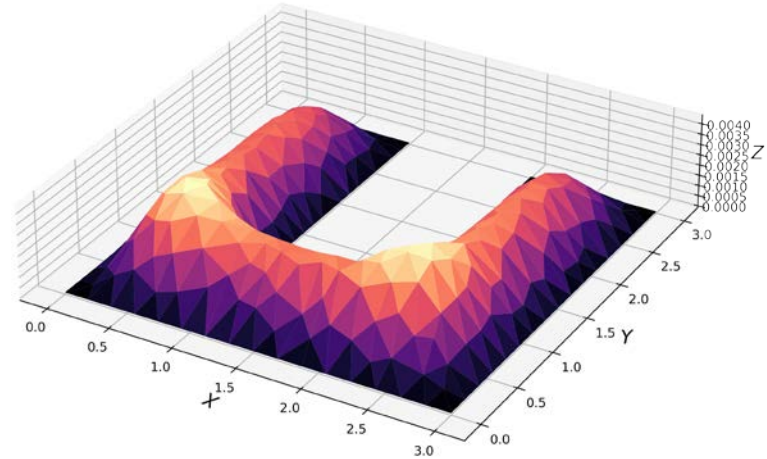
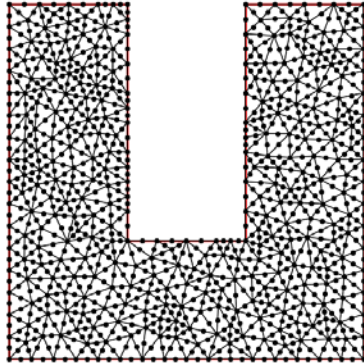
$$D = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1\}$$



Բիհարմոնիկ հավասարում

Թվային լուծում.

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 1 \\ u|_{\partial D} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$



Շնորհակալություն