بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده فنی و مهندسی

گروه مهندسی عمران

پایان‌نامه جهت اخذ دوره کارشناسی ارشد

رشته مهندسی عمران–سازه

عنوان

بهبود روش اجزای محدود بسط یافته در آنالیز مسائل ترک با تولید مجدد شبکه

استاد راهنما:

دکتر حمید مسلمی

نام دانشجو

کامران مدبر ساری قیه

دی ماه ۹۴

صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی کارشناسی ارشد

با تاییدات الهی و با استعانت از ولی عصر(عج) دفاع از پایان نامه آقای **کامران مدبر ساری قیه** دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی عمران گرایش سازه به شماره دانشجویی **۹۲۷۵۲۱۵۰۱**

تحت عنوان:

بهبود روش اجزای محدود بسط یافته در آنالیز مسائل ترک با تولید مجدد شبکه

به ارزش ٦واحد، راس ساعت روز مورخ در محل سالن دفاع دانشکده علوم انسانی تشکیل گردید. هیات داوران که قبلاً پایان نامه را مطالعه نموده اند، پس از شنیدن گزارش دانشجو و دفاعیات و پرسش های لازم در زمینه علمی و تحقیقاتی ایشان نتیجه را به شرح ذیل اعلام می دارند:

پایان نامه نامبرده بانمره:

به عدد و نمره به حروف و با امتیاز مورد تأیید قرار گرفت.

امتیازات:

- عالی: ۱۹ تا ۲۰- بسیار خوب: ۱۸ تا ۱۸.۹۹خوب: ١٦ تا ۱۷.۹۹ – قبل قبول: ١٤- تا ۱۵.۹۹ – غیر قابل قبول: نمره کم •تر از ١٤

اعضای هیات داوران			مرتبه دانشگاهی	تخصص	امضا
استاد راهنما		نام استاد راهنما			
استاد مشاور		نام استاد مشاور			
اساتید یا محققان مدعو	داور	نام داور			
	داور	نام داور			

	اظهارنامه دانشجو	**شماره:** **تاریخ:**

اینجانب **کامران مدبر ساری‌قیه** دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی عمران گرایش سازه دانشکده فنی مهندسی دانشگاه شاهد، گواهی می‌دهم که پایان‌نامه تدوین شده حاض با عنوان:« **بهبود روش اجزای محدود بسط یافته در آنالیز مسائل ترک با تولید مجدد شبکه**» به راهنمایی استاد محترم جناب آقای **دکتر حمید مسلمی** توسط شخص اینجانب انجام و صحت و اصالت مطالب تدوین شده در آن، مورد تایید است و چنان‌چه هر زمان دانشگاه کسب اطلاع کند که گزارش پایان‌نامه حاضر صحت واصالت لازم را نداشته، دانشگاه حق دارد مدرک تحصیلی اینجانب را مسترد و ابطال نماید؛ همچنین اعلام می‌دارد در صورت بهره‌گیری از منابع مختلف شامل: گزارش تحقیقاتی، رساله، پاینان‌نامه، کتاب، مقالات تخصصی و سایر منابع اطلاعاتی، به منبع مورد استفاده و پدیدآورنده آن به طور دقیق ارجاع داده شده و نیز مطالب مندرج پایان‌نامه حاضر تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب و یا سایر افراد به هیچ کجا ارائه نشده است. در تدوین متن پاین‌نامه حاضر، چاچوب مصوب تدوین گزارش‌های پژوهشی تحصیلات تکمیلی دانشگاه شاهد به طور کامل مراعات شده و نهایتاً این که، کلیه حقوق مادی ناشی از گزارش پایان‌نامه حاضر، متعلق به دانشگاه شاهد می‌باشد.

نام و نام‌خانوادگی دانشجو(دست‌نویس):

امضای دانشجو

تاریخ:

تقدیم

- پدر مهربان و دلسوزم
- مادر عزیز و فداکارم

سپاسگزاری

با حمد و سپاس خداوند منان که به ما توفیق اندیشیدن عنایت فرمود و با تشکر از همه ی اساتید محترم گروه مهندسی عمران دانشگاه شاهد که در طول تحصیل در دوره کارشناسی ارشد بسیار به ما آموختند و با تشکر و قدردانی ویژه از زحمات و تلاش های استاد گرامی جناب آقای دکتر حمید مسلمی که بدون راهنمایی های ارزنده ایشان این پژوهش سرانجام نمی یافت. همچنین تشکر ویژه از پدربزرگ عزیزم که همواره جملات امید بخش ایشان باعث انگیزه و تلاش اینجانب در اتمام این پژوهش بود.

چکیده

آنالیز عددی سازه های دارای ترک به دلیل پیچیدگی ذاتی سالیان زیادی است که توجه محققان را به خود معطوف کرده است و تکنیکهای مختلفی برای اینگونه مسائل پیشنهاد شده است. یکی از این تکنیکها روش اجزای محدود بسط یافته می‌باشد که در آن با غنی سازی توابع شکلی با توابع تکین، مدل سازی رفتار نزدیک ترک بهبود می یابد. در تکنیک دیگر که روش اجزای محدود تطابقی یا همان روش اصلاح شبکه نام دارد، با همان توابع شکل کلاسیک ابعاد المانها به گونه ای تغییر داده می شوند که شبکه اجزای محدود خود را با مساله تطبیق داده و رفتار منطقه اطراف ترک با دقت مطلوب مدل شود.

در این پایان نامه هدف، بهبود جواب های حاصل از روش اجزای محدود بسط یافته میباشد و راه حلی که برای این بهبود در نظر گرفته شده است استفاده از تکنیک اصلاح شبکه میباشد. برای رسیدن به این هدف برنامه نویسی به زبان متلب انجام گرفته است و کدی نوشته شده است که اساس کار آن روش اجزای محدود بسط یافته میباشد و در هر مرحله از رشد ترک که نیاز باشد برنامه این قابلیت را داراست که شبکه مساله را اصلاح نماید و بر اساس شبکه جدید مساله را مجددا آنالیز نماید. در انتها نیز چهار مساله مورد بحث قرار گرفته است و نتایج آن با روش های تحلیلی و دیگر مراجع مقایسه شده است.

کلید واژه: روش اجزا محدود بسط یافته، اصلاح شبکه، روش اجزا محدود تطابقی، آنالیز مسائل ترک، رشد ترک

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست علایم و نشانه‌ها ..... ه
فهرست جدول‌ها ..... ح
فهرست شکل‌ها ..... ط

فصل ۱- کلیات پژوهش ۱
۱-۱- مقدمه ۲
۱-۲- بیان مساله ۲
۱-۳- اهداف پژوهش ۳
۱-٤- اهمیت و ضرورت پژوهش ۳
۱-۵- فرضیه های موجود در مساله ٤
۱-٦- روش شناسی ٤

فصل ۲- روش اجزای محدود بسط یافته ٦
۲-۱- مقدمه ۷
۲-۲- روش های عددی ۷
۲-۳- روش اجزای محدود بسط یافته ۸
۲-٤- کاربرد روش اجزای محدود بسط یافته ۹
۲-۵- انواع مدلسازی ترک ها ۹
۲-۵-۱- مدل های محلی و غیر محلی ۱۰
۲-۵-۲- مدل ترک پخشی ۱۱
۲-۵-۳- مدل ناپیوستگی در المان ترک ۱۱
۲-۵-٤- مدل المان ترک خورده ۱۲
۲-۵-۵- مدل المان تکین ۱۲
۲-۵-٦- روش المان غنی شده ۱٤
۲-٦- تفاوت روش اجزاء محدود بسط یافته با روش اجزاء محدود معمولی ۱٤
۲-۷- شبکه بندی مجدد ۱۵
۲-۸- غنی سازی ۱٦
۲-۹- توابع شکل استاندارد ۱٦

۲-۱۰- انواع غنی سازی اولیه ۱٦
۲-۱۰-۱- غنی سازی ذاتی ۱٦
۲-۱۰-۲- غنی سازی بیرونی ۱۸
۲-۱۱- پاره سازی وحدت ۱۸
۲-۱۲- روش اولیه غنی سازی برای مدل تک بعدی ۱۹
۲-۱۳- تابع غنی سازی مورد استفاده با استفاده از مفهوم پاره سازی وحدت ۲۱
۲-۱٤- تابع غنی سازی هویساید ۲۲
۲-۱۵- نقاط تحت تاثیر ناپیوستگی در روش ساده ۲٤
۲-۱٦- هندسه ناپیوستگی ۲۵
۲-۱۷- بررسی اثر نوک ترک در توابع غنی سازی ۲٦
۲-۱۸- مدل سازی برای انواع مسائل ترک ۲۹
فصل ۳- روش اجزای محدود تطابقی ۳۱
۳-۱- مقدمه ۳۲
۳-۲- روش های اصلاح شبکه ۳۳
۳-۳- روش اصلاح h– ۳٤
۳-٤- بکارگیری روش اجزای محدود تطابقی در مسائل ترک ۳٦
۳-۵- ارزیابی خطا ۳۷
۳-٦- بهینه سازی شبکه به صورت تطابقی ٤۰
۳-۷- شبکه بندی تطابقی ٤۱
۳-۸- مقایسه کاهش خطا ٤۲
فصل ٤- آنالیز مسائل ترک و رشد ترک ٤٤
٤-۱- مقدمه ٤۵
٤-۲- فاکتور شدت تنش ٤۵
٤-۳- مودهای مختلف بازشدگی ٤٦
٤-٤- مقادیر تحلیلی فاکتور شدت تنش ٤۷
٤-٤-۱- فاکتور تنش صفحه مسطح تحت تنش تک محوره ٤۸
٤-٤-۲- ترک لبه ای موجود در صفحه مسطح ٤۸
٤-٤-۳- ترک مورب ٤۹
٤-۵- برآورد عددی فاکتور شدت تنش ۵۰

٤-٦- روش همبستگی تغییر مکان‌ها..... ٥١
٤-٧- روش گسترش ترک مجازی ٥٢
٤-٨- روش انتگرال بسته ی ترک اصلاح شده ٥٣
٤-٩- روش J- انتگرال..... ٥٥
٤-١٠- روش انتگرال متقابل..... ٥٩
٤-١١- شروع و رشد ترک..... ٦١
٤-١٢- شروع ترک..... ٦٢
٤-١٣- رشد ترک..... ٦٢
٤-١٤- جهت رشد ترک..... ٦٣
٤-١٤-١ معیار حداکثر سرعت انرژی آزاد شده..... ٦٤
٤-١٤-٢- معیار حداقل تراکم انرژی کرنشی..... ٦٧
٤-١٤-٣- حداکثر تنش محیطی..... ٦٩
فصل ٥- ترکیب روش اجزای محدود بسط یافته و تطابقی..... ٧١
٥-١- مقدمه ٧١
٥-٢- اقدامات مشابه..... ٧٢
٥-٣- تکنیک پیشنهادی..... ٧٣
٥-٤- الگوریتم تکنیک پیشنهادی..... ٧٥
٥-٥- مزایای تکنیک ارائه شده..... ٨٣
٥-٦- نمونه مثال های عددی..... ٨٤
٥-٧- مدل سازی..... ٨٤
٥-٨- مثال اول (ترک لبه ای مستقیم)..... ٨٦
٥-٨-١- حل مثال اول با استفاده از روش اجزا محدود معمولی..... ٨٦
٥-٨-٢- حل مثال اول با استفاده از روش اجزا محدود معمولی همراه با رشد ترک..... ٨٨
٥-٨-٣- حل مثال اول با استفاده از روش اصلاح شبکه روش اجزای محدود استاندارد..... ٩٢
٥-٨-٤- حل مثال اول با استفاده از روش اجزای محدود بسط یافته..... ٩٦
٥-٨-٥- حل مثال اول با استفاده از تکنیک پیشنهادی..... ٩٨
٥-٩- مثال دوم (ترک ٤٥ درجه میانی)..... ١٠٢
٥-٩-١- حل مثال دوم با استفاده از روش اجزای محدود معمولی..... ١٠٣
٥-٩-٢- حل مثال دوم با استفاده از تکنیک ارائه شده..... ١٠٥
٥-١٠- مثال صفحه حفره دار..... ١١١

۵-۱۱- ترک مورب..... ۱۱۹
فصل ٦- نتیجه گیری و پیشنهاد برای تحقیقات آتی..... ۱۲٦
٦-۱- مقدمه ۱۲۷
٦-۲- نتیجه گیری در خصوص سوالات تحقیق..... ۱۲۸
٦-۳- نتیجه گیری کلی..... ۱۳۰
٦-٤- پیشنهاد برای تحقیقات آتی..... ۱۳۰
فهرست مراجع ۱۳۰
واژه نامه فارسی به انگلیسی..... ۱۳۳
واژه نامه انگلیسی به فارسی..... ۱۳٦

فهرست علایم و نشانه‌ها

عنوان	علامت اختصاری
جابجایی هر گره	U_i
تابع شکل هر گره	N_i
شعاع قطبی نوک ترک	r
زاویه قطبی نوک ترک	θ
ضریب ایجاد ناپیوستگی	a_k
تابع غنی سازی بیرونی	p_k
تابع دلخواه	$f_k(x)$
تابع دلخواه	$\psi(x)$
جابجایی گره (یک بعدی)	d_i
تابع غنی سازی (یک بعدی)	N^h
ضریب ایجاد ناپیوستگی(یک بعدی)	b
بخشی از محدوده المان	Ω_1
تابع غنی سازی اولیه	$G_j(x)$
تابع هویساید	$H_j(x)$
فاکتور شدت تنش در مود اول	K_I
فاکتور شدت تنش در مود دوم	K_{II}
ثابت کولوسوو	k
ضریب پواسون	ν

مدول الاستیسیته	E
ضریب ایجاد ناپیوستگی در محل قطع المان ها	a_i
تابع غنی سازی نوک ترک	$B_\alpha(x)$
ضریب ناپیوستگی در محل نوک ترک	$b_{i,\alpha}$
جواب تنش در گره ها	$\hat{\sigma}$
مقدار خطای ناشی از تنش	e
چگالی هر گره	h_i
حداقل چگالی	$h_{\min}$
حداکثر چگالی	$h_{\max}$
زاویه ترک با محور x	β
جابجایی در راستای عمود بر ترک	v_a
جابجایی در راستای ترک	$\boldsymbol{u}_a$
انرژی پتانسیل کل	$\prod$
مولفه جابجایی نقاط	U
ماتریس سختی	K
مولفه نیروی خارجی	P
میزان انرژی آزاد شده	G
چگالی انرژی کرنشی	W
تانسور تنش	σ
بردار نرمال واحد در ترک	n

دلتای کرونکر	δ
تابع وزنی	q
انرژی کرنشی الاستیک	U_e
انرژی کرنشی پلاستیک	U_P
مقدار کار انجام شده توسط اعمال بار خارجی	W_F
دلتای کرونکر	δ
سطح از بین رونده ی انرژی	E_S
مساحت کل سطح ترک	A

فهرست جدول‌ها

عنوان **صفحه**

جدول ۲-۱: : انواع توابع غنی سازی برای انواع مسائل[۸]..... ۳۰
جدول ۵-۱: پارامتر های محاسبه شده در هر مرحله..... ۸۹
جدول ۵-۲: پارامتر های محاسبه شده در روش اصلاح شبکه اجزای محدود معمولی..... ۹۲
جدول ۵-۳: مقایسه پارامتر ها قبل و پس از اصلاح شبکه روش اجزای محدود معمولی..... ۹٤
جدول ۵-٤: پارامتر های محاسبه شده به روش اجزای محدود بسط یافته..... ۹٦
جدول ۵-۵: پارامتر های محاسبه شده به روش تکنیک پیشنهادی..... ۹۹
جدول ۵-٦: مقایسه‌ی پارامترهای محاسبه شده در تکنیک پیشنهادی..... ۱۰۱
جدول ۵-۷: مقادیر فاکتور شدت تنش در مثال دوم (روش اجزای محدود معمولی)..... ۱۰٤
جدول ۵-۸: مقادیر فاکتور شدت تنش در مثال دوم (روش اجزای محدود بسط یافته)..... ۱۰۵
جدول ۵-۹: مقادیر فاکتور شدت تنش در مثال دوم (تکنیک ارائه شده)..... ۱۰٦
جدول ۵-۱۰: درصد خطا و مختصات جدید نوک ترک(بدون اصلاح شبکه)..... ۱۰۷
جدول ۵-۱۱: درصد خطا و مختصات جدید نوک ترک در تکنیک ارائه شده..... ۱۰۹
جدول ۵-۱۲: پارامتر های بدست آمده به روش اجزای محدود بسط یافته..... ۱۱٤
جدول ۵-۱۳: پارامتر های محاسبه شده در تکنیک ارائه شده..... ۱۱٦
جدول ۵-۱٤: پارامتر های محاسبه شده با استفاده از XFEM..... ۱۲۱
جدول ۵-۱۵: پارامتر های محاسبه شده در تکنیک ارائه شده..... ۱۲۳

فهرست شکل‌ها

عنوان **صفحه**

شکل ۲-۱: : نمونه ای از مدل محلی و غیر محلی ، نقطه ی ۱ محلی ، نقطه ۲ غیر محلی[۵]..... ۱۰
شکل ۲-۲: نمونه مدل ترک آغشته[۵]..... ۱۱
شکل ۲-۳: نمونه مدل ناپیوستگی در المان[۵]..... ۱۲
شکل ۲-٤: نمونه مدل المان ترک خورده[۵]..... ۱۳
شکل ۲-۵: نمونه مدل المان تکین[۵]..... ۱۳
شکل ۲-٦: نمونه مدل المان غنی شده[۵]..... ۱٤
شکل ۲-۷: تطبیق و عدم تطبیق شبکه بندی در دو روش اجزا محدود بسط یافته و معمولی[۸]..... ۱۵
شکل ۲-۸ : مختصات قطبی راس ترک..... ۱۷
شکل ۲-۹: مقایسه میدان جابجایی ایجاد شده[۱]..... ۲۰
شکل ۲-۱۰: هندسه مربوط به تابع غنی سازی پیشنهادی[۱]..... ۲۳
شکل ۲-۱۱: رفتار توابع پرش در محیط تک بعدی برای گره ۱ و ۲[۱]..... ۲٤
شکل ۲-۱۲:گره های تحت تاثیر ترک[۱]..... ۲٤
شکل ۲-۱۳: نحوه تغییر شکل المان غنی سازی شده[۱]..... ۲۵
شکل ۲-۱٤: تغییر شکل المان تحت تاثیر عبور ترک[۱]..... ۲٦
شکل ۲-۱۵: نقاط تحت تاثیر توابع عادی غنی سازی و توابع نوک ترک[۸]..... ۲۹
شکل ۳-۱: روش های اصلاح شبکه[۱٤]..... ۳٤
شکل ۳-۲: روش های اصلاح h [۱٤]..... ۳۵
شکل ۳-۳: نمودار خطای قبل و پس از اصلاح شبکه[۱۵]..... ۳۵
شکل ۳-٤: شکل a-d شبکه بندی اولیه، e-h شبکه بندی ثانویه[۱۵]..... ٤۲
شکل ٤-۱: مود های مختلف باز شدگی..... ٤۷
شکل ٤-۲: صفحه مسطح تحت تنش تک محوره..... ٤۸
شکل ٤-۳: نمونه ترک لبه ای موجود در صفحه مسطح..... ٤۹
شکل ٤-٤: نمونه ترک مورب..... ۵۰
شکل ٤-۵: برآورد فاکتور شدت تنش در نوک ترک[۵]..... ۵۲
شکل ٤-٦: وضعیت تنش ها و جابجایی ها در نوک ترک[۵]..... ۵٤
شکل ٤-۷: استفاده از نیروی داخلی نوک ترک[۵]..... ۵٤

شکل ٤-٨: مختصات داخلی نوک ترک[٥]..... ٥٦
شکل ٤-٩: دامنه‌ی انتگرالی برای برآورد J [٥]..... ٥٧
شکل ٤-١٠: تصویر شماتیک از دو نقطه متقارن[٥]..... ٥٨
شکل ٤-١١: رابطه ی بین مرزها در نوک ترک[٥]..... ٦٥
شکل ٤-١٢: بررسی تنش های ترک[٢٨]..... ٦٧
شکل ٥-١: داده ی مربوط به مختصات گره ها..... ٧٦
شکل ٥-٢: داده مربوط به ارتباط گره ها در یک المان..... ٧٦
شکل ٥-٣: معرفی مشخصات مکانیکی مساله..... ٧٧
شکل ٥-٤: شناسایی مسیر ترک..... ٧٨
شکل ٥-٥:شناسایی نقاط گاوس..... ٧٨
شکل ٥-٦: ایجاد مسیر جهت محاسبه فاکتور شدت تنش..... ٨٠
شکل ٥-٧: نمونه ای از خروجی ها..... ٨٢
شکل ٥-٨: نمونه خروجی تک پلات..... ٨٢
شکل ٥-٩: مثال ترک لبه ای مستقیم..... ٨٦
شکل ٥-١٠: شبکه بندی اولیه در روش اجزای محدود عادی..... ٨٧
شکل ٥-١١: الف) کانتور σ_x ب) کانتور σ_y ج) کانتور τ_{xy}..... ٨٧
شکل ٥-١٢: کانتور درصد خطای ایجاد شده..... ٨٨
شکل ٥-١٣: نمودار خطا در هر مرحله..... ٨٩
شکل ٥-١٤: نمودار مقایسه ای خطای هدف و خطای مساله..... ٩٠
شکل ٥-١٥: مقایسه جهت رشد ترک..... ٩١
شکل ٥-١٦: شبکه بندی مثال اول (روش اجزا محدود معمولی)..... ٩١
شکل ٥-١٧: نمودار مقایسه ای خطای هدف و خطای مساله در روش اصلاح اجزای محدود معمولی.. ٩٣
شکل ٥-١٨: نمودار خطا در هر مرحله به روش اصلاح اجزای محدود معمولی..... ٩٣
شکل ٥-١٩: مقایسه جهت رشد ترک (در روش اصلاح اجزای محدود معمولی)..... ٩٤
شکل ٥-٢٠: شبکه بندی مراحل مختلف و اصلاح شبکه مورد نیاز..... ٩٥
شکل ٥-٢١: نمودار افزایش خطا در هر مرحله (روش اجزای محدود بسط یافته)..... ٩٧
شکل ٥-٢٢: نمودار مقایسه خطای مساله و خطای هدف (روش اجزای محدود بسط یافته)..... ٩٧
شکل ٥-٢٣: شبکه بندی بر اساس روش اجزای محدود بسط یافته..... ٩٨
شکل ٥-٢٤: نمودار درصد خطا در هرمرحله (تکنیک پیشنهادی)..... ١٠٠
شکل ٥-٢٥: نمودار مقایسه ای خطای هدف و خطای مساله..... ١٠٠

شکل ۵-۲۶: مسیر رشد ترک در تکنیک پیشنهادی..... ۱۰۰
شکل ۵-۲۷: مراحل اصلاح شبکه در تکنیک ارائه شده..... ۱۰۱
شکل ۵-۲۸: مثال دوم ترک ٤٥ درجه..... ۱۰۲
شکل ۵-۲۹: مدلسازی و شبکه بندی در نرم افزار GID..... ۱۰۳
شکل ۵-۳۰: الف کانتور σ_x ب) کانتور σ_y ج) کانتور τ_{xy}..... ۱۰۳
شکل ۵-۳۱: کانتور درصد خطای ایجاد شده..... ۱۰٤
شکل ۵-۳۲: شبکه بندی اولیه مثال دوم..... ۱۰۵
شکل ۵-۳۳: اصلاح شبکه بندی در مثال دوم..... ۱۰٦
شکل ۵-۳٤: نمودار خطای هر مرحله در مثال دوم..... ۱۰۷
شکل ۵-۳۵: نمودار مقایسه ای خطای هدف و خطای مساله (مثال دوم)..... ۱۰۸
شکل ۵-۳٦: مسیر رشد ترک در مثال دوم..... ۱۰۸
شکل ۵-۳۷: نمودار درصد خطا در هر مرحله (تکنیک ارائه شده)..... ۱۰۹
شکل ۵-۳۸: نمودار مقایسه ای خطای هدف و خطای مساله (تکنیک ارائه شده)..... ۱۱۰
شکل ۵-۳۹: مسیر رشد ترک در تکنیک ارائه شده..... ۱۱۰
شکل ۵-٤۰: مراحل اصلاح شبکه در تکنیک ارائه شده در مثال دوم..... ۱۱۱
شکل ۵-٤۱: هندسه مثال حفره دار..... ۱۱۲
شکل ۵-٤۲ : پیش بینی مسیر رشد ترک[۳۲]..... ۱۱۳
شکل ۵-٤۳: شبکه بندی اولیه مثال حفره..... ۱۱۳
شکل ۵-٤٤: نمودار درصد خطا در هر مرحله از مثال حفره..... ۱۱٤
شکل ۵-٤۵: نمودار درصد خطای متناسب با طول ترک..... ۱۱۵
شکل ۵-٤٦: مسیر رشد ترک..... ۱۱۵
شکل ۵-٤۷: نمودار درصد خطا در هر مرحله از مثال حفره(تکنیک ارائه شده)..... ۱۱۷
شکل ۵-٤۸: نمودار درصد خطای متناسب با طول ترک..... ۱۱۷
شکل ۵-٤۹: مسیر رشد ترک و نحوه اصلاح شبکه..... ۱۱۸
شکل ۵-۵۰: مقایسه مسیر رشد ترک در روش های مختلف..... ۱۱۸
شکل ۵-۵۱: هندسه مساله ترک مورب..... ۱۱۹
شکل ۵-۵۲: مسیر رشد ترک[۳۲]..... ۱۲۰
شکل ۵-۵۳: نمودار درصد خطا در هر مرحله..... ۱۲۱
شکل ۵-۵٤: نمودار درصد خطای متناسب با طول ترک..... ۱۲۲
شکل ۵-۵۵: مسیر رشد ترک..... ۱۲۲

شکل ۵-۵۶: نمودار درصد خطا در هر مرحله..... ۱۲۳
شکل ۵-۵۷: نمودار درصد خطای متناسب با طول ترک..... ۱۲٤
شکل ۵-۵۸: مسیر رشد ترک و نحوه اصلاح شبکه..... ۱۲٤
شکل ۵-۵۹: مقایسه مسیر رشد ترک در روش های مختلف..... ۱۲۵

فصل اول

کلیات پژوهش

۱-۱- مقدمه

یکی از مباحث مهم در مسائل مکانیک جامدات، مباحث مربوط به ترک میباشد. مسائل ترک با توجه به ویژگی های نسبتا پیچیده همواره مورد نظر محققین بوده است و برای آنالیز اینگونه مسائل تلاش های زیادی انجام گرفته است. در این بین روش های عددی برای آنالیز مسائل ترک از محبوبیت بیشتری برخوردار هستند و لذا در این زمینه اقدامات بسیار گسترده ای صورت گرفته است. در این پایان نامه نیز اقداماتی جهت مدلسازی هرچه بهتر ترک و کاهش خطای آن انجام گرفته است.

۱-۲- بیان مساله

مسائل ترک همواره به دلیل پیچیدگی آن ها مورد توجه محققین بوده است و محققین سعی در ارائه روش ها و مدل های مختلف برای آنالیز رفتار آن ها داشته اند. در مسائل ترک دو نکته همواره حائز اهمیت بوده است، اول اینکه به دلیل وجود تمرکز تنش در نوک ترک مقدار خطا بسیار زیاد می باشد و در نتیجه جوابهای مساله قابل اطمینان نخواهند بود. مساله دوم بحث رشد ترک میباشد که در صورت رشد ترک در مساله نیاز به مدلسازی هندسه مساله میگردد که این کار نیز بسیار دشوار میباشد و به لحاظ مدلسازی کار را سخت میکند. در این پایان‌نامه سعی بر این است که با ارائه یک راهکار مناسب هم خطاهای موجود در مسائل ترک را کاهش داد و هم رشد ترک را در مسائل بدون ایجاد هندسه ترک در نظر گرفت.

به عبارت دیگر دو موضوع خطا و تمرکز تنش در نوک ترک و مدلسازی رشد ترک از جمله مهمترین چالش پیش روی مسائل آنالیز ترک میباشد. محققین نیز برای غلبه بر این چالش ها دو روش اجزای محدود بسط یافته و روش اجزای محدود تطابقی را ارائه داده اند که در ادامه توضیحاتی در این خصوص ارائه میگردد.

۱-۳- اهداف پژوهش

همانطور که قبلا نیز بیان شد، مسائل آنالیز ترک دو چالش بزرگ و عمده دارند. مهمترین و اصلی ترین هدف این پژوهش ارائه تکنیک مناسب جهت مقابله با دو چالش پیش رو میباشد. در این تحقیق سعی شده است که با ارائه تکنیکی بتوان هم خطاهای موجود در مساله را با معرفی یک شبکه جدید کاهش داد و همگرایی لازم بین جوابهای تحلیلی و جوابهای عددی ایجاد نمود و هم بتوان مشکلات و مباحث مربوط به رشد ترک را نیز کاست.

۱-٤- اهمیت و ضرورت پژوهش

اهمیت و ضروت این پژوهش در این است که در مسائل آنالیز ترک همواره محققین سعی در ارائه روش هایی داشته اند که بتوانند خطاهای موجود در مساله را کاهش دهند، به عبارت دیگر میتوان گفت که فلسفه ایجاد روش های عددی در این است که این روش ها همگرایی بیشتری با نتایج تحلیلی داشته باشند و همچنین میتوان گفت که تمامی محققین تمام تلاش خود را در جهت کاهش خطاهای موجود در تحلیل مینمایند تا بتوان به جواب های آن ها اعتماد بیشتری نمود.

بنابراین میتوان نتیجه گرفت که همواره ضرورت تحقیق و پژوهش در ارائه مباحثی که منجر به کاهش خطا های مساله شوند احساس میشود. در این پایان نامه نیز تلاش بر این است که در این زمینه اقداماتی صورت گیرد.

نکته دیگری که اهمیت و ضرورت این تحقیق را بیشتر نمایان میسازد بحث راحتی و تسریع در مدلسازی است. یکی از جنبه هایی که همواره محققین تلاش مینمایند تا به آن دست یابند ارائه روش هایی است که در عین کارایی سادگی لازم را داشته باشند و از پیچیدگی ها و سختی های موجود در

مدلسازی بکاهند، همین موضوع نیز بعد دیگر ضرورت این تحقیق را آشکار می سازد چراکه تکنیک پیشنهادی این پایان نامه باعث سادگی مدلسازی نیز خواهد شد.

۱-۵- فرضیه های موجود در مساله

با توجه به محدودیت های موجود فرضیه هایی برای مدلسازی انجام گرفته است. مهمترین و اساسی ترین فرضیه حل و آنالیز ترک در حالت خطی الاستیک می باشد و تمامی روابط و اقدامات نیز در همین راستا در نظر گرفته میشود. همچنین مدلسازی صورت گرفته بوسیله کدنویسی به زبان متلب[۱] انجام گرفته است و اساس حل مساله نیز روش های مبتنی بر اجزای محدود میباشد که در ادامه توضیح داده خواهد شد. برای شبکه بندی مسائل و آنالیز های انجام گرفته نیز از المان دو بعدی چهار گره ای استفاده شده است.

۱-٦- روش شناسی

همانطور که از عنوان پایان نامه نیز مشخص است تکنیک پیشنهادی از دو روش عمده و اصلی بهره برده است. روش اول که پایه اصلی تکنیک پیشنهادی می باشد روش اجزای محدود بسط یافته می باشد. این روش از آنجایی مهم است که میتواند یکی از چالش های موجود در مسائل و آنالیز ترک را مرتفع نمود. چالشی که روش اجزای محدود بسط یافته توانایی این را دارد که آن را مرتفع نماید این است که نیاز به مدلسازی مجدد هندسه ترک در هنگام رشد نمیباشد.

روش دیگری که در این پایان نامه مورد استفاده قرار میگیرد روش اجزای محدود تطابقی و یا به عبارت دیگر روش اصلاح شبکه میباشد. این روش نیز در کاهش خطاهای موجود در مساله موثر است و دیگر چالش موجود در مسائل ترک را رفع مینماید.

[۱] Matlab

این پژوهش از این جهت جدید میباشد که دو روش مذکور به عنوان دو روش جدا از هم در آنالیز مسائل ترک شرکت داشتند و دیگر محققین به طور جداگانه روی این دو روش تمرکز نموده اند. به عنوان مثال برای مدلسازی مسائل ترک محققین از روش اجزای محدود بسط یافته استفاده مینمایند و اگر هم مباحث جدیدی در این حوزه بیان نموده اند در خصوص تنوع مسائل مورد بحث نظیر انواع گسیختگی ها میباشد. لذا از آن جهت که در تحقیقات قبلی هیچگاه این دو روش تواما مورد استفاده قرار نگرفته است و تا کنون یک الگوریتم و کدنویسی هوشمندی در این مورد انجام نگرفته است میتوان به جنبه نو بودن این پژوهش اشاره داشت.

فصل دوم

روش اجزای محدود بسط یافته

۲-۱- مقدمه

پدیده های شکست و گسترش ترک از مهمترین مباحث مطرح شده در علم مکانیک جامدات می‌باشد. همزمان با پیشرفت علم مکانیک شکست در یک قرن اخیر، تحقیقات آزمایشگاهی گسترده نیز در مورد جنبه های مختلف شکست انجام گرفته است و در حال انجام می‌باشد. به دلیل پیچیدگی و حجم سنگین محاسباتی که در این بحث ها وجود دارد، در دهه های اخیر مطالعه ی عددی شکست و ناپیوستگی نیز به کمک پردازنده های قوی و روش های عددی نوین، رواج گسترده ای پیدا کرده است. امروزه به علت حضور پیشرفت های نوین در حوضه کامپیوتر روش های عددی از محبوبیت های زیادی برخوردار هستند و اغلب مدل سازی ها امروزه با کمک روش های عددی صورت می‌گیرد. از ویژگی هایی که روش های عددی دارند این است که قابلیت حل برای طیف وسیعی از مسائل را دارا می‌باشند همچنین این روش ها به صورت گام به گام و دارای یک الگوریتم مشخص همراه با محاسبات سنگین میباشند[۱].

۲-۲- روش های عددی

از مهم ترین روش های عددی که در مسائل مهندسی عمران استفاده می‌گردد میتوان روش های زیر را نام برد:

۱) روش اجزا محدود [۱]

۲) روش تفاضل های محدود [۲]

[۱] Finite Element Method

[۲] Finite difference method

۳) روش المان های مرزی [۱]

٤) روش بدون المان [۲]

از میان روش های فوق روش اجزا محدود کاربرد بیشتری دارد و مورد استقبال قرار گرفته است. اولین باری که روش اجزا محدود به شکل مدرن مورد استفاده قرار گرفت در سال ۱۹٤۰ توسط هرینکوف [۳] صورت پذیرفت و سپس در سال های دیگر این روش توسط لوی [٤] و بعد تر توسط کلسی [٥] تکمیل گردید [۲].

۲-۳- روش اجزای محدود بسط یافته[٦]

ایده اصلی این روش که بر مبنای اصل پارتیشن وحدت[۷] میباشد (جلوتر به آن اشاره خواهد شد) توسط ملنک[۸]و بابوسکا [۹] در سال ۱۹۹٦ ارائه گردید[۳]. سپس در همان سال مباحث تکمیلی توسط دوآرته [۱۰]و اودن[۱۱] بررسی گردید[٤]. در سال ۱۹۹۹ دانشمند آمریکایی به نام بلیچکو [۱۲] با ارائه حداقل شبکه بندی دوباره پس از ایجاد یا رشد ترک بوسیله‌ی اضافه کردن تعدادی توابع غنی سازی [۱۳] در روش اجزا محدود استاندارد توانست راهی جدید در این روش ایجاد نماید، سرانجام مطالعات نهایی به منظور

---

[۱] Boundary Element Method
[۲] Meshless Method
[۳] Hrennikoff
[٤] Levy
[٥] Kelsey
[٦] Extended finite element method
[۷] partition of unity
[۸] Melenk
[۹] Babuska
[۱۰] Duarte
[۱۱] Oden
[۱۲] Belytschko
[۱۳] Enrichment functions

توسعه‌ی اقدامات بلیچکو توسط موس[1] و دالبو[2] انجام گرفت و نهایتا نام گذاری روش اجزا محدود بسط یافته صورت گرفت[٥,٦].

٢-٤- کاربرد روش اجزای محدود بسط یافته

این روش به طور گسترده در مسائل مهندسی قابل کاربرد و استفاده می‌باشد. از جمله کاربردهای روش اجزا محدود بسط یافته موارد زیر می‌باشد.

١- مدلسازی ترک ها

٢- تحلیل کامپوزیت ها

٣- تماس ها

٤- مسائل دینامیکی

٥- تغییر شکل های بزرگ و...

٢-٥- انواع مدلسازی ترک ها

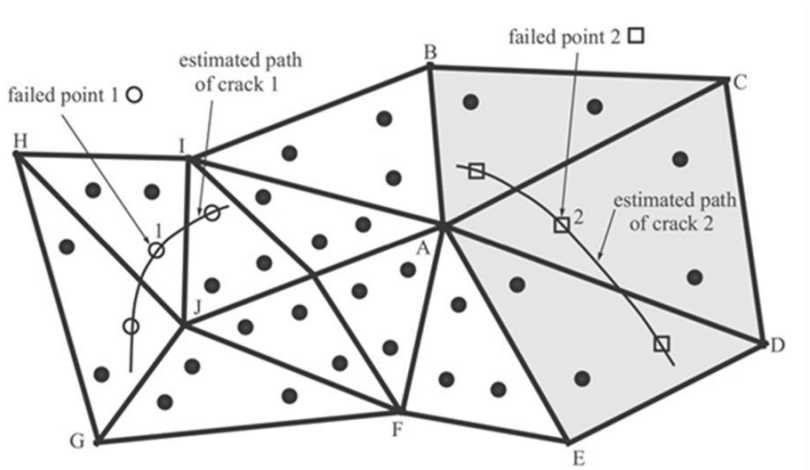
از آنجایی که موضوع بحث پایان نامه در خصوص مدل سازی ترک ها می‌باشد، در این بخش سیر تکاملی مدل سازی ترک ها و در نتیجه رسیدن به استفاده از روش اجزا محدود بسط یافته مطرح میگردد. مدل هایی که معمولا برای مدلسازی ترک ها مورد استفاده قرار می گیرد به شرح زیر می باشد.

[1] Moës
[2] Dolbow

۲-۵-۱- مدل های محلی و غیر محلی [۱]

تلاش های اولیه ای که برای حل مسائل ترک در روش اجزا محدود بوده است بر پایه ی مفاهیم پلاستیسیته ساده بوده است. الگوریتمی که به کنترل وضعیت تنش های نقاط انتگرالی در مقابل معیار قدرت یک ماده میپردازد شبیه به مسائل سخت شوندگی پلاستیسیته می‌باشد و رفتار یک نقطه تنها تحت تاثیر تنش های مربوط به خود می‌باشد. با این وجود در این مدل بررسی شد که ممکن است نتایج حاصل نتایج صحیحی نباشد و به شبکه بندی مساله وابستگی داشته باشد بنابر این مدل غیرمحلی مورد بررسی قرار گرفت.

مدل های غیر محلی نیز به منظور جلوگیری از وابستگی شبکه ها در مدلسازی ترک ها که با استفاده از مفاهیم پلاستیسیته صورت میگیرد توسط بازانت و پلانت در سال ۱۹۹۷ اولین بار ارائه گردید[۷]. در این مدل رفتار شکست و ناپیوستگی نقاط بر اساس متغیر های موجود در نقاط اطراف نقطه‌ی مورد نظر مدل میگردد. در این صورت مدل غیر محلی تاحدودی، تاثیر شبکه بندی را خنثی میکند.در شکل ۲-۱ نقطه ۱ به صورت محلی و نقطه ۲ به صورت غیر محلی مدل شده است.

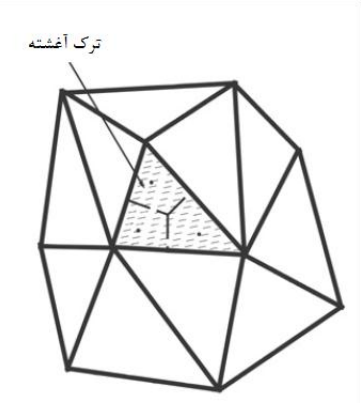


شکل ۲-۱: : نمونه ای از مدل محلی و غیر محلی ، نقطه ی ۱ محلی ، نقطه ۲ غیر محلی[۵]

[۱] Local and non-local models

۲-۵-۲- مدل ترک پخشی[۱]

مدل به صورت مداوم در روش اجزاء محدود برای مدل سازی ترک ها و رشد آن ها مورد استفاده قرار میگیرد. این مدل بیان میدارد که به جای مدل سازی هندسی ترک که مشکلات زیادی را نیز به وجود می آورد مدل سازی به صورت تاثیر ترک بر پارامتر های اجزا محدود انجام گیرد. این تاثیر میتواند بر ماتریس سختی انجام گردد یا این که مقاومت جسم مورد نظر کاهش پیدا کند. در حقیقت یک مدل پیوسته برای یک مدل ناپیوسته اجرا گردد. مزیت این مدل سازی این است که نیازی به شبکه بندی های مجدد و یا شبکه بندی های محلی که در مدل سازی ترک انجام گیرد، نیست. شکل ۲-۲ این مدل سازی را به تصویر میکشد[۵].



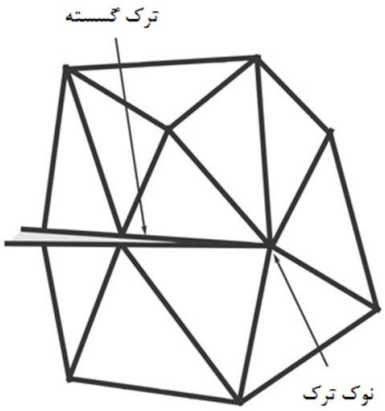
شکل ۲-۲: نمونه مدل ترک آغشته[۵]

۲-۵-۳- مدل ناپیوستگی در المان ترک[۱]

در این مدل نیز فرض به دین صورت است که ناپیوستگی و یا همان ترک بر لبه ی المان منطبق باشد. البته این روش برای موارد بسیار محدودی کاربرد دارد. همچنین این روش مناسب برای نوک ترک نمی باشد. در صورت رشد ترک در مسیر دلخواه حل با این روش بسیار پیچیده می شود چرا که در هر

[۱] Smeared crack model

مرحله به دلیل این که لبه‌ی المان ها بر لبه‌ی اجزا محدود منطبق نیست نیاز به شبکه بندی مجدد می‌باشد بنابر این کار بسیار دشوار خواهد شد. شکل ۲-۳ نمایی از این مدل سازی را نمایش می‌دهد[۵].



شکل ۲-۳: نمونه مدل ناپیوستگی در المان[۵]

۲-۵-٤- مدل المان ترک خورده [۲]

این مدل در واقع مدل بهبود یافته‌ی مدل قبلی می باشد که در این مدل به ترک این اجازه داده می‌شود که به هر سمت دلخواه رشد پیدا کند و به داخل المان نیز حرکت کند. در این روش برای مدل سازی ترک که در داخل المان حرکت کرده است از شبکه بندی محلی استفاده شده است و به نوعی با شبکه بندی محلی مدلسازی فوق را ایجاد می‌نماید.شکل ۲-٤.

۲-۵-۵- مدل المان تکین [۳]

در مهمترین تحول صورت گرفته در روش اجزای محدود مدل سازی مدل المان منحصر به فرد قابلیت مدل سازی برای ترک ها را دارا می‌باشد. این مدل به سادگی به وسیله ی گره هایی خاص

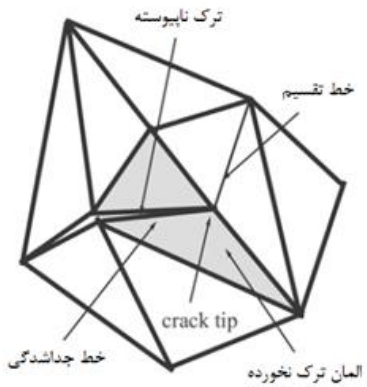
---

[۱] Discrete inter-element crack

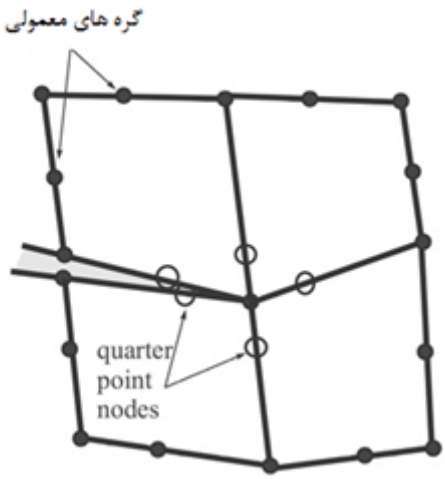
[۲] Discrete cracked element

[۳] Singular elements

موسوم به (quarter points) ساخته می‌شوند و المان آنها نیز متفاوت می‌باشد تا قبل از این که روش اجزاء محدود بسط یافته مورد استفاده قرار بگیرد این روش و این نوع مدل از محبوبیت زیادی برای مدل سازی ترک ها برخوردار بود. لازم به ذکر است که در این مدل نیازی به تغییر فرمولاسیون در روش اجزا محدود معمولی نمی‌باشد. همچنین استفاده از این مدل سازی به طور قابل توجهی دقت مسائلی را که با استفاده از روش اجزا معمولی به کار می برد را افزایش می دهد.شکل ۲-۵ نحوه‌ی المان بندی و استفاده از این مدل را به تصویر میکشد[۵].



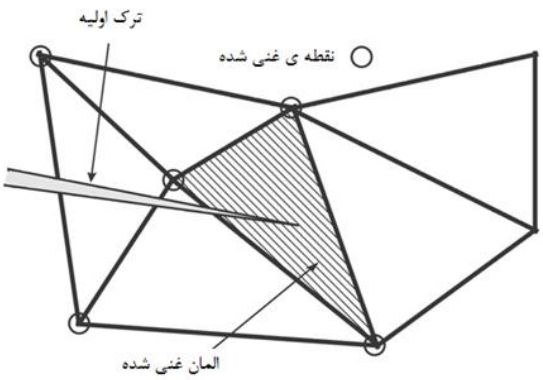
شکل ۲-٤: نمونه مدل المان ترک خورده[۵]



شکل ۲-۵: نمونه مدل المان تکین[۵]

۲-۵-٦- روش المان غنی شده[1]

این روش در واقع ایده‌ی اصلی روش اجزا محدود بسط یافته می‌باشد بدین صورت که به جای مدل سازی به صورت موارد ذکر شده با ایجاد مواردی که به توابع شکلی اضافه می‌گردد به نوعی المان مورد نظر خود را غنی نماییم. بزرگترین مزیت این روش این است که دیگر نیازی به این نمی باشد که لبه های المان بر لبه ی ترک منطبق باشد. همانطور که درشکل ۲-٦ نیز ملاحظه می شود ترک از وسط المان ها عبور کرده و نیازی به شبکه بندی مجدد در مساله نیست [۵]. همچنین مکان اولیه‌ی ترک و رشد آن نیز تاثیری در المان بندی مساله ندارد و به طور خودکار نقاطی را که نیاز است غنی شود، غنی میگردند.



شکل ۲-٦: نمونه مدل المان غنی شده[۵]

۲-٦- تفاوت روش اجزاء محدود بسط یافته با روش اجزاء محدود معمولی

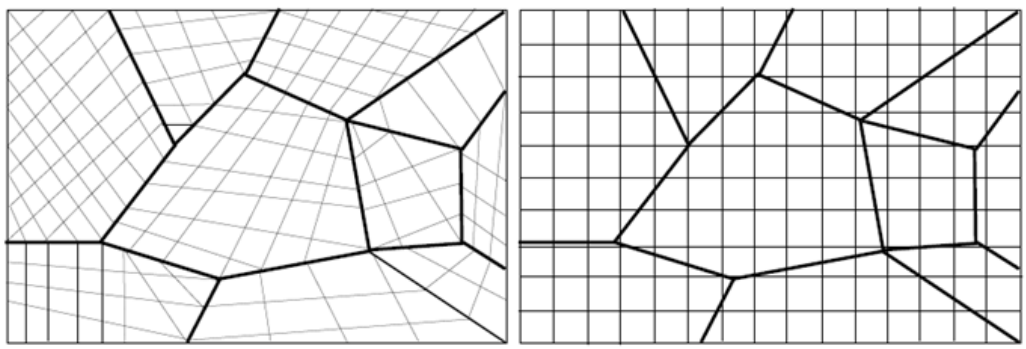
همانطور که عنوان شد روش اجزا محدود بسط یافته، توسعه ی روش اجزا محدود معمولی می‌باشد، در واقع این روش توابع شکل استاندارد در FEM را با دیگر توابع غنی می‌کند و درجه‌ی آزادی نقاط مرتبط با ترک را افزایش می‌دهد. این کار معمولا با استفاده از توابعی موسوم به توابع غنی سازی صورت

[1] Enriched element

می‌گیرد.در [۸] به خوبی این موضوع را در مورد نحوه‌ی شبکه بندی در ۲ روش اجزا معمولی و روش اجزا محدود بسط یافته بیان میدارد.

۲-۷- شبکه بندی مجدد

مدل سازی ترک ها را می توان با کمک روش اجزا محدود استاندارد (معمولی) نیز انجام داد و این گونه مسائل را حل نمود، اما استفاده از این روش، حل مسئله را بسیار دشوار می نماید، چرا که ترک ها یک ناپیوستگی در مدل ایجاد می‌نمایند و برای مدلسازی این ناپیوستگی ها با استفاده از روش اجزا محدود معمولی بایستی حتما المان ها بر روی ترک منطبق باشند تا در این صورت مدلسازی دقیق صورت گیرد، اما مشکل اصلی در مرحله ی بعد رقم می‌خورد یعنی آنجایی که مسئله‌ی رشد ترک به وجود می‌آید و مسیر ترک تغییر میکند در این صورت دیگر المان ها بر ترک منطبق نخواهد بود و نیاز به شبکه بندی مجدد و به روز رسانی مدل مورد نظر در هر مرحله میگردد و این کار را بسیار دشوار مینماید، (شکل ۲-۷). بزرگترین مزیتی که روش اجزا محدود بسط یافته به روش اجزا محدود معمولی دارد این است که نیازی به تطابق ترک بر المان ها ندارد و در نتیجه نیازی به شبکه بندی و به روزرسانی مدل نمی باشد و در واقع این روش برای ایجاد و مدلسازی ناپیوستگی از ترفند دیگری استفاده میکند [۸و۹].



شکل ۲-۷: تطبیق و عدم تطبیق شبکه بندی در دو روش اجزا محدود بسط یافته و معمولی[۸]

۲-۸- غنی سازی

همانطور که در مباحث قبلی نیز بیان گردید عمده ترین و مهم ترین تفاوت روش اجزا محدود معمولی با روش بسط یافته این است که به توابع شکل استاندارد در روش اجزا محدود، توابع دیگری موسوم به غنی سازی اضافه میگردد. که بحث اصلی این بخش نیز بررسی این توابع و نحوه استفاده آن در مسائل ترک میباشد.

۲-۹- توابع شکل استاندارد

توابع شکل توابعی هستند که بر اساس آن ها، شکل جواب را در مساله را حدس میزنیم. بسته به دقت جواب مورد نظر از توابع شکل با درجات بالاتر استفاده می‌نماییم. پس از حدس توابع شکل مورد نظر بایستی جواب مساله را در نقاط مشخص المان‌ها محاسبه نماییم و در نهایت با کمک رابطه (۲-۱) جواب مساله را به صورت تابع در کل المان مورد نظر بدست آوریم. (۲-۱) ارتباط توابع شکل و جابجایی گره ها را بیان مینماید[۲].

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} U_i N_i \qquad (۲-۱)$$

۲-۱۰- انواع غنی سازی اولیه

۲-۱۰-۱- غنی سازی ذاتی[۱]

یکی از اولین ایده هایی که در زمینه غنی سازی مطرح شد بحث غنی سازی ذاتی بود که به منظور افزایش تقریب در جواب، برای ارضای شرایط خاص، (۲-۲) را با اضافه کردن ترم های جدید به نوعی غنی سازی می‌کردند. ایده‌ی اولیه‌ی این کار توسط بلیچکو و فریز [۲] انجام پذیرفت[۱۰]. آن ها بیان

[۱] Intrinsic enrichment

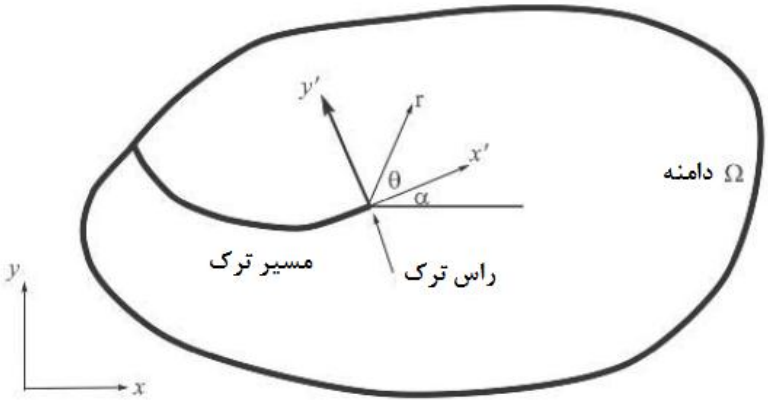
[۲] Fries

کردند که تابع p به صورت دو بخش مهم بیان گردد بخش اول که به صورت تابع پایه استاندارد بیان شود و بخش دوم به صورت غنی یافته جدید که در نهایت به رابطه زیر رسیدند[۵].

$$\begin{aligned} P^{lin} &= \{1, x, y\} \\ & \Rightarrow \quad P = \{P^{lin}, P^{enr}\} = \{1, x, y, f_1, f_2\} \\ P^{enr} &= \{f_1, f_2\} \end{aligned} \tag{۲-۲}$$

با توجه به مفاهیم شکست مکانیکی و مکانیزم شکست در نهایت رابطه زیر که نشئت گرفته از رابطه‌ی میدان جابجایی در نوک ترک می‌باشد، برای تابع پایه‌ی p ارائه گردید که به صورت زیر میباشد[۵]. که در (۲-۳) r و θ مختصات نوک ترک در مختصات قطبی میباشند.

$$P^T(X) = [P_1, P_2, P_3, P_4] = [\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta] \tag{۳-۲}$$



شکل ۲-۸ : مختصات قطبی راس ترک

۲-۱۰-۲- غنی سازی بیرونی[۱]

فرم دیگری نیز از غنی سازی وجود دارد که به آن غنی سازی بیرونی گفته می‌شود. در واقع این فرم، فرم تکمیلی تر از بحث غنی سازی میباشد که در واقع به عنوان بخش غنی شده به روش اجزا محدود استاندارد اضافه میگردد (۲-٤) این غنی سازی را نمایش می دهد.

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^{n} N_j(x)u_j + \sum_{k=1}^{m} p_k(x)a_k \qquad (٤-۲)$$

رابطه (۲-٤) را به شکل دیگر نیز بیان می‌نمایند و آن کمک گرفتن از مفهوم پاره سازی وحدت میباشد که به صورت رابطه (۲-۵) بیان میگردد. $f_k^{pu}(x)$ مجموعه ای از توابع پاره سازی وحدت می باشد که از دامنه ای که غنی سازی در آن صورت میگیرد انجام می‌شود[۵].

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^{n} N_j(x)u_j + \sum_{k=1}^{m} f_k^{pu} p(x)a_k \qquad (۵-۲)$$

۲-۱۱- پاره سازی وحدت [۲]

مفهوم پاره سازی وحدت در رشته های مختلف محاسباتی استفاده می‌شود و بیشتر معنی و مفهوم ریاضی را دنبال مینماید. و اصل این مفهوم این است که یک مجموعه تابع در یک نقطه‌ی مشخص، حاصل جمعی برابر یک دارد. به عنوان مثال تابعی مانند $f_k(x)$ را در نظر بگیرید این تابع در m مجموعه‌ی خود حاصل جمعی برابر یک خواهد داشت[۵و۱۱].

$$\sum_{k=1}^{m} f_k(x) = 1 \qquad (٦-۲)$$

[۱] Extrinsic enrichment

[۲] Partition of unity

این مفهوم معانی و مفاهیم زیادی را در روش اجزا محدود بیان می‌دارد، در واقع خاصیت توابع شکل نیز که در گره متناظر برابر یک و در سایر گره ها برابر صفر است نیز در ادامه ی همین مفهوم می باشد.

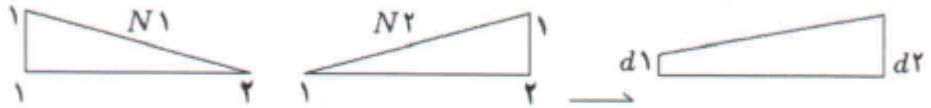
$$\sum_{j=1}^{n} N_j(x) = 1 \qquad (۷-۲)$$

حال میتوان نشان داد که با انتخاب هر تابع دلخواه مانند $\psi(x)$ میتوانیم رابطه زیر را ارائه دهیم:

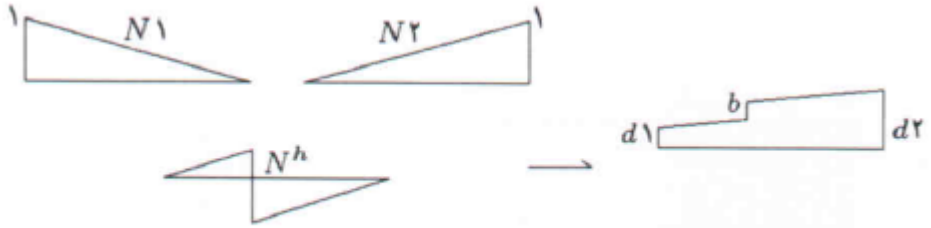
$$\sum_{k=1}^{m} f_k(x)\psi(x) = \psi(x) \qquad (۸-۲)$$

۲-۱۲- روش اولیه غنی سازی برای مدل تک بعدی

از اولین روش های ارائه شده در بحث روش اجزا محدود بسط یافته به کارگیری توابع شکل خاص برای غنی سازی میدان جابجایی است که اخیرا مورد پذیرش محققین نیز قرار گرفته است. در این روش توابع شکل عادی موجود در روش اجزا محدود استاندارد برای تمامی گره ها مطرح شده است و توابع غنی سازی تنها برای گره هایی اعمال می شود که تحت تاثیر ناپیوستگی و در حالت خاص ترک قرار می‌گیرند. در شکل ۲-۹ چگونگی تاثیر غنی سازی به کمک روش های اولیه ی ارائه شده برای غنی سازی در مدل تک بعدی نمایش داده شده است [۱].



الف) توابع شکل عادی و حوزه جابجایی پیوسته حاصل



ب) توابع شکل عادی ، تابع پرش و حوزه جابجایی ناپیوسته حاصل

شکل ۲-۹: مقایسه میدان جابجایی ایجاد شده[۱]

درشکل ۲-۹ الف، توابع شکل عادی اجزاء محدود استاندارد که با $N_۱$ و $N_۲$ نمایش داده شده برای تعریف میدان جابجایی پیوسته به کار میروند. در شکل ۲-۹ب، علاوه بر توابع شکل فوق از تابع شکل پرش N^h نیز به منظور ایجاد ناپیوستگی در میدان جابجایی در داخل المان استفاده شده است. همچنین در شکل ۲-۹ مدل سازی ناپیوستگی با به کارگیری مستقیم تابع پرش در رابطه جابجایی u انجام شده است. رابطه (۲-۹) چگونگی استفاده از توابع شکل و معمولی به منظور بیان حوزه جابجایی را نشان میدهد.

$$u = \sum_{onI} N_i d_i + N^h b \qquad (۲-۹)$$

از رابطه (۲-۹) تابع پرش بدین صورت تعریف میشود:

$$N^h = \begin{cases} N_1 - 1 & if \quad x \in \Omega_1 \\ N_1 & else \end{cases} \qquad (۲-۱۰)$$

در رابطه(۲-۹)، I برابر تعداد گره های المان بوده (در این جا منظور گره های ۱و۲ در شکل ۲-۹میباشد) و Ω_1 بخشی از محدوده ی المان است که گره ۱ در آن قرار دارد. در شکل ۲-۹ این محدوده سمت چپ ناپیوستگی را شامل می‌شود. در رابطه(۲-۹)، d_i جابجایی های مربوط به درجات آزادی المان محدود و b جابجایی نسبی در محل ناپیوستگی میباشد. اشکال روش مستقیم تابع پرش در رابطه جابجایی ایجاد وابستگی بین کرنش در دو طرف ناپیوستگی است. در واقع نباید وابستگی بین دو کرنش در دو طرف ایجاد گردد. در شکل ۲-۹ب، شیب دو طرف ناپیوستگی همانطور که ملاحظه میگردد یکسان است[۱].

۲-۱۳- تابع غنی سازی مورد استفاده با استفاده از مفهوم پاره سازی وحدت

به دلیل وجود برخی مشکلات در مورد استفاده از تابع غنی سازی از جمله این که کرنش های ایجاد شده در دو طرف ناپیوستگی به یکدیگر وابسته هستند همچنین عدم ایجاد و رعایت شرایط مرزی بایستی تابع پرش به فرم دیگری تبیین گردد. بر این اساس می توان از حاصل ضرب توابع شکل معمولی در توابع دارای خاصیت مورد نظر (مانند خاصیت پرش در میدان جابجایی) به منظور ساخت توابع غنی سازی استفاده کرد. از جمله فرم های ارائه شده برای این نوع غنی سازی میتوان رابطه (۲-۱۱)را بیان نمود:

$$U = \sum_{onI} N_i(x) d_i + \sum_{onJ} N_j^h(x) b_j \qquad (۲-۱۱)$$

دررابطه (۲-۱۱)، N_j^h تابع غنی سازی مربوط به گره ی j و b_j معرف بردار پرش مربوط به درجه ی آزادی غنی سازی گره j می باشد. d_i بردار جابجایی درجه آزادی گره ی i است. در فضای دو بعدی بردار های d_i و b_j هر یک دارای دو مولفه ی جابجایی هستند که در راستای x و y بیان میگردد. در این

رابطه I معرف تمامی گره های موجود در المان و J تنها گره هایی هستند که تحت تاثیر ناپیوستگی قرار میگیرند. حال نحوه ی ساخت تابع غنی سازی مطابق رابطه ی زیر بیان میگردد:

$$N_j^h(x) = N_j\left(x\right)G_j(x) \qquad (۱۲-۲)$$

همانطور که ملاحظه می شود ضرب تابع شکل استاندارد در تابع خاص مورد نظر موجب ایجاد قید در حوضه ی عملکردی غنی سازی در محدوده ی مورد نظر و رعایت شرایط مرزی جابجایی میشود[۱].

۲-۱٤- تابع غنی سازی هویساید[۱]

تابع غنی سازی مورد استفاده در مسائل ترک که برای شبیه سازی ناپیوستگی به کار میرود بایستی دو شرط زیر را ارضا نماید:

۱) شرط ایجاد ناپیوستگی

۲) عدم اختلال شرایط پیوستگی میدان جابجایی بر روی مرزها

برای اینکه دو شرط فوق نیز در مساله رعایت گردد معمولا دو اقدام زیر صورت می گیرد:

۱) با افزودن ترم هایی که مبتنی بر روش "لول ست[۲] " میباشد. این روش بیشتر برای مدل سازی مرزهای مادی که خصوصیات ماده در هر مرز تغییر پیدا میکند استفاده میشود.

۲) استفاده از تابع پله ای هویساید، که این تابع نیز مناسب برای مدلسازی ناپیوستگی در میدان جابجایی می باشد. معمولا به دلیل این که در مسائل ترک صرفا مدلسازی ناپیوستگی در میدان جابجایی ملاک است لذا از این تابع غنی سازی بیشتر استفاده میگردد.

در این صورت رابطه را بر مبنای تابع هویساید بیان میکنیم.

---

[۱] Heviside

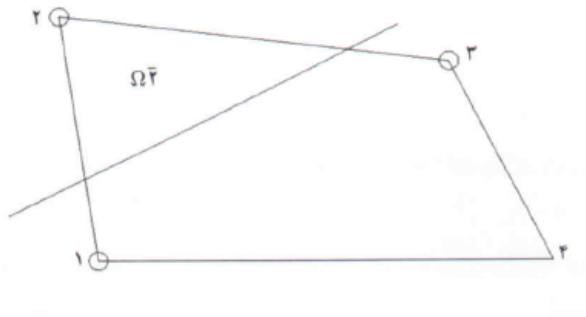
[۲] Level set

$$G_j(x) = H_j(x) \qquad (۱۳-۲)$$

که تابع هویساید به صورت زیر تعریف می شود :

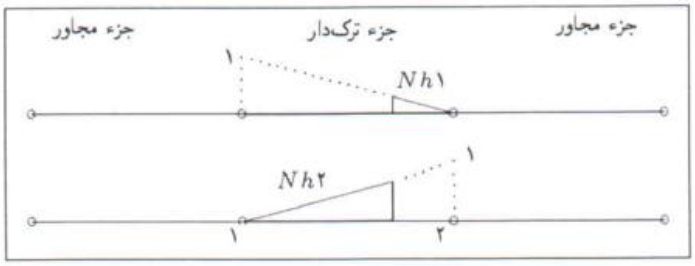
$$H_j(x) = \begin{cases} 0 & if \quad x \in \Omega_j^- \\ 1 & else \end{cases} \qquad (۱٤-۲)$$

در(۲-۱٤) $H_j(x)$ تابع پرش مربوط به گره ی j است. Ω_j^- دامنه ی محدود به گره j و امتداد ناپیوستگی می باشد درشکل ۲-۱۰ دامنه ی اعمال تابع پرش رابطه ی بیان شده نمایش داده شده است. این محدوده برای یک المان ٤ گوش و محدوده ی گره شماره ۲ در این المان را بیان میدارد.



شکل ۲-۱۰: هندسه مربوط به تابع غنی سازی پیشنهادی[۱]

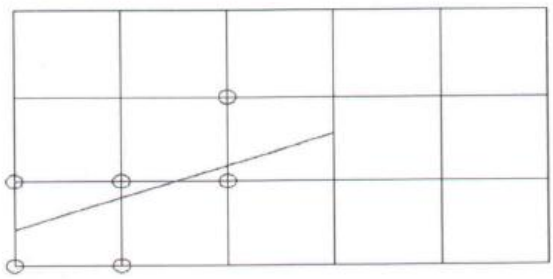
نحوه عملکرد تابع غنی سازی بیان شده در محیط یک بعدی در شکل ۲-۱۱ نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که شرایط دو گانه ایجاد پرش در محل ناپیوستگی و عدم تاثیر در مرز ها توسط این روش احراز میگردد [۱].



شکل ۲-۱۱: رفتار توابع پرش در محیط تک بعدی برای گره ۱ و ۲[۱]

۲-۱۵- نقاط تحت تاثیر ناپیوستگی در روش ساده

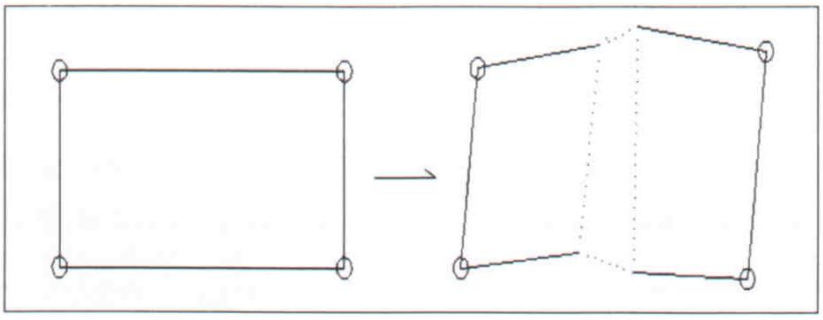
همانطور که در روش فوق بیان شد تنها در گره های خاصی تابع غنی سازی در آن ها اثر می‌نماید. یعنی این که ممکن است بخشی از نقاط تحت ناپیوستگی قرار بگیرند. در واقع در روابط فوق مجموعه J که شامل نقاط تحت تاثیر ناپیوستگی هستند زیر مجموعه ای از مجموعه ی I که شامل کلیه‌ی نقاط هستند می‌باشند. نحوه ی انتخاب این گره ها نیز در اجزا محدود دو بعدی بدین صورت است که گره‌ی تحت تاثیر ناپیوستگی گره ای است که حداقل یک یال منتهی به آن توسط خط ناپیوستگی قطع شده باشد. شکل ۲-۱۲ به خوبی این موضوع را بیان میدارد. همانطور که درشکل ۲-۱۲مشاهده می شود گره‌هایی که با علامت دایره علامت زده شده اند تحت غنی سازی قرار میگیرند و مجموعه ی J را تشکیل میدهند.



شکل ۲-۱۲:گره های تحت تاثیر ترک[۱]

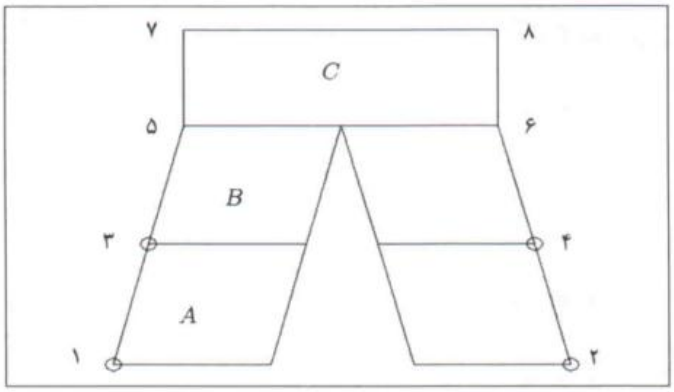
۲-۱٦- هندسه ناپیوستگی

هندسه ی مرز های داخلی در محل ناپیوستگی همانند مرزهای خارجی اجزا بستگی به درجه ی توابع شکل مورد استفاده دارد. در این نمونه که مورد بحث قرار می گیرد با توجه به ٤ گره ای بودن اجزا، و وجود دو درجه ی آزادی در هر گره از جمله گره‌ی غنی شده، هندسه ی مرز های داخلی المان و نیز تغییر مقدار بازشدگی ترک در داخل المان به صورت خطی خواهد بود. چنان که در شکل ۲-۱۳ مشاهده می‌شود، تغییر شکل نسبی دو طرف ترک به صورت مستقل دربرگیرنده‌ی تمام حالات تغییر شکل محتمل است. در نتیجه تابع پیشنهادی ممکن است به عنوان تابعی مناسب برای استفاده از غنی سازی اجزاء تحت ترک استفاده شود. در المان شکل ۲-۱۳هر گره ٤ گره تحت تاثیر ترک قرار دارد و در نتیجه هشت درجه آزادی غنی سازی ایجادکننده‌ی تغییر مکان نسبی دو طرف ترک خواهد بود.



شکل ۲-۱۳: نحوه تغییر شکل المان غنی سازی شده[۱]

در المان های واقع در مسیر ترک، تمام گره های اطراف ترک تحت تاثیر غنی سازی قرار میگیرند و در المان انتهای ترک تنها دو گره غنی می‌شود. در شکل ۲-۱٤ در المان A که ترک از آن عبور کرده هر ٤ گره ۱، ۲، ۳ و ٤ غنی شده اند در المان B که در انتهای ترک قرار دارد تنها دو گره ۳و٤ غنی سازی شده و المان C هیچ گره غنی شده‌ایی ندارد.



شکل ۲-۱٤: تغییر شکل المان تحت تاثیر عبور ترک[۱]

۲-۱۷- بررسی اثر نوک ترک در توابع غنی سازی

بعد از ارائه‌ی روابطی که در مباحث قبلی نمایش داده شد بحث نوک ترک در نظر گرفته نشده بود. در ادامه‌ی مباحث تکمیلی‌تر برای غنی سازی توابع یک بخش دیگر به توابع غنی سازی برای میدان جابجایی اضافه شده است. ایده ی اصلی این کار توسط بلیچکو و همکاران در سال ۱۹۹۷ شکل گرفت که با استفاده از روش عنصر آزاد گالرکین (EFG) ارائه شد. این روش یک روش بدون شبکه بندی است که معادلات دیفرانسیل جزئی را حل مینماید و تنها برای نقاط گره ای و به طور گسترده برای مسائل شکست استفاده میشوند و همچنین زمانیکه در نزدیکی نوک ترک مورد استفاده قرار میگیرند، نتایج دقیق تری دارند .

در بحث های مقدماتی‌ای که در زمینه‌ی مطالعات نوک ترک انجام گرفته است، مطرح شد که روش اجزا محدود بسط یافته برای مسائل الاستیک خطی کاربرد دارد و در خصوص مسائل الاستو پلاستیکی این روش بدون استفاده از راه حل های مجانبی کارا نمیباشد. لذا با استفاده از این راه حل های مجانبی

میتوان تابع مورد نظر را غنی نمود . بدین منظور از روش HRR[1] برای توصیف این بحث استفاده شده است. راه حل HRR در مسائل پلاستیکی به توصیف ویژگی های منحصر به فرد غالب در سخت شوندگی مواد میپردازد و در واقع بیان میدارد که با اضافه کردن ترم هایی دیگر در غنی سازی میتوان این اثرات را نیز در نظر گرفت[۱۲و۱۳].

به عنوان زمینه های شناخته شده دربحث HRR، ترم های جدیدی در بحث غنی سازی توابع شکلی را معرفی خواهیم نمود. البته برای رسیدن به آن ها بایستی معادلات مرتبه‌ی چهارم غیر خطی دیفرانسیل حل گردد. در حالت الاستیک خطی پاسخ جابجایی ها به صورت زیر بیان میگردد:

$$u_1(r,\theta) = \frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}(K_I \cos\frac{\theta}{2}(k-\cos\theta) + K_{II}\sin\frac{\theta}{2}(k+\cos\theta+2)) \qquad (۱۵-۲)$$

$$u_2(r,\theta) = \frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}(K_I \cos\frac{\theta}{2}(k-\cos\theta) - K_{II}\sin\frac{\theta}{2}(k+\cos\theta-2)) \qquad (۱۶-۲)$$

در روابط (۲-۱۵)و(۲-۱۶) K_I و K_{II} فاکتور شدت تنش در مود های اول و دوم میباشد. در خصوص فاکتور شدت تنش مفصلا در فصل های آتی بحث خواهد شد. r و θ مختصات قطبی نقطه ی مورد نظر میباشند. k نیز ثابت کولوسوو [2] گفته میشود که به دو صورت زیر بیان میشود:

$$\begin{aligned} &for\ plane\ stress \quad k = (3-\nu)/(1+\nu) \\ &for\ plane\ strain \quad k = 3-4\nu \end{aligned} \qquad (۱۷-۲)$$

[1] Hutchinson–Rice–Rosengren

[2] Kolosov

بنابر این میتوان روابط (۲-۱۵)و(۲-۱٦) را به صورت زیر نیز بسط داد:

$$[B_\alpha] = [\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta] \qquad (۱۸-۲)$$

که (۲-۱۸) در واقع ایده ی اصلی مسائل نوک ترک می باشد. بنابر این با توجه به مفاهیم ذکر شده در فوق تابع زیر برای غنی سازی پیشنهاد گردید:

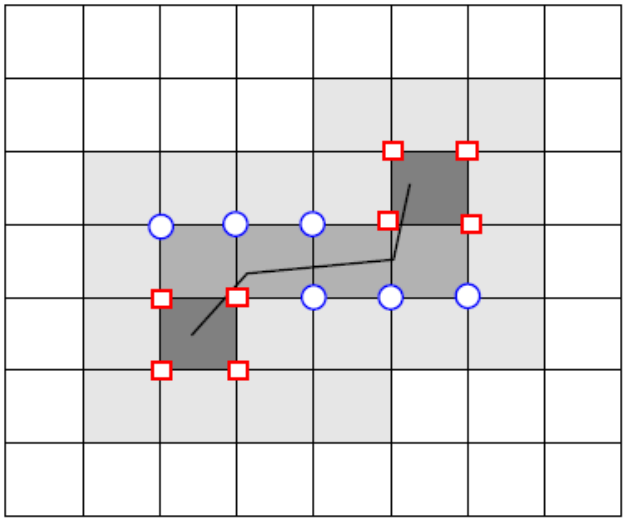
$$U = \sum_{i\in N} N_i(x)U_i + \sum_{i\in N_{cut}} N_i(x)H(x)a_i + \sum_{i\in N_{front}}\sum_{\alpha} N_i(x)B_\alpha(x)b_{i,\alpha} \qquad (۱۹-۲)$$

در روابط فوق N مجوعه ی نقاط موجود در روش اجزا محدود استاندارد می‌باشد. N_{cut} مجموعه نقاطی هستند که ترک از المان های آن ها عبور کرده است و در اصطلاح آن ها را بریده است این نقاط در شکل با دایره مشخص شده است. N_{front} مجموعه ی نقاطی است که نوک ترک در المان های آن ها قرار گرفته است این نقاط نیز در شکل با علامت مربع مشخص گریده است.

N_i نیز توابع شکل استاندارد در روش اجزا معمولی استاندارد می باشد. H نیز تابع پرش هویساید می باشد. در این روش این تابع را به شکل دیگری تعریف می نمایند به این صورت که مقدار تابع برابر ۱ است اگر X بالای ترک باشد و برابر ۱- است اگر X زیر ترک باشد. تابع B_α نیز از مباحث فوق نشئت گرفته است و به صورت زیر بیان میگردد:

$$[B_\alpha] = [\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta] \qquad (۲۰-۲)$$

شکل ۲-۱۵ نیز نقاط غنی سازی شده با استفاده از هریک از توابع را به تصور میکشد.



شکل ۲-۱۵: نقاط تحت تاثیر توابع عادی غنی سازی و توابع نوک ترک[۸]

۲-۱۸- مدل سازی برای انواع مسائل ترک

در ادامه ی تلاش هایی که در زمینه مدل سازی انواع ترک ها صورت گرفته شد، اقدامات گسترده ای برای مدل سازی سایر روابط برای نوک ترک ارائه گردید. از جمله مباحث مهمی که در این زمینه صورت گرفته است می توان به توابع غنی سازی برای مصالح پلاستیک، ترموالاستیک، گسیختگی های هیدرولیکی و سایر موارد اشاره نمود. به دلیل حجم بالای این توابع آن ها در جدول ۲-۱ برای انواع مسائل بیان گردیده است[۸].

جدول ۲-۱: : انواع توابع غنی سازی برای انواع مسائل[۸]

نوع مساله	غنی سازی
مصالح ایزوتروپ	Heaviside: $\psi(\mathrm{x}) = \mathrm{sign}(\phi(\mathrm{x}))$ $\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}$, $\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}$, $\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta$, $\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta$.
مصالح ارتوتروپ	$\sqrt{r}\cos(\frac{\theta_1}{2})\sqrt{g_1(\theta)}$, $\sqrt{r}\cos(\frac{\theta_2}{2})\sqrt{g_2(\theta)}$, $\sqrt{r}\sin(\frac{\theta_1}{2})\sqrt{g_1(\theta)}$, $\sqrt{r}\cos(\frac{\theta_2}{2})\sqrt{g_2(\theta)}$. $r\sin(\frac{\theta}{2})$, $r^{\frac{3}{2}}\sin(\frac{\theta}{2})$, $r^2\sin(\frac{\theta}{2})$.
صفحه ی Mindlin-Reissner	Transverse displacements, $\sqrt{r}\sin(\frac{\theta}{2}), r^{3/2}\sin(\frac{\theta}{2})$, $r^{\frac{3}{2}}\cos(\frac{\theta}{2}), r^{\frac{3}{2}}\sin(\frac{3\theta}{2}), r^{\frac{3}{2}}\cos(\frac{3\theta}{2})$; Rotation displacements $\sqrt{r}\sin(\frac{\theta}{2})$, $\sqrt{r}\cos(\frac{\theta}{2})$, $\sqrt{r}\sin(\frac{\theta}{2})\sin\theta$, $\sqrt{r}\cos(\frac{\theta}{2})$,$\sqrt{r}\cos(\frac{\theta}{2}\sin\theta)$.
صفحه ی Kirchhoff-Love	$r^{\frac{3}{2}}\sin(\frac{3\theta}{2})$, $r^{\frac{3}{2}}\cos(\frac{\theta}{2})$, $r^{\frac{3}{2}}\sin(\frac{3\theta}{2})$, $r^{\frac{3}{2}}\cos(\frac{\theta}{2})$.
مصالح تراکم ناپذیر	$\frac{1}{\sqrt{r}}\sin(\frac{\theta}{2})$, $\frac{1}{\sqrt{r}}\cos(\frac{\theta}{2})$.
مصالح پلاستیک	$r^{\frac{1}{n+1}}\sin(\frac{\theta}{2})$, $r^{\frac{1}{n+1}}\cos(\frac{\theta}{2})$, $r^{\frac{1}{n+1}}\sin(\frac{\theta}{2})\sin(\theta)$, $r^{\frac{1}{n+1}}\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\theta)$, $r^{\frac{1}{n+1}}\sin(\frac{\theta}{2})\sin(3\theta)$, $r^{\frac{1}{n+1}}\cos(\frac{\theta}{2})\sin(3\theta)$.
مصالح ترموالاستیک	Temprature field : $T = -\frac{K_T}{k}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\cos(\frac{\theta}{2})$; Flux : $\mathrm{q} = \frac{K_T}{\sqrt{2\pi r}}\begin{pmatrix}\cos(\frac{\theta}{2})\\ \sin(\frac{\theta}{2})\end{pmatrix}$.
ترک هم تراز با درون سطح ماده	$\sqrt{r}\cos(\epsilon\log r)e^{-\epsilon\theta}\sin\frac{\theta}{2}$, $\sqrt{r}\cos(\epsilon\log r)e^{\epsilon\theta}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta$, $\sqrt{r}\cos(\epsilon\log r)e^{-\epsilon\theta}\cos\frac{\theta}{2}$, $\sqrt{r}\cos(\epsilon\log r)e^{\epsilon\theta}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta$, $\sqrt{r}\cos(\epsilon\log r)e^{\epsilon\theta}\sin\frac{\theta}{2}$, $\sqrt{r}\sin(\epsilon\log r)e^{\epsilon\theta}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta$, $\sqrt{r}\cos(\epsilon\log r)e^{\epsilon\theta}\cos\frac{\theta}{2}$, $\sqrt{r}\sin(\epsilon\log r)e^{\epsilon\theta}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta$, $\sqrt{r}\sin(\epsilon\log r)e^{-\epsilon\theta}\sin\frac{\theta}{2}$, $\sqrt{r}\cos(\epsilon\log r)e^{-\epsilon\theta}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta$, $\sqrt{r}\sin(\epsilon\log r)e^{\epsilon\theta}\sin\frac{\theta}{2}$, $\sqrt{r}\sin(\epsilon\log r)e^{\epsilon\theta}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta$.
مواد پیزوالاستیک	$\sqrt{r}f_1(\theta)$, $\sqrt{r}f_2(\theta)$, $\sqrt{r}f_3(\theta)$, $\sqrt{r}f_4(\theta)$, $\sqrt{r}f_5(\theta)$, $\sqrt{r}f_6(\theta)$.
مواد مگنتوالکتروالاستیک	$\sqrt{r}\rho_1\cos(\frac{\theta_1}{2})$, $\sqrt{r}\rho_2\cos(\frac{\theta_2}{2})$, $\sqrt{r}\rho_3\cos(\frac{\theta_3}{2})$, $\sqrt{r}\rho_4\cos(\frac{\theta_4}{2})$, $\sqrt{r}\rho_1\cos(\frac{\theta_1}{2})$, $\sqrt{r}\rho_2\cos(\frac{\theta_2}{2})$, $\sqrt{r}\rho_3\cos(\frac{\theta_3}{2})$, $\sqrt{r}\rho_4\cos(\frac{\theta_4}{2})$.
ترک های پیچیده	$\Delta H(\xi) = 0$
گسیختگی هیدرولیکی	$r^{\lambda}\cos(\lambda\theta)$, $r^{\lambda}\sin(\lambda\theta)$, $r^{\lambda}\sin(\theta)\sin(\lambda\theta)$, $r^{\lambda}\sin(\theta)\cos(\lambda\theta)$.
نوک ترک در پلی کریستال	$\Re[r(\mathrm{x})\Psi(\Theta(\mathrm{x}))]$

فصل سوم

روش اجزای محدود تطابقی

۳-۱- مقدمه

به طور کلی زمانی که مهندسان با مسائل پیچیده مواجه میگردند که راه حل تحلیلی در آن وجود ندارد و یا آن راه حل تحلیلی بسیار دشوار برای حل می باشد، لذا روش های عددی را در اینگونه موارد بر می‌گزینند. در روش اجزا محدود که یکی از روش های عددی می باشد، اصولا افزایش المان ها باعث افزایش دقت در مسائل نیز میگردد. این افزایش معمولا با دو رویکرد اتفاق می افتد:

۱) افزایش تعداد گره ها که در نتیجه باعث افزایش تعداد معادلات و در نتیجه باعث افزایش دقت جواب ها میگردد.

۲) افزایش تعداد المان ها که در واقع باعث ریزتر شدن المان ها میگردد. و این موضوع باعث کاهش خطای محاسباتی در مساله می شود.

در روش اجزا محدود معمولی حل مساله بر مبنای نحوه‌ی شبکه بندی مسائل که به صورت سنتی انجام گرفته است می‌باشد و لزوما شبکه بندی انجام شده بر اساس بهینه ترین شبکه بندی و دقیق ترین جواب نیست. در واقع می توان گفت که دقت جواب ها ارتباط نزدیکی با نحوه‌ی شبکه بندی در مساله دارد. بنابراین نیاز به یک راه حل دوم در مساله حس می‌شود تا بتواند بهترین شبکه بندی در مساله را ارائه دهد.

روش اجزا محدود تطابقی روشی است که سعی می کند به طور خودکار مساله را شبکه بندی، اصلاح، درشت و ریز کردن المان ها و همچنین المان ها را جابجا نماید تا بهترین المان بندی که دقیق ترین جواب در مساله را میدهد ارائه نماید. در واقع این روش با ارائه ی یک استراتژی سعی می کند آن المانی را که نیاز به اصلاح و تغییر دارد را بیابد.

با توجه به مفاهیم فوق می توانیم نکات زیر را استخراج نماییم:

۱) روش های عددی میتوانند به وسیله ی افزایش المان ها بهتر شوند، افزایش درجه ی تابع جواب پیشنهادی و یا استفاده از هر دو عمل فوق.

۲) نحوه‌ی انتخاب شبکه ای که نیاز به اصلاح و پالایش دارد بدین صورت است که اولا میزان پالایش و اصلاح بستگی به مقدار دقت مورد نیاز در مساله دارد همچنین برای یافتن المان نهایی نیاز به حضور چند سیکل برای یافتن شبکه سازگار[۱] با مساله می باشد.

در ادامه نیز ممکن است که این سوال پیش آید که آیا نیاز به اصلاح و تطابق در تمامی المان ها وجود دارد یا خیر؟ که در پاسخ باید گفت که همیشه بدین صورت نیست و در واقع برای مهندسان از نظر حجم محاسبات اقتصادی نیست. بنابراین میتوان نتیجه گرفت که دو نوع رویکرد در مورد اصلاح و پالایش شبکه بندی وجود دارد:

۱) حالت یکنواخت [۲] : در این حالت تمامی شبکه های موجود در مساله تقسیم به تعداد کوچکتر می‌گردد و درجه ی چند جمله ای نیز افزایش می‌یابد . البته این رویکرد از نظر حجم محاسبات به هیچ عنوان به مهندسان توصیه نمی گردد.

۲) حالت انتخابی [۳] : در این رویکرد تنهادر موارد انتخابی المان ها ریز می‌گردد و درجه ی چند جمله ای افزایش می‌یابد.

۳-۲- روش های اصلاح شبکه[۴]

به طور کلی چهار روش برای اصلاح شبکه بندی وجود دارد که به صورت زیر است :

---

[۱] Mesh adaptation
[۲] Uniform
[۳] Selective
[۴] Mesh refinment

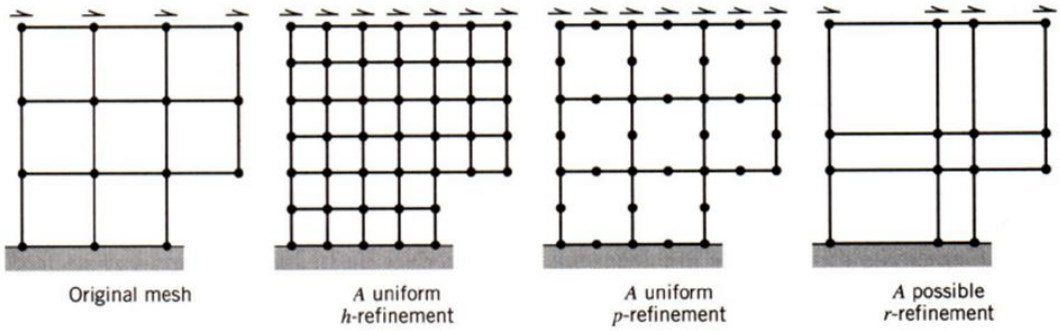
۱) h-refinement : در این روش تنها ابعاد المان تغییر میکند.

۲) p-refinement : در این روش درجه ی درون یابی المان ها افزایش می یابد به عبارت دیگر تعداد گره ها در المان افزایش می یابد.

۳)hp-refinement : این روش ترکیبی از روش ۱و۲ می باشد.

٤) r-refinement : در این روش تعداد نقاط ثابت و تنها موقعیت آن ها تغییر می کند.

شکل ۳-۱ به صورت شماتیک روش های اصلاح شبکه را به تصویر می‌کشد.



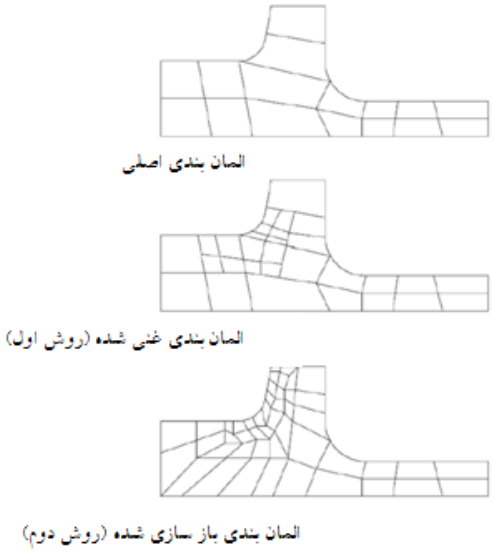
شکل ۳-۱: روش های اصلاح شبکه[١٤]

۳-۳- روش اصلاح –h [۱]

در این روش نیز به دو صورت عمل میگردد. روش اول این است که ساختار شبکه بندی حفظ گردد و تنها با ریز کردن المان ها در مکان مورد نظر به پالایش المان پرداخته گردد. این روش اصطلاحا غنی سازی المان گفته می شود. روش دوم نیز اینکه المان کلا بازسازی می شود و در واقع در مکان مورد نظر

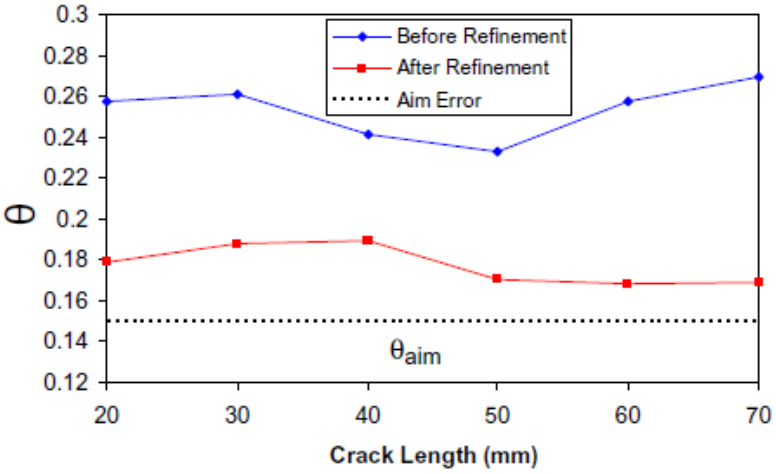
[۱] h-refinement:

شبکه بندی جدیدی صورت می‌گیرد. شکل زیر تصویر بهتری از این دو روش ارائه میدهد[١٤].همچنین شکل زیر روش های اصلاح h را به تصویر می‌کشد.



شکل ۳-۲: روش های اصلاح h [١٤]

به عنوان مثال در مرجع [١٥] با استفاده از روش اصلاح شبکه توانسته است میزان خطای بوجود آمده در مساله را تا حد قابل قبولی کاهش دهد، به طوریکه پس از اصلاح شبکه خطای مساله نزدیک به خطای هدف و قابل قبول مساله گشته است.



شکل ۳-۳: نمودار خطای قبل و پس از اصلاح شبکه[١٥]

۳-٤- بکارگیری روش اجزای محدود تطابقی در مسائل ترک

در مسائلی که به کمک روش اجزای محدود حل می شوند، انتخاب شبکه مناسب برای مدل از اهمیت ویژه ای برخوردار است. این شبکه ازطرفی باید به گونه ای باشد که دقت مورد نیاز برای حل مساله را تامین نماید و از سوی دیگر باید هزینه محاسباتی حل را تا حد امکان کاهش دهد. شبکه ای با این خصوصیات را شبکه بهینه[۱] می نامیم. شبکه بهینه در طول حل مساله ثابت نمی‌ماند و بسته به شرایط مساله و میزان و جهت رشد ترک تغییر خواهد کرد به طوری که تا قسمتی از بارگذاری یک شبکه خاص بهینه است ولی با پیشرفت بارگذاری آن شبکه دیگر مطلوب ما نبوده و نیاز به شبکه بندی مجدد مساله خواهد بود. در این روش شبکه اجزای محدود خود را با حل مساله در هر مرحله تطبیق می دهد، از این رو این روش را روش اجزای محدود تطابقی می‌نامند.

اثر این آنالیز بر کاهش هزینه محاسباتی کاملا" موثر می باشد. به عنوان نمونه در یک مساله الاستوپلاستیک (نمونه کششی CT) با ۵۰۰۰ درجه آزادی در یک سیستم رایانه ای مشخص زمان آنالیز حدود یک ساعت اندازه گیری شد و همین مساله با یک شبکه ریزتر و ۳۰۰۰۰ درجه آزادی نزدیک به ٦۰ ساعت رسید[١٦]. بنابراین مشخص است که هزینه محاسباتی با افزایش درجات آزادی به صورت نمائی رشد میکند. در حالی که با یک آنالیز تطابقی که برای این مساله در حدود یک ساعت به طول انجامید، یک شبکه بهینه با زمان آنالیز ٤۰ ساعت به دست آمد که نشان از صرفه جوئی قابل ملاحظه در زمان آنالیز میباشد.

در تقسیم بندی دیگری که می‌توان برای روش اجزا محدود تطابقی انجام داد، معمولا دو نوع رویکرد متفاوت را بیان مینمایند: ۱- روشهای مبتنی بر باقیمانده ها[۲] و ۲-روشهای مبتنی بر بهبود جوابها[۱].

---

[۱] Optimal Mesh

[۲] Residual Based Methods

در روشهای مبتنی بر باقیمانده ها که در ابتدا توسط بابوسکا و ری هین بولت[۲] ارائه گردید، نتایج حل به روش اجزای محدود در معادلات حاکم بر سیستم قرار داده می شود و خطا به صورت نرم انرژی و با محاسبه باقیمانده های محلی این معادلات بر روی مجموعه ای از المانها (patch) محاسبه می شود[۱۷].

از سوی دیگر روش های مبتنی بر بهبود جواب که نخستین بار توسط زینکوویچ[۳] و ژئو[۴] ارائه گردید، از یک فرایند بازیابی اطلاعات استفاده می‌شود تا مقادیر دقیقتری برای متغیرها به دست آید [۱۸].

به طور کلی معیاری که برای انتخاب شبکه بهینه وجود دارد این است که این شبکه بهینه کمترین هزینه محاسباتی ممکن را ایجاد کند (حداقل درجات آزادی) و در ضمن خطای جوابهای آن تا حد قابل قبولی کم باشد. بنابراین یک نکته اساسی در روش اجزای محدود تطابقی آن است که یک برآورد مناسب از خطای موجود بر روی دامنه مساله انجام گیرد. در ادامه نحوه برآورد خطای حل اجزای محدود ناشی از یک شبکه مشخص توضیح داده می شود.

۳-۵- ارزیابی خطا[۵]

همانطور که پیش‌تر نیز اشاره گردید به منظور ایجاد شبکه بندی جدید در هر مرحله از مساله نیاز به ارزیابی خطا در مساله می‌باشد. به طور کلی عملیات ارزیابی خطا به دو منظور انجام می‌پذیرد. هدف اول برآورد خطا بر روی شبکه موجود و هدف دوم کاهش این خطا به یک مقدار قابل قبول به کمک شبکه بندی مجدد در مساله می‌باشد.

---

[۱] Recovery Based Methods
[۲] Rheinboldt
[۳] Zienkiewicz
[۴] Zhu
[۵] Error Estimation

منظور از خطای حل خطای ناشی از گسسته سازی مساله می باشد که اختلاف بین جواب دقیق و جواب اجزای محدود می باشد. از آنجا که در بسیاری از مسائل جواب دقیق مساله در دست نمی باشد، به جای خطای دقیق، تخمینی از خطا محاسبه می شود. برای عملیات تخمین خطا روشهای مختلفی توسط محققین پیشنهاد گردیده است.

به طور کلی روشهای تخمین خطا را می توان به دو دسته تقسیم بندی نمود. در روش نخست که روشهای پیش از تحلیل نامیده می شوند با آگاهی قبلی از شکل کلی جواب، می توان تعیین کرد که وقتی تعداد درجات آزادی به سمت بی نهایت می‌رود، نرخ همگرائی حل مساله به صورت کیفی چگونه است. به این ترتیب می توان تاثیر تعداد درجات آزادی لازم بر خطای گسسته سازی را مشاهده نمود. در حالی که در روش دوم که روشهای پس از تحلیل[1] نام دارند از جواب به دست آمده از حل عددی و یک فرض اولیه در مورد شکل جواب برای تخمین خطا استفاده می شود. مزیت اصلی این روش آن است که بر خلاف روش نخست که خطا را به صورت کیفی تخمین میزند، به صورت کمی میزان خطا را برآورد می کند. یکی از تخمینگرهای خطای نوع دوم که در عین ساده بودن، کارایی و دقت خود را نیز نشان داده است، تخمینگری می باشد که توسط زینکوویچ و ژئو پیشنهاد گردیده است که در این تحقیق برای تخمین خطای مسائل رشد ترک استفاده شده است. با توجه به تکینگی تنش در مسائل ترک الاستیک و اهمیت آن، ارزیابی خطا بر روی میدان تنش انجام شده است. فرایند محاسبه این تخمینگر خطا به صورت زیر میباشد.

با توجه به آنکه میدان پیوسته جابجائی در روش اجزای محدود به صورت گسسته در می آید، حل روش اجزای محدود به صورت تقریبی از میدان دقیق جابجائی خواهد بود. جابجائی روی دامنه از طریق اثر دادن توابع شکل بر مقادیر گره ای جابجائی به دست می‌آید. برای رسیدن به یک شبکه بندی مناسب

[1] A Posteriori Error Estimation

ابتدا بایستی جواب های اجزا محدود ناشی از المان بندی دلخواه را با استفاده از متوسط گیری به روی گره های موجود برد. در واقع تنش ها به جای اینکه در المان ها بیان شوند در گره های اطراف المان بیان میشوند. سپس با استفاده از توابع شکل جواب بهبود یافته در نقاط گاوس محاسبه میگردند. (۳-۱ نشان دهنده ی نحوه محاسبه تنش های بهبود یافته میباشد.

$$\sigma^* = N\overline{\sigma}^* \qquad (۳-۱)$$

در رابطه (۳-۱)، σ^* تنش بهبود یافته، N تابع شکل و $\overline{\sigma}^*$ مقادیر تنش در گره ها میباشد.

از آنجایی که جواب های بهبود یافته دارای تقریب مناسب تری نسبت به جواب های واقعی مساله می باشد، لذا میتوان از اختلاف دو جواب به عنوان خطای تقریب مساله استفاده نمود.

$$e_\sigma \approx \sigma^* - \hat{\sigma} \qquad (۳-۲)$$

که $\hat{\sigma}$ جواب مساله در گره ها میباشد. تعریف فوق مقدار خطای برآورد شده را در تک تک نقاط دامنه می دهد، ولی برای ریزسازی شبکه معیار مناسبی نمی باشد. چرا که ممکن است در یک نقطه خاص مثل نوک ترک تنش به سمت بی نهایت برود که خطا در این نقطه بسیار بالا خواهد بود ولی در مجموع خطای کل جواب قابل قبول باشد. از این رو به جای خطای نقطه به نقطه نرم خطا تعریف می شود که به صورت انتگرال عددی از تابع خطا روی دامنه است. یکی از معروفترین نرمهای خطا، نرم $L_۲$ می باشد که در واقع همان جذر مجموع مربعات، ولی به صورت تابع پیوسته میباشد.

$$\|e\| = \left(\int_\Omega e^T e \, d\Omega \right)^{1/2} \qquad (۳-۳)$$

به این ترتیب L_2 نرم تابع خطای تنش برابر خواهد بود با:

$$\|e_\sigma\| = \|\sigma^* - \hat{\sigma}\| = \left(\int_\Omega (\sigma^* - \hat{\sigma})^T (\sigma^* - \hat{\sigma}) d\Omega \right)^{1/2} \qquad (۳-٤)$$

نرم خطای فوق برای کل دامنه محاسبه شده است، ولی می توان آن را روی یک المان تنها نیز محاسبه نمود. از تعریف نرم خطا واضح است که مجموع مربعات نرم خطای کلیه المانها برابر مربع نرم خطای کل دامنه خواهد شد. بنابراین اگر کل تعداد المانها را با m نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\|e_\sigma\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \|e_\sigma\|_i^2 \qquad (۵-۳)$$

برای آنکه شبکه ای به صورت بهینه در آید، باید خطا روی کل دامنه آن به صورت یکنواخت توزیع شود، در غیر این صورت قسمتی از دامنه بیش از حد نیاز ریز و قسمت دیگری از آن خیلی درشت و کم دقت شبکه بندی شده است. بنابراین طبق رابطه فوق کل نرم خطا باید به صورت یکنواخت بین المانها توزیع گردد. مساله توزیع یکنواخت خطا معیاری برای نحوه تولید شبکه جدید میباشد.

۳-٦- بهینه سازی شبکه به صورت تطابقی

حال برای اینکه بتوان مساله ی مورد نظر را با استفاده از روش اجزا محدود تطابقی حل نمود بایستی از ارزیابی خطاهایی که در مساله بدست آمد استفاده نمود. برای اینکار ابتدا بایستی شبکه بندی مساله بر اساس چگالی هر گره مورد بررسی قرار گیرد بدین صورت که میزان تراکم اتصال در هر گره مشخص گردد. سپس با توجه نسبت خطای هدف در مساله و خطای برآورد چگالی جدید در مساله اصلاح گردد. با این کار به چگالی جدید در مساله خواهیم رسید و بسته به میزان خطایی که در مساله در نظر میگیریم اصلاح شبکه انجام میپذیرد.

بنابر این چگالی جدید المان ها از رابطه ی زیر قابل محاسبه می باشد:

$$(h_i)_{new} = \left[\frac{(\|e_\sigma\|_i)_{aim}}{\|e_\sigma\|_i} \right] (h_i)_{old} \qquad (٦-۳)$$

در رابطه‌ی فوق $\left(\|e_\sigma\|_i\right)_{aim}$ خطای هدف می‌باشد که بستگی به دقت مورد نیاز در مساله تعیین میگردد. البته معمولا این خطا حدود ۵درصد در نظر گرفته می‌شود که خطای قابل قبول درساله می‌باشد. $\|e_\sigma\|_i$نیز خطای موجود در هر گره می باشد.

نکته ای که در تولید شبکه جدید وجود دارد آن است که شبکه جدید نسبت به شبکه قدیم لزوما در همه دامنه ریزتر نمی شود، بلکه ممکن است در برخی قسمتها درشت تر نیز شود. این مورد زمانی رخ می دهد که خطای قسمتی از شبکه خیلی کمتر از خطای هدف است. بنابراین در راستای بهینه سازی شبکه و کاهش هزینه محاسباتی آن قسمت از شبکه درشت تر خواهد شد. رابطه فوق اندازه جدید المانها را برای هر المان تعیین می‌کند، ولی مولد شبکه ای که در این کار استفاده شده است، بر مبنای اندازه المانها روی گره ها به تولید شبکه می پردازد. بنابراین یک میانگین گیری ساده روی المانهای متصل به گره، اندازه جدید المان را به صورت گره‌ای می‌دهد. از سوی دیگر برای آنکه مولد شبکه هنگام تولید شبکه جدید بر اساس چگالی المان داده شده دچار مشکل نگردد، از تولید المانهای خیلی درشت و المانهای خیلی ریز اجتناب می گردد. بنابراین یک حد بالا و پائین برای اندازه المانها تعیین می گردد.

$$h_{\min} \le \left(h_i\right)_{new} \le h_{\max} \qquad (۷-۳)$$

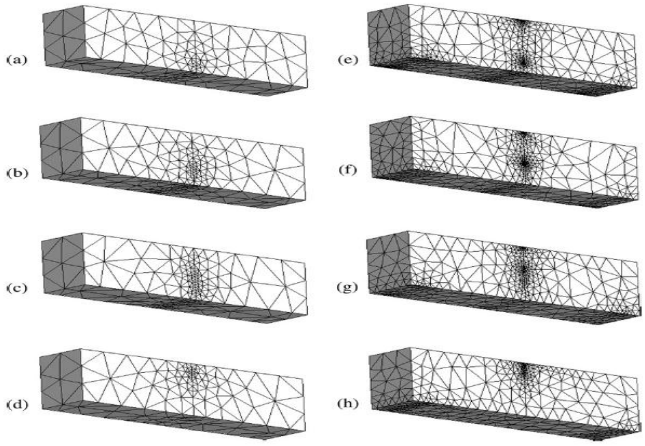
۳-۷- شبکه بندی تطابقی [۱]

پس از بدست آوردن چگالی جدید در گره ها به روش برآورد خطا، حال نوبت به اعمال چگالی جدید نقاط به مدل می‌گردد. در این حالت شبکه بندی مساله با توجه به خطا های موجود در مساله تغییر می‌کند و شرایط بهتری در مساله ایجاد می‌گردد به طوریکه اگر بار دیگر برآورد خطا در مساله

[۱] adapted meshes

انجام دهیم درصد خطا به شکل قابل ملاحظه ای کاهش می‌یابد و دقت جواب ها در مساله افزایش می‌یابد.

از آنجایی که در این پایان نامه مدل هایی مورد بررسی قرار می‌گیرند که دارای ترک می باشند لذا در اطراف ترک به خصوص نواحی نزدیک به نوک ترک خطای ارزیابی بسیار زیاد است. به عبارت دیگر در اطراف این نوک ترک تمرکز تنش بسیار می‌باشد که همین امر سبب افزایش چگالی نقاط این نواحی میگردد[۱۵].

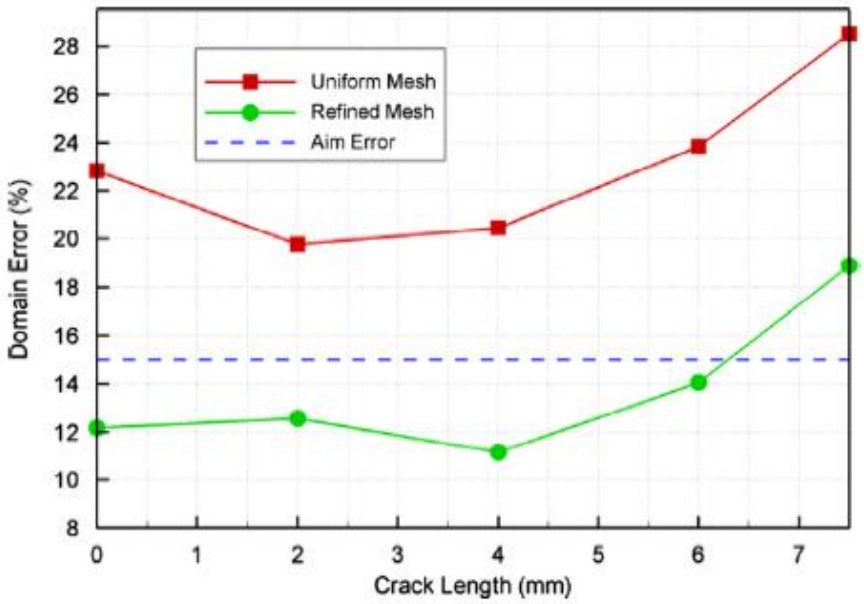


شکل ۳-٤: شکل a-d شبکه بندی اولیه، e-h شبکه بندی ثانویه[۱۵]

۳-۸- مقایسه کاهش خطا

همانطور که پیش تر نیز اشاره گردید روش اجزا محدود تطابقی روشی است که بر مبنای اصلاح شبکه عمل می‌نماید و این اصلاح شبکه در واقع بر اساس ارزیابی خطا صورت میگیرد. به عنوان یک قاعده‌ی کلی که از روی چگالی نقاط در گره ها میتوان استخراج کرد درمیابیم که در جاهایی که خطای ارزیابی بیشتر است، چگالی نقاط نیز کمتر (شبکه بندی ریز تر) و در جاهایی که خطای ارزیابی کمتر، چگالی نقاط نیز بزرگتر (شبکه بندی درشت تر) خواهد بود. همچنین با اعمال روش اجزا محدود تطابقی

بر شبکه بندی مساله و رسیدن به شبکه بندی بهینه مقدار خطای ارزیابی کاهش پیدا میکند. در واقع میتوان گفت که در هر مرحله که عملیات شبکه بندی مجدد در مساله صورت میگیرد مقدار خطای مساله کاهش پیدا میکند تا اینکه در نهایت به مقدار خطای هدف و مورد نظر برسیم که معمولا این خطا را در حدود ۵ درصد در نظر میگیرند.



مقایسه خطا ها قبل و پس از شبکه بندی بر اساس روش اجزا محدود تطابقی[۱۵]

فصل چهارم

آنالیز مسائل ترک و رشد ترک

٤-١- مقدمه

مسئله‌ی وجود ترک و رشد ترک در مدل سازی مسائل مربوط به ترک از اهمیت زیادی برخوردار است. بزرگترین و مهم ترین دلیلی که روش هایی چون روش اجزا محدود استاندارد را با مشکل مواجه می‌سازد بحث رشد ترک می‌باشد چرا که با رشد و گسترش ترک علنا هندسه ی مسئله تغییر میکند و در صورت استفاده از روش اجزا محدود معمولی نیاز به شبکه بندی مجدد در مساله می‌باشد که مدل سازی و حل مساله را با مشکل مواجه میکند. در رشد ترک همواره دو بحث وجود دارد و آن این است که آیا ترک موجود رشد خواهد نمود و در صورت رشد ترک در چه جهتی این رشد انجام می پذیرد؟. در ادامه سعی خواهیم نمود به این سوالات پاسخ دهیم و مقالات مختلف در این زمینه را بررسی نماییم.

