3-ИЙ ОТЧЁТ ПО ПРАКТИКУМУ

Кязыми Кямран Искендер оглу

Баку — 2016

1 Постановка задачи

Рассматривается движение материальной точки в вертикальной плоскости в однородном поле сил тяжести и в однородной сопротивляющейся среде. Уравнения движения материальной точки в безразмерных переменных:

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\theta \\ \dot{y} = v\sin\theta \\ \dot{v} = -f(v) - \sin\theta \end{cases} \tag{1}$$

С начальными условиями:

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad v(0) = v_0, \quad x(T) = x_T, \quad y(T) = y_T$$

$v(T)$ – свободен.

Целью уравнения является минимизация функционала $J = T \to \min\limits_{\theta}$

2 Сведение задачи оптимального управления к краевой задаче. Принцип максимума Понтрягина.

Выпишем функции Понтрягина:

$$H = \psi_x v\cos\theta + \psi_y v\sin\theta + \psi_v(-f(v) - \sin\theta)$$

$$l = \lambda_{x0}x(0) + \lambda_{y0}y(0) + \lambda_{v0}v(0) + \lambda_{xT}x(T) + \lambda_{yT}y(T) + \lambda_0 T$$

Применим к задаче оптимального управления (1) принцип максимума Понтрягина. Необходимые условия оптимальности:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_x = 0 \\ \dot{\psi}_y = 0 \\ \dot{\psi}_v = f'(v)\psi_v - \psi_x\cos\theta - \psi_y\sin\theta \end{cases} \tag{2}$$

а) Условие трансверсальности

$$\begin{cases} \psi_x(0) = \frac{\partial l}{\partial x(0)} = \lambda_{x0} \\ \psi_y(0) = \frac{\partial l}{\partial y(0)} = \lambda_{y0} \\ \psi_v(0) = \frac{\partial l}{\partial v(0)} = \lambda_{v0} \\ \psi_x(T) = -\frac{\partial l}{\partial x(T)} = -\lambda_{xT} \\ \psi_y(T) = -\frac{\partial l}{\partial y(T)} = -\lambda_{yT} \\ \psi_v(T) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

так как $v(T)$ свободен.

б) условие оптимальности по управлению

$$H(\theta) = \cos\theta \cdot \psi_x v + \sin\theta \cdot (\psi_y v - \psi_v)\hat{\theta} = arg\ abs \max H(\theta) \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \upuparrows \quad \begin{pmatrix} \psi_x v \\ \psi_y v - \psi_v \end{pmatrix}$$

$$\rho = \sqrt{(\psi_x v)^2 + (\psi_y v - \psi_v)^2}$$

$$\cos\theta = \frac{\psi_x v}{\rho} \quad \sin\theta = \frac{\psi_y v - \psi_v}{\rho}$$

в) условие стационарности

$$H(T) = \frac{\partial l}{\partial T} = 1$$

3 Краевая задача на минимум

На основе принципа максимума Понтрягина решение задачи оптимального управления (1) сводится к решению краевой задачи. По условиям нормировки положим $\lambda_0 = 1$. Тогда:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{v^2\psi_x}{\rho} \\ \dot{y} = \frac{v^2\psi_y - v\psi_v}{\rho} \\ \dot{v} = -f(v) - \frac{\psi_y v - \psi_v}{\rho} \\ \dot{\psi}_v = f'(v)\psi_v - \frac{v\psi_x^2}{\rho} - \frac{v\psi_y^2 - \psi_y\psi_v}{\rho} \end{cases} \tag{5}$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad v(0) = v_0, \quad x(T) = x_T, \quad y(T) = y_T, \quad \psi_v(T) = 0.$$

$$H(T) = 1 \Longrightarrow H(0) = 1$$
$$\Downarrow$$
$$\psi_x v \tfrac{\psi_x v}{\rho} + \tfrac{(\psi_y v - \psi_v)^2}{\rho} + \psi_v f(v) = 1$$
$$\rho + \psi_v f(v) = 1 \Longrightarrow$$

4 Численное решение краевой задачи методом стрельбы.

Краевая задача решается численно методом стрельбы. В качестве параметров пристрелки выбираются недостающие для решения задачи Коши значения:
$\overrightarrow{\beta} := (\psi_x(0), \psi_y(0), \psi_v(0), T)$. Задаются эти значения каким-либо образом и решается задача Коши на отрезке $[0, T]$.

$$\begin{cases} x(T)[\overrightarrow{\beta}] - x_T = 0, \\ y(T)[\overrightarrow{\beta}] = 0, \\ \psi_v(T)[\overrightarrow{\beta}] = 0, \\ \{\rho(T) - \psi_v(T) f(v)(T)\}[\overrightarrow{\beta}] - 1 = 0 \end{cases}$$

решается численно методом Ньютона, с использованием формул Исаева-Сонина с нормировкой Фидоренко. Для $\overrightarrow{\beta} = (1, 1, 1, 5)$, т.е. $\psi_x(0) = 1, \psi_y(0) = 1, \psi_v(0) = 1, T = 5$, получаем следующие результаты:

Таблица 1.

$x(0)$	0.0000000000000000
$x(T)$	0.2202447746680990
$y(0)$	10.0000000000000000
$y(T)$	6.0309331715847536
$v(0)$	0.0000000000000000
$v(T)$	0.9927347427368552
$\psi_x(0)$	1.0000000000000000
$\psi_x(T)$	1.0000000000000000
$\psi_y(0)$	1.0000000000000000
$\psi_y(T)$	1.0000000000000000
$\psi_v(0)$	1.0000000000000000
$\psi_v(T)$	274.0343481176872729

Решение задачи Коши методом Рунге-Кутты. $T = 5$

Таблица 2: Оценка погрешности и сходимости

t	$y_1 - y_2$	$y_2 - y_3$	$\frac{y_1-y_2}{y_2-y_3}$
0.02	$-2 \cdot 10^{-15}$	0	256.1303113052976528
2.50	$-1.18522555 \cdot 10^{-8}$	$-1.257662 \cdot 10^{-9}$	94.2403861665936518
5.00	$-2.52649097 \cdot 10^{-8}$	$-2.367332 \cdot 10^{-10}$	106.7231418330321731

Таблица 3: Оценка глобальной погрешности

t	$\varepsilon = 10^{-7}$	$\varepsilon = 10^{-9}$	$\varepsilon = 10^{-11}$
0.02	$6.91443298 \cdot 10^{-8}$	$2.3979381 \cdot 10^{-9}$	0.0000000000450373
2.50	$1.7732318516 \cdot 10^{-6}$	$5.79088741 \cdot 10^{-8}$	$1.6140584 \cdot 10^{-9}$
5.00	$7.09603385270 \cdot 10^{-5}$	$3.815495214947 \cdot 10^{-4}$	$5.68919248 \cdot 10^{-8}$

Таблица 4: Отношение глобальных погрешностей

t	$\frac{\delta_1}{\delta_2}$	$\frac{\delta_2}{\delta_3}$
0.02	28.8349099212118922	53.2433344656183465
2.50	30.6210728326810582	35.8778057114952205
5.00	33.6130727915563696	37.1070846894302591

По условиям краевой задачи $\psi_v(T) = 0$. Используя метод продолжения решения по параметру, экспериментально была достигнута точка 0 с точностью до 10^{-9} методом Ньютона за 9 итераций:

Таблица 5.

$x(0)$	0.0000000000000000
$x(T)$	0.0727930732377216
$y(0)$	10.0000000000000000
$y(T)$	6.0309331715847652
$v(0)$	0.0000000000000000
$v(T)$	0.9927347427368546
$\psi_x(0)$	1.0000000000000000
$\psi_x(T)$	0.0338084007206934
$\psi_y(0)$	1.0000000000000000
$\psi_y(T)$	-1.0067509158113541
$\psi_v(0)$	1.0000000000000000
$\psi_v(T)$	-0.0000000015582136

Решение краевой задачи методом стрельбы. $T = 5, x_T = 0.0727930732377$

Содержание