3-ИЙ ОТЧЁТ ПО ПРАКТИКУМУ

Кязыми Кямран Искендер оглу

Баку — 2015

1 Постановка задачи

Рассматривается движение материальной точки в вертикальной плоскости в однородном поле сил тяжести и в однородной сопротивляющейся среде. Требуется определить форму траектории, обеспечивающей максимизацию горизонтальной координаты точки при переводе её из заданного начального состояния на заданную высоту за фиксированное время. Уравнения движения материальной точки в безразмерных переменных:

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\theta \\ \dot{y} = v\sin\theta \\ \dot{v} = -f(v) - \sin\theta \end{cases}$$

С начальными условиями:

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad v(0) = v_0, \quad x(T) = x_T, \quad y(T) = y_T$$

$v(T)$ – свободен.

Целью уравнения является минимизация функционала $J = T \to \min\limits_{\theta}$

2 Сведение задачи оптимального управления к краевой задаче. Принцип максимума Понтрягина.

Выпишем функции Лагранжа и Понтрягина:

$$H = \psi_x v\cos\theta + \psi_y v\sin\theta + \psi_v(f(v) - \sin\theta)$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_x = 0 \\ \dot{\psi}_y = 0 \\ \dot{\psi}_v = f'(v)\psi_v - \psi_x\cos\theta - \psi_y\sin\theta \end{cases}$$

$$l = \lambda_{x0}x(0) + \lambda_{y0}y(0) + \lambda_{v0}v(0) + \lambda_{xT}x(T) + \lambda_{yT}y(T) + \lambda_0 T$$

Применим к задаче оптимального управления (1) принцип максимума Понтрягина. Необходимые условия оптимальности:

а) Условие трансверсальности

$$\begin{cases} \psi_x(0) = \frac{\partial l}{\partial x(0)} = \lambda_{x0} \\ \psi_y(0) = \frac{\partial l}{\partial y(0)} = \lambda_{y0} \\ \psi_v(0) = \frac{\partial l}{\partial v(0)} = \lambda_{v0} \\ \psi_x(T) = -\frac{\partial l}{\partial x(T)} = -\lambda_{xT} \\ \psi_y(T) = -\frac{\partial l}{\partial y(T)} = -\lambda_{yT} \\ \psi_v(T) = 0 \end{cases}$$

так как $v(T)$ свободен.

б) условие оптимальности по управлению

$$H(\theta) = \cos\theta \cdot \psi_x v + \sin\theta \cdot (\psi_y v - \psi_v)$$

$$\hat{\theta} = arg\ abs \max H(\theta)$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \uparrow\uparrow \quad \begin{pmatrix} \psi_x v \\ \psi_y v - \psi_v \end{pmatrix}$$

$$\rho = \sqrt{(\psi_x v)^2 + (\psi_y v - \psi_v)^2}$$

$$\cos\theta = \frac{\psi_x v}{\rho} \quad \sin\theta = \frac{\psi_y v - \psi_v}{\rho}$$

в) условие стационарности

$$H(T) = \frac{\partial l}{\partial T} = 1$$

3 Краевая задача на минимум

На основе принципа максимума Понтрягина решение задачи оптимального управления (1) сводится к решению краевой задачи (2). По условиям нормировки положим

$\lambda_0 = 1$. Тогда:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{v^2\psi_x}{\rho} \\ \dot{y} = \frac{v^2\psi_y - v\psi_v}{\rho} \\ \dot{v} = -f(v) - \frac{\psi_y v - \psi_v}{\rho} \\ \dot{\psi_v} = f'(v)\psi_v - \frac{v\psi_x^2}{\rho} - \frac{v\psi_y^2 - \psi_y\psi_v}{\rho} \end{cases}$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad v(0) = v_0, \quad x(T) = x_T, \quad y(T) = y_T, \quad \psi_v(T) = 0.$$

$$H(T) = 1 \Longrightarrow H(0) = 1$$
$$\Downarrow$$
$$\psi_x v \frac{\psi_x v}{\rho} + \frac{(\psi_y v - \psi_v)^2}{\rho} + \psi_v f(v) = 1$$
$$\rho + \psi_v f(v) = 1 \Longrightarrow$$

4 Численное решение краевой задачи методом стрельбы.

Краевая задача решается численно методом стрельбы. В качестве параметров пристрелки выбираются недостающие для решения задачи Коши значения:
$\overrightarrow{\beta} := (\psi_x(0), \psi_y(0), \psi_v(0), T)$. Задав эти значения каким-либо образом и решив задачу Коши на отрезке $[0, T]$. Задача Коши для системы дифференциальных уравнений, условий:

$$\begin{cases} x(T)[\overrightarrow{\beta}] - x_T = 0, \\ y(T)[\overrightarrow{\beta}] = 0, \\ \psi_v(T)[\overrightarrow{\beta}] = 0, \\ \{\rho(T) - \psi_v(T) f(v)(T)\}[\overrightarrow{\beta}] - 1 = 0 \end{cases}$$

решается численно явным методом Рунге-Кутты 5-го порядка, основанным на расчётных формулах Дормана-Принса (DDOPRI5) с автоматическим выбором шага (то есть с контролем относительной локальной погрешности на шаге по правилу Рунге).

Содержание