٤-٢- فاکتور شدت تنش[١]

قبل از بیان مفاهیم نحوه ی رشد ترک ابتدا بایستی مفاهیم اولیه و پایه‌ای در زمینه ی مکانیک شکست بررسی گردد، یکی از اولین و مهم ترین مفاهیم که در روابط رشد ترک نیز بسیار مهم و کاربردی است بحث فاکتور شدت تنش میباشد. برای تحلیل مسائل مکانیک شکست و مطالعه رشد ترک، ضرایب تمرکز تنش (K)، میزان رهایی انرژی کرنشی و استحکام شکست ماده در مقابل شکست در قالب معیارهای شکست کاربرد ویژه‌ای دارند.

برای اولین بار شخصی به نام اروین در سال ۱۹۵۷ مفهوم فاکتور شدت تنش را به کار برد. او فاکتور شدت تنش را برای بیان مقدار تکینگی معرفی نمود. او نشان داد که تمامی تنش های الاستیک در اطراف نوک ترک دارای توزیع یکسانی میباشد. با توجه به این که توزیع تنش در اطراف نوک ترک دارای توزیع یکسانی میباشد اروین به رابطه ی زیر دست یافت[۵].

[١] Stress intensity factor

$$K \propto \sigma\sqrt{\pi r} \qquad (۱-٤)$$

اروین در واقع با استفاده از رابطه(٤-۱)کمیت تنش محلی را کنترل نمود. حال با استفاده از تعریفی که برای محاسبه ی اطراف نوک ترک وجود دارد، به بیان فاکتور شدت تنش پرداخته می شود. با استفاده از رابطه‌ی زیر میتوان وضعیت تنش اطراف ترک را نشان داد:

$$\sigma_{xx} = \sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}) + ... = \sigma_0\sqrt{\frac{1}{r}}f(\theta) + ... \qquad (۲-٤)$$

البته رابطه ی فوق را نیز به صورت جامع تری نیز می توان بیان نمود و به صورت تانسوری بیان کرد:

$$\sigma_{ij} = r^{-\frac{1}{2}}\{K_I f_{ij}^{I}(\theta) + K_{II} f_{ij}^{II}(\theta) + K_{III} f_{ij}^{III}(\theta)\} + ... \qquad (۳-٤)$$

در رابطه ی فوق σ_{ij} تنش های موجود در اطراف نوک ترک را بیان میدارد. همچنین K_I، K_{II} و K_{III} به ترتیب فاکتور شدت تنش در مود های اول و دوم و سوم را بیان می دارد. با استفاده از همان ایده های فوق می باشد که میتوان فاکتور های تنش در هر مود را استخراج نمود:

$$K_I = \lim_{\substack{r\to 0\\ \theta=0}} \sigma_{yy}\sqrt{2\pi r} \qquad (٤-٤)$$

$$K_{II} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \theta=0}} \sigma_{xy}\sqrt{2\pi r} \qquad (٥-٤)$$

$$K_{III} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \theta=0}} \sigma_{yz}\sqrt{2\pi r} \qquad (٦-٤)$$

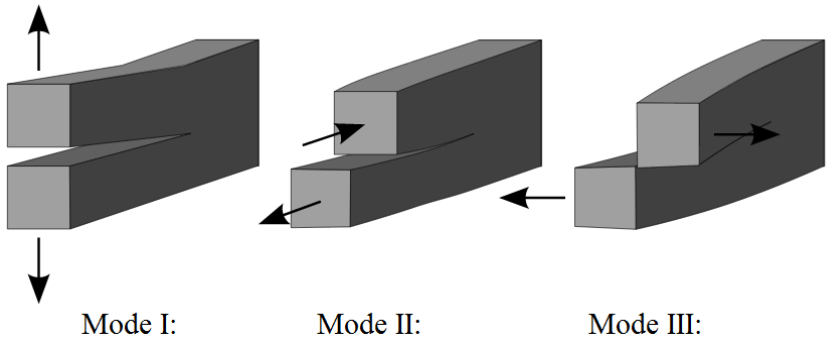
٤-۳- مودهای مختلف بازشدگی

در حالت کلی سه مود برای بازشدگی ترک ها معرفی شده اند که این مود ها در بحث رشد ترک بسیار مهم و تاثیر گذار میباشد و در روابط ارائه شده برای رشد ترک نقش قابل توجهی دارند. این سه مود به صورت زیر معرفی میگردد[۱۹]:

۱) مود I: به این مود اصطلاحا مود بازشدگی گفته می شود در این مود تنش های کششی، بردار نرمال صفحه ی ترک میباشند.

۲) مود II: به این مود ، مود کشویی گفته میشود، در این حالت تنش های برشی موازی صفحه ترک می باشد، همچنین این تنش ها عمود بر جلوی ترک میباشند.

۳) مودIII: این مود ، مود پاره کردن نام دارد، در این حالت تنش های برشی موازی صفحه ی ترک و جلوی ترک می باشند (شکل ٤-١).



شکل ٤-١: مود های مختلف باز شدگی

٤-٤- مقادیر تحلیلی فاکتور شدت تنش

برای بدست آوردن پارامتر فاکتور شدت تنش معمولا روابط بر اساس جابجایی ها و تنش های موجود در اطراف نوک ترک محاسبه می‌شود و از آنجایی که در مسائل مختلف ممکن است هر مود نقشی در ترک بوجود آمده در مساله داشته باشد، در هر مساله مقدار فاکتور شدت تنش از روابط مخصوص به خودش محاسبه میگردد[۲۰]. معمولا این روابط تحلیلی برای چند مساله بیان میگردد و سپس در ادامه و برای دیگر مسائل از روش های عددی برای محاسبه فاکتور شدت تنش محاسبه می‌گردد.

٤-٤-١- فاکتور تنش صفحه مسطح تحت تنش تک محوره

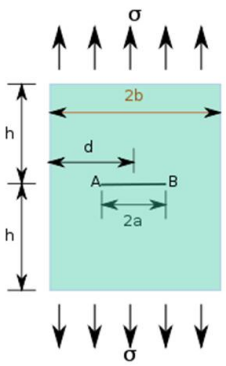
در این مساله رابطه ای که برای پارامتر فاکتور شدت تنش ارائه گردیده است به صورت زیر است

۱) فاکتور شدت تنش برای ترک به طول ۲a و صفحه نا محدود برابر است با:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \qquad (٤-٧)$$

۲) در صورتیکه طول ترک ۲a و صفحه مورد نظر محدود به طول ۲b و ارتفاع ۲h باشد:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\left[\frac{1-\frac{a}{2b}+0.326\left(\frac{a}{b}\right)^2}{\sqrt{1-\frac{a}{b}}}\right] \qquad (٤-٨)$$



شکل ٤-۲: صفحه مسطح تحت تنش تک محوره

٤-٤-۲- ترک لبه ای موجود در صفحه مسطح

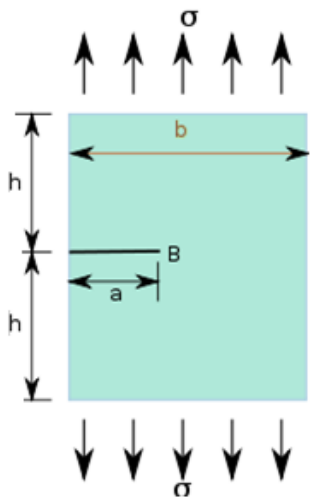
روابط زیر برای حالتی صادق است که نسبت $h/b \geq 0.6$ برقرار باشد. در این صورت خواهیم داشت:

الف) $a/b \leq 0.6$ اگر آنگاه :

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\left[1.12-0.23\left(\frac{a}{b}\right)+10.6\left(\frac{a}{b}\right)^2-21.7\left(\frac{a}{b}\right)^3+30.4\left(\frac{a}{b}\right)^4\right] \qquad (٤-٩)$$

ب) اگر $a/b \geq 0.3$ آنگاه :

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\left[\frac{1+3\frac{a}{b}}{2\sqrt{\pi\frac{a}{b}}(1-\frac{a}{b})^{3/2}}\right] \quad (۱۰-٤)$$



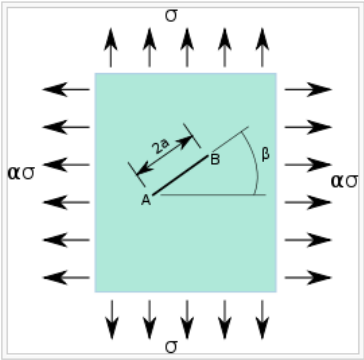
شکل ٤-۳: نمونه ترک لبه ای موجود در صفحه مسطح

٤-٤-۳- ترک مورب

برای ترک مورب که به صورت شکل ٤-٤ میباشد، روابط تحلیلی زیر ارائه گردیده است. در روابط فوق β زاویه ی ترک با محور x ها می باشد.

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\left(\cos^2\beta + \alpha\sin^2\beta\right) \quad (۱۱-٤)$$

$$K_{II} = \sigma\sqrt{\pi a}(1-\alpha)\sin\beta\cos\beta \quad (۱۲-٤)$$



شکل ٤-٤: نمونه ترک مورب

٤-٥- برآورد عددی فاکتور شدت تنش

پارامتر فاکتور شدت تنش یکی از پارامتر های مهم در مباحث ترک می باشد؛ چرا که در نوک ترک تمرکز شدید تنش وجود دارد که همین امر باعث میشود که به نتایج تنش ها در نوک ترک اعتنا نکرد و بایستی پارامتر دیگری مورد بحث قرار گیرد. در این حالت محققین دست به کار شده اند و پارامتر فاکتور شدت تنش را ارائه داده اند. همچنین پارامتر فاکتور شدت تنش یک پارامتر مقایسه ای بسیار خوبی نیز می باشد و در واقع میتوان دقت جواب های بدست آمده را از طریق پارامتر فاکتور شدت تنش کنترل نمود.

برای بیان صحت جواب هایی که از روش های عددی برای آنالیز مساله بدست آوردیم نیز کافی است که پارامتر فاکتور شدت تنش ناشی از جواب های عددی با پارامتر فاکتور شدت تنش ناشی از جواب های تحلیلی مقایسه نماییم.

برای برآورد فاکتور شدت تنش از نتایج عددی نیز تا کنون محققین تلاش های زیادی انجام داده اند و توانسته اند روش های مختلفی با دقت های متنوع برای پارامتر فاکتور شدت تنش ارائه دهند که در ادامه به معرفی این روش ها خواهیم پرداخت.

٤-٦- روش همبستگی تغییر مکان‌ها[1]

یکی از روش های های اولیه و در عین حال ساده که برای برآورد فاکتور شدت تنش به صورت عددی مورد استفاده قرار میگیرد، روش همبستگی تغییر مکان ها می‌باشد. این روش نسبت به دیگر روش ها ساده و راحت تر می باشد اما نسبت به دیگر روش ها دقت کمتری را داراست.

در این روش مستقیما از نتایج روش اجزای محدود استفاده میشود و از جابجایی هایی که در نقاط اطراف نوک ترک بدست می آید، پارامتر فاکتور شدت تنش برآورد میگردد، همچنین این روش برای اولین بار توسط چان[2] ارائه گردید.

چان بر اساس همبستگی جابجایی ها روابط زیر را ارائه داد[٥]:

$$K_I = \frac{G\sqrt{2\pi}(v_b - v_a)}{\sqrt{r}(2-2\nu)} \qquad (١٣-٤)$$

$$K_{II} = \frac{G\sqrt{2\pi}(u_b - u_a)}{\sqrt{r}(2-2\nu)} \qquad (١٤-٤)$$

در روابط فوق G مدول برشی، v_a جابجایی در راستای عمود بر ترک و u_a جابجایی در راستای ترک میباشد.

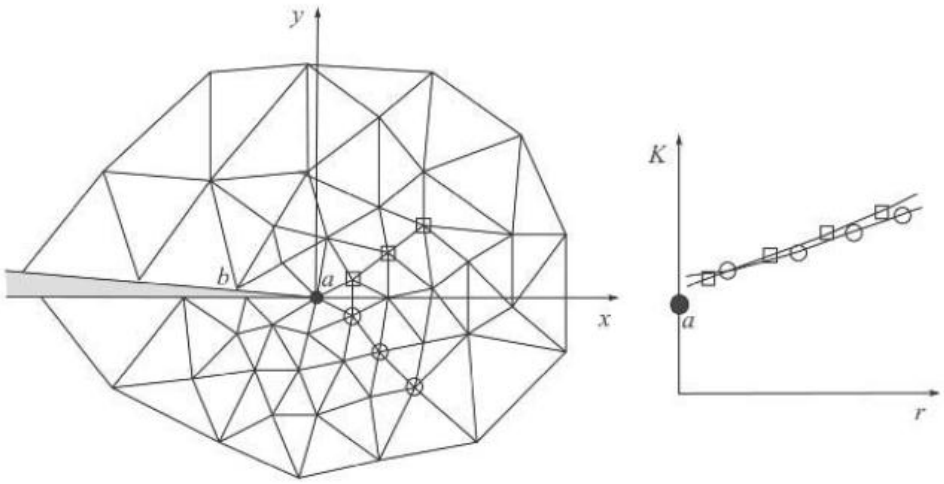
روابط فوق برای حالت کرنش مسطح استفاده می شوند، در صورتی که بخواهیم در مسائل تنش مسطح از روابط فوق استفاده نماییم کافی است به جای ν از $\nu = \nu/1+\nu$ استفاده نماییم.

حال برای بیان فاکتور شدت تنش در نوک ترک کافیست از برون یابی استفاده نماییم.ابتدا روابط فوق را برای u_b و v_b های مختلف محاسبه می نماییم. در این حالات برای r یک مقداری وجود دارد چرا که

[1] Displacment Correlation Method

[2] Chan

r فاصله نقطه ی مورد محاسبه تا نوک ترک می باشد. سپس با استفاده از برون یابی مقدار فاکتور شدت تنش برای نوک ترک یعنی r برابر صفر را محاسبه می نماییم (شکل ٤-٥).



شکل ٤-٥: برآورد فاکتور شدت تنش در نوک ترک[٥]

٤-٧- روش گسترش ترک مجازی [١]

روش گسترش ترک مجازی روشی است که بر مبنای روش انرژی عمل میکند و عملکرد آن نیز بدین صورت است که نرخ کلی تغییرات انرژی پتانسیل سیستم بر اساس گسترش جز کوچکی از ترک (ترک مجازی) محاسبه می نماید.

این روش برای اولین بار توسط پارک و هلن در سال ١٩٧٥ ارائه گردید[٢١]. همچنین این روش در حالت الاستیک خطی میتوان معادل نرخ انرژی آزاد شده نیز در نظر گرفت.

[١] Virtual crack extension method

روابطی که برای این روش ارائه شده است بدین صورت است که انرژی پتانسیل کلی بر اساس روابط اجزای محدود به صورت زیر می باشد:

$$\prod = \frac{1}{2} U^T K U - UP \qquad (۱۵-٤)$$

جاییکه $\prod$ انرژی پتانسیل کل و U مولفه جابجایی نقاط K ماتریس سختی و P مولفه نیرو های خارجی می باشد.

مقدار انرژی آزاد شده برای گسترش کوچک (مجازی) ترک از رابطه زیر محاسبه میگردد:

$$G = \frac{\partial II}{\partial a} = \frac{1}{2} u^T \frac{\partial K}{\partial a} u - u^T \frac{\partial P}{\partial a} + \frac{\partial P}{\partial a}\left[Ku - P\right] \qquad (۱٦-٤)$$

برای ساده سازی رابطه فوق فرض بر این می باشد که مولفه نیروها در طول رشد ترک تغییر نمیکند بنابراین خواهیم داشت:

$$G = \frac{1}{2} u^T \frac{\partial K}{\partial a} u \qquad (۱۷-٤)$$

٤-۸- روش انتگرال بسته ی ترک اصلاح شده [۱]

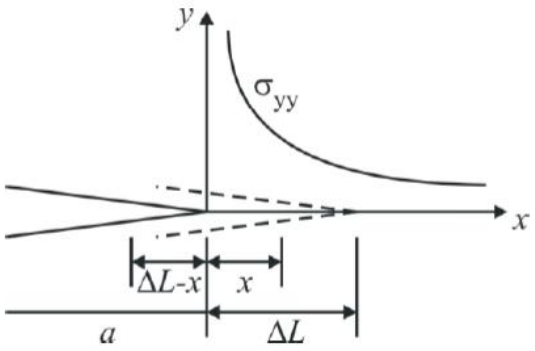
این روش نیز بر مبنای روش انرژی و نرخ آزاد شدن انرژی پتانسیل در مساله می باشد که برای اولین بار توسط ری بیکی[۲] در سال ۱۹۵۷ ارائه گردید[۲۲]. وی روابط زیر را برای مقدار انرژی آزاد شده ارائه داد:

$$G_I = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{1}{2\Delta L} \int_0^{\Delta L} \sigma_{yy}(r = x, \theta = 0)\, u_y(r = \Delta L - x, \theta = \pi)\, dr \qquad (۱۸-٤)$$

[۱] Modified crack closure integral

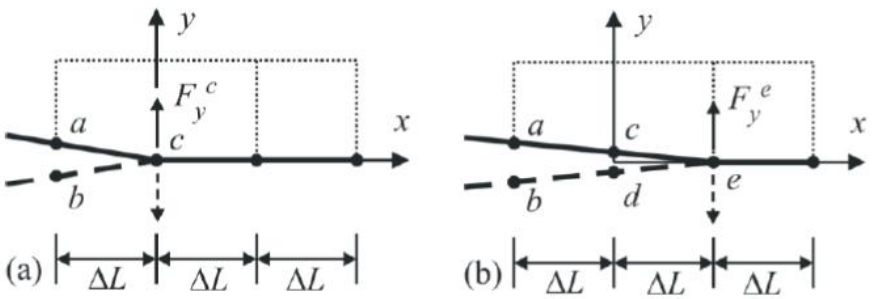
[۲] Rybicki

$$G_{II} = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{1}{2\Delta L} \int_0^{\Delta L} \tau_{xy}(r = x, \theta = 0)\, u_x(r = \Delta L - x, \theta = \pi)\, dr \qquad (۱۹-٤)$$



شکل ٤-٦: وضعیت تنش ها و جابجایی ها در نوک ترک[٥]

حال در صورتیکه بخواهیم از نتایج اجزای محدود نیز در مساله استفاده نماییم، روابط فوق را به شکل ساده تری نیز میتوان ارائه داد. در این خصوص ری بیکی در صورتیکه آنالیز به صورت خطی انجام گیرد میتوان روابط ساده تری برای G ارائه داد. این رابطه بر مبنای نیروی داخلی که در نوک ترک ایجاد میگردد عمل میکند و طی دو مرحله میتوان مقدارG را محاسبه نمود (شکل ٤-٧).



شکل ٤-٧: استفاده از نیروی داخلی نوک ترک[٥]

بنابر این با توجه به شکل ٤-٧ خواهیم داشت:

برای شکل a:

$$G_I = \frac{1}{2\Delta L} F_y^c (u_y^a - u_y^b) \quad and \quad G_{II} = \frac{1}{2\Delta L} F_x^c (u_x^a - u_x^b) \qquad (٢٠-٤)$$

برای شکل b:

$$G_I = \frac{1}{2\Delta L} F_y^c (u_y^c - u_y^d) \quad and \quad G_{II} = \frac{1}{2\Delta L} F_x^c (u_x^c - u_x^d) \qquad (٢١-٤)$$

بنابراین میتوان فاکتور شدت تنش را از جواب های فوق بر اساس روابط زیر استخراج نمود:

برای حالت تنش مسطح:

$$K_I = \sqrt{G_I E} \quad and \quad K_{II} = \sqrt{G_{II} E} \qquad (٢٢-٤)$$

برای حالت کرنش مسطح :

$$K_I = \sqrt{G_I E / (1-\nu^2)} \quad and \quad K_{II} = \sqrt{G_{II} E / (1-\nu^2)} \qquad (٢٣-٤)$$

٤-٩- روش J- انتگرال

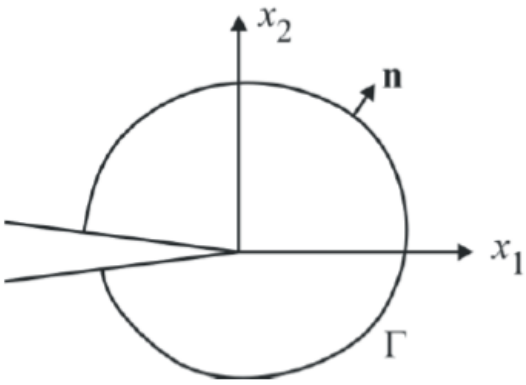
روش J- انتگرال یکی از روش های معروف برآورد فاکتور شدت تنش در مسائل غیر خطی مکانیزم شکست می باشد. این روش اولین بار توسط رایس [١] ارائه گردید[٢٣]. در مسائل الاستیک خطی J- انتگرال میتواند به عنوان میزان انرژی آزاد شده(G) نیز تلقی گردد.

[١] Rice

با استفاده از سیستم مختصاتی خود ترک پارامتر J انتگرال از رابطه ی زیر میتواند استخراج گردد:

$$J = \lim_{x \to 0} \int_{\Gamma} [W n_1 - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} n_j] d\Gamma \qquad (۲٤-٤)$$

در رابطه فوق W چگالی انرژی کرنشی، σ تانسور تنش، n بردار نرمال واحد در ترک و u مولفه جابجایی میباشد.(شکل ٤-٨).



شکل ٤-٨: مختصات داخلی نوک ترک[٥]

نکته قابل ذکر در این خصوص این است که مسیری که برای J انتگرال در نظر گرفته میشود مستقل از مسیر می‌باشد و اصولا بایستی در هر مسیری که اطراف نوک ترک در نظر گرفته میشود جوابهایی یکسان بدست آید.

از آنجایی که برای مسیر مورد نظر در برآورد بایستی حتما مسیر از نقاط گاوس عبور نماید و عملا این کار کار بسیار دشواری در برآورد J انتگرال بدین صورت می باشد، لی[۱] در سال ۱۹۸۵ یک سطح از انتگرال را برای برآورد J ارائه داد که میتوان آن را معادل J در نظر گرفت[٢٤]. بنابراین رابطه J انتگرال را به صورت میتوان نوشت:

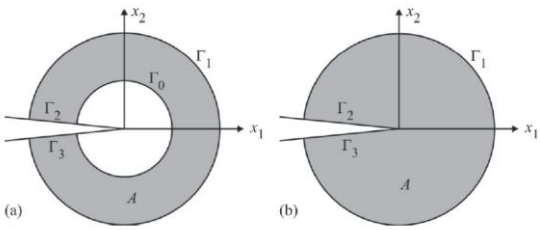
$$\overline{J} = \int_A [\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - W \delta_{1j}] \frac{\partial q_1}{\partial x_j} dA \qquad (۲٥-٤)$$

[۱] Li

در رابطه ی فوف δ دلتای کرونکر و q تابع وزنی که بر اساس دامنه انتگرالی بدست آمده است. بنابراین تابع q به صورت زیر می باشد:

$$q = \sum_i N_i \, q_i \quad and \quad \frac{\partial q}{\partial x_j} = \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial x_j} q_i \qquad (٢٦-٤)$$

مسیری که که برای سطح انتگرالی انتخاب میشود نیز معمولا به صورت زیر انجام میگیرد :



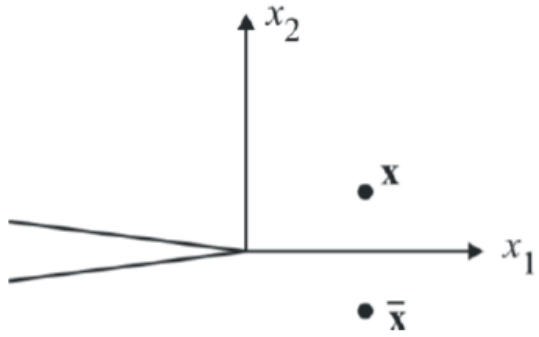
شکل ٤-٩: دامنه‌ی انتگرالی برای برآورد J [٥]

همانطور که قبلا نیز بیان شد J انتگرالی که از (٤-٢٥) بدست می آید همان معادل انرژی آزاد شده یعنی G می باشد، حال بایستی برای جداسازی و استخراج فاکتور شدت تنش که هدف اصلی ما می باشد به صورت زیر عمل نماییم :

$$\overline{J} = G = (K_I^2 + K_{II}^2) / E \qquad (٢٧-٤)$$

در مسائلی که مود دوم نیز وارد کار میشود به دست آوردن پارامتر فاتور شدت تنش کمی دشوار می‌شود و بایستی اقدامات زیر را جهت محاسبه پارامتر های فاکتور شدت تنش را انجام دهیم.

ابتدا بایستی مولفه های جابجایی را که از روش اجزای محدود بدست آوردیم به دو قسمت تقسیم کنیم، این تقسیم بندی بر اساس مختصات محلی نزدیک به نوک ترک صورت میگیرد(شکل ٤-١٠).



شکل ٤-١٠: تصویر شماتیک از دو نقطه متقارن[٥]

بر اساس شکل ٤-١٠ خواهیم داشت:

$$u = u^{I} + u^{II} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} u_1 + \overline{u}_1 \\ u_2 - \overline{u}_2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} u_1 - \overline{u}_1 \\ u_2 + \overline{u}_2 \end{Bmatrix} \qquad (٤-٢٨)$$

به طوریکه:

$$\overline{u}(x_1, x_2) = u(x_1, -x_2) \qquad (٤-٢٩)$$

با همان تجزیه مشابه، برای تنش ها نیز خواهیم داشت :

$$\sigma = \sigma^{I} + \sigma^{II} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sigma_{11} + \overline{\sigma}_{11} & \sigma_{12} - \overline{\sigma}_{12} \\ sym & \sigma_{22} + \overline{\sigma}_{22} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \overline{\sigma}_{11} & \sigma_{12} + \overline{\sigma}_{12} \\ sym & \sigma_{22} - \overline{\sigma}_{22} \end{bmatrix} \qquad (٤-٣٠)$$

بنابراین با جایگذاری هر یک از جابجایی ها و تنش های مربوط به هر مود در رابطه (٤-٢٥)، میتوانیم پارامتر مربوط به هر مود را استخراج نماییم.

$$G_I = \overline{J}_I = \overline{J}(u^{I}) \qquad and \qquad G_{II} = \overline{J}_{II} = \overline{J}(u^{II}) \qquad (٤-٣١)$$

٤-١٠- روش انتگرال متقابل[١]

روش انتگرال متقابل یکی از کامل ترین روش ها و بهترین و دقیق ترین روش برای محاسبه‌ی فاکتور شدت تنش می باشد. این روش به نوعی روش J انتگرال را ارتقا میدهد و با استفاده از یک سری فیلد های کمکی[٢] میتواند پارامتر J را به خوبی و راحت تر محاسبه نماید.

انتگرال اندرکنش متقابلM برای اجسام الاستیک توسط پائولینو[٣] در سال ٢٠٠٤ ارائه گردید. یکی از بزرگترین نقاط ضعف روش های فوق این بود که مقدار J بر اساس ترکیب دو مود در اختیار بود و همین امر باعث میشد تا اقدامات دیگری برای جداسازی و تفکیک مودها انجام دهیم. مزیت استفاده از انتگرال متقابل در برآورد فاکتورهای شدت تنش در این است که همزمان و با یک انتگرال گیری هر دو فاکتور شدت تنش مربوط به دو مد شکست محاسبه میگردند[٢٥].

در این روش باید یک فضای کمکی تنش و کرنش در مساله تعریف گردد. فضای کمکی تنش ها و کرنش ها باید به نحوی انتخاب گردد که معادلات تعادل و شرایط مرزی بدون نیرو بر روی سطوح ترک را در منطقه دامنه معادل A^* ارضا نماید. A^* مساحت معادلی است که انتگرال در آن گرفته میشود. در روش انتگرال متقابل، فضای کمکی تعریف شده و بر فضای اصلی تحمیل می شود به نحوی که مساله مقدار مرزی مورد نظر را ارضا کند. این فضاهای کمکی دقیقاً به نحوی انتخاب می شود تا ارتباط بین فاکتورهای شدت تنش در حالت مد- مرکب و انتگرال متقابل پیدا گردند. لازم به ذکر است که انتگرال M کاملاً منطبق بر انتگرال مستقل از مسیر J می باشد.

با توجه به توضیحات فوق مقدار J به سه بخش تقسیم میشود:

---

[١] Interaction integral method

[٢] Auxiliary fields

[٣] Paulino

$$J = J^{act} + J^{aux} + M \qquad (۳۲-٤)$$

در روابط فوق، J^{act} و J^{aux} به ترتیب J انتگرال هایی هستند که بر مبنای گزاره های دقیق و کمکی تنش و کرنش بیان میگردند.M نیز انتگرال متقابل میباشد.

بنابراین هر یک از سه بخش رابطه (٤-۳۲) به صورت زیر تعیین میگردد:

$$J^{act} = \int_{A^*} [\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - W_s \delta_{1j}] \frac{\partial q}{\partial x_i} d\Gamma \qquad (۳۳-٤)$$

$$J^{aux} = \int_{A^*} [\sigma^{aux}_{ij} \frac{\partial u^{aux}_i}{\partial x_1} - W^{aux} \delta_{1j}] \frac{\partial q}{\partial x_i} d\Gamma \qquad (۳٤-٤)$$

$$M = \int_{A^*} [\sigma_{ij} \frac{\partial u^{aux}_i}{\partial x_1} + \sigma^{aux}_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - W^M \delta_{1j}] \frac{\partial q}{\partial x_j} d\Gamma \qquad (۳٥-٤)$$

کار واقعی، کمکی و متقابل انجام شده نیز بر اساس روابط زیر تعیین میگردد:

$$W_S = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \qquad (۳٦-٤)$$

$$W^{aux} = \sigma^{aux}_{ij} \varepsilon^{aux}_{ij} \qquad (۳۷-٤)$$

$$W^M = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \varepsilon^{aux}_{ij} + \sigma^{aux}_{ij} \varepsilon_{ij}) \qquad (۳۸-٤)$$

همچنین رابطه J با فاکتور شدت تنش در مود های مختلف نیز به صورت زیر است:

$$J = \frac{1}{E'} (K_I^2 + K_{II}^2) \qquad (۳۹-٤)$$

بر اساس رابطه (٤-۳۹)نیز روابط زیر استخراج میگردند:

$$M = \frac{2}{E'}(K_I K_I^{aux} + K_{II} K_{II}^{aux}) \qquad (٤٠-٤)$$

$$K = \frac{E'}{2} M \qquad (٤١-٤)$$

اینک برای برآورد فاکتور شدت تنش در مود I:

$$K_I^{aux} = 1 \ , \ K_{II}^{aux} = 0 \qquad (٤٢-٤)$$

و برای برآورد فاکتور شدت تنش در مود II :

$$K_I^{aux} = 0 \ , \ K_{II}^{aux} = 1 \qquad (٤٣-٤)$$

همچنین E' نیز بسته به این که مساله تنش مسطح یا کرنش مسطح باشد به صورت زیر تعیین می گردد:

$$E' = \begin{cases} E/(1-\nu^2) & plain\ strain \\ E & plain\ strain \end{cases} \qquad (٤٤-٤)$$

٤-١١- شروع و رشد ترک

دو مبحث مهم در آنالیز مسائل ترک بحث رشد و شروع ترک می باشد. به عبارت دیگر در مدل سازی مسئله بایستی بتوان پاسخ داد که آیا در مدل مورد نظر ترک ایجاد میگردد و در صورتیکه ترک ایجاد شد این ترک در کدام مسیر رشد میکند. پاسخ به این سوال ها مبنای کارهای تحقیقاتی صورت

گرفته میباشد و برای هریک از مسائل معیارهای مختلفی بیان گردیده است که سعی میگردد در این پایان نامه توضیحی در باره ی اقدامات صورت گرفته مطرح گردد.

٤-١٢- شروع ترک

در اکثر اقدامات انجام شده و تحقیقات به وجود آمده در بحث شروع ترک از معیار تنش های اصلی استفاده شده است. در[٢٦] جورج آنگر[١] و همکاران در تحقیقی که بر روی مدل سازی رشد ترک های چسبنده در سازه های بتنی انجام داده اند از این معیار استفاده نموده اند. این معیار بدین شکل است که در هرنقطه ی از مدل که تنش موجود در آن به مقدار بیش از مقاومت کششی نمونه مورد نظر برسد در آن صورت ترک در آن نقطه معرفی و مدل میگردد و از آن پس بایستی جهت رشد ترک را بررسی نمود. گینر[٢] نیز از این معیار برای شروع ترک در مسئله‌ی خود استفاده نموده است.

٤-١٣- رشد ترک

در مسئله ی رشد ترک نیز اقدامات بسیاری صورت گرفته است . به عنوان مثال در مرجع [٢٦] اشاره به روش رشد ترک مجازی (VCE) شده است و مطرح شده است که این روش در سال ١٩٩٥ توسط ژی [٣] ارائه گردیده است. همچنین در مرجع [٢٧] ژنجونگ یانگ [٤] روابطی برای رشد ترک در خصوص مواد پلاستیک ارائه شده است. یانگ در این مقاله (٤-٤٥) را برای رشد ترک ارائه میدهد که قضاوت خوبی از نحوه ی عملکرد رشد ترک بدست میدهد:

$$T_r = \frac{\partial}{\partial A}(W_F - U_e - U_p - E_S)\begin{Bmatrix} > 0 & \text{Crack growth} \\ = 0 & \text{Critical condition} \\ < 0 & \text{Does not grow} \end{Bmatrix} \qquad (٤٥-٤)$$

[١] Jo¨rg F. Unger
[٢] Giner
[٣] Xie
[٤] Zhenjun Yang

در رابطه ی فوق U_e و U_P به ترتیب انرژی کرنشی الاستیک ، انرژی کرنشی پلاستیک می باشند. W_F مقدار کار انجام شده توسط اعمال بار خارجی می باشد. E_S نیز سطح از بین رونده ی انرژی میباشد و در نهایت A نیز مساحت کل سطح ترک می باشد. یانگ تعریف دیگری نیز در مقاله ی خود ارائه می دهد و با عنوان انرژی کرنشی آزاد شده این بحث را مطرح می کند. در واقع روابط ٤-٤٦ و ٤-٤٧ دو ترم اول رابطه ٤-٤٥ میباشند:

$$G = \frac{\partial(W_F - U_e)}{\partial A} \qquad (٤٦-٤)$$

یانگ موضوع دیگری نظیر نرخ اتلاف انرژی پلاستیکی نیز مطرح می نماید که با استاده از دو ترم دوم رابطه ی زیر مطرح میگردد که به صورت زیر بیان میشود:

$$R = \frac{\partial(U_P - E_S)}{\partial A} \qquad (٤٧-٤)$$

با استفاده از مباحث فوق میتوان این استنباط را نمود که در صورتی که مقدار انرژی کرنشی آزاد شده بزرگتر از نرخ اتلاف انرژی پلاستیکی باشد ترک مورد بررسی رشد خواهد نمود.

٤-١٤- جهت رشد ترک

در بحث روش اجزا محدو بسط یافته جهت رشد ترک همواره از مسائل مهم و تاثیر گذار می باشد. شاید بتوان گفت مهم ترین دلیلی که روش اجزا محدود استاندارد را در برابر حل مسائل ترک پیچیده کرده و باعث تغییر شبکه بندی مسئله میگردد همین بحث جهت رشد ترک می باشد. در مسائل رشد ترک در صورتی که معیار رشد ترک مهیا باشد ترک در جهتی که معیار رشد ترک به ما می دهد رشد پیدا میکند و به این شکل است که هندسه ی مسئله به طور کلی تغییر پیدا میکند.

جهت رشد ترک همواره نقش مهمی را در مدل سازی های عددی ایفا میکند. چرا که هرگونه نوسان و یا پیش بینی اشتباه از مسیر حرکت باعث مدل سازی غلط و افزایش سطح ترک و در نتیجه نتایج غیر

دقیق در مسئله میگردد. این نتایج غلط همچنین بر منحنی بار-تغییر شکل نیز تاثیر میگذارد و باعث تغییراتی در آن ها میگردد. بنابراین این منحنی ها میتوانند معیار مناسبی برای مقایسه ی دقت این نتایج نیز باشند.

امروزه معیار های مختلفی برای جهت رشد ترک ارائه شده است. از مهم ترین آن ها میتوان به حداکثر تنش کششی محیطی[۱] ، حداکثر سرعت انرژی آزاد شده[۲]، حداقل تراکم انرژی کرنش[۳] اشاره نمود. در مفاهیم روش اجزا محدود بسط یافته اکثر معیارهایی که ارائه شده است بر پایه ی تنش های ماکزیمم اصلی غیر محلی ماکزیمم می باشد. در ادامه سعی خواهیم نمود تعدادی از معیارهای پرکاربرد استفاده شده در مقالات را معرفی و مقایسه ای نسبت به این معیار ها داشته باشیم.

٤-١٤-١- معیار حداکثر سرعت انرژی آزاد شده

این معیار توسط حسین[٤]و همکارانش ارائه گردید. آن ها با بررسی مقاله ای با موضوع انرژی کرنشی آزاد شده برای ترک هایی که ناشی از مود های ۱و ۲ می باشند، توانستند این معیار را برای رشد ترک ها ارائه دهند که بدان اشاره خواهیم نمود. این معیار بیان میدارد که بر اساس سرعت انرژی آزاد شده میتوان مسیر و جهت ترک ها را پیش بینی نمود، بدین صورت که برای توصیف تنش در نوک ترک از یک دامنه انتگرالی استفاده می کنند، این دامنه انتگرالی معمولا با رابطه زیر تعیین میگردد:

$$J_k = \int_{\Gamma} [wn_k - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} n_j] d\Gamma \qquad (٤٨-٤)$$

[۱] Maximum circumferential tensile stress
[۲] Maximum energy release rate
[۳] Minimum strain energy density
[٤] M.A. Hussain

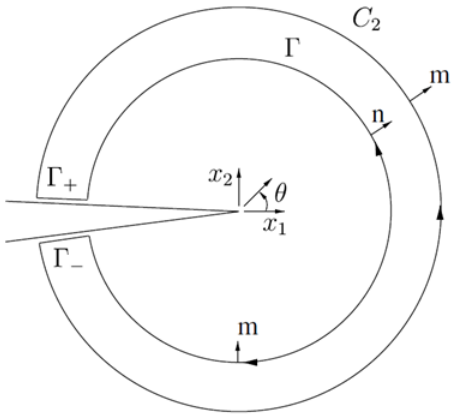
رابطه ی انتگرالی فوق معمولا روی یک مرز بسته مانند Γ حول نوک ترک تعریف میگردد. W نیز در رابطه فوق مقدارتراکم انرژی کرنشی میباشد. حال برای این که بتوانند رابطه ی انتگرالی فوق را محاسبه نمایند روش ها و ایده های مختلفی در خصوص محاسبه ی آن به کارگرفته اند. یکی از این روش ها به کارگیری یک تابع وزنی است که در [۲٦] نحوه ی محاسبه و استفاده از آن آورده شده است.

$$q = \begin{Bmatrix} 1 & on\,\Gamma \\ 0 & on\,C_2 \\ \text{Arbitary} & \text{anywhere else} \end{Bmatrix} \qquad (٤٩-٤)$$

حال برای این که بتوانند از این ضرایب استفاده نمایند رابطه ی انتگرالی را روی یک کنتور بسته ی Γ^* مینویسند. در [۲٦] بیان شده است که این کنتور را می توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\Gamma^* = \Gamma + C_2 + \Gamma_+ + \Gamma_- \qquad (٥٠-٤)$$

شکل ٤-۱۱تصویر خوبی از رابطه ای که بین این مرزها و سطح ها برقرار است به تصویر میکشد



شکل ٤-۱۱: رابطه ی بین مرزها در نوک ترک[٥]

در نهایت با در نظر گرفتن موارد فوق رابطه ی انتگرالی را می توان به صورت زیر نیز ارائه داد:

$$J_k = \int_{\Gamma^*} [\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} q m_j - w q m_k] d\Gamma \qquad (٥١-٤)$$

مرجع[٢٦] بیان میدارد که رابطه ی فوق را میتوان با استفاده از قضیه ی دیورژانس[١] به فرم دیگری بیان کرد. این مرجع رابطه ی زیر را ارائه می دهد:

$$J_k = -\int_{A^*} [w\delta_{jk} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}] \frac{\partial q}{\partial x_j} d\Gamma \qquad (٥٢-٤)$$

در رابطه(٥٢-٤) A^* سطح بسته ای است که بر اساس قضیه ی دیورژانس توسط Γ^* ایجاد میگردد

با استفاده از روابط انتگرالی فوق میتوانیم انرژی آزاد شده در این نمونه را محاسبه نماییم و بر اساس آن مسیر رشد ترک را پیش بینی نماییم. بدین صورت که انرژی آزاد شده تابعی از J١ و J٢ میباشد که از طریق رابطه ی فوق محاسبه شده اند. انرژی آزادشده را بر اساس رابطه ی زیر ارائه می دهند:

$$G = J_1 \cos(\theta) + J_2 \sin(\theta) \qquad (٥٣-٤)$$

برمبنای ماکزیمم تابع فوق مقدار θ قابل محاسبه میباشد:

$$\theta = \arctan(\frac{J_2}{J_1}) \qquad (٥٤-٤)$$

حال براساس رابطه ی فوق میتوانند مسیر رشد ترک را پیش بینی نمایند و از آن در روش اجزا محدود بسط یافته استفاده کرد و آن ها را به کار برد.

[١] Divergence theorem

٤-١٤-٢- معیار حداقل تراکم انرژی کرنشی

این معیار نیز توسط سیه [1] برای بررسی شروع و رشد ترک ارائه گردید. او در بررسی معیار حداقل تراکم انرژی کرنشی بر روی مسائلی که از ترکیب مودها استفاده شده است این معیار را ارائه داد. در این معیار نیز بر مبنای حداقل تراکم انرژی کرنشی میتوان مسیر رشد ترک را پیش بینی نمود.

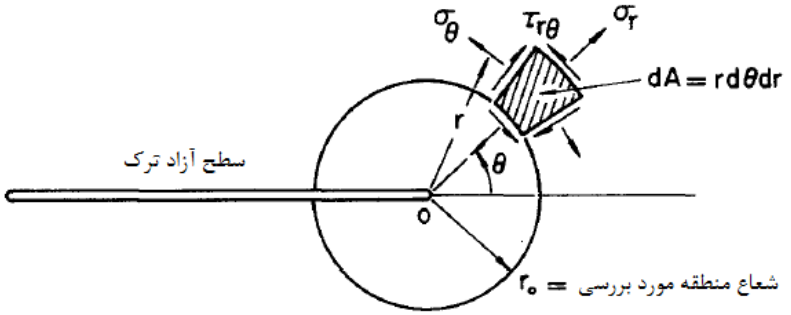
مبنای این روش در مرجع [۲۸] نیز به صورت زیر میباشد و ارائه داده میشود. سیه روابط زیر را برای تنش های موجود در نوک ترک ارائه داد:

$$\sigma_r = 2(2r)^{-\frac{1}{2}}[k_1(3-\cos\theta)\cos(\frac{\theta}{2}) + k_2(3\cos\theta - 1)\sin(\frac{\theta}{2})] + \ldots \qquad (٥٥-٤)$$

$$\sigma_\theta = 2(2r)^{-\frac{1}{2}}[k_1(1+\cos\theta)\cos(\frac{\theta}{2}) - k_2(3\sin\theta)\sin(\frac{\theta}{2})] + \ldots \qquad (٥٦-٤)$$

$$\tau_{r\theta} = 2(2r)^{-\frac{1}{2}}[k_1\sin\theta\cos(\frac{\theta}{2}) + k_2(3\cos\theta - 1)\cos(\frac{\theta}{2})] + \ldots \qquad (٥٧-٤)$$

در روابط فوق σ_r و σ_θ و $\tau_{r\theta}$ مولفه های تنشی که در مختصات قطبی بیان شده اند. شکل ٤-١٢نحوه ی اعمال این تنش ها را به خوبی به تصویر میکشد:



شکل ٤-١٢: بررسی تنش های ترک[۲۸]

بر مبنای همین مولفه های تنشی توانستند جابجایی در نوک ترک را نیز محاسبه نمایند:

[1] SIH

$$u_r = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{4(2\mu)^{\frac{1}{2}}}\{k_1[(2\kappa-1)\cos(\frac{\theta}{2})-\cos(\frac{3\theta}{2})]-k_2[(2\kappa-1)\sin(\frac{\theta}{2})-3\sin(\frac{3\theta}{2})]\}+\ldots \qquad (٥٨-٤)$$

$$v_\theta = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{4(2\mu)^{\frac{1}{2}}}\{k_1[-(2\kappa+1)\sin(\frac{\theta}{2})+\sin(\frac{3\theta}{2})]-k_2[(2\kappa+1)\cos(\frac{\theta}{2})-3\cos(\frac{3\theta}{2})]\}+\ldots \qquad (٥٩-٤)$$

بر اساس روابط فوق سیه توانست رابطه ای بیان کند که در آن مقدار انرژی کرنشی ذخیره در المان dA بدست آید. وی در همین خصوص (٤-٦٠) را ارائه میدهد که برای یک المان در نظر گرفته شده است:

$$dW = \frac{1}{2}[\sigma_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\sigma_\theta(\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta})+\tau_{r\theta}(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r})]dA \qquad (٦٠-٤)$$

همچنین سیه رابطه زیر را نیز ارائه داد:

$$\frac{dW}{dA} = \frac{1}{r}(a_{11}k_1^2+2a_{12}k_1k_2+a_{22}k_2^2)+\ldots \qquad (٦١-٤)$$

در رابطه (٤-٦١) نیز ضرایب a نیز به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{16\mu}[(1+\cos\theta)(\kappa-\cos\theta)] \\ a_{12} &= \frac{1}{16\mu}\sin\theta[2\cos\theta-(\kappa-1)] \\ a_{22} &= \frac{1}{16\mu}[(\kappa+1)(1-\cos\theta)+(1+\cos\theta)(3\cos\theta-1)] \end{aligned} \qquad (٦٢-٤)$$

همانطور که در(٤-٦٢) مشاهده می شود این ضرایب به ثابت های الاستیسیته μ وκ وابسته اند. بر همین مبنا سیه توانست رابطه ای را ارائه دهد که در آن معیار تراکم انرژی محاسبه گردد که آن را با علامت S نیز نام گذاری نمود و (٤-٦٣) را برای این معیار ارائه داد:

$$S = a_{11}k_1^2+2a_{12}k_1k_2+a_{22}k_2^2 \qquad (٦٣-٤)$$

حال بر مبنای (٤-٦٣) وی توانست معیاری را ارائه دهد که بر اساس آن مسیر رشد ترک مشخص شود بدین صورت که برای این که معیار فوق حداقل مقدار خود را داشته باشد بایستی مشتق آن نسبت به θ صفر باشد یعنی:

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 \qquad (٦٤-٤)$$

حال θ ای که در (٤-٦٤) صدق کند جهت رشد ترک را به تصویر میکشد، تنها نکته ی قابل توجه این است که θ بایستی در محدوده ی زیر باشد:

$$-\pi \prec \theta_0 \prec \pi$$

٤-١٤-٣- حداکثر تنش محیطی

یکی از پرکاربردترین و در عین حال ساده ترین معیاری که میتوان برای رشد ترک معرفی نمود معیار حداکثر تنش محیطی می باشد. اساس کار این معیار بر مبنای نسبت فاکتور شدت تنش در مودهای اول و دوم می باشد و بر اساس این نسبت جهت رشد ترک مشخص میگردد.در مرجع [٢٦] رابطه ای برای رشد ترک بر اساس حداکثر تنش محیطی بیان شده است که به صورت رابطه (٤-٦٥)بیان میگردد.

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{4}\frac{K_I}{K_{II}} \pm \frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \qquad (٦٥-٤)$$

در رابطه(٤-٦٥) θ زاویه رشد ترک می باشد. نکته قابل ذکر در این خصوص این است که θ زاویه ای است که با راستای ترک ساخته می شود، در واقع این θ برای مختصات محلی ترک بیان میگردد.از

آنجایی که این معیار یکی از پرکاربرد ترین معیار ها برای تعیین جهت رشد ترک می باشد لذا در این پایان نامه نیز از این معیار جهت رشد ترک در مثال ها استفاده شده است.

فصل پنجم

ترکیب روش اجزای محدود بسط یافته و تطابقی

۵-۱- مقدمه

در فصول قبل به معرفی دو روش، یعنی روش اجزای محدود بسط یافته و روش اجزای محدود تطابقی (اصلاح شبکه) پرداخته شد. هر یک از این دو روش از روش های قدرتمند برای آنالیز مسائل ترک می باشند. روش اجزای محدود بسط یافته اساس کارش افزودن توابعی موسوم به توابع غنی سازی است و بوسیله آن ها ناپیوستگی مورد نظر که همان ترک می باشد مدل میگردد و مساله آنالیز میگردد. اما روش اجزای محدود تطابقی اساس کارش بر مبنای روش اجزای محدود کلاسیک و معمولی می باشد و تنها با تغییر شبکه بندی مساله و ایجاد یک شبکه بهینه سعی در کاهش خطا در جواب های مساله دارد.

اقدامی که در این پایان نامه صورت گرفته است این است که به نوعی دو روش فوق که اساس کار متفاوتی نسبت به یکدیگر دارند را ترکیب نماییم. در واقع سعی در بهبود جواب های روش اجزای محدود بسط یافته با استفاده از روش اجزای محدود تطابقی یا همان اصلاح شبکه را خواهیم داشت.

در این پایان نامه سعی بر این شده است که این ترکیب انجام گردد و نتایج آن با دیگر شرایط مقایسه گردد. در این گزارش نتایج این تکنیک با نتایج روش اجزای محدود معمولی، روش اجزای محدود تطابقی و روش اجزای محدود بسط یافته مقایسه شده است. در ادامه خواهیم دید که این تکنیک نتایج قابل قبولی در اختیار ما قرار میدهد.

۵-۲- اقدامات مشابه

دو روش اجزای محدود تطابقی و روش اجزای محدود بسط یافته دو روش نسبتا قدیمی هستمند که تقریبا از سالهای ۱۹۹۷ ایجاد شده اند و به آنالیز مسائل ترک کمک نموده اند. بنابراین این تکنیک از جهت استفاده از روش حل تکنیک جدیدی نمی‌باشد، این تکنیک از آن جهت جدید است که تا کنون

بدین شکل و با این الگوریتم دو روش اجزای محدود بسط یافته و روش اجزای محدود تطابقی ترکیب نشده اند. بنابراین میتوان گفت که تکنیک پیشنهادی جدید و دارای نوآوری میباشد.

از آن جهت که تکنیک ارائه شده جدید میباشد تا کنون بدین صورت اقدامی صورت نگرفته است اما برداس[۱] اقداماتی نسبتا مشابه اما با تفاوت بسیار عمده انجام داده است. وی در سال ۲۰۱۰ و ۲۰۱۲ با اعمال هموار سازی میدان کرنش[۲] در روش اجزای محدود بسط یافته توانست برداس با استفاده از زیرالمان هایی در نزدیکی ناپیوستگی ها این کار را انجام دهد[۲۹و۳۰]. اما این روش تفاوت اساسی با تکنیک پیشنهادی دارد چرا که اساس این تکنیک برآورد خطا و سپس اصلاح شبکه میباشد.

اقدام دیگری که برداس در سال ۲۰۱۱ انجام داد، محاسبات رشد ترک در اتصالات لحیم کاری بر اساس پدیده ریزساختاری[۳] با استفاده از روش اجزای محدود بسط یافته میباشد[۳۱]. اساس این روش نیز بر اساس محاسبات خستگی و طول عمر اتصالات میباشد و با تکنیک پیشنهادی پایان نامه کاملا متفاوت است.

۵-۳- تکنیک پیشنهادی

همانطور که قبلا نیز بیان شده است هدف از این پایان نامه بهبود روش اجزای محدود بسط یافته با استفاده از به کارگیری تکنیک اصلاح شبکه در آنالیز مسائل ترک می باشد. روش اجزای محدود بسط یافته به عنوان یک روش کارا و موفق در حوزه آنالیز مسائل ترک عمل کرده است. همچنین روش اصلاح شبکه یا به عبارت دیگر روش اجزای محدود تطابقی نیز در آنالیز مسائل ترک بوسیله روش اجزا

---

[۱] Bordas

[۲] Strain smoothing

[۳] microstructural phenomena

محدود معمولی بیان شده است. ایده اصلی که این پایان نامه بر آن استوار است پیاده سازی تکنیک اصلاح شبکه بر روش اجزای محدود بسط یافته می باشد به طوریکه بتوان در حل مسائل دقت جواب ها را افزایش داد و به مقدار تحلیلی آن نزدیک تر نمود.

الگریتمی که بتوان این خواسته را در آن پیاده نمود برای روش اجزای محدود بسط یافته به طور جداگانه وجود نداشت و صرفا نگاه محققین به این روش یک نگاه ابزاری برای حل مسائل آنالیز ترک بود و اگر هم تلاش هایی برای بهبود جواب ها در مسائل مختلف داشتند خود این روش را دستخوش تغییرات مینمودند. برای مثال همانطور که در فصل اول این پایان نامه نیز بررسی گردید محققین در خصوص ترک های چسبنده به نتایج قابل قبولی با استفاده از روش اجزای محدود بسط یافته که مبتنی بر فقط تابع هویساید بود نرسیده بودند و به همین دلیل روابطی را برای نوک ترک چسبنده ارائه دادند و آن را در توابع غنی سازی نوک ترک به کار بردند. بر همین اساس از آنجایی که نگاهی مبتنی بر ارائه یک شبکه بندی هوشمند و دقیق جهت بهبود روش اجزا محدود بسط یافته ارائه نشده بود ما را بر آن داشت تا الگوریتمی ارائه دهیم که بوسیله آن بتوان شبکه بندی صحیح مطابق با شرایط مساله ارائه داد تا به جواب های دقیق تری برسیم.

الگوریتمی که ارائه شده است بر اساس جواب های روش اجزای محدود بسط یافته استوار است بدین صورت که ابتدا مساله ی مورد نظر بر اساس روش اجزای محدود بسط یافته آنالیز میگردد و پس از آن با استفاده از برآورد خطا و ایجاد جواب های بهبود یافته بر اساس توابع شکلی در مساله به یک چگالی جدید میرسیم این چگالی جدید به نرم افزار ایجاد شبکه معرفی میشود و شبکه ی جدید مبتنی بر شرایط مساله ایجاد میگردد.

۵-٤- الگوریتم تکنیک پیشنهادی

در این پایان نامه تکنیک پیشنهادی و ایده کار را با استفاده از برنامه نویسی در زبان نرم افزار متلب[۱] پیش بردیم. گام های اساسی که در این تکنیک پیموده شده است به شرح زیر است.

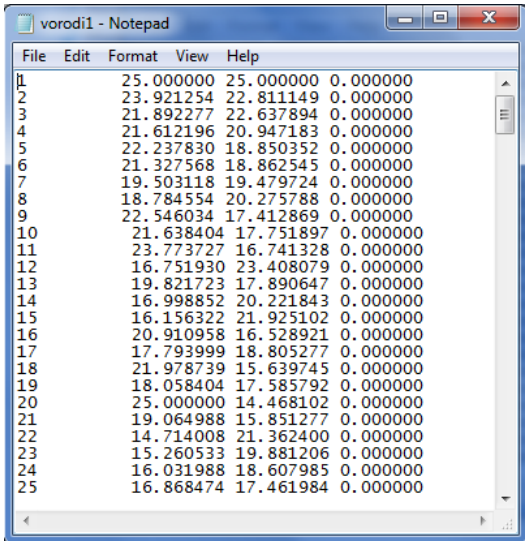
گام اول معرفی هندسه مساله در نرم افزار ایجاد شبکه می باشد که در این پایان نامه از نرم افزار ایجاد شبکه جی آی دی [۲] استفاده شده است. نرم افزار ایجاد شبکه قابلیت شبکه بندی هندسه مدل را داراست. در این مرحله کافی است مساله را با یک شبکه بندی دلخواه ایجاد نماییم در ادامه برنامه ای که نوشته شده است قابلیت آنالیز این شبکه را دارد و مقدار خطای کلی مساله با استفاده از این شبکه بندی را محاسبه مینماید که در صورت عدم دقت کافی خود شبکه جدیدی را به کاربر معرفی مینماید.

گام دومی که برای آنالیز یک مساله پیموده میشود دریافت اطلاعات شبکه بندی و هندسه ی مساله می باشد. برنامه ای که به زبان متلب نوشته شده است قادر است که این اطلاعات را از طریق فایل متنی دریافت و اقدامات مربوط به آنالیز مساله را انجام دهد. منظور از اطلاعات شبکه بندی، مختصات گره ها و نحوه ارتباط گره‌ها در المان ها می باشد. شکل های زیر نمونه ای از این اطلاعات را که از نرم افزار ایجاد شبکه دریافت کرده است و به صورت فایل متنی در آمده است را به تصویر میکشد.

---

[۱] Matlab

[۲] Mesh generator GID

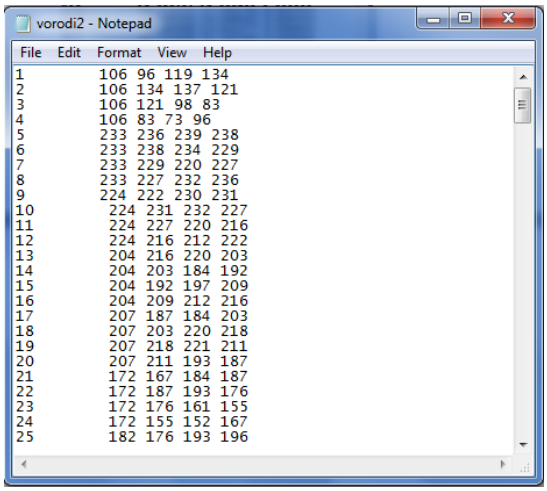


vorodi1 - Notepad

File Edit Format View Help

1	25.000000	25.000000	0.000000
2	23.921254	22.811149	0.000000
3	21.892277	22.637894	0.000000
4	21.612196	20.947183	0.000000
5	22.237830	18.850352	0.000000
6	21.327568	18.862545	0.000000
7	19.503118	19.479724	0.000000
8	18.784554	20.275788	0.000000
9	22.546034	17.412869	0.000000
10	21.638404	17.751897	0.000000
11	23.773727	16.741328	0.000000
12	16.751930	23.408079	0.000000
13	19.821723	17.890647	0.000000
14	16.998852	20.221843	0.000000
15	16.156322	21.925102	0.000000
16	20.910958	16.528921	0.000000
17	17.793999	18.805277	0.000000
18	21.978739	15.639745	0.000000
19	18.058404	17.585792	0.000000
20	25.000000	14.468102	0.000000
21	19.064988	15.851277	0.000000
22	14.714008	21.362400	0.000000
23	15.260533	19.881206	0.000000
24	16.031988	18.607985	0.000000
25	16.868474	17.461984	0.000000

شکل ۵-۱: داده ی مربوط به مختصات گره ها



vorodi2 - Notepad

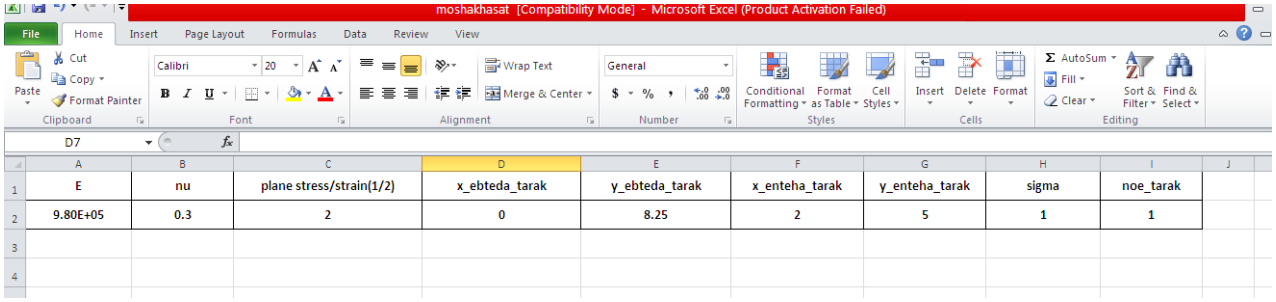
File Edit Format View Help

1	106	96	119	134
2	106	134	137	121
3	106	121	98	83
4	106	83	73	96
5	233	236	239	238
6	233	238	234	229
7	233	229	220	227
8	233	227	232	236
9	224	222	230	231
10	224	231	232	227
11	224	227	220	216
12	224	216	212	222
13	204	216	220	203
14	204	203	184	192
15	204	192	197	209
16	204	209	212	216
17	207	187	184	203
18	207	203	220	218
19	207	218	221	211
20	207	211	193	187
21	172	167	184	187
22	172	187	193	176
23	172	176	161	155
24	172	155	152	167
25	182	176	193	196

شکل ۵-۲: داده مربوط به ارتباط گره ها در یک المان

گام سومی که برای تکنیک پیشنهادی باید انجام داد معرفی گره هایی که تنش یکنواخت به آن ها وارد میشود، می باشد. این کار نیز مطابق گام دوم انجام میشود و با انتخاب آن نقاط در نرم افزار GID گره ها را به صورت فایل متنی در اختیار کاربر قرار داده میشوند. همچنین به همین صورت گره هایی که شرایط مرزی باید در آن ها اعمال شوند انتخاب میگردند و به عبارت دیگر فایل متنی گره هایی که باید بسته شوند به نرم افزار معرفی میگردد.

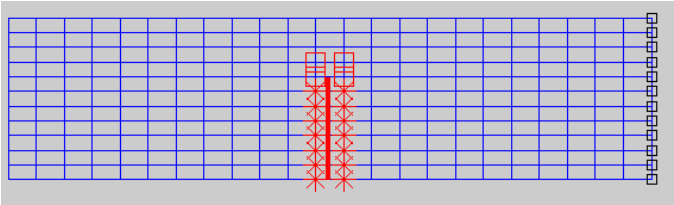
در گام چهارم ویژگی های مکانیکی مساله معرفی میگردد. کد متلب طوری نوشته شده است که این اطلاعات در قالب فایل اکسل توسط کاربر معرفی میگردند. از آنجایی که روش مورد استفاده روش اجزا محدود بسط یافته است لذا مختصات ابتدا و انتهای ترک نیز در همین مساله وارد میشود و نیازی به مدلسازی ترک در هندسه مساله نمی باشد. در واقع مهم ترین مزیتی که روش اجزا محدود بسط یافته نسبت به روش اجزا محدود معمولی دارد همین موضوع است که یک بار برای همیشه مختصات ترک وارد میشود و کار آنالیز انجام میگیرد.



E	nu	plane stress/strain(1/2)	x_ebteda_tarak	y_ebteda_tarak	x_enteha_tarak	y_enteha_tarak	sigma	noe_tarak
9.80E+05	0.3	2	0	8.25	2	5	1	1

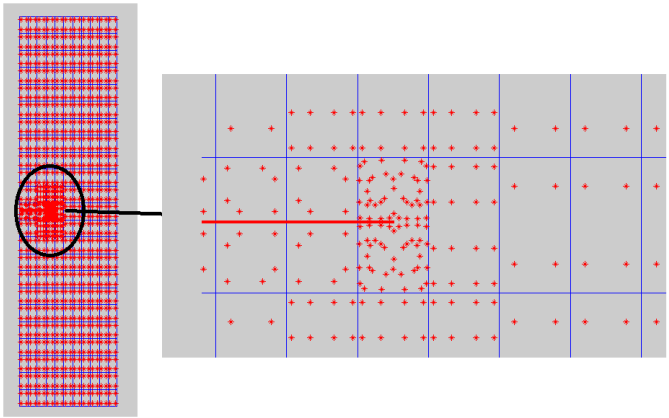
شکل ۵-۳: معرفی مشخصات مکانیکی مساله

در گام پنجم کد مساله به شکلی نوشته شده است که بر اساس مختصات ترک شناسایی المان های درگیر ترک و المان هایی که شامل نوک ترک هستند مشخص میگردد. این کد بر اساس روابط هندسه تحلیلی نوشته شده است و برای شناسایی المان های درگیر ترک بر اساس مختصات و قطع دو خط المان و ترک عمل می نماید و در نهایت مسیر ترک شناسایی میگردد. شکل زیر نمونه ای از شناسایی کد نوشته شده در مسیر ترک می باشد.



شکل ٥-٤: شناسایی مسیر ترک

در گام ششم کد نویسی برنامه به سمتی میرود که بتوان نقاط گاوس را شناسایی و ایجاد نمود. تفاوتی که روش اجزا محدود بسط یافته و روش اجزای محدود عادی بایکدیگر دارند در همین تعداد نقاط گاوس در هر المان می باشد. به طوریکه المان هایی که تحت تاثیر ترک نیستند مشابه روش اجزا محدود عادی عمل مینماید و برای یک المان چهار گره ای تعداد چهار نقطه گاوس کفایت مینماید. برای المان هایی که خود درگیر ترک نیستند اما گره مشترک با المان های درگیر ترک دارند تعداد ١٦ نقطه گاوس و برای المان هایی که ترک از آن ها عبور کرده است و مشمول تابع هویساید هستند نیز ١٢ نقطه گاوس کفایت مینماید. برای المان نوک ترک نیز ٣٩ نقطه گاوس در گیر میشوند. فلسفه این کار نیز بر اساس روش پیشنهادی دالبو[٥] می باشد که هر المان درگیر ترک را به زیر المان هایی تقسیم میکند و برای اینکه دقت انتگرال گیری در المانی که دارای ناپیوستگی میباشد را بالا برد باید از تعداد نقاط گاوس بیشتری استفاده نمود. شکل زیر نیز نحوه شناسایی نقاط گاوس در المان های درگیر ترک را به تصویر میکشد.



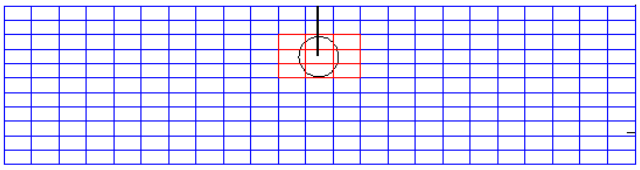
شکل ٥-٥:شناسایی نقاط گاوس

گام هفتمی که در کد متلب، اعمال شده است تشکیل ماتریس سختی می باشد. همانطور که در فصل اول نیز بیان شد طبق رابطه ۲-۱۹ نقاطی گره المانهایی که ترک از آن ها عبور کرده است بوسیله یک ضریب ناپیوستگی و گره های المان ترک بوسیله چند ضریب ناپیوستگی در کنار توابع غنی سازی همراه میشوند که همین امر سبب تغییر در ماتریس همسازی در روش اجزای محدود و در نتیجه تغییر در ماتریس سختی میگردد. در برنامه نوشته شده با تعریف یک تابع وضعیت المان ها و گره های آن ها شناسایی شده و بسته به موقعیت هر المان و هر گره ماتریس همسازی ایجاد و در نهایت ماتریس سختی تشکیل میگردد.

در گام هشتم نیز بردار نیرو تشکیل میشود. در این بخش از برنامه نقاطی که نیرو در آن ها اثر میکند توسط فایل متنی به برنامه معرفی میشوند و برنامه بر اساس مقدار تنش اعمالی بردار نیرو را تشکیل میدهد. همچنین در ادامه شرایط مرزی در مساله اعمال میگردد و معادله اساسی اجزا محدود حل میگردد. با حل این معادله پاسخ تمامی جابجایی ها و ضرایب ایجاد ناپیوستگی محاسبه میگردد.

در گام نهم با استفاده از جابجایی ها و مقادیر ضرایب ناپیوستگی تنش و کرنش در مساله در نقاط گاوس محاسبه میشوند. پاسخ های این بخش در تکنیک پیشنهادی مورد استفاده قرار میگیرد.

در گام دهم اقداماتی در خصوص محاسبه فاکتورشدت تنش انجام و تعیین مسیر رشد ترک انجام میگیرد. همانطور که در فصل سوم نیز بیان شد فاکتور شدت تنش در مسائل ترک بسیار کاربرد دارد و از این پارامتر برای مقایسه جواب های تحلیلی و عددی استفاده شده است. روشی که در کدنویسی این پایان نامه برای برآورد فاکتور شدت تنش استفاده شده است روش انتگرال متقابل می باشد که مفصل در فصل سوم به آن اشاره شده است. در کد نوشته شده با استفاده از مقادیر تنش ها و ایجاد یک مسیر مشخص اطراف نوک ترک پارامتر فاکتور شدت تنش محاسبه میگردد. شکل زیر نحوه تشکیل مسیر اطراف نوک ترک و بدست آوردن فاکتور شدت تنش را نشان میدهد.



شکل ۵-٦: ایجاد مسیر جهت محاسبه فاکتور شدت تنش

گام یازدهم مهمترین و اصلی ترین بخش کد نوشته شده می باشد، در این بخش تکنیک پیشنهادی بر کد اجزای محدود بسط یافته سوار می شود و با جواب های مساله ارتباط برقرار می نماید. در این بخش یک زیر برنامه تعریف میشود که اطلاعات مساله را دریافت و بازخوانی میکند. این اطلاعات شامل مختصات گره ها و ارتباط بین آن ها در المان ها و تنش در نقاط گاوس می باشد. پس از این که این اطلاعات وارد زیر برنامه شد، کد نوشته شده در زیر برنامه طبق مباحث فصل دوم سعی در برآورد خطای مساله مینماید. برآورد خطا به این صورت انجام میگرد که ابتدا کد نوشته شده وضعیت هر گره از لحاظ تعداد نقاط گاوس اطراف گره را بررسی می نماید و سپس مقادیر تنش ها در آن نقاط گاوس اطراف گره، میانگین گیری میشوند. پس از این اقدام با استفاده از رابطه ۳-۱ تنش به کمک توابع شکل دوباره به نقاط گاوس برمیگردد. این تنشی که در این بخش محاسبه میگردد تنش بهبود یافته نام دارد.

در گام دوازدهم عملیات برآورد خطا صورت میگیرد یعنی تنش بهبود یافته از تنش اولیه موجود در نقاط گاوس کسر میگردد با این کار مقدار خطا بدست می آید. البته از آنجایی که سه نوع تنش در مساله محاسبه میگردد،(یعنی تنش برشی، تنش در راستای x و تنش در راستای y) بنابراین بایستی نرمی از آن ها به عنوان تنش در نظر گرفته شود. برای این کار از نرم جذر مجموع مربعات طبق رابطه ۳-۳ استفاده میشود.

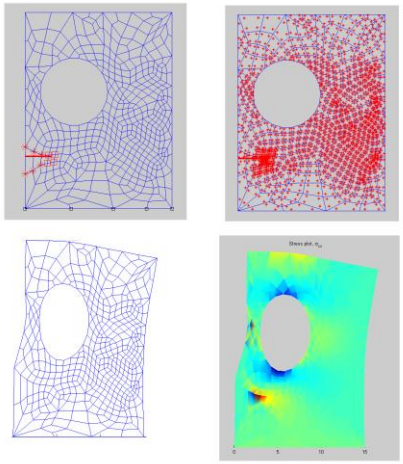
در گام سیزدهم دوباره عملیات قبل این بار برای خطاها تکرار میشود یعنی کافیست خطاهای موجود در نقاط گاوس را با یک میانگین گیری به گره ها منتقل نماییم و در نهایت مقدار خطا در گره بدست می آید. از آنجایی که مقدار خطا در کل مساله باید بررسی گردد و اینکه کنترل گردد که آیا خطا در مساله در حد قابل قبول می باشد یا خیر اقدام دیگری نیز باید انجام گیرد. این اقدام بدین صورت است که یک خطای کلی و به صورت وزنی در کل مساله مورد محاسبه قرار میگیرد یعنی خطای موجود در هر المان با توجه به نسبت آن در المان مورد بررسی قرار میگیرد و با جمع همه ی المان ها به یک خطای کلی در مساله خواهیم رسید. این مقدار بسیار کنترل کننده می باشد. چرا که در ابتدای مساله یک خطای قابل قبول تعریف مینماییم در صورتیکه خطای مساله از خطای قابل قبول بیشتر باشد نیاز به اصلاح مش در مساله وجود دارد.این موارد نیز طبق روابط ۳-٤ و ۳-۵ صورت میگیرد.

در گام چهاردهم بایستی چگالی جدیدی در مساله ایجاد نمود. برای این کار کافیست که یک خطای هدف دیگر که نسبتی از نرم تنش در کل گره ها می باشد در نظر گرفت و بدین ترتیب به نسبتی خواهیم رسید که این نسبت عبارت است از تقسیم خطای هدف به خطای هر گره و در نهایت برای محاسبه چگالی جدید کافیست که این نسبت را که در هر گره بسته به مقدار خطای آن متفاوت است را ضرب در چگالی قدیم مساله نماییم. چگالی قدیمی در هر گره نیز عبارت است از میانگین طول خطوط المان های متصل به گره، طبق رابطه ۳-٦.

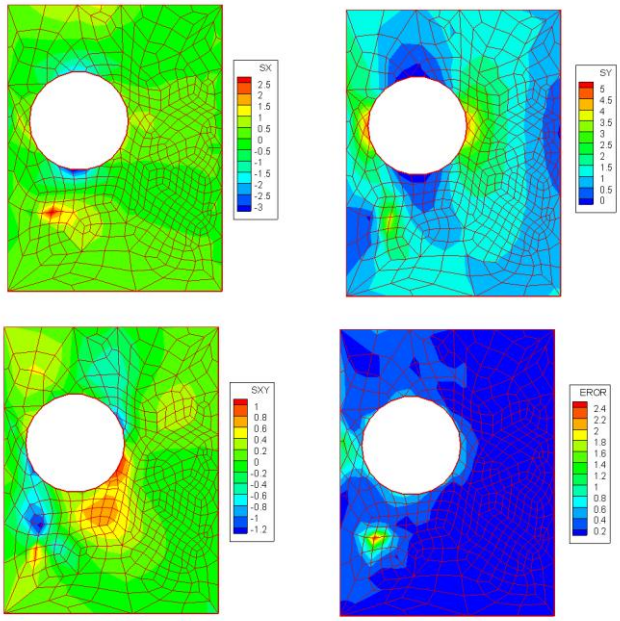
در گام پانزدهم وارد کد اصلی برنامه میشویم، در این بخش خطای کل مساله به کاربر اعلام و در صورت بیشتر بودن خطای مساله از خطای کل برنامه چگالی جدید را به کاربر اعلام مینماید و کاربر پس از ساخت مدل جدید بر اساس این چگالی در نرم افزار GID مجددا اطلاعات هندسی را به برنامه میدهد.

در گام آخر نیز مساله بر اساس پارامتر فاکتور شدت تنش مسیر رشد ترک را پیش بینی مینماید و بر این اساس مشخصات جدید ترک بدست می آید و در نهایت این روال تا گام دلخواه توسط کاربر پیش میرود.

همچنین برنامه طوری تنظیم شده است که در هر مرحله فایل های خروجی از قبیل تنش، کرنش، تغییر شکل مساله، مسیر رشد ترک و فایل های مربوط به کانتور تنش ها ارائه میگردد.



شکل ۵-۷: نمونه ای از خروجی ها



شکل ۵-۸: نمونه خروجی تک پلات

۵-۵- مزایای تکنیک ارائه شده

بزرگترین و اصلی ترین مزیتی که میتوان جهت استفاده از این تکنیک یاد کرد افزایش دقت جواب ها در مساله می باشد به عبارت دیگر با استفاده از این تکنیک میتوان سطح خطاهای مساله را تا حد قابل قبولی کاهش داد. مزیت دیگر که در راستای مزیت قبلی می باشد این است که طبیعتا با کاهش خطای مساله و افزایش دقت جواب ها، جواب مساله به مقدار حل تحلیلی نزدیک میشود. برای کنترل این موضوع نیز در ادامه از فاکتور شدت تنش استفاده شده است و در ادامه خواهیم دید که در صورت استفاده از این تکنیک جواب فاکتور شدت تنش بسیار به مقدار تحلیلی نزدیک خواهد شد.

از دیگر مزایای این تکنیک میتوان به بهبود روش اجزای محدود تطابقی نیز اشاره داشت چرا که میتوان با استفاده از این روش مدلسازی راحت تری نسبت به روش اجزای محدود تطابقی داشت. در روش اجزای محدود تطابقی در هر مرحله از رشد ترک نیاز به بازسازی هندسه مساله و پس از آن اعمال اصلاح شبکه می باشد در صورتیکه در این تکنیک دیگر نیازی به بازسازی هندسی مدل نمی باشد و تنها در صورت نیاز به اصلاح شبکه، عملیات اصلاح شبکه صورت میگیرد که همین امر زمان مدلسازی را بسیار کاهش میدهد.

در واقع میتوان گفت که تکنیک ارائه شده استفاده توام از هر دو روش است و در هر بخش که یک روش ضعف دارد دیگری به کمک آن می آید. در ادامه نمونه هایی از مثال های عددی خواهیم دید و مزایا ی ذکر شده در این روش را با مثال های عددی بیان خواهیم نمود.

۵-٦- نمونه مثال های عددی

در این بخش قصد داریم نتایج تکنیک ارائه شده را مورد بحث و بررسی قرار دهیم و با دیگر نتایج به عنوان صحت سنجی روش مقایسه نماییم. بدین منظور چهار مثال عددی مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

مثال اول ترک لبه ای مستقیم میباشد. در این مثال تنها مود اول فعال شده و بر همین اساس یکی از مثال های در نظر گرفته شده برای این پایان نامه می باشد.

مثال دوم نیز ترک میانی ٤٥ درجه میباشد. در این مثال نیز هر دو مود فعال شده لذا میتواند به عنوان یک مثال خوب برای تست کارایی این روش معرفی گردد.

مثال سوم صفحه ای است که بخشی از آن دارای یک حفره می باشد. این مثال نیز جهت دقت مساله و صحت نتایج در خصوص رشد ترک می باشد چرا که این مثال از مثال های معروف در مسائل رشد ترک می باشد.

مثال چهارم نیز مثال نهایی این پایان نامه می باشد. حل این مثال در پایان نامه نیز اهداف قبلی را دنبال می نماید.

پارامتری که برای مقایسه‌ی این مثال ها استفاده خواهیم کرد دو پارامتر فاکتور شدت تنش و میزان خطای کل مساله می باشد.

۵-۷- مدل سازی

مدلسازی صورت گرفته و حل تمامی مثال هایی که در این پایان نامه بیان شده است توسط کدنویسی به زبان نرم افزار متلب انجام گرفته است. در این کد دو روش اجزای محدود بسط یافته و روش اصلاح

شبکه متناسب با خواسته ی این پایان نامه نوشته شده است و این کد قابلیت تبدیل به یک نرم افزار جهت مدلسازی دیگر مسائل را نیز دارا می باشد.

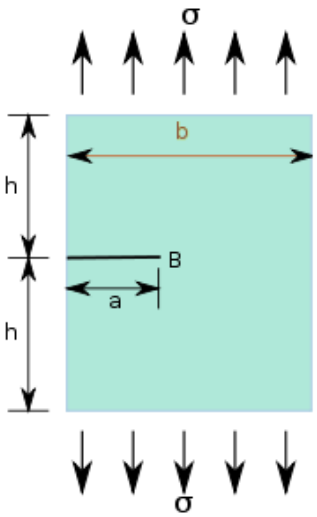
شبکه بندی مسائل نیز از طریق نرم افزار ایجاد شبکه جی آی دی انجام گرفته است. همچنین هنگامی که در کد متلب نیاز به اصلاح شبکه احساس شده و برنامه متلب این موضوع را اعلام نمود، فایلی ایجاد میگردد که در آن بر اساس چگالی جدید به نرم افزار GID منتقل میشود و نرم افزار بر اساس آن فایل، شبکه بندی جدیدی ارائه میدهد و مختصات جدید اعلام میگردد.

شبکه بندی مسائل نیز بر اساس المان چهارضلعی می باشد. همچنین مشخصات هندسی مساله که از طریق نرم افزار GID ایجاد شد از طریق فایل متنی به برنامه متلب منتقل میگردد و فرآیند آنالیز و اصلاح شبکه در این نرم افزار و بر اساس کد نوشته شده انجام میگردد. مشخصات مکانیکی مساله از قبیل مدول الاستیسیته،ضریب پواسون و وضعیت قرار گیری ترک نیز از طریق فایل اکسل ایجاد و سپس کدنوشته شده آن را فراخوانی میکند. برای برآورد فاکتور شدت تنش نیز از روش انتگرال متقابل استفاده شده است. روش اصلاح شبکه نیز بر پایه روشهای پس از تحلیل و نکات مطرح شده در فصل دوم این پایان نامه صورت گرفته است. لازم به ذکر است که تمامی مسائل با المان چهارگوش و از نوع چهارگره ای حل شده است.

همچنین نرم افزار نوشته شده قابلیت ارائه خروجی های مختلف نظیر تغییر شکل، کانتور تنش ها و ارائه ی فایلی جهت ورود به نرم افزار TECPLOT را نیز داراست.

۵-۸- مثال اول (ترک لبه ای مستقیم)

مثال اولی که برای این پایان نامه در نظر گرفته شده است ترک لبه ای مستقیم تحت کشش از هر دو طرف می باشد(شکل ۵-۹).



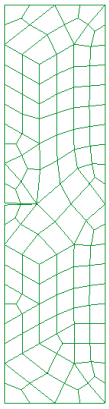
شکل ۵-۹: مثال ترک لبه ای مستقیم

در این مثال طول صفحه $b = 25Cm$ و ارتفاع $2h = 100Cm$ در نظر گرفته می شود. طول اولیه ی ترک نیز $a = 8Cm$ می باشد. نمونه مورد نظر از دو طرف با نیروی گسترده ای به صورت $\sigma = 1 {Kg}/{Cm}$ کشیده می شود. برای رشد ترک نیز در هر مرحله یک گام با طول $2Cm$ در نظر میگیریم. سایر پارامتر های مکانیکی نظیر مدول الاستیسیته و ضریب پواسون را به ترتیب برابر $E = 1000 {Kg}/{Cm^2}$ و $\nu = 0.3$ می باشند.

۵-۸-۱- حل مثال اول با استفاده از روش اجزا محدود معمولی

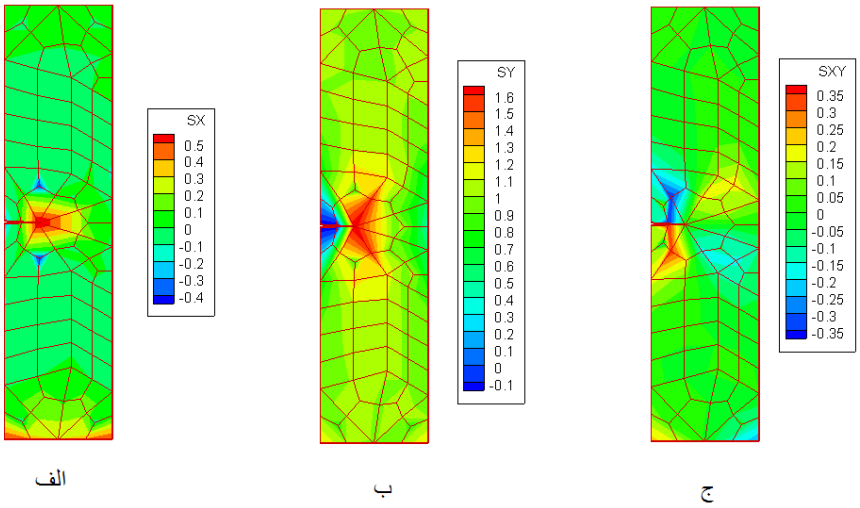
در این بخش قصد داریم مثال اول را با استفاده از روش اجزای محدود معمولی آنالیز نماییم و به نوعی طرح مساله نماییم و مشکلاتی که بر سر این نوع آنالیز وجود دارد را بیان نماییم و در واقع این نتایج را با تکنیک پیشنهادی مقایسه نماییم.

شبکه بندی مساله به صورت کاملا دلخواه در نظر گرفته شده است و ابعاد المان ها تقریبا در تمامی قسمت ها یکسان می باشد. همانطور که در شکل ۵-۱۰ نیز مشاهده میشود شبکه بندی مساله به شکلی است که حتما بایستی لبه ی المان ها بر لبه ی ترک منطبق باشد که این مورد یکی از بزرگترین مشکلاتی است که در سر راه این روش وجود دارد چرا که با رشد ترک هندسه ی مساله به طور کامل تغییر می یابد و نیاز به معرفی وضعیت جدید در نرم افزار GID (نرم افزار تولید شبکه) می باشد.



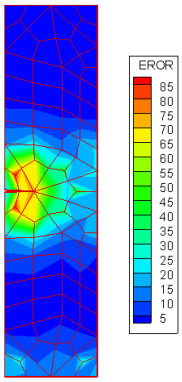
شکل ۵-۱۰: شبکه بندی اولیه در روش اجزای محدود عادی

پس از آنالیز مساله به روش اجزای محدود کانتور تنش هایی که در این مساله ایجاد میگردد به شرح زیر است:



شکل ۵-۱۱: الف) کانتور σ_x ب) کانتور σ_y ج) کانتور τ_{xy}

همانطور که در شکل ۵-۱۱ نیز مشخص است تمرکز تنش اطراف نوک ترک بسیار زیاد است و همین تمرکز تنش باعث بوجود آمدن خطا در مساله میگردد. حال با استفاده از موارد مطرح شده در فصل دوم یک برآورد خطا در این مساله انجام میدهیم. شکل زیر کانتور خطای ایجاد شده را نمایش میدهد. همانطور که در شکل نیز مشخص است خطا اطراف نوک ترک بیشترین مقدار را دارد و بایستی در آن نقاط اصلاح شبکه انجام گیرد.



شکل ۵-۱۲: کانتور درصد خطای ایجاد شده

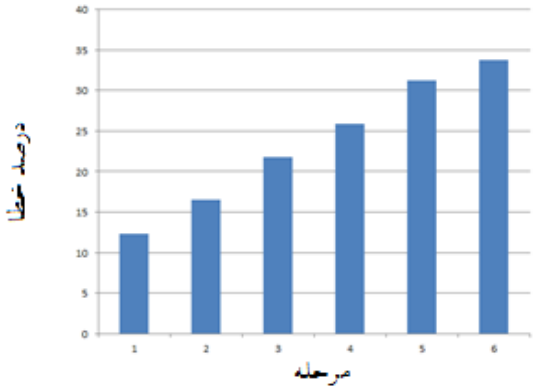
۵-۸-۲- حل مثال اول با استفاده از روش اجزا محدود معمولی همراه با رشد ترک

در این قسمت سعی داریم مثال اول را با استفاده از روش اجزای محدود معمولی حل نماییم و در گام هایی با طول ۲ سانتی متر ترک را رشد دهیم. در این بخش هیچ گونه اصلاح شبکه ای صورت نمیگیرد و با همان خطاهای موجود مساله را رشد خواهیم داد. با حل مساله و رشد آن نتایج جدول زیر حاصل میگردد.

جدول ۵-۱: پارامتر های محاسبه شده در هر مرحله

مرحله	در صد خطا	KI تحلیلی	KI عددی	KII عددی	مختصات نوک ترک
اول	۱۲.۲۹۷۷	۸.٦۹۱۳	۷.۰۳٤٤	۰.۰۰۳۱	(۱۰,٤۹.۹۹۸۲)
دوم	۱٦.٥۲٥۷	۱۱.۷۹۲٤	۸.۹۷۸۰	-۰.۰۰۲۰	(۱۲,٤۹.۹۹۸۷)
سوم	۲۱.۷۹٦۹	۱٦.۲۸۰۰	۱۱.۳٤٥۲	-۰.٦٤٥۲	(۱۳.۹۸۷۳,٥۰.۲۲۳۸)
چهارم	۲٥.۹۱٤٤	۲۲.۹۹٤۲	۱۳.۸۰٤٤	۰.٦۱۲٤	(۱٥.۹۸۲۱,٥۰.۰۷۹۳)
پنجم	۳۱.۲۰۲۷	۳۳.۲۰۳٥	۲۰.٤٥٦۱	۱.۱٦۷۹	(۱۷.۹۷۰٤,٤۹.۸٦۳۰)
ششم	۳۳.٦۹۱٤	٤۸.٤۸٤٦	۳٥.٦٥٤۱	-۰.۱۹٤۳	(۱۹.۹۷۰٤,٤۹.۸٦۹٥)

همانطور که در جدول ۵-۱نیز مشخص است با افزایش طول ترک مقدار ناپیوستگی در جسم بیشتر شده در نتیجه تمرکز شدت تنش افزایش یافته و نهایتا خطای مساله افزایش مییابد.

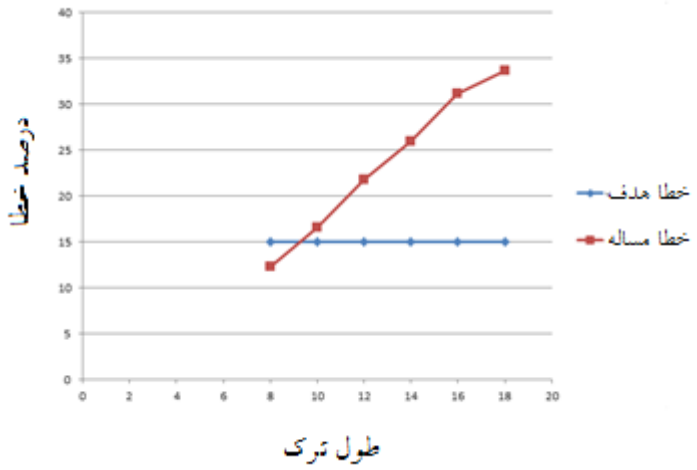


شکل ۵-۱۳: نمودار خطا در هر مرحله

همانطور که در شکل ۵-۱۳ نیز مشخص است در صورت عدم اصلاح شبکه میزان خطا در هر مرحله از رشد ترک افزایش پیدا می کند و بنابراین در مراحل بالا جواب های بدست آمده دارای دقت پایینی خواهند بود.

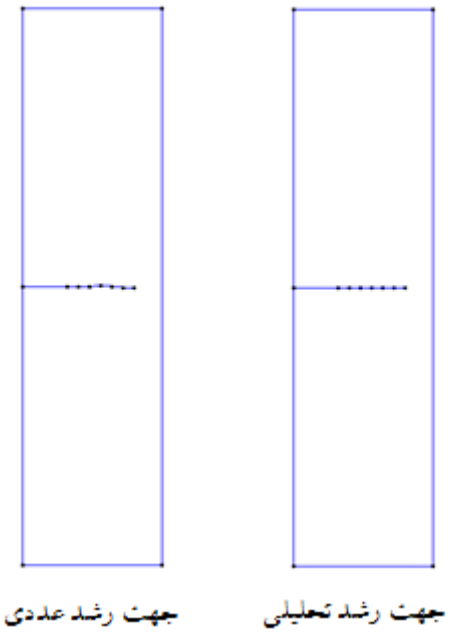
معمولا قبل از اصلاح شبکه برای حل مساله یک دقت جواب را درنظر میگیرند و اصلاح شبکه را بر آن اساس انجام میدهند. دقت در نظر گرفته شده بسته به خواسته ی ما از مساله می باشد که ما در این پایان نامه این دقت را معادل ۱۵ درصد درنظر میگیریم. یعنی اصلاح شبکه در مساله ما زمانی انجام میگیرد که خطای مورد نظر از خطای هدف (۱۵ درصد) بیشتر باشد.شکل ۵-۱٤ مقایسه ای بین خطای هدف و خطای ایجاد شده در مساله مورد نظر دارد.

همانطور که درشکل ۵-۱٤ نیز مشاهده میگردد در مراحل اولیه خطا قابل قبول است اما در مراحل آخر اختلاف با خطای هدف افزایش یافته است.



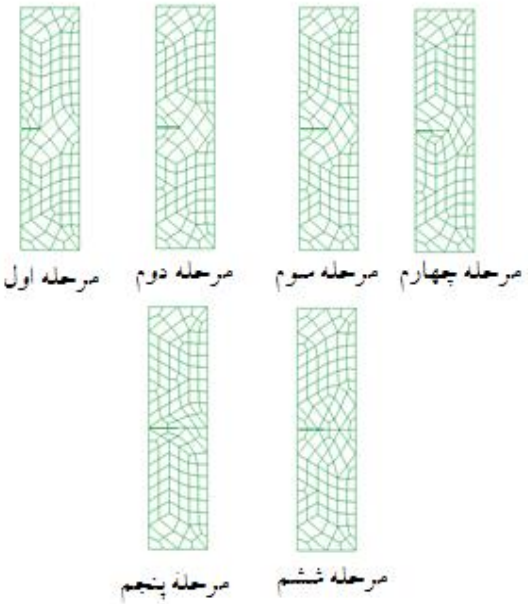
شکل ۵-۱٤: نمودار مقایسه ای خطای هدف و خطای مساله

یکی دیگر از مواردی که میتوان مقایسه نمود جهت رشد ترک می باشد. در شکل ۵-۱۵ جهت رشد ترک بررسی شده است و با مقدار تحلیلی و واقعی مقایسه ای صورت گرفته است.



شکل ۵-۱۵: مقایسه جهت رشد ترک

نحوه شبکه بندی مساله نیز بدین صورت می باشد که بایستی در هر مرحله فرآیند شبکه بندی و مدل سازی صورت گیرد. چرا که در این مساله با رشد ترک هندسه ی کلی مساله تغییر میکند. مدل هایی که در هر شبکه بندی صورت گرفته است به صورت شکل ۵-۱۶ می باشد.



شکل ۵-۱۶: شبکه بندی مثال اول (روش اجزا محدود معمولی)

۵-۸-۳- حل مثال اول با استفاده از روش اصلاح شبکه روش اجزای محدود استاندارد

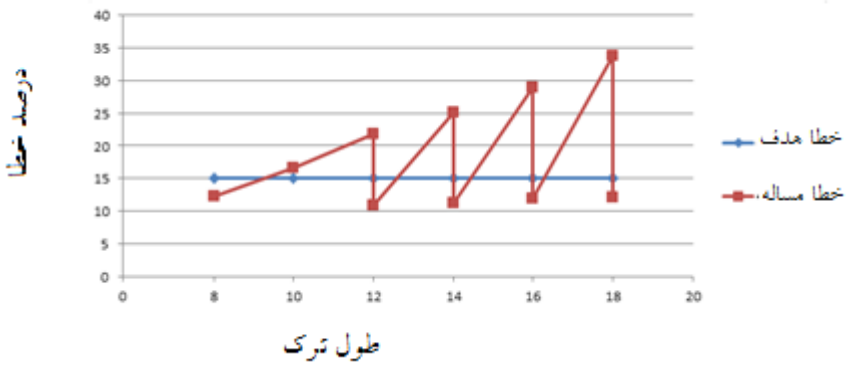
در این قسمت قصد داریم مثال اول بیان شده را این بار در حالت اصلاح شبکه بیان نماییم تا تاثیر اصلاح شبکه بر دقت جواب ها و کارایی روش اصلاح شبکه بر روش اجزای محدود معمولی مشخص گردد. همانطور که قبلا نیز بیان شده خطای هدف در مساله را برابر ۱۵ درصد درنظر میگیریم و در هر مرحله که خطای مساله از این مقدار بیشتر شد اصلاح شبکه در مساله صورت میگیرد.با آنالیز مساله به روش اصلاح شبکه نتایج جدول زیر حاصل خواهد شد.

جدول ۵-۲: پارامتر های محاسبه شده در روش اصلاح شبکه اجزای محدود معمولی

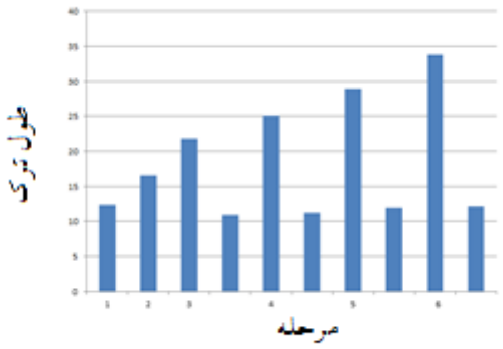
مرحله	در صد خطا	KI تحلیلی	KI عددی	KII عددی	مختصات نوک ترک
اول	۱۲.۲۹۷۷	۸.٦۹۱۳	۷.۰۳٤٤	۰.۰۰۳۱	(۱۰,٤۹.۹۹۸۲)
دوم	۱٦.٥۲٥۷	۱۱.۷۹۲٤	۸.۹۷۸۰	-۰.۰۰۲۰	(۱۲,٤۹.۹۹۸۷)
سوم	۲۱.۷۹٦۹	۱٦.۲۸۰۰	۱۱.۳٤٥۲	-۰.٦٤٥۲	-
سوم اصلاح شده	۱۰.۸۹٥۰	۱٦.۲۸۰۰	۱٤.۲۰٥۹	۰.٦۷۹۲	(۱۳.۹۹۰۹,٤۹.۸۰۸٥)
چهارم	۲٥.۰۷٤۰	۲۳.۰۰۷۱	۱٦.۰۰٦۷	-۰.۲۸٥۲	-
چهارم اصلاح شده	۱۱.۲۳۷۸	۲۳.۰۰۷۱	۲۰.۲۳۷۹	-۰.٥۲۳۳	(۱٥.۹۸۹٥,٤۹.۸۸٤٤)
پنجم	۲۸.۸٦٥۲	۳۳.۲٥۱۲	۲۲.۳٥۷٤	۰.٤٤٤٤	-
پنجم اصلاح شده	۱۱.۹۳۸۰	۳۳.۲٥۱۲	۲۸.۷۲٤۸	۱.۱۲۸۳	(۱۷.۹۸۲۲,٤۹.۷۱۳٦)
ششم	۳۳.۸۳٦۳	٤۸.٦۱۰۷	۳٥.۷۲۲۹	-۰.۳۹٤۰	-
ششم اصلاح شده	۱۲.۰۸٥۱	٤۸.٦۱۰۷	٤۷.۳۲۰۳	۰.۳۹٦۹	(۱۹.۹۸۱۱,٤۹.٦٤۸۲)

همانطور که در جدول ۵-۲ نیز قابل مشاهده می باشد در هر مرحله از رشد ترک درصد خطا نیز افزایش می یابد. در مراحلی که خطای مساله از خطای هدف بیشتر شده است مساله را با شبکه اصلاح شده و بر اساس چگالی جدید ایجاد نموده ایم که باعث کاهش خطا در مساله شده است و حتی خطای ایجاد شده کمتر از خطای هدف گشته است(شکل ۵-۱۷).

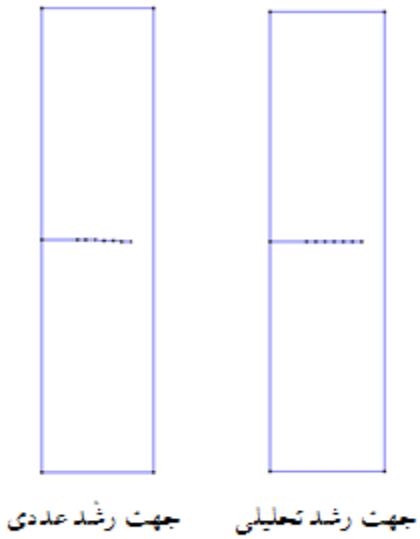
شکل ۵-۱۸ نیز نمودار ستونی افزایش خطا در هر مرحله و کاهش خطا پس از اصلاح را به تصویر میکشد.همچنین شکل ۵-۱۹جهت رشد ترک را تصویر میکند.



شکل ۵-۱۷: نمودار مقایسه ای خطای هدف و خطای مساله در روش اصلاح اجزای محدود معمولی



شکل ۵-۱۸: نمودار خطا در هر مرحله به روش اصلاح اجزای محدود معمولی



شکل ۵-۱۹: مقایسه جهت رشد ترک (در روش اصلاح اجزای محدود معمولی)

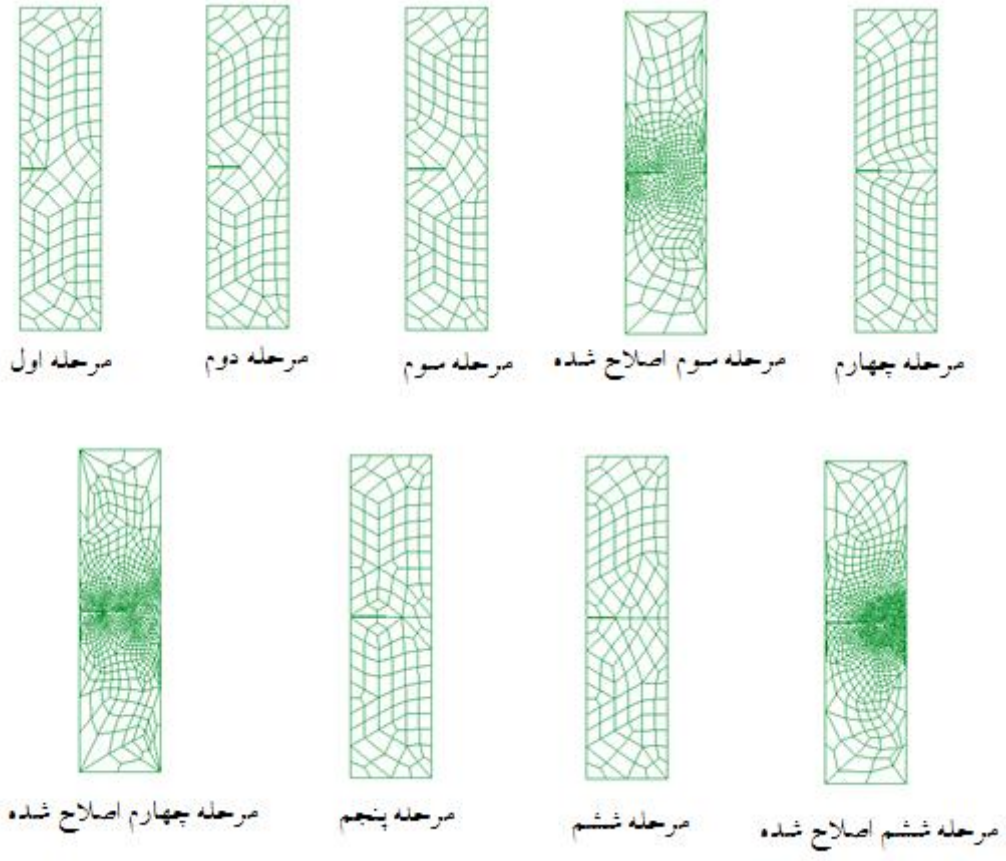
حال می خواهیم به لحاظ حجم محاسبات و تعداد المان هایی که در مساله در حالت قبل و پس از اصلاح شبکه آنالیزی داشته باشیم. نتایج جدول زیر اطلاعات خوبی در این باره به ما می‌دهد.در این جدول فقط مراحلی بررسی شده است که نیاز به اصلاح شبکه داشته اند.

جدول ۵-۳: مقایسه پارامتر ها قبل و پس از اصلاح شبکه روش اجزای محدود معمولی

	قبل از اصلاح شبکه				پس از اصلاح شبکه			
مرحله	تعداد المان	تعداد گره	درصد خطا	KI	تعداد المان	تعداد گره	درصد خطا	KI	Kتحلیلی
سوم	۱۱۸	۱٤٥	۲۱.۷۹٦۹	۱۱.۳٤٥۲	٤۸۱	٥۰۱	۱۰.۸۹٥	۱٤.۲۰٥۹	۱٦.۲۸۰۰
چهارم	۱۲٤	۱٥۱	۲٥.۰۷٤	۱٦.۰۰٦۷	۸۹۲	۹۱٥	۱۱.۲۳۷۸	۲۰.۲۳۷۹	۲۳.۰۰۷۱
پنجم	۱۲۸	۱٥٥	۲۸.۸٦٥۲	۲۲.۳٥۷٤	۱۱۰۸	۱۱۳۳	۱۱.۹۳۸	۲۸.۷۲٤۸	۳۳.۲٥۱۲
ششم	۱۲٦	۱٥٥	۳۳.۸۳٦۳	۳٥.۷۲۲۹	۱۲۰۰	۱۲۲۷	۱۲.۰۸٥۱	٤۷.۳۲۰۳	٤۸.٦۱۰۷

همانطور که در جدول ۵-۳ نیز قابل مشاهده است روش اجزای محدود تطابقی یا روش اصلاح شبکه به عنوان یک روش قابل قبول میتواند دقت مورد نیاز در مساله را افزایش دهد. همانطور که در جواب های مساله نیز مشخص است علاوه بر اینکه درصد خطای مساله کاهش پیدا کرده است و حتی کمتر از خطای هدف نیز شده است، جواب فاکتور شدت تنش به جواب تحلیلی مساله نیز همگرا شده است.

در خصوص شبکه بندی نیز در هر مرحله ای که درصد خطا بیش از ۱۵ درصد باشد شبکه بندی مساله اصلاح خواهد شد.(شکل ۵-۲۰)



شکل ۵-۲۰: شبکه بندی مراحل مختلف و اصلاح شبکه مورد نیاز

بنابراین و با توجه به عملکرد مثبت روش اجزای محدود بسط یافته به خصوص در مسائل آنالیز ترک، این ایده به ذهن رسید که این روش میتواند برای روش اجزای محدود بسط یافته نیز کارا باشد و خطاهای ناشی از این روش کاهش یابد و تمرکز تنش و اختلاف بیش از حد بوجود آمده در المان های نوک ترک را تا حد قابل قبولی کاهش داد. لذا قصد داریم در ادامه همین تکنیک را روی روش اجزای محدود بسط یافته پیاده نماییم و جواب ها با زمانی که هیچ اصلاحی در مساله صورت نمیگیرد مقایسه نماییم.

۵-۸-٤- حل مثال اول با استفاده از روش اجزای محدود بسط یافته

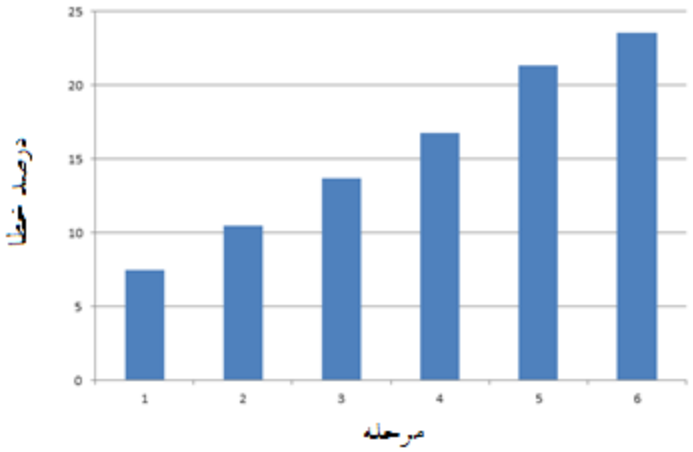
در این قسمت قصد داریم مثال اول را با استفاده از روش اجزای محدود بسط یافته حل نماییم و در گام هایی با طول ۲ سانتی متر ترک را رشد دهیم. در این بخش هیچ گونه اصلاح شبکه ای صورت نمیگیرد و با همان خطاهای موجود مساله را رشد خواهیم داد. با حل مساله و رشد آن نتایج جدول زیر حاصل میگردد.

جدول ٥-٤: پارامتر های محاسبه شده به روش اجزای محدود بسط یافته

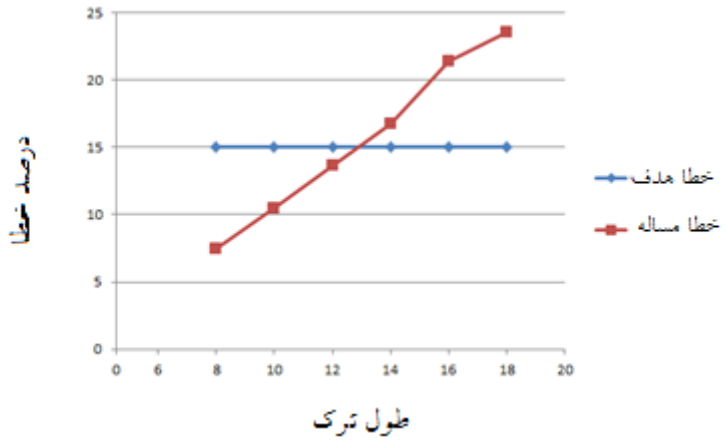
مرحله	در صد خطا	KI تحلیلی	KI عددی	KII عددی	مختصات نوک ترک
اول	٧.٤٧٢١	٨.٦٩١٣	٧.٥٥٤٧	٠.٣٦٥٦	(٩.٩٩٠٧,٤٩.٩٠٧٨)
دوم	١٠.٥١٠٥	١١.٧٧٨٨	٩.٧٣٦٢	-٠.٥٤٨٠	(١١.٩٩٠٥,٤٩.٩٣٨٧)
سوم	١٣.٦٩٦٠	١٦.٢٥٧١	١٣.٢٨٦٥	-٠.٢٤٢٥	(١٣.٩٨٧٨,٥٠.٠٤٢٦)
چهارم	١٦.٧٤٢٢	٢٢.٩٨٩٤	١٨.٢٠٨٤	١.٠٦٤٩	(١٥.٩٨٣٧,٤٩.٩١٤٥)
پنجم	٢١.٣٧٣٩	٣٣.٢١٩٠	٣٠.٢٠٤٥	٤.٦٦٨٣	(١٧.٨٥٧٢,٤٩.٢١٤٥)
ششم	٢٣.٥٢٥٥	٤٧.٦٣٩٤	٣٢.٦٦٢٤	-٣.١٩٨٥	(١٩.٨٢٩٧,٤٨.٨٨٤٢)

لازم به ذکر است که روش اجزای محدود بسط یافته به دلیل اینکه در هنگام رشد ترک هندسه‌ی مدل و مساله تغییر نمیکند، فوق العاده از نظر نحوه ی مدل سازی و جواب گرفتن در مساله سریع تر از روش اجزای محدود معمولی می‌باشد که همین امر این روش را یکی از کاراترین روش برای مدلسازی آنالیز مسائل ترک می‌نماید.

همچنین همانند روش اجزای محدود معمولی در این روش نیز با افزایش طول ترک و گسترش ناپیوستگی میزان خطای مساله افزایش یافته است و در مراحل انتهایی نیز از خطای هدف در مساله نیز بیشتر شده است. شکل ۵-۲۱ و شکل ۵-۲۲ بیانگر این موضوع می باشند.

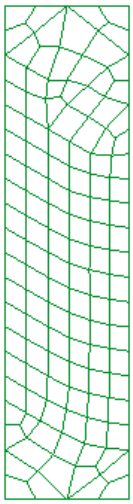


شکل ۵-۲۱: نمودار افزایش خطا در هر مرحله (روش اجزای محدود بسط یافته)



شکل ۵-۲۲: نمودار مقایسه خطای مساله و خطای هدف (روش اجزای محدود بسط یافته)

در این مثال شبکه بندی ثابت خواهد بود و تا انتهای مساله با یک شبکه ثابت مساله را ادامه میدهیم (شکل ۵-۲۳).



شکل ۵-۲۳: شبکه بندی بر اساس روش اجزای محدود بسط یافته

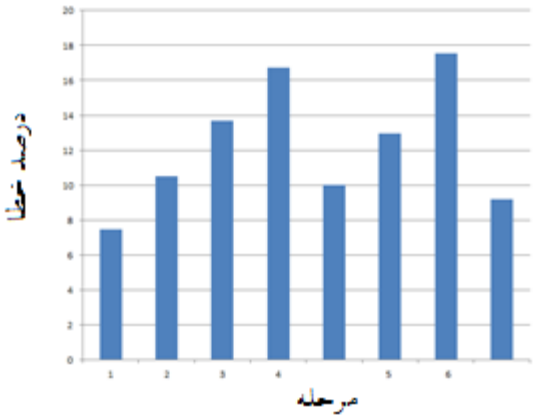
۵-۸-۵- حل مثال اول با استفاده از تکنیک پیشنهادی

در این بخش قصد داریم تکنیک ارائه شده یعنی بهبود روش اجزای محدود بسط یافته در آنالیز مسائل ترک با تولید مجدد شبکه را در این مثال به کار ببریم و با تنایج قبلی مقایسه نماییم. در این حالت نیز خطای هدف در مساله را معادل ۱۵ درصد درنظر میگیریم و در قسمت هایی که مساله نیاز به اصلاح دارد این کار را در روش اجزای محدود بسط یافته به کار میگیریم.با حل مساله توسط تکنیک پیشنهادی جدول ۵-۵ بدست آمد.

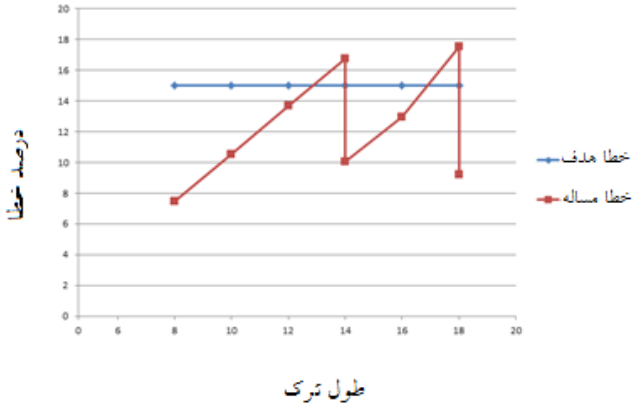
جدول ۵-۵: پارامتر های محاسبه شده به روش تکنیک پیشنهادی

مرحله	در صد خطا	KI تحلیلی	KI عددی	KII عددی	مختصات نوک ترک
اول	۷.٤۷۲۱	۸.٦۹۱۳	۷.۵۵٤۷	۰.۳٦۵٦	(۹.۹۹۰۷,٤۹.۹۰۷۸)
دوم	۱۰.۵۱۰۵	۱۱.۷۷۸۸	۹.۷۳٦۲	-۰.۵٤۸۰	(۱۱.۹۹۰۵,٤۹.۹۳۸۷)
سوم	۱۳.٦۹٦۰	۱٦.۲۵۷۱	۱۳.۲۸٦۵	-۰.۲٤۲۵	(۱۳.۹۸۷۸,۵۰.۰٤۲٦)
چهارم	۱٦.۷٤۲۲	۲۲.۹۸۹٤	۱۸.۲۰۸٤	۱.۰٦٤۹	-
چهارم اصلاح شده	۱۰.۰۲۸٦	۲۲.۹۸۹٤	۲۰.۳٦۳۲	۰.۵۱۷۷	(۱۵.۹۸۷۸,۵۰.۰٤۵۰)
پنجم	۱۲.۹۵۹۲	۳۳.۲۳۸۵	۳۰.۷۳٤۳	۱.۱٦۸۸	(۱۷.۹۸۲۲,٤۹.۸۹۵۹)
ششم	۱۷.۵۵۲۲	٤۸.٦۰۰٦	۳۲.۵۸۵۰	٦.۱۱۹۲	-
ششم اصلاح شده	۹.۲۰٤۹	٤۸.٦۰۰٦	٤۷.۹۰۱۲	-۱.٦۲۳۱	(۱۹.۹۸۲۲,٤۹.۸۸۱۹)

همانطور که در جدول ۵-۵ نیز مشخص است تکنیک اصلاح شبکه را در روش اجزای محدود بسط یافته به کار بردیم و بر حسب دقت مورد نیاز دو مرحله اصلاح شبکه صورت پذیرفت. همانطور که در قسمت خطا نیز مشاهده میشود پس از هر مرحله اصلاح شبکه خطا به شکل قابل قبولی کاهش پیدا کرده است و حتی مقدار آن از خطای هدف در مساله نیز کمتر شده است.(شکل ۵-۲٤ و شکل ۵-۲۵) همچنین پس از اصلاح شبکه فاکتور شدت تنش نیز به مقدار تحلیلی بسیار نزدیک و همگرا شده است.

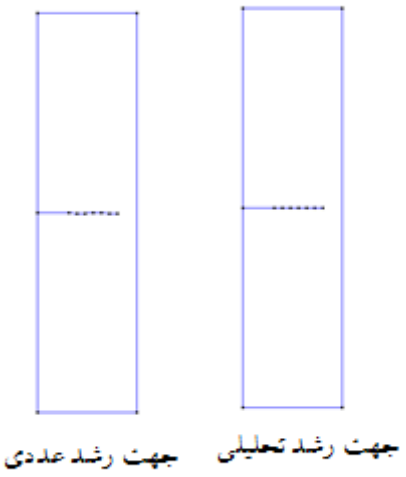


شکل ۵-۲٤: نمودار درصد خطا در هرمرحله (تکنیک پیشنهادی)



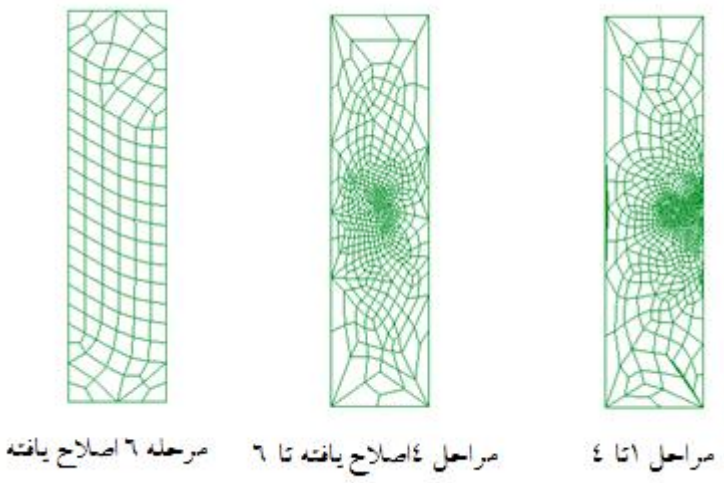
شکل ۵-۲۵: نمودار مقایسه ای خطای هدف و خطای مساله

در خصوص جهت رشد ترک نیز خواهیم داشت :



شکل ۵-۲٦: مسیر رشد ترک در تکنیک پیشنهادی

شبکه بندی مساله در هر مرحله و اصلاح آن در صورت لزوم نیز به صورت شکل ۵-۲۷زیر انجام گرفته است:



شکل ۵-۲۷: مراحل اصلاح شبکه در تکنیک ارائه شده

در ادامه نیز مقایسه ای بین تعداد المان ها و گره ها قبل و پس از اصلاح شبکه خواهیم داشت همچنین میزان همگرایی در این تکنیک به مقدار تحلیلی را در قالب جدول زیر مورد بررسی قرار خواهیم داد.

جدول ۵-٦: مقایسه‌ی پارامترهای محاسبه شده در تکنیک پیشنهادی

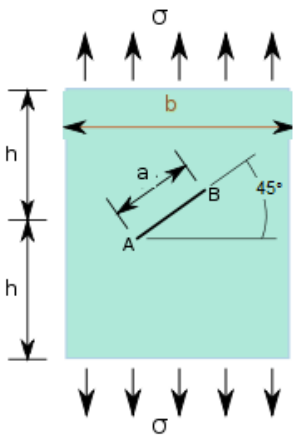
	قبل از اصلاح شبکه					پس از اصلاح شبکه				
مرحله	تعداد المان	تعداد گره	درصد خطا	KI	تعداد المان	تعداد گره	درصد خطا	KI	Kتحلیلی
چهارم	۱۱۸	۱٤۳	۱٦.۷٤۲۲	۱۸.۲۰۸٤	۵۰۵	۵۱۷	۱۰.۰۲۸٦	۲۰.۳٦۳۲	۲۲.۹۸۹٤
ششم	۵۰۵	۵۱۷	۱۷.۵۵۲۲	۳۲.۵۸۵۰	۷۵۹	۸۱۳	۹.۲۰٤۹	٤۷.۹۰۱۲	٤۸.٦۰۰٦

از جدول نتیجه گرفته می شود که روش اصلاح شبکه روشی کارا برای روش اجزای محدود بسط یافته نیز می باشد و میتوان این روش اصلاح شبکه را با یکسری تغییرات به روش اجزای محدود بسط

یافته منتقل نمود و باعث بهبود و کارایی آن شد. از آنجایی که در مثال حل شده فقط یک مود فعال شده است، لذا برای بررسی کارایی تکنیک پیشنهادی مثال دیگری را نیز حل خواهیم نمود تا دقت این روش در سایر مود ها نیز بررسی گردد.

۵-۹- مثال دوم (ترک ٤٥ درجه میانی)

برای بررسی کارایی تکنیک ارائه شده مثال دیگری نیز حل خواهیم نمود.در این مثال با توجه به اینکه ترک ٤٥ درجه تحت کشش قرار میگیرد، میخواهیم کارایی تکنیک را در مود دوم نیز بررسی نماییم (شکل ۵-۲۸).

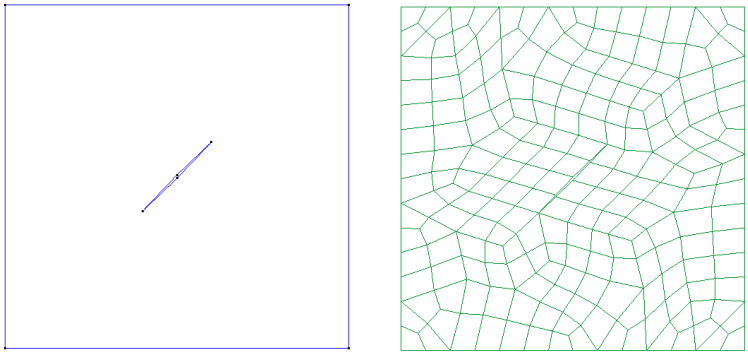


شکل ۵-۲۸: مثال دوم ترک ٤٥ درجه

در این مثال طول صفحه $b = 50Cm$ و ارتفاع $2h = 50Cm$ در نظر گرفته می شود. طول اولیه ی ترک نیز $a = 10\sqrt{2}Cm$ می باشد. نمونه مورد نظر از دو طرف با نیروی گسترده ای به صورت $\sigma = 1 {Kg}/{Cm}$ کشیده می شود. برای رشد ترک نیز در هر مرحله یک گام با طول $2Cm$ در نظر میگیریم. سایر پارامتر های مکانیکی نظیر مدول الاستیسیته و ضریب پواسون را به ترتیب برابر $E = 1000 {Kg}/{Cm^2}$ و $\nu = 0.3$ می باشند.

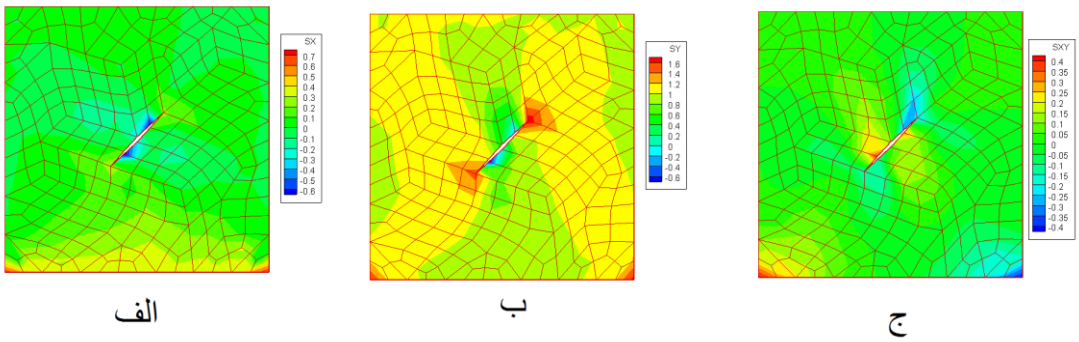
۵-۹-۱- حل مثال دوم با استفاده از روش اجزای محدود معمولی

در این قسمت نیز همانند بخش های قبلی قصد داریم ابتدا مساله را به کمک روش اجزای محدود معمولی مدل نماییم. برای مدلسازی از انجایی که حتما بایستی المان ها بر ترک منطبق باشند در وسط مدل با کمک نرم افزار GID ترک را بوسیله معرفی نمودن فضای خالی و به صورت تقریبی مدل می نماییم (شکل ۵-۲۹).



شکل ۵-۲۹: مدلسازی و شبکه بندی در نرم افزار GID

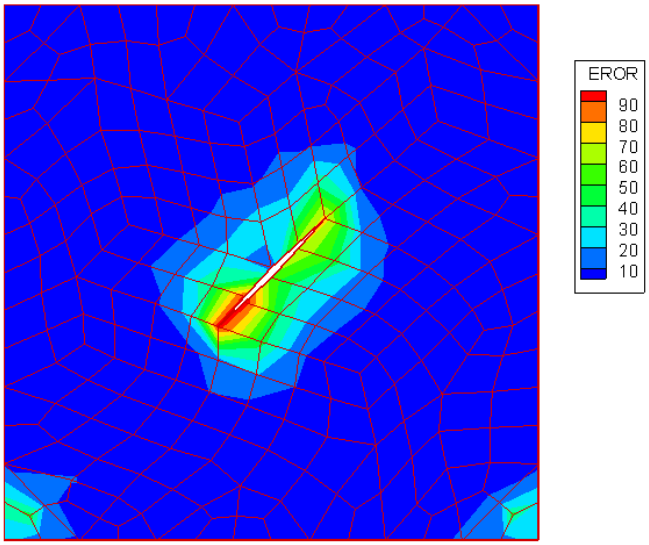
پس از آنالیز مساله به روش اجزای محدود، کانتور تنش به صورت زیر میباشد.



شکل ۵-۳۰: الف کانتور σ_x ب) کانتور σ_y ج) کانتور τ_{xy}

همانطور که درشکل ۵-۳۰ نیز مشخص است تمرکز تنش در اطراف نوک ترک بسیار زیاد است و همین امر سبب میگردد تا در اطراف نوک ترک مقدار خطا نیز افزایش یابد. حال با استفاده از موارد

مطرح شده در فصل دوم یک برآورد خطا در این مساله انجام میدهیم. شکل زیر کانتور خطای ایجاد شده را نمایش میدهد. همانطور که در شکل نیز مشخص است خطا در اطراف نوک ترک بیشترین مقدار را دارد و بایستی در آن نقاط اصلاح شبکه انجام گیرد.



شکل ۵-۳۱: کانتور درصد خطای ایجاد شده

پس از بدست آوردن جابجایی ها و کانتور تنش، نوبت به محاسبه ی فاکتور شدت تنش می باشد.نتایج فاکتور شدت تنش به صورت زیر می باشد.

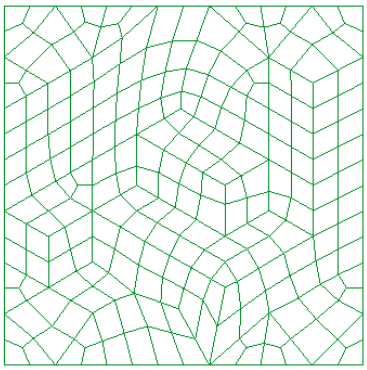
جدول ۵-۷: مقادیر فاکتور شدت تنش در مثال دوم (روش اجزای محدود معمولی)

تحلیلی		نوک ترک ابتدایی		نوک ترک انتهایی	
KI	KII	KI	KII	KI	KII
۲.۳۵٦٦	۲.۳۵٦٦	۲.٦۹۹۵	۲.۳۰۷۵	۲.٤٦٤۹	۲.٤٦٤۹

۵-۹-۲- حل مثال دوم با استفاده از تکنیک ارائه شده

در این قسمت مساله را به دو صورت حل مینماییم. یکی بدون اصلاح شبکه و با استفاده از روش اجزای محدود بسط یافته و در گام بعدی مساله را با حالت اصلاح شبکه حل خواهیم نمود.

در ابتدا مساله با شبکه بندی دلخواه که در نرم افزار GID ایجاد شده است، حل مینماییم. شبکه بندی ایجاد شده نیز به صورت زیر می باشد:



شکل ۵-۳۲: شبکه بندی اولیه مثال دوم

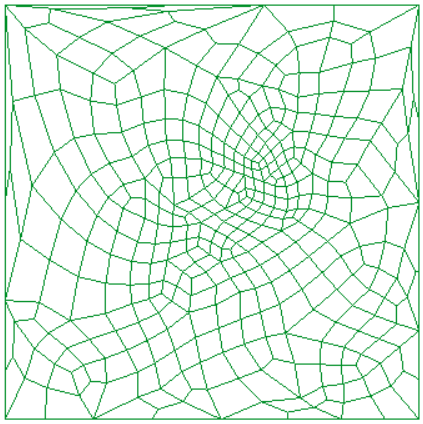
نتایجی که بر اساس روش اجزای محدود بسط یافته بدست آمده است به صورت زیر است:

جدول ۵-۸: مقادیر فاکتور شدت تنش در مثال دوم (روش اجزای محدود بسط یافته)

تحلیلی		نوک ترک ابتدایی		نوک ترک انتهایی	
KI	KII	KI	KII	KI	KII
۲.۳۵٦٦	۲.۳۵٦٦	۲.٦۲۷۱	۲.۵٦۲۹	۲.۷۱۹۰	۲.٦۸۵۵

در این مساله مقدار خطای بدست آمده ۸.۲۸۳۹ درصد می باشد و به طور کلی نیاز به اصلاح شبکه در مساله حس نمیشود. اما برای بیان کارایی تکنیک ارائه شده در همگرایی به مقدار اصلی، این مساله را

با اصلاح شبکه بررسی مینماییم. شبکه بندی اصلاح شده مطابق شکل می باشد. همانطور که در شکل نیز مشخص است المان های اطراف ترک ریزتر شده اند.



شکل ۵-۳۳: اصلاح شبکه بندی در مثال دوم

پس از اصلاح شبکه خطای مساله ٦.٢٤٠٥ بدست آمد. همچنین مقادیر فاکتور شدت تنش نیز به صورت زیر بدست آمد:

جدول ۵-۹: مقادیر فاکتور شدت تنش در مثال دوم (تکنیک ارائه شده)

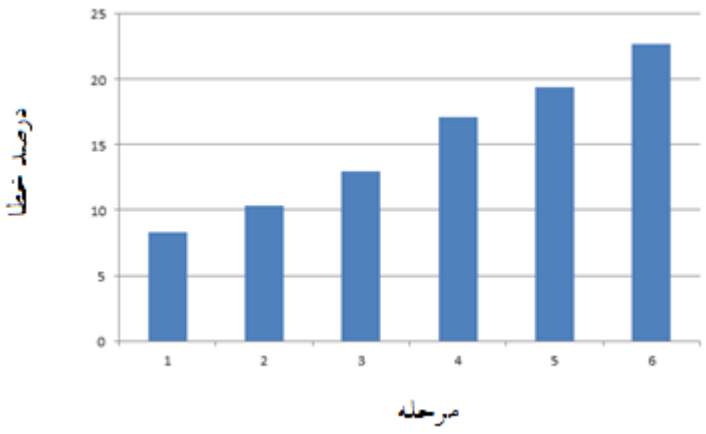
تحلیلی		نوک ترک ابتدایی		نوک ترک انتهایی	
KI	KII	KI	KII	KI	KII
٢.٣٥٦٦	٢.٣٥٦٦	٢.٥٤٧١	٢.٣٨١٧	٢.٤٨٩٠	٢.٥٦٤٧

یکی از مواردی که در آن میتوان کارایی تکنیک ارائه شده را بررسی نمود جهت رشد ترک می باشد. در این قسمت قصد داریم مساله را با رشد ترک با و بدون اصلاح شبکه بررسی نماییم تا تاثیر این روش بیشتر نمایان گردد. در ابتدا مساله بدون اصلاح شبکه انجام می گیرد

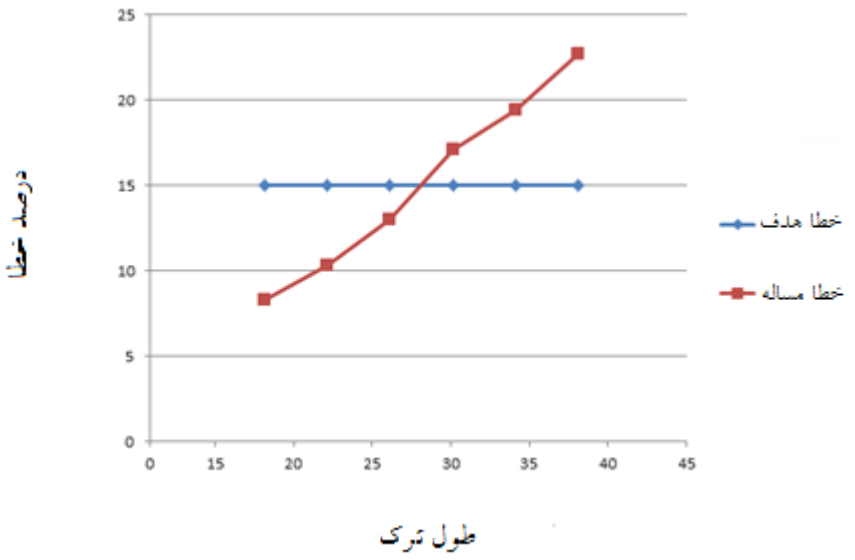
جدول ۵-۱۰: درصد خطا و مختصات جدید نوک ترک(بدون اصلاح شبکه)

مرحله	درصد خطا	مختصات ابتدا	مختصات انتها
اول	۸.۲۸۳۹	(۱۸.۱۱۸۳,۲۰.۲۶۹۷)	(۳۲.۰۸۰۸,۲۹.۷۲۳۷)
دوم	۱۰.۳۲۵۳	(۱۶.۱۲۰۵,۲۰.۳۶۴۷)	(۳۴.۰۳۸۰,۳۰.۱۳۵۴)
سوم	۱۲.۹۸۸۹	(۱۴.۱۲۰۷,۲۰.۳۹۰۴)	(۳۶.۰۲۸۰,۲۹.۹۳۵۷)
چهارم	۱۷.۱۲۲۷	(۱۲.۱۲۹۶,۲۰.۵۷۸۷)	(۳۸.۰۲۷۵,۲۹.۸۹۲۳)
پنجم	۱۹.۴۰۵۲	(۱۰.۱۴۸۷,۲۰.۸۵۴۹)	(۴۰.۰۲۷۵,۲۹.۸۹۸۲)
ششم	۲۲.۶۹۶۲	(۸.۱۵۸۸,۲۱.۰۵۵۳)	(۴۲.۰۲۰۰,۳۰.۰۷۱۴)

همانطور که در جدول فوق نیز مشخص است با پیشروی ترک در هر مرحله در صد خطا نیز افزایش می یابد و در مراحل انتهایی از میزان خطای هذف در مساله نیز بیشتر میشود. شکل ۵-۳۴ وشکل ۵-۳۵ این موضوع را به خوبی نشان میدهد.

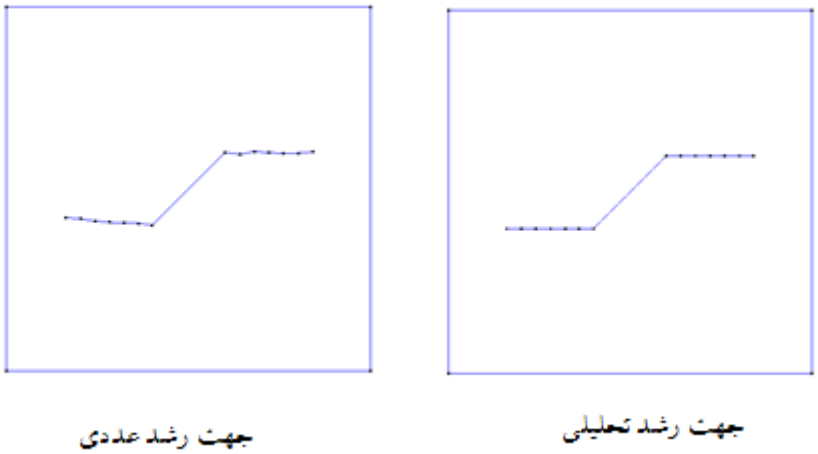


شکل ۵-۳۴: نمودار خطای هر مرحله در مثال دوم



شکل ۵-۳۵: نمودار مقایسه ای خطای هدف و خطای مساله (مثال دوم)

همچنین نحوه رشد ترک نیز در شکل زیر نشان داده شده است و با نحوه ی رشد ترک به صورت تحلیلی مقایسه گشته است:



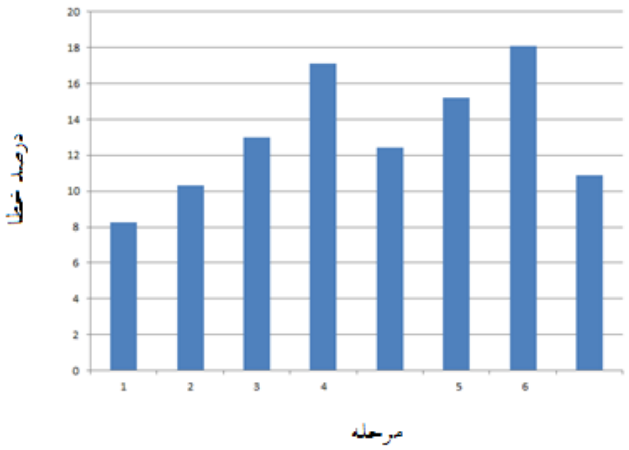
شکل ۵-۳٦: مسیر رشد ترک در مثال دوم

در نهایت مساله را در حالتی حل خواهیم نمود که اگر درصد خطای مساله از ۱۵ درصد افزایش یافت شبکه بندی مساله اصلاح گردد. در این صورت نتایج زیر بدست خواهد آمد.

جدول ۵-۱۱: درصد خطا و مختصات جدید نوک ترک در تکنیک ارائه شده

مرحله	درصد خطا	مختصات ابتدا	مختصات انتها
اول	۸.۲۸۳۹	(۱۸.۱۱۸۳,۲۰.۲۶۹۷)	(۳۲.۰۸۰۸,۲۹.۷۲۳۷)
دوم	۱۰.۳۲۵۳	(۱۶.۱۲۰۵,۲۰.۳۶۴۷)	(۳۴.۰۳۸۰,۳۰.۱۳۵۴)
سوم	۱۲.۹۸۸۹	(۱۴.۱۲۰۷,۲۰.۳۹۰۴)	(۳۶.۰۲۸۰,۲۹.۹۳۵۷)
چهارم	۱۷.۱۲۲۷	–	-
چهارم اصلاح شده	۱۲.۴۲۶۹	(۱۲.۱۴۰۶,۲۰.۶۷۱۶)	(۳۸.۰۲۳۲,۳۰.۰۷۳۶)
پنجم	۱۵.۲۱۸۰	(۱۰.۱۴۳۲,۲۰.۷۷۵۱)	(۴۰.۰۲۳۲,۳۰.۰۵۸۷)
ششم	۱۸.۰۷۰۰	–	–
ششم اصلاح شده	۱۰.۸۸۰۱	(۸.۱۶۳۰,۲۱.۰۵۵۴)	(۴۱.۹۸۰۲,۳۰.۴۷۱۲)

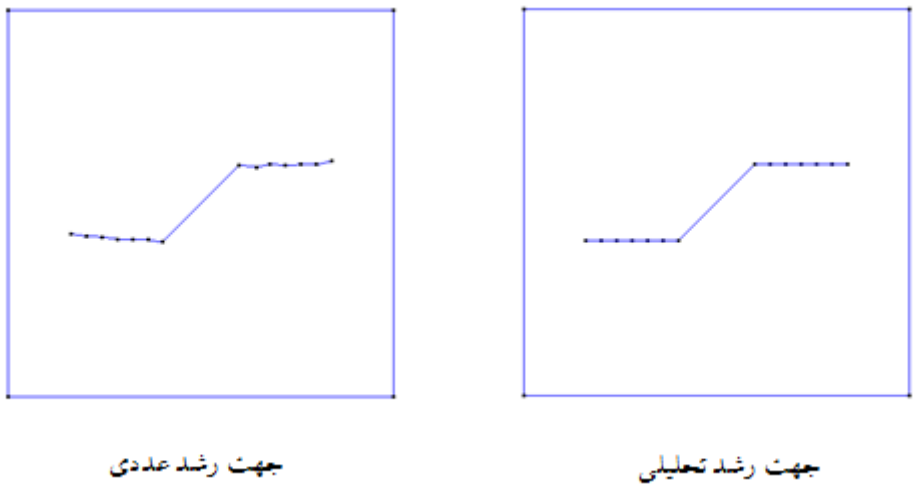
همچنین شکل ۵-۳۷ و شکل ۵-۳۸، کاهش خطا پس از اصلاح شبکه در این تکنیک را به تصویر میکشند.تکنیک ارائه شده در این مساله باعث شده است که خطا همواره زیر ۱۵درصد (خطای هدف) قرار بگیرد.



شکل ۵-۳۷: نمودار درصد خطا در هر مرحله (تکنیک ارائه شده)

شکل ۵-۳۸: نمودار مقایسه ای خطای هدف و خطای مساله (تکنیک ارائه شده)

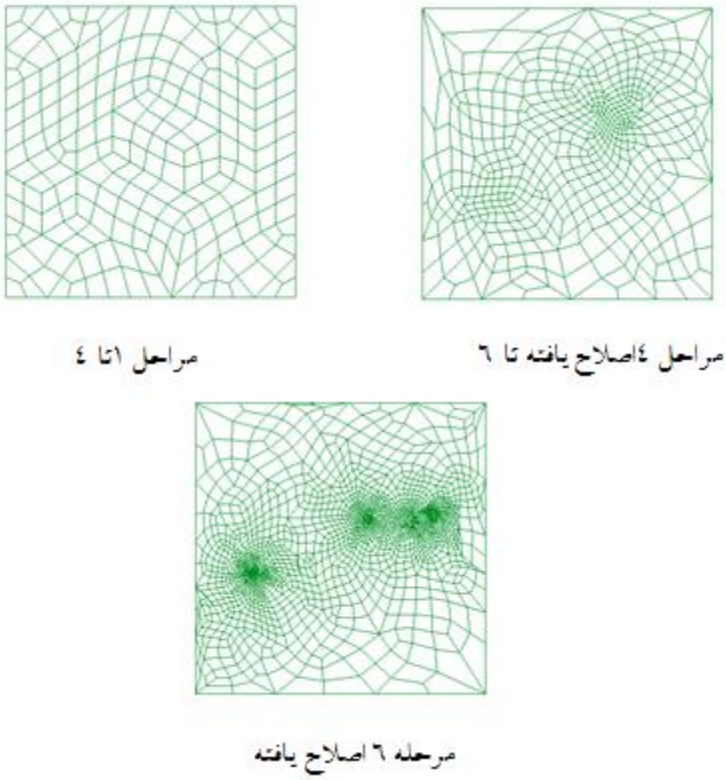
مسیر رشد ترک نیز به صورت زیر خواهد بود :



شکل ۵-۳۹: مسیر رشد ترک در تکنیک ارائه شده

همانطور که در شکل ۵-۳۹ نیز مشاهده میشود در تکنیک ارائه شده نیز مسیر رشد ترک به صورت تقریبی، غرابت نزدیکی با جهت رشد تحلیلی داراست.

نحوه شبکه بندی و اصلاح آن در هر مرحله نیز به صورت شکل زیر در نظر گرفته می شود.



شکل ٥-٤٠: مراحل اصلاح شبکه در تکنیک ارائه شده در مثال دوم

٥-١٠- مثال صفحه حفره دار

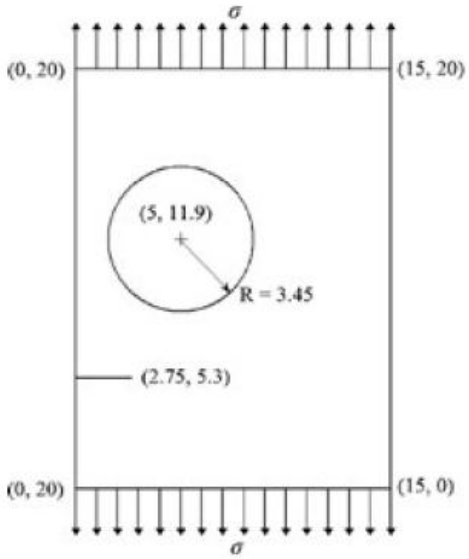
یکی دیگر از اقداماتی که قصد داریم در این پایان نامه به انجام برسانیم بحث پیگیری تکنیک ارائه شده در دیگر مثال ها است. این مثال ها دارای تنوع بیشتری نسبت به مثال های قبلی می باشند و محققین زیادی این مثال ها را با استفاده از روش ها و تکنیک های مختلف حل نموده اند. در مرجع[٣٢]، ان تات اوی [١] و همکاران با استفاده از روش اجزای محدود چند ضلعی مقیاس شده [٢] مسائل مربوط به رشد ترک را در مثال های متنوعی بررسی نموده اند.

[١] Ean Tat Ooi

[٢] Polygon scaled boundary finite elements

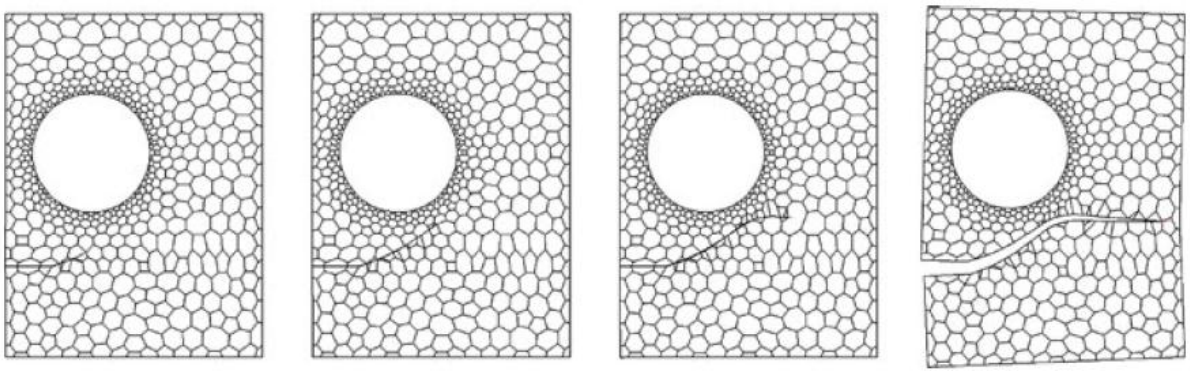
در این پایان نامه نیز جهت صحت سنجی هرچه بهتر تکنیک ارائه شده و بررسی کارایی این تکنیک دو مثال دیگر از این مرجع انتخاب شده است و مساله از لحاظ رشد ترک مورد بررسی قرار گرفته است.

در مثال سوم این پایان نامه یک صفحه ی حفره دار همراه با ترک وجود دارد که تحت اثر تنش مشخص شروع به رشد می نماید. از آنجایی که در تمامی مسائل این پایان نامه فرض بر این بوده است که تنش اعمالی به اندازه کافی بزرگ می باشد و این تنش باعث رشد ترک در مساله میگردد، هندسه مساله به صورت شکل زیر می باشد. مشخصات مکانیکی مساله نیز،مدول الاستیسیته E=۹۸۰۰۰ MPa و ضریب پواسون v=۰.۳ در نظر گرفته شده است. مساله نیز در حالت تنش مسطح در نظر گرفته شده است.



شکل ۵-٤۱: هندسه مثال حفره دار

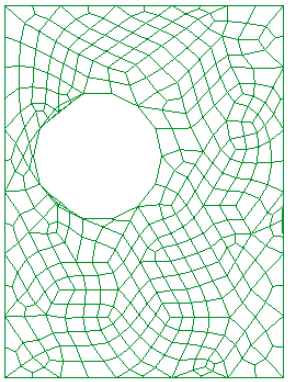
در مرجع[۳۲] با فرض اینکه تنش به اندازه کافی بزرگ می باشد و ترک در این مساله رشد پیدا می کند وضعیت رشد ترک در این مساله با استفاده از روش اجزای محدود چند ضلعی مقیاس شده به صورت زیر خواهد بود.



شکل ٥-٤٢ : پیش بینی مسیر رشد ترک[۳۲]

حال با دانستن موضوع فوق و روشن شدن مسیر رشد ترک در این مثال، قصد حل کردن مساله با تکنیک ارائه شده خواهیم داشت.

ابتدا مساله را بدون اصلاح شبکه و برای یک شبکه بندی دلخواه حل خواهیم نمود. وضعیت رشد ترک و مقدار خطا در هر مرحله به شرح زیر می باشد. شبکه بندی اولیه ای که برای این مساله در نظر گرفته شده است به صورت زیر می باشد.



شکل ٥-٤٣: شبکه بندی اولیه مثال حفره

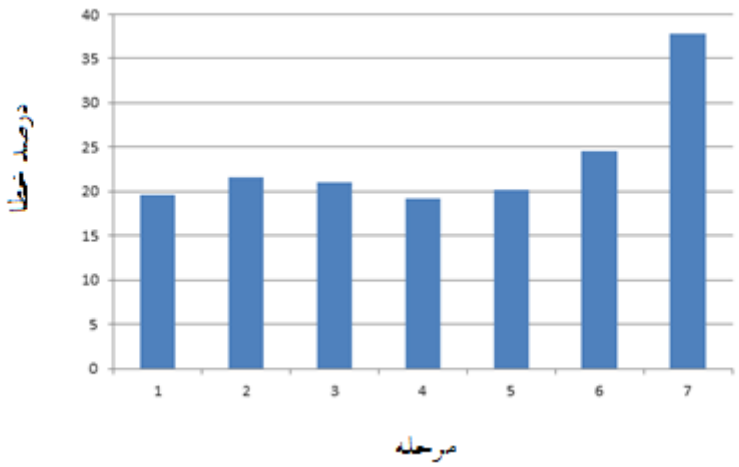
با حل مساله بوسیله روش اجزای محدود بسط یافته جدول زیر بدست می آید. در این جدول نیز مطابق مثال های قبلی که مورد بررسی قرار گرفتند درصد خطای مساله هنگامی که ترک رشد پیدا می کند و

طول ترک افزایش می‌یابد بیشتر میشود. و نمودار درصد خطا حالت صعودی به خود میگیرد و در مراحل بالاتر از خطای مورد انتظار در مساله نیز بیشتر خواهد شد.

جدول ۵-۱۲: پارامتر های بدست آمده به روش اجزای محدود بسط یافته

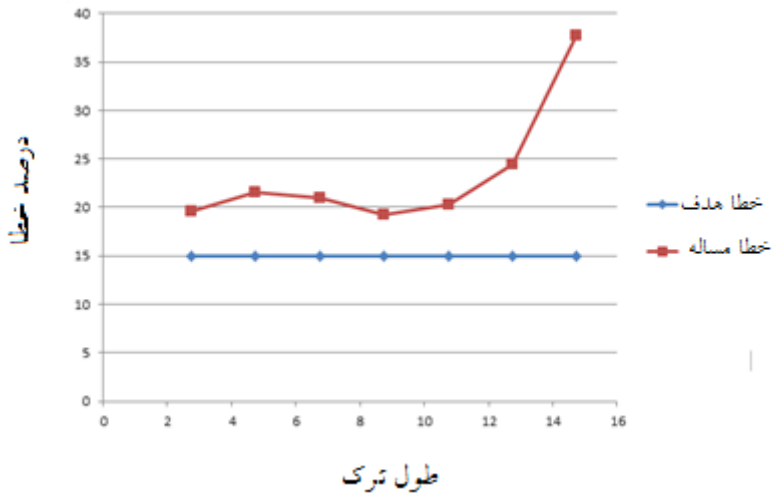
مرحله	درصد خطا	KI	KII
اول	۱۹.۵۶	۶.۸۴	-۱.۱۰
دوم	۲۱.۵۴	۷.۲۶	-۱.۹۴
سوم	۲۰.۹۸	۱۰.۱۶	۰.۴۸
چهارم	۱۹.۲۴	۱۳.۳۱	۲.۰۱
پنجم	۲۰.۲۳	۲۲.۴۴	۵.۳۳
ششم	۲۴.۴۸	۵۱.۶۷	.۲۴
هفتم	۳۷.۷۸	۱۲۷.۵۱	-۱۴.۶۵

همانطور که در جدول ۵-۱۲ نیز مشخص است در هر مرحله با توجه به رشد ترک درصد خطای مساله نیز افزایش می یابد . این افزایش در نمودار زیر مشخص است.



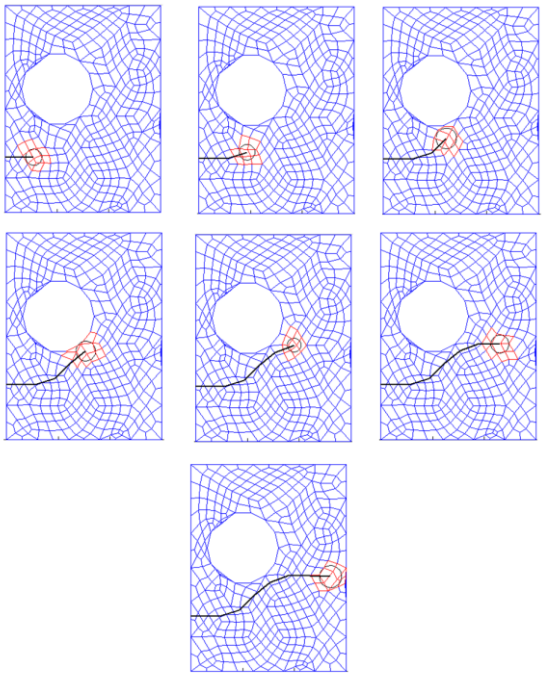
شکل ۵-٤٤: نمودار درصد خطا در هر مرحله از مثال حفره

همچنین نمودار زیر نیز نشان میدهد که در همان مرحله اول درصد خطای مساله از مقدار مورد انتظار که در این پایان نامه ۱۵ درصد می باشد بیشتر است و دقت با این شبکه بندی ارائه شده در حد قابل قبول نمی باشد.



شکل ۵-٤٥: نمودار درصد خطای متناسب با طول ترک

مسیر رشد ترک نیز با استفاده از روش اجزای محدود بسط یافته به صورت زیر خواهد بود.



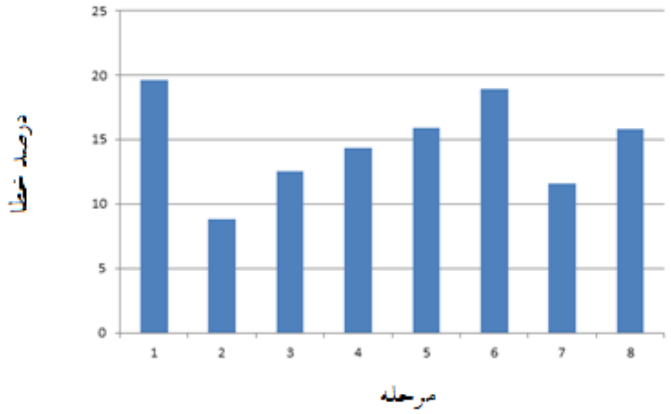
شکل ۵-٤٦: مسیر رشد ترک

در ادامه قصد داریم تکنیک پیشنهادی یعنی حل مساله با استفاده از روش اصلاح شبکه مساله را حل نماییم شبکه بندی اولیه مساله همانند قبل می باشد و مساله را حل می نماییم. در ادامه در صورتیکه درصد خطای مساله افزایش یافت (مثلا بیش از ۱۵ درصد) شبکه مساله را اصلاح خواهیم نمود. با حل مساله با استفاده از تکنیک ارائه شده به نتایج جدول ۵-۱۳ خواهیم رسید.

جدول ۵-۱۳: پارامتر های محاسبه شده در تکنیک ارائه شده

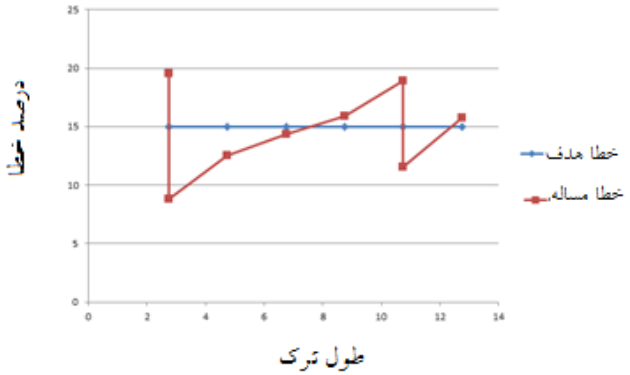
مرحله	درصد خطا	KI	KII
اول	۱۹.۵٦	٦.۸٤	-۱.۱۰
اصلاح مرحله اول	۸.۸۱	٦.۷٤	-۱.۲۷
دوم	۱۲.۵٦	۹.۵٦	-.۵
سوم	۱٤.۳٦	۱۱.٤۳	.۲۱
چهارم	۱۵.۸۷	۱٤.۹۷	۲.۵٤
پنجم	۱۸.۹۵	۲۸.۷۷	۲.۰۳
اصلاح مرحله پنجم	۱۱.۵۸	۳۲.۲۸	۲.٦۲
مرحله ششم	۱۵.۷٦	۷۱.۷۱	-۲.۵۷

همانطور که درجدول ۵-۱۳ نیز مشخص است در هر مرحله با توجه به رشد ترک درصد خطای مساله نیز افزایش می یابد . این افزایش در نمودار زیر مشخص است.



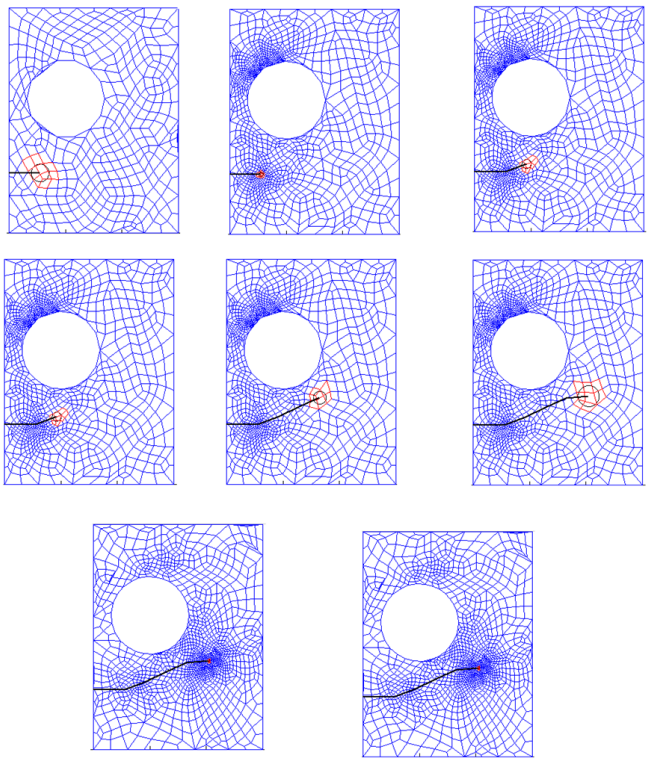
شکل ۵-٤۷: نمودار درصد خطا در هر مرحله از مثال حفره(تکنیک ارائه شده)

همچنین نمودار زیر نحوه تاثیر تکنیک ارائه شده در خصوص کاهش خطا در طول مسیر رشد ترک را به تصویر میکشد و این که این تکنیک سطح خطاهای مساله را در حد قابل قبول کاهش میدهد.



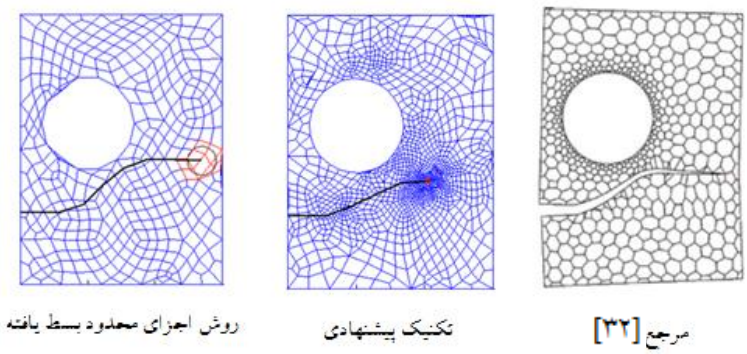
شکل ۵-٤۸: نمودار درصد خطای متناسب با طول ترک

مسیر رشد ترک نیز همانند دیگر مراجع به درستی بدست آمد و به صورت شکل زیر می باشد، همچنین علاوه بر مسیر رشد ترک نحوه اصلاح شبکه نیز درشکل ۵-٤۹ ترسیم شده است.



شکل ۵-٤۹: مسیر رشد ترک و نحوه اصلاح شبکه

همانطور که از نتایج این مثال نیز مشاهده گردید، این روش، روشی کارا برای حل این مساله می باشد و توانایی بهبود جواب های این مساله را نیز داراست. شکل ۵-۵۰ مقایسه ای بین روش های مختلف جهت پیش بینی رشد ترک در این مثال انجام داده است.

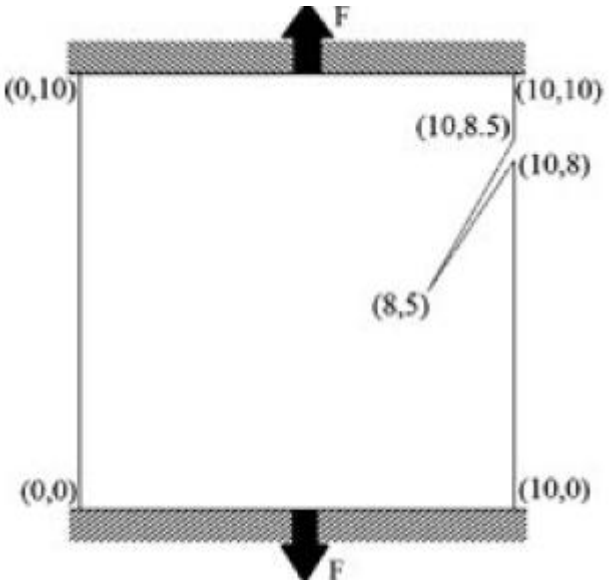


شکل ۵-۵۰: مقایسه مسیر رشد ترک در روش های مختلف

۵-۱۱- ترک مورب

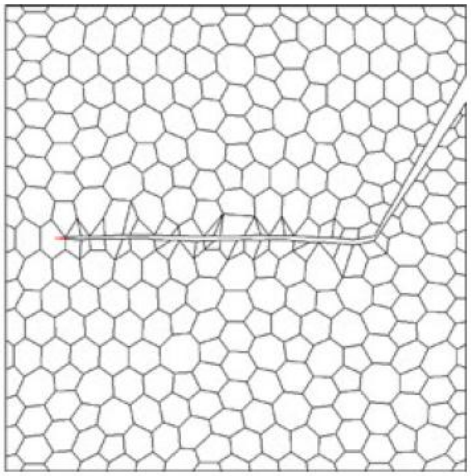
یکی دیگر از مسائلی که مورد بررسی قرار خواهیم داد ترک مورب می باشد. شرایط این مساله نیز در مرجع [۳۲] بیان شده است و فرض میگردد که مقدار تنش وارد شده به مساله شدت لازم برای رشد ترک را داراست و کار اصلی ما در این مساله بحث پیش بینی صحیح مسیر رشد ترک در این مساله می باشد.

هندسه اصلی مساله و پیش بینی مسیر رشد ترک در مرجع به صورت زیر بیان شده است. مشخصات مکانیکی مساله نیز،مدول الاستیسیته =E۹۸۰۰۰ MPa و ضریب پواسون۰.۳=ν در نظر گرفته شده است. مساله نیز در حالت کرنش مسطح در نظر گرفته شده است.



شکل ۵-۵۱: هندسه مساله ترک مورب

در مرجع[۳۲] با فرض اینکه تنش به اندازه کافی بزرگ می باشد و ترک در این مساله رشد پیدا می کند وضعیت رشد ترک در این مساله با استفاده از روش اجزای محدود چند ضلعی مقیاس شده رشد ترک در این مساله به صورت زیر خواهد بود.



شکل ۵-۵۲: مسیر رشد ترک[۳۲]

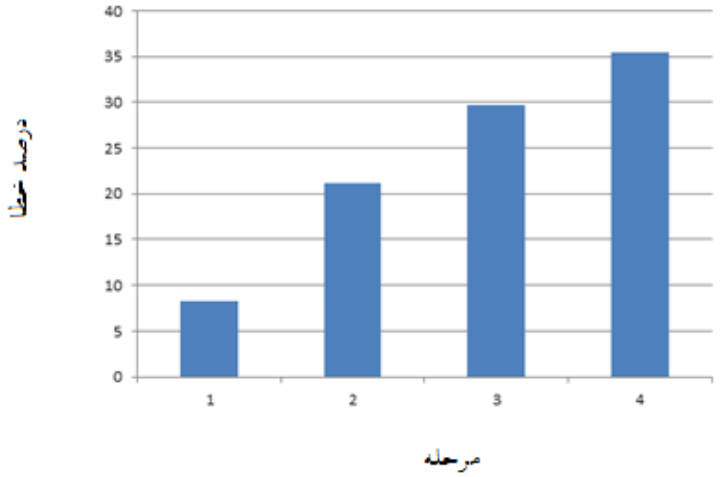
جهت مدلسازی مساله فوق برای اینکه بتوانیم با کد نوشته شده در نرم افزار متلب شرایط مناسب تری ایجاد نماییم مساله را نسبت به محور عمودی قرینه کرده و سپس مساله را حل می نماییم. لازم به ذکر است این اقدام جهت هماهنگ سازی در کدنویسی می باشد و تاثیری در جواب مساله نخواهد داشت و صرفا مساله به صورت هندسی قرینه شده است.

حال همین مساله را با استفاده از روش اجزای محدود بسط یافته بدون اصلاح شبکه حل مینماییم و سطح خطاهای موجود در مساله را بررسی می نماییم. لازم به ذکر است که در این مثال طول گام ترک را دو سانتی متر در نظر میگیریم. هرچند که این طول برای این مساله بزرگ می باشد و دقت را کاهش میدهد اما برای اینکه نشان دهیم روش ارائه شده توانایی بهبود خطاهای ناشی از طول زیاد برای گام رشد ترک را نیز داراست این کار را انجام میدهیم.

جدول ۵-۱٤: پارامتر های محاسبه شده با استفاده از XFEM

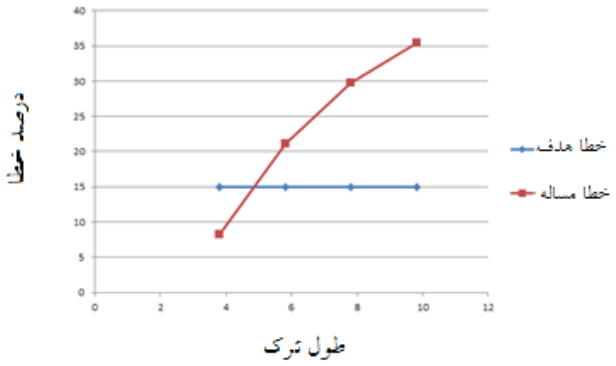
مرحله	درصد خطا	KI	KII
اول	۸.۲۵	۱.۷۶	-۱.۶۶
دوم	۲۱.۱۰	۶.۲۳	-۰.۲۹
سوم	۲۹.۶۹	۱۶.۲۵	۰.۳۸
چهارم	۳۵.۴۲	۴۸.۴۳	-۱.۳۹

همانطور که در جدول ۵-۱٤ نیز مشخص است در هر مرحله با توجه به رشد ترک درصد خطای مساله نیز افزایش می یابد. این افزایش در نمودار زیر مشخص است.



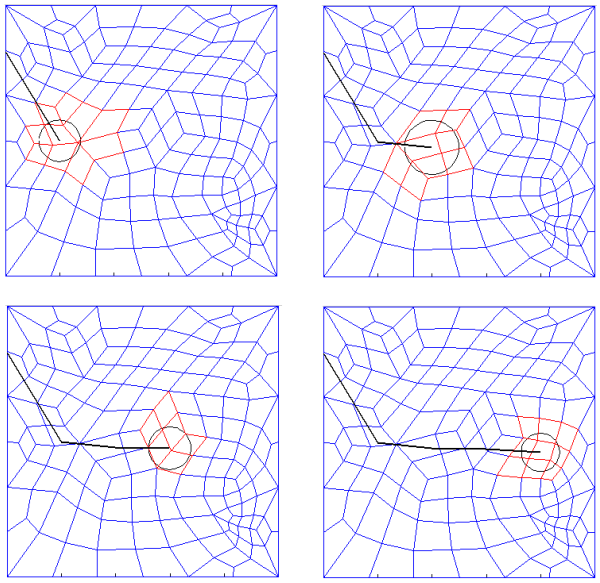
شکل ۵-۵۳: نمودار درصد خطا در هر مرحله

همچنین نمودار زیر نیز نشان میدهد که در همان مرحله اول درصد خطای مساله از مقدار مورد انتظار که در این پایان نامه ۱۵ درصد می باشد بیشتر است و دقت با این شبکه بندی ارائه شده در حد قابل قبول نمی باشد.



شکل ۵-٥٤: نمودار درصد خطای متناسب با طول ترک

مسیر رشد ترک نیز به صورت زیر می باشد:



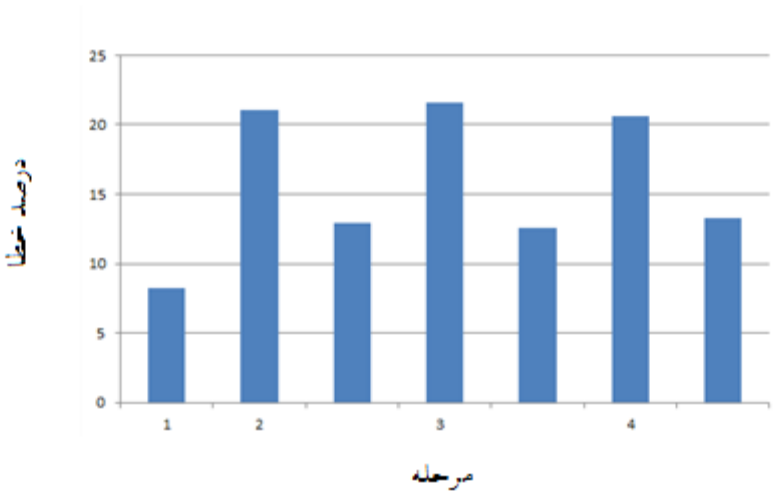
شکل ۵-۵۵: مسیر رشد ترک

در ادامه قصد داریم تکنیک پیشنهادی یعنی حل مساله با استفاده از روش اصلاح شبکه مساله را حل نماییم شبکه بندی اولیه مساله همانند قبل می باشد و مساله را حل می نماییم. در ادامه در صورتیکه درصد خطای مساله افزایش یافت (مثلا بیش از ۱۵ درصد) شبکه مساله را اصلاح خواهیم نمود. با حل مساله با استفاده از تکنیک ارائه شده به نتایج زیر خواهیم رسید.

جدول ۵-۱۵: پارامتر های محاسبه شده در تکنیک ارائه شده

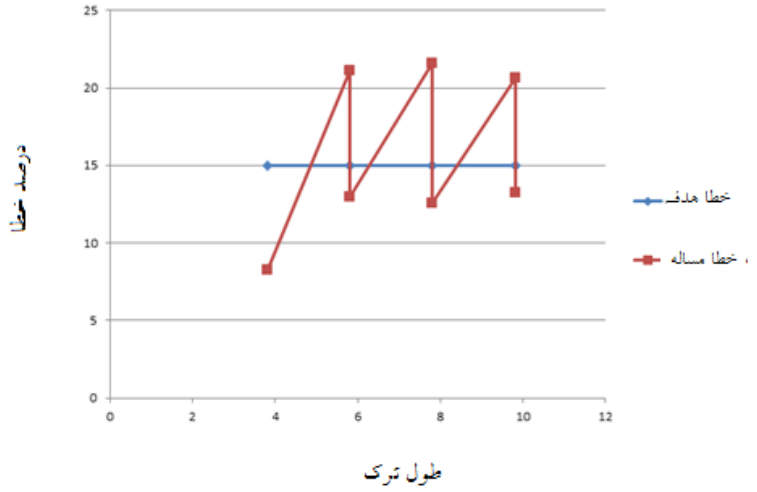
مرحله	درصد خطا	KI	KII
اول	۸.۲۵	۱.۷۶	-۱.۶۶
دوم	۲۱.۱۰	۶.۲۳	-۰.۲۹
دوم اصلاح شده	۱۲.۹۵	۷.۶۴	-۰.۰۱۳
سوم	۲۱.۵۸	۱۶.۸۲	-۰.۴۲
سوم اصلاح شده	۱۲.۵۸	۱۷.۳۵	-۰.۰۲
چهارم	۲۰.۶۴	۵۳.۹۰	-۰.۵۷
چهارم اصلاح شده	۱۳.۲۵	۵۴.۳۱	-۰.۱۲

همانطور که درجدول ۵-۱۳ نیز مشخص است در هر مرحله با توجه به رشد ترک درصد خطای مساله نیز افزایش می یابد. این افزایش در نمودار زیر مشخص است.



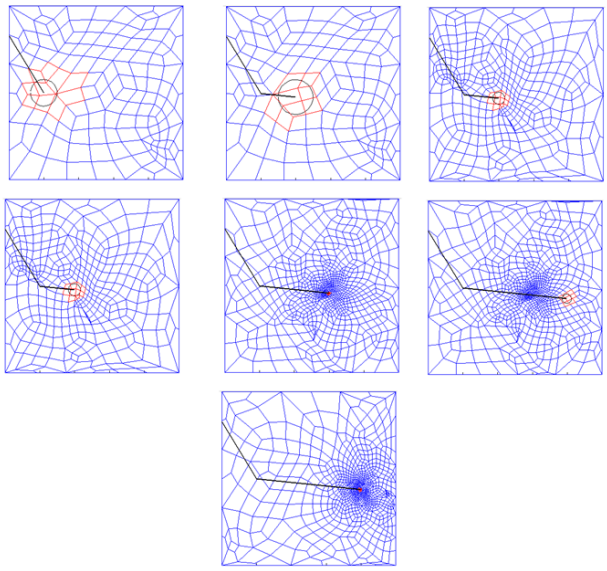
شکل ۵-۵۶: نمودار درصد خطا در هر مرحله

همچنین نمودار زیر نحوه تاثیر تکنیک ارائه شده در خصوص کاهش خطا در طول مسیر رشد ترک را به تصویر میکشد و این که این تکنیک سطح خطاهای مساله را در حد قابل قبول کاهش میدهد.



شکل ۵-۵۷: نمودار درصد خطای متناسب با طول ترک

مسیر رشد ترک نیز همانند دیگر مراجع به درستی بدست آمد و به صورت شکل زیر می باشد، همچنین علاوه بر مسیر رشد ترک نحوه اصلاح شبکه نیز در شکل ترسیم شده است.



شکل ۵-۵۸: مسیر رشد ترک و نحوه اصلاح شبکه

همانطور که در این مثال نیز مشاهده گردید تکنیک ارائه شده در خصوص مسائل ارائه شده قابلیت اصلاح شبکه را داراست و میتوان از این تکنیک در دیگر مسائل نیز استفاده نمود بویژه در مواردی که ترک رشد می نماید و با رشد ترک دقت پاسخ ها کاهش می یابد که با استفاده از این تکنیک میتوان

جواب مسائل را نیز بهبود داد. شکل ٤-٥٩ نیز مقایسه ای در خصوص رشد ترک با استفاده از روش های مختلف داشته است.

شکل ٥-٥٩: مقایسه مسیر رشد ترک در روش های مختلف

فصل ششم

نتیجه گیری و پیشنهاد برای تحقیقات آتی

٦-١- مقدمه

همانطور که در مباحث قبلی نیز بدان اشاره شد امروزه روش های عددی کاربرد گسترده ای در علم مهندسی عمران و به ویژه آنالیز مسائل ترک دارند. مسائل ترک نیز در این میان از پیچیدگی خاصی برخوردار هستند که مدل سازی آن ها، کار را دشوار می نماید. تا کنون نیز روش هایی برای حل مسائل ترک ارائه شده است. در این پایان نامه در خصوص دو روش با رویکرد های متفاوت بحث شد.

در فصل اول روش اجزای محدود بسط یافته مورد بحث و بررسی قرار گرفت. رویکرد این روش با روش اجزای محدود معمولی متفاوت است. در این روش المان هایی که درگیر ترک هستند با استفاده از توابع خاصی موسوم به توابع غنی سازی غنی میگردند. در واقع اساس این روش برای حل مساله تغییر در روابط بین توابع شکل و جابجایی گره ها می باشد.

در فصل دوم نیز به روش اجزای محدود تطابقی یا به عبارت دیگر روش اصلاح شبکه اشاره گردید. اساس این روش بر مبنای روش اجزای محدود معمولی می باشد و تغییری در معادلات اساسی و موجود در روش اجزای محدود ایجاد نمیگردد. تمرکز اصلی این روش بر روی نحوه ی شبکه بندی در مساله می باشد. در واقع این روش بیان می دارد که چگونه شبکه بندی یک مساله، بر اساس جواب های بدست آمده از روش اجزای محدود معمولی تغییر مینماید و با استفاده از آن مقدار خطاهای موجود در مساله کاهش می یابد همچنین جواب ها نیز به مقدار تحلیلی بیشتر نزدیک می شود و این موضوع در جواب های نوک ترک نمود بیشتری پیدا میکند.

در فصل سوم نیز به پارامتری اشاره شد که نقش بسیار مهمی در آنالیز مسائل ترک دارد. اولین نقش فاکتور شدت تنش، مقایسه ای است که بین جواب های تحلیلی و عددی میتوان انجام داد. به همین خاطر نحوه استخراج فاکتور شدت تنش بسیار مهم میباشد که همانطور که در مباحث قبلی نیز مشاهده گردید با استفاده از روش انتگرال متقابل در این پایان نامه این روش بدست آمد. دومین نقشی که میتوان

برای پارامتر فاکتور شدت تنش متصور شد تاثیر این فاکتور بر جهت رشد ترک می باشد هر چقدر مقادیر به جواب ها تحلیلی نزدیک تر باشد، جهت رشد ترک دقیق تر صورت میگیرد.

در فصل چهارم نیز به ارتباط بین سه فصل اشاره شد که موضوع اصلی پایان نامه نیز می باشد. در این فصل تکنیک جدیدی معرفی گردید که در واقع ترکیبی از دو روش اجزای محدود بسط یافته و اجزای محدود تطابقی می باشد. مهمترین کاری که در این تکنیک انجام شد این بود که روش اصلاح شبکه را بر روی روش اجزای محدود بسط یافته اعمال نماییم به عبارت دیگر با ایجاد ساز و کار های مناسب روش اجزای محدود بسط یافته را با استفاده از اصلاح شبکه بهبود نماییم.

روش اصلاح شبکه یک روش کارا برای مسائل اجزای محدود معمولی به شمار میرفت. اما در این پایان نامه این روش را بر روش اجزای محدود بسط یافته نیز اعمال نمودیم تا تاثیر اصلاح شبکه مشخص شود. همانطور که در داده های فصل چهارم نیز مشخص است روش اصلاح شبکه کارایی قابل قبولی در روش اجزای محدود بسط یافته دارد.

٦-٢- نتیجه‌گیری در خصوص سوالات تحقیق

در این بخش قصد داریم به پاسخ هایی که در ابتدای تحقیق قصد داشتیم به آنها دست یابیم، برسیم. یکی از مهم ترین مواردی که میتوان در این خصوص بدان اشاره داشت نحوه ی ترکیب دو روش می باشد که بر این اساس روش اجزای محدود تطابقی یا همان روش اصلاح شبکه بر پایه ی محاسبه ی خطاهای ناشی از حل مساله که بر اساس اختلاف جواب های موجود با جواب بهبود یافته می باشد، اصلاح شبکه صورت میگیرد و روش اصلاح شبکه بر روش اجزای محدود بسط یافته اعمال میگردد.

سوال مهم دیگری که وجود داشت این بود که آیا روش پیشنهادی میتواند پارامتر فاکتور شدت تنش را بهبود دهد و به جواب تحلیلی نزدیک نماید. در پاسخ به این موضوع نیز میتوان گفت یکی از اهداف مهم این تحقیق بهبود فاکتور شدت تنش در مساله می باشد. همانطور که در داده های فصل چهار نیز مشخص است با افزایش طول ترک در صورتی که از تکنیک پیشنهادی استفاده نشود میزان اختلاف فاکتور شدت تنش عددی با تحلیلی بسیار زیاد می باشد و در مرحله ششم تا ٤٦ درصد اختلاف نیز مشاهده میگردد که این اختلاف نسبتا زیاد میباشد. اما به محض اعمال تکنیک پیشنهادی اختلاف فاکتور شدت تنش عددی و تحلیلی بسیار کاهش می یابد و این اختلاف به ١.٤ درصد میرسد که نشان از دقت بسیار بالای این تکنیک دارد بویژه زمانی که طول ترک زیاد است و خود این امر موجب افزایش خطا می گردد.

یکی دیگر از اهداف تحقیق کاهش خطای کلی مساله بود که در این خصوص نیز تکنیک پیشنهادی موفق عمل کرده است به عنوان مثال درصد خطای مثال یک در گام شش در صورتی که از تکنیک پیشنهادی استفاده نشود در حدود ٢٣ درصد می باشد. اما اگر تکنیک پیشنهادی اعمال گردد درصد خطای مساله در این گام درحدود ٩ درصد می باشد که نشان از کاهش خطای مساله میباشد و کارایی این روش را در این خصوص به تصویر میکشد. همچنین این تکنیک در خصوص سایر مثال ها نیز صحیح عمل کرده است و علاوه بر بدست آمدن جواب های منطقی، دقت جواب ها نیز افزایش یافته است.

٦-٣- نتیجه گیری کلی

نتیجه گیری کلی که میتوان در این خصوص داشت این است روش اصلاح شبکه همانطور که در روش اجزای محدود معمولی بسیار کارا و موفق عمل کرده است و در نهایت روش جدیدی تحت عنوان روش اجزای محدود تطابقی ایجاد گردیده است، میتواند در روش اجزای محدود بسط یافته نیز موفق عمل نماید و در مواردی که طول ترک زیاد است و در مراحل انتهایی رشد ترک می باشیم این روش میتواند خطاهای مساله را تا حد قابل قبولی کاهش دهد. در واقع میتوان بیان نمود که همانطور که در روش اجزای محدود معمولی نیاز به اصلاح شبکه و معرفی مش بندی بهینه احساس شده است، در روش اجزای محدود بسط یافته نیز نیاز به اصلاح شبکه وجود دارد و میتواند در کاهش خطاهای موجود در مساله و همچنین همگرایی بین جواب های تحلیلی و جواب های عددی مفید واقع شود.

٦-٤- پیشنهاد برای تحقیقات آتی

یکی از مواردی که در ادامه ی این مبحث میتوان اضافه نمود این است که برآورد خطا به شکل دقیق تر و پیشرفته تر صورت گیرد تا شبکه بندی مساله به شکل دقیق تری صورت پذیرد. در واقع میتوان انواع برآوردهای خطا در روش اجزای محدود تطابقی را در روش اجزای محدود بسط یافته به کار برد تا بوسیله ی آن حجم محاسبات را نیز کاست. در واقع اصلاح شبکه با دو رویکرد انجام گیرد، اول کاستن خطاها و همگرایی جواب های تحلیلی و عددی و دوم رسیدن به شبکه بندی که از نظر حجم محاسبات نیز قابل قبول باشد. در واقع با حجم محاسباتی یکسان بتوان شبکه بندی مساله را اصلاح نمود و به جواب های ایده آل تری رسید. لذا در این حوضه میتوان اقدامات خوبی انجام داد که شاید موضوع تحقیق آتی اینجانب باشد.

فهرست مراجع

[۱] کاظمی محمدتقی ، فرقانی علیرضا ، خویی امیررضا،(۱۳۸٦) "کاربرد روش اجزامحدود بسط یافته در مدل سازی ترک چسبنده"، فصلنامه علمی پژوهشی شریف ،شماره سی و هفتم، صفحات ۲۱-۲۷

[۲] Logan,D. (۲۰۰۷) “A First Coursein the FiniteElement Method”, Fourth Edition, Thomson co,۸۳۶p

[۳] Melenk, J. and Babuška, I. (۱۹۹۶) "The partition of unity finite element method: basic theory and applications." Computer methods in applied mechanics and engineering ۱۳۹.۱, ۲۸۹-۳۱۴.

[۴] Duarte, C.A, and Oden, J.T. (۱۹۹۶) "An h-p adaptive method using clouds." Computer methods in applied mechanics and engineering ۱۳۹.۱ , ۲۳۷-۲۶۲.

[۵] Mohammadi.S (۲۰۰۸) “Extended Finite Element Method For Fracture Analysis Of Structures”, Black well Publishing Ltd,۲۷۸p

[۶] Dolbow, J. and Belytschko, T. (۱۹۹۹) "A finite element method for crack growth without remeshing." Int. J. Numer. Meth. Eng ۴۶.۱ ,۱۳۱-۱۵۰.

[۷] Bazant, Z.P. and Planas, J. (۱۹۹۷) “Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials”. Vol. ۱۶. CRC press.

[۸] Natarajan, S. (۲۰۱۱) “Enriched Finite Element Methods:Advances & Applications”, Cardiff University,۲۱۰p

[۹] Moes, N. and Belytschko,T. (۲۰۰۲) “Extended finite element method for cohesive crack growth”, Engineering Fracture Mechanics ۶۹ (۲۰۰۲) ۸۱۳–۸۳۳

[۱۰] Fries, T. and Belytschko,T. "The intrinsic XFEM: a method for arbitrary discontinuities without additional unknowns." