БАКИНСКИЙ ФИЛИАЛ МГУ ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА

факультет прикладной математики
отделение магистратуры

Отчёт по специальному математическому и компьютерному практикуму

Численное решение задачи оптимального управления

Велиев Али Салман оглы

Баку, 2015 г.

1 Постановка задачи

Рассматривается задача оптимального управления с режимом особого управления первого порядка

$$\int_0^4 xe^{-\alpha x}dt \to extr \tag{1}$$

с начальным условием $x(0) + x(4) = 0$, при дополнительном ограничении $|\dot{x}| \leq 2$.

Требуется принципом максимума Понтрягина свести задачу к краевой задаче, численно решить полученную краевую задачу методом стрельбы и обосновать точность полученных результатов, проверить полученные экстремали Понтрягина на оптимальность при различных значениях параметра $\alpha = \{0; 0.01; 0.1; 1.0; 10.0\}$.

2 Принцип максимума Понтрягина

Выпишем функции Лагранжа и Понтрягина:

$$\widetilde{L} = \int_0^4 (p(\dot{x} - u) + \lambda_0 xe^{-\alpha x})dt + \lambda_1(x(0) + x(4))$$

Лагранжиан:

$$L = p(\dot{x} - u) + \lambda_0 xe^{-\alpha x},$$

Терминант:

$$l = \lambda_1(x(0) + x(4)).$$

Функция Понтрягина:

$$H = L_{\dot{x}}\dot{x} - L$$

в рассматриваемом случае имеет вид

$$H = pu - \lambda_0 xe^{-\alpha x}$$

Применем к задаче оптимального управления (1) принцип максимума Понтрягина. Необходимые условия оптимальности:

а) Уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\dot{p} = -\frac{dH}{dx}$$

в рассматриваемом случае имеет вид

$$\dot{p} = \lambda_0 e^{-\alpha x}(1 - \alpha x).$$

б) условия трансверсальности

$$\begin{cases} L_{\dot{x}(0)} = l_{x(0)} \\ L_{\dot{x}(4)} = -l_{x(4)} \end{cases}$$

принимают вид

$$\begin{cases} p(0) = \lambda_1 \\ p(4) = -\lambda_1 \end{cases}$$

в) оптимальность по u:

$$arg\ abs \max_{u\in[-2,2]} H(u) = arg\ abs \max_{u\in[-2,2]} \{pu\} = \begin{cases} 2,\ p>0 \\ -2,\ p<0 \\ [-2,2],\ p=0 \end{cases}$$

г) НЕРОН (множители Лагранжа НЕ Равны Одновременно Нулю).

3 Разбор анормального случая $\lambda_0 = 0$

Пусть $\lambda_0 = 0$, тогда $\dot{p} = 0$, и следовательно $\lambda_1 = 0$. Все множители Лагранжа оказались равны нулю. Противоречие с НЕРОН.

4 Краевая задача на минимум

На основе принципа максимума Понтрягина решение задачи оптимального управления (1) сводится к решению краевой задачи (2). По условиям нормировки положим $\lambda_0 = 1$. Тогда:

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{p} = e^{-\alpha x}(1-\alpha x) \\ x(0) + x(4) = 0 \\ p(0) + p(4) = 0 \\ u = \begin{cases} 2,\ p>0 \\ -2,\ p<0 \\ [-2,2],\ p=0 \end{cases} \end{cases} \tag{2}$$

Пусть существует $[\tau_1, \tau_2]$ такое, что $p = 0$. Тогда $\dot{p} = 0$, следовательно $e^{-\alpha x}(1-\alpha x) = 0$. Имеем $x = \frac{1}{\alpha}$, $u = 0$ на $[\tau_1, \tau_2]$.

Проверим выполнение условия Келли.

$$\frac{d}{dt}p = e^{-\alpha x}(1-\alpha x),$$

$$\frac{d}{dt}[e^{-\alpha x}(1-\alpha x)] = -\alpha u e^{-\alpha x}(2-\alpha x).$$

На особом управлении определим знак и коэффициент при u. Подставим $x = \frac{1}{\alpha}$ в значение $\ddot{p}$. Получим $\ddot{p}(\frac{1}{\alpha}) = -\frac{\alpha}{e} < 0$. Следовательно, режима особого управления в задаче на минимум не существует, и здесь могут быть только точки переключения. Точка $t = \tau$ является точкой переключения.

5 Численное решение краевой задачи методом стрельбы

Краевая задача (2) решается численно методом стрельбы. В качестве параметров пристрелки выбираются недостающие для решения задачи Коши значения при $t = 0$

: $\alpha_1 = x(0)$, $\alpha_2 = p(0)$ и $\alpha_3 = \tau$. Задав эти значения каким-либо образом и решив задачу Коши на отрезке $[0; 4]$, получим соответствующие выбранному значению $\alpha := \{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3\}$ функции $x(\cdot)[\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3]$, $p(\cdot)[\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3]$, и в частности значения $x(4)[\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3]$ и $p(4)[\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3]$. Задача Коши для системы дифференциальных уравнений из (2), условий $x(0) = \alpha_1$, $p(0) = \alpha_2$, $\tau = \alpha_3$ решается численно явным методом Рунге-Кутты 5-го порядка, основанным на расчётных формулах Дормана-Принса 5(4) DDOPRI5 с автоматическим выбором шага (то есть с контролем относительной локальной погрешности на шаге по правилу Рунге). Для решения краевой задачи необходимо подобрать значения α_1, α_2, α_3 так, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{cases} x(0) + x(4) = 0 \\ p(0) + p(4) = 0 \\ p(\tau) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

соответственно $X(\alpha) = (\alpha_1 + x(4) = 0;\ \alpha_2 + p(4) = 0;\ p(\tau))$ будет вектор функцией невязок. Таким образом, в результате выбора вычислительной схемы метода стрельбы, решение краевой задачи свелось к решению системы двух алгебраических уравнений от двух неизвестных. Корень α системы алгебраических уравнений $X(\alpha) = 0$ находится методом Ньютона с модификацией Исаева-Сонина. Решение линейной системы уравнений решается методом Гаусса в выбором главного элемента по столбцу, с повторным пересчётом.

Схема численного решения краевой задачи методом стрельбы выбрана таким образом, что при отсутствии ошибок в программной реализации решения задачи Коши, найденный методом Ньютона корень будет правильным (без учёта погрешности численного интегрирования), даже если внутри метода Ньютона есть какие-то ошибки. Напротив, ошибка в решении задачи Коши делает бесполезным полученный результат, даже если всё остальное запрограммировано правильно и методу Ньютона удалось найти корень.

Исходя из этого крайне важен тест части программы, решающий задачу Коши, на системе дифференциальных уравнений с известным аналитическим решением. Но данный метод уже тестировался в другой работе, так что переходим сразу к тесту по нашей задаче.

6 Оценка точности решения задачи Коши

При выборе $\alpha = 10$ значение параметра $p(0)$ становится большим по модулю, что приводит к потере точности при просчёте параметра τ. Исходя из соображений задачи, очевидно, что точка переключения τ менятся не должна. В программе вычисляется её значение: для любого значения параметра α значение τ равно 2. Поэтому для упрощения параметрического исследования данный параметр фиксируется, уравнение в невязке опускается.

Для $x(t)$ известно аналитическое решение, и поэтому численное при любых α проверяется. А именно:

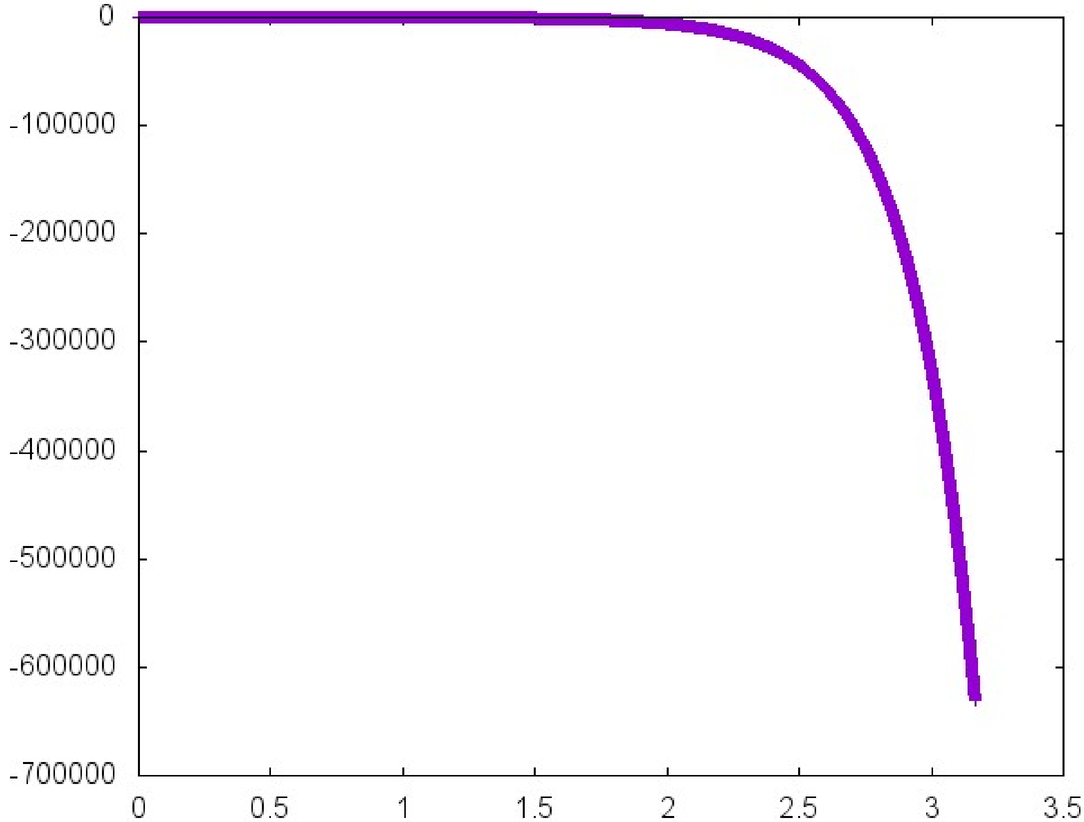
на отрезке $[0; 2]$ имеем

$$x(t) = 2t$$

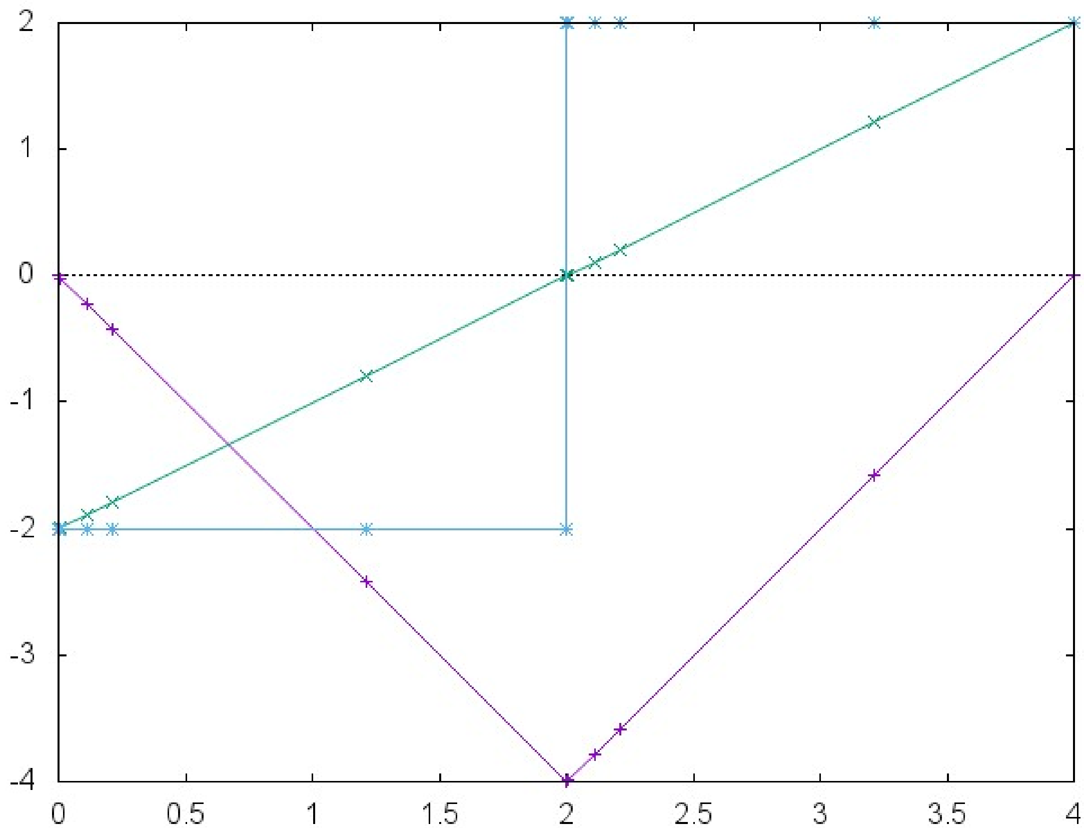
на отрезке $[2; 4]$ имеем

$$x(t) = 8 - 2t$$

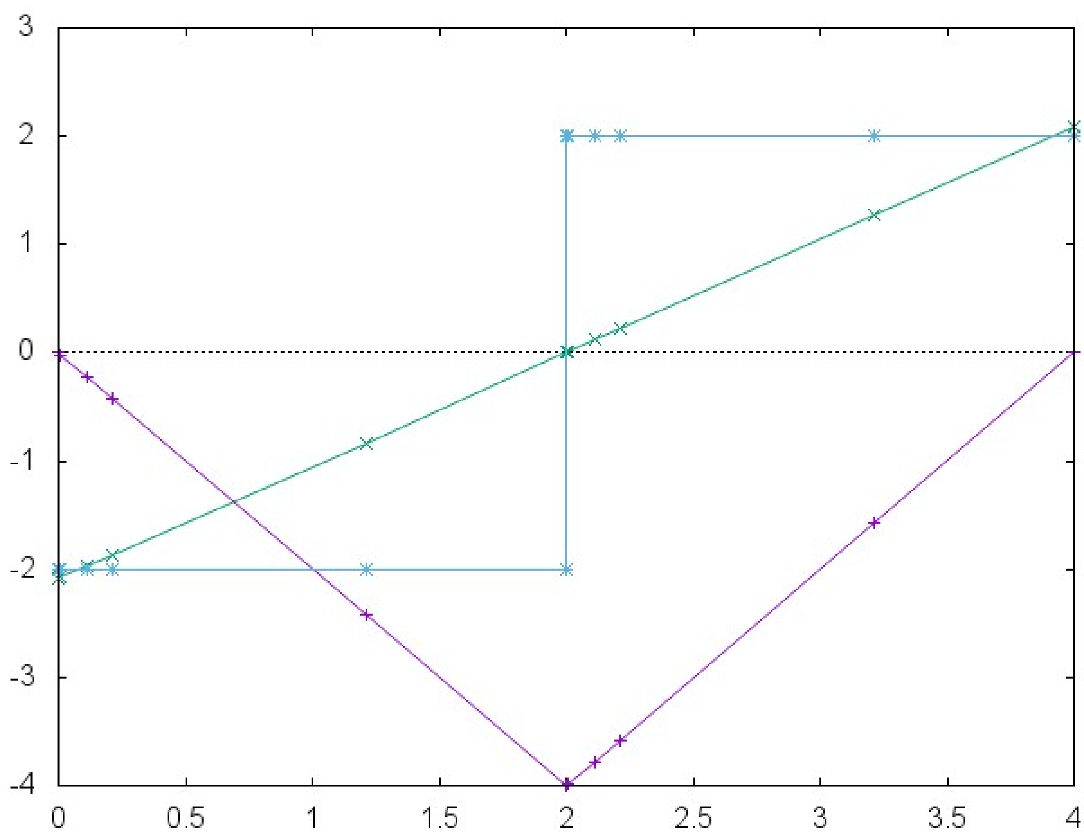
Исходя из аналитического решения, очевидно, что значения параметра $x(0)$ будет всегда равно нулю, а вот как показано на графике ниже, значение модуля $p(0)$ растёт экспоненциально. Поэтому достаточно сложно посчитать значения для больших α. С выводом значений для примерно $\alpha > e$ уже возникли проблемы, $\alpha = 3.2$ так и вовсе $p(0)$ превосходит 1000000. Однако на графике приведены посчитанные результаты:



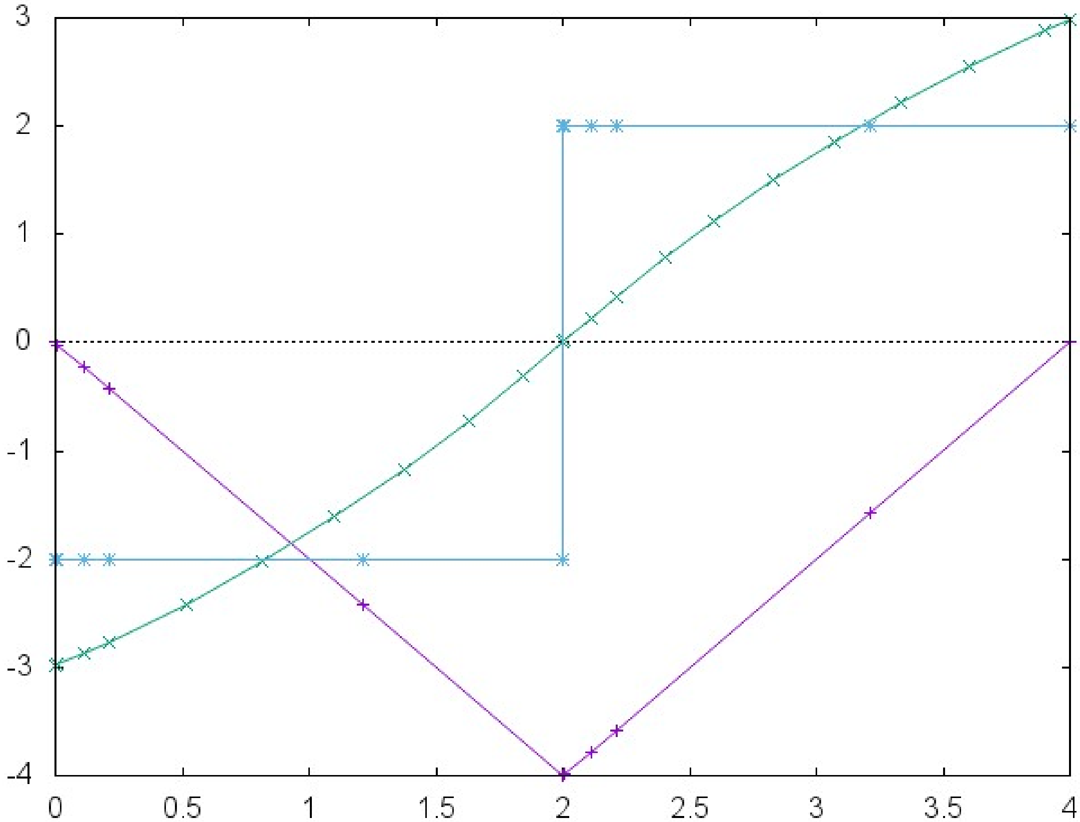
Ниже предоставлены графики численного решения задачи на минимум при $\alpha = 0$:



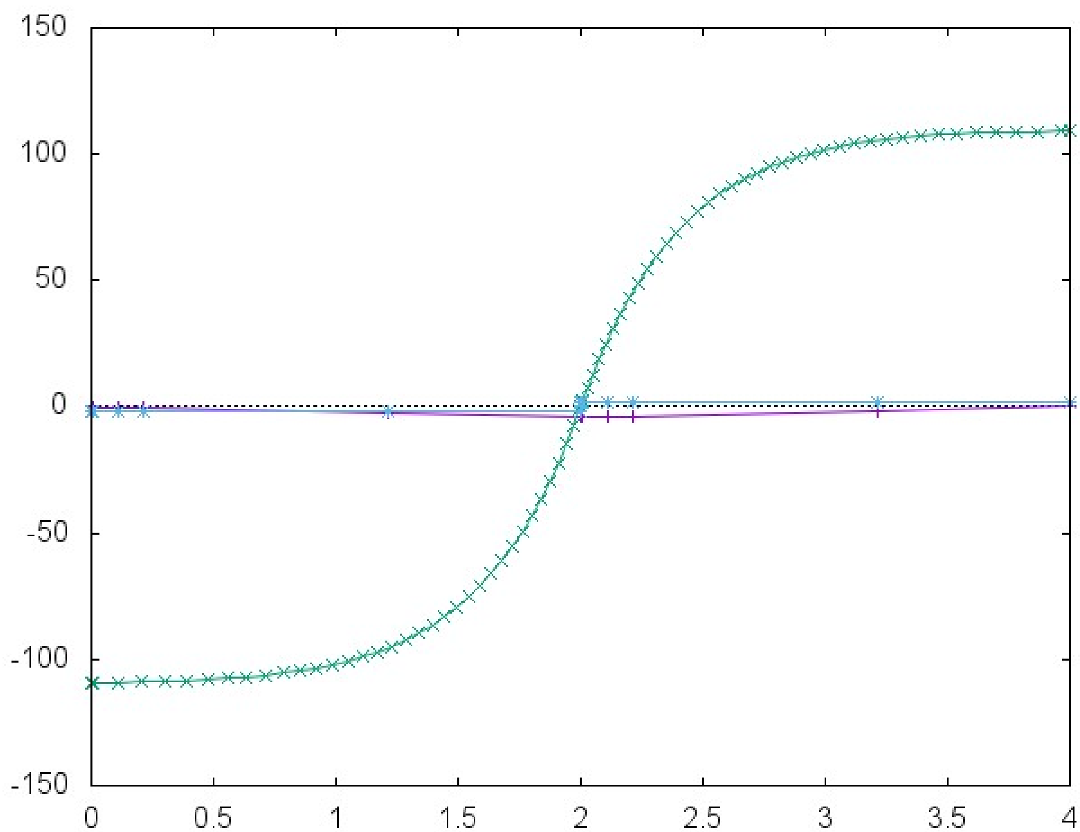
при $\alpha = 0.01$:



при $\alpha = 0.1$:



при $\alpha = 1$:



7 Краевая задача на максимум

На основе принципа максимума Понтрягина задача оптимального управления (1) сводится к краевой задаче (4). По условиям нормировки положим $\lambda_0 = -1$. Тогда имеем:

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{p} = -e^{-\alpha x}(1-\alpha x) \\ x(0) + x(4) = 0 \\ p(0) + p(4) = 0 \\ u = \begin{cases} 2, \ p > 0 \\ -2, \ p < 0 \\ [-2, 2], \ p = 0 \end{cases} \end{cases} \tag{4}$$

Пусть существует $[\tau_1, \tau_2]$ такое, что $p = 0$. Тогда $\dot{p} = 0$, следовательно $-e^{-\alpha x}(1 - \alpha x) = 0$. Имеем $x = \frac{1}{\alpha}$, $u = 0$ на $[\tau_1, \tau_2]$.

Проверим выполнение условия Келли.

$$\frac{d}{dt}p = -e^{-\alpha x}(1-\alpha x),$$

$$\frac{d}{dt}[-e^{-\alpha x}(1-\alpha x)] = \alpha u e^{-\alpha x}(2-\alpha x).$$

На особом управлении определим знак и коэффициент при u. Подставим $x = \frac{1}{\alpha}$ в значение $\ddot{p}$. Получим $\ddot{p}(\frac{1}{\alpha}) = \frac{\alpha}{e} > 0$. Следовательно, условие Келли выполняется.

8 Численное решение краевой задачи методом стрельбы

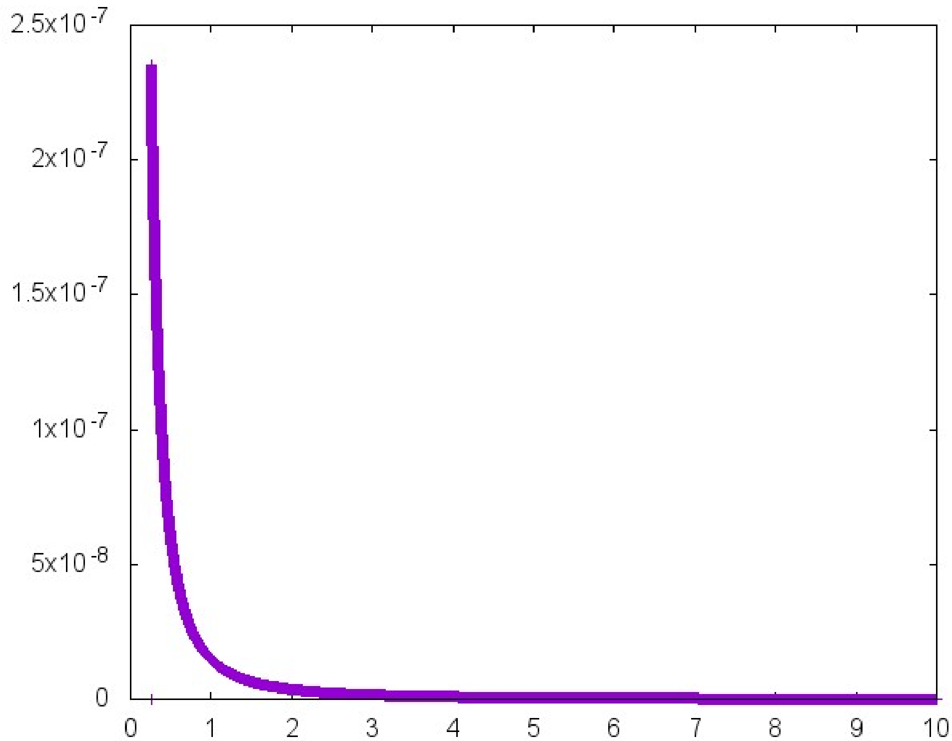
Краевая задача (4) решается численно методом стрельбы. В качестве параметров престрелки выбираются недостающие для решения задачи Коши значения при t=0: $\alpha_1 = x(0)$, $\alpha_2 = p(0)$ и точки перехода в режим особого управления и выхода из него: $\alpha_3 = \tau_1$, $\alpha_4 = \tau_2$, а в качестве системы невязок

$$\begin{cases} x(\tau_1) = \frac{1}{\alpha} \\ p(\tau_1) = 0 \\ x(0) + x(4) = 0 \\ p(0) + p(4) = 0 \end{cases}$$

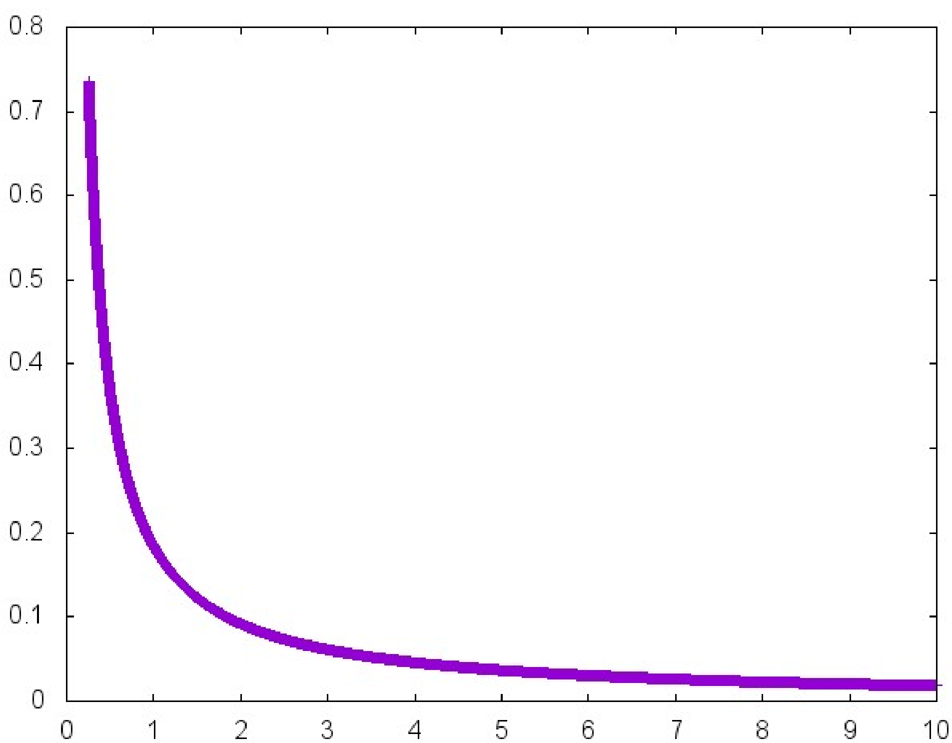
9 Оценка точности решения задачи Коши

Режим особого управления начинает работать при $\alpha > \frac{1}{4}$. Для этого значения имеем $\tau_1 = \tau_2 = 2$, что является точкой переключения. Программа не сходилась к решению, когда параметр α задавался вручную, поэтому дополнительно было запрограммировано параметрическое исследование по α: ответ для предыдущего значения α являлся начальным приближением ногово. Таким образом были построены адекватные экстремали для необходимых α в задаче на максимум. График зависимости значений параметров пристрелки от параметра α:

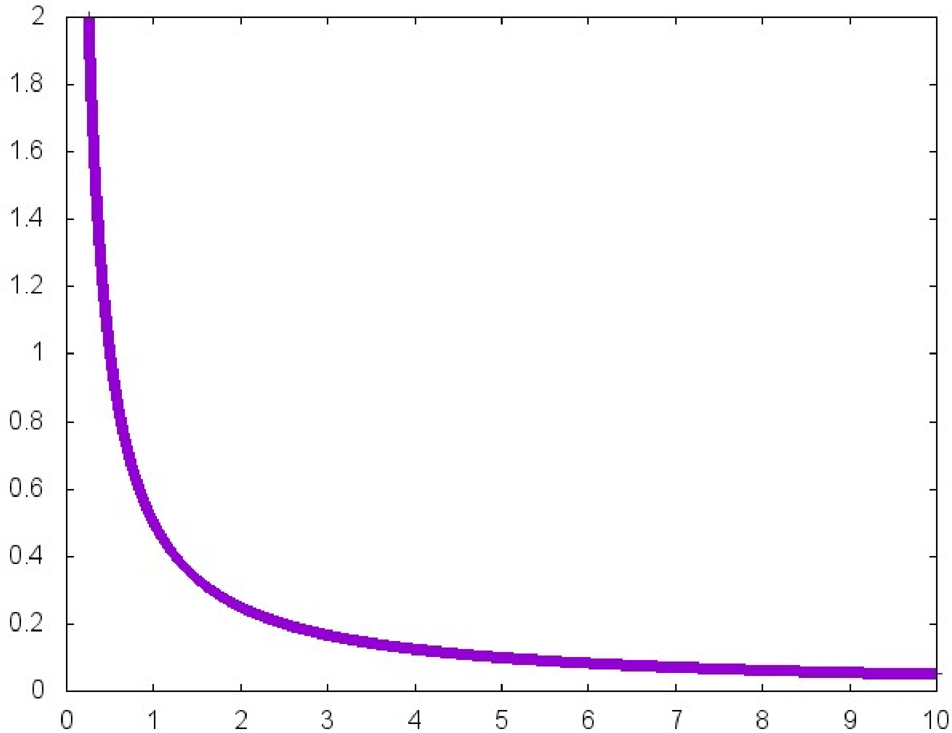
Зависимость $x(0)$ от α:



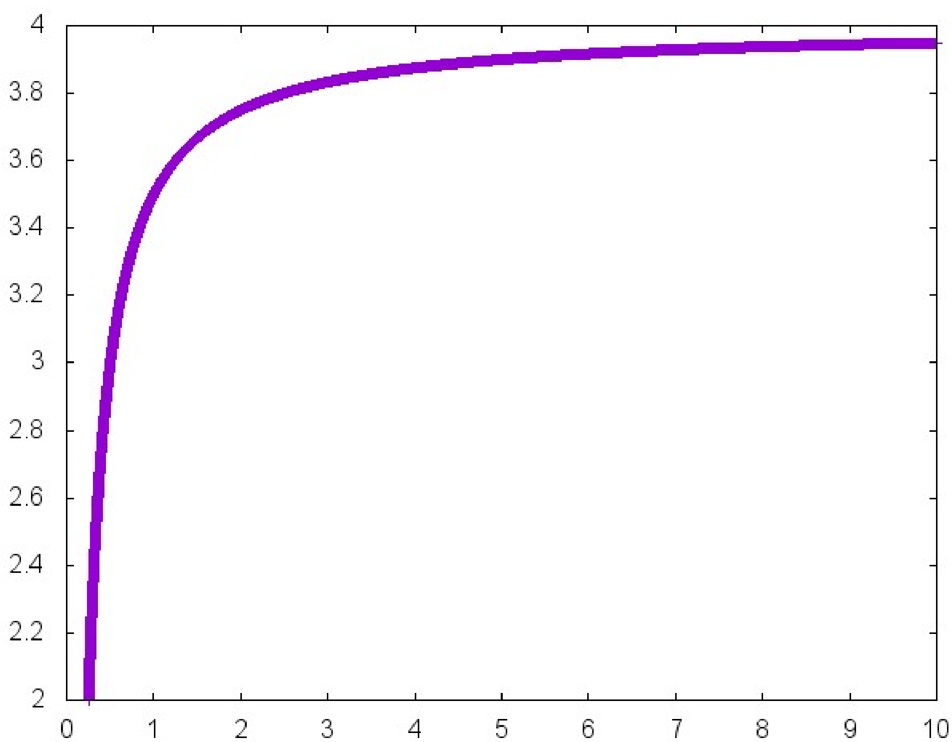
Зависимость $p(0)$ от α:



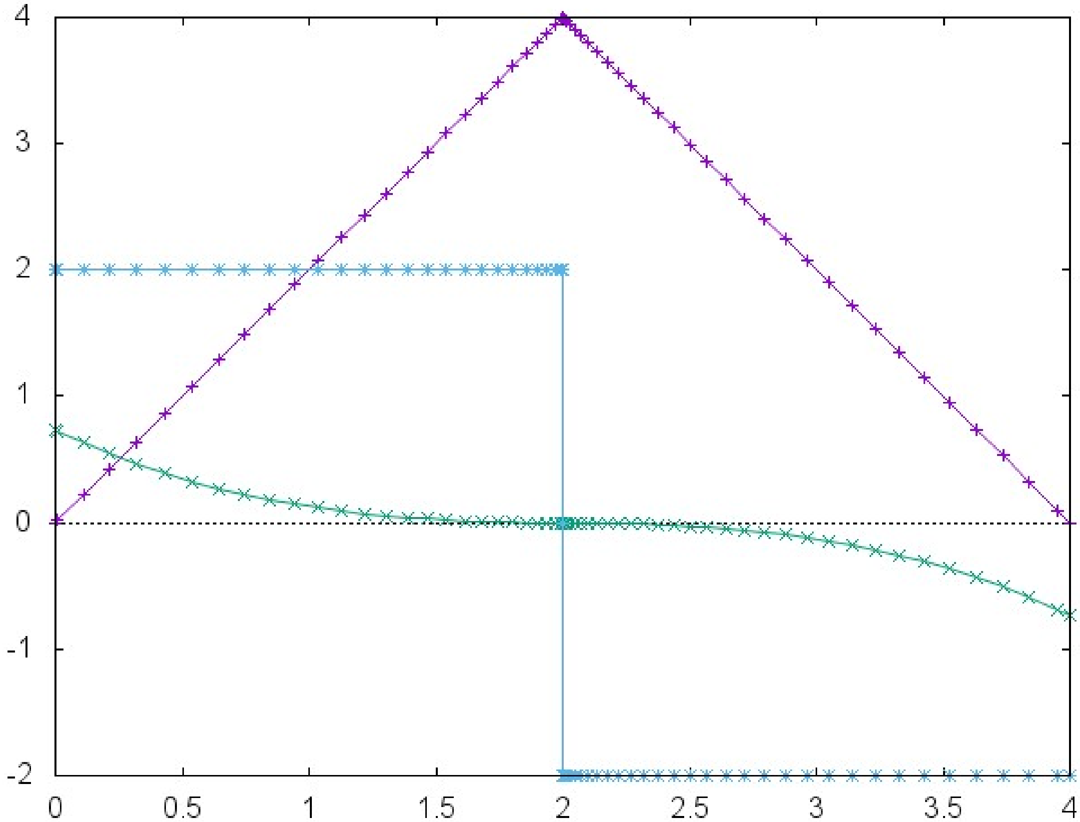
Зависимость τ_1 от α:



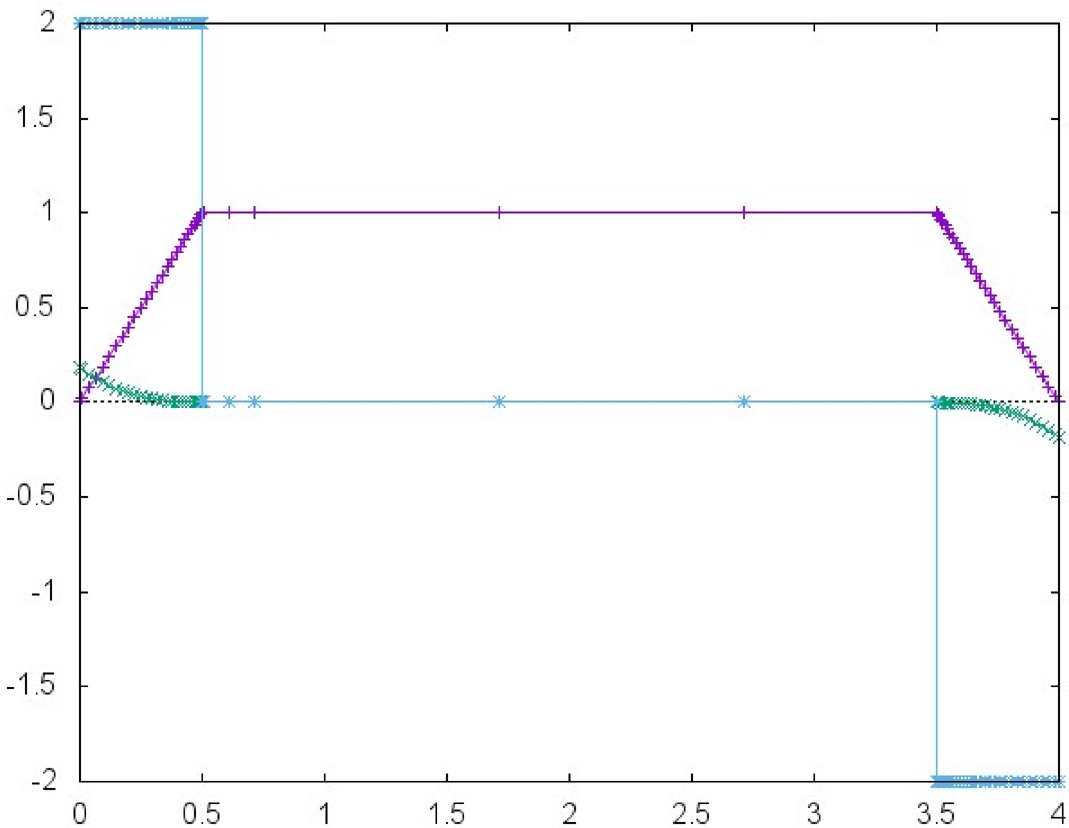
Зависимость τ_2 от α:



Ниже предоставлены графики численного решения задачи на максимум при $\alpha = 0.25$:



при $\alpha = 1$:



при $\alpha = 10$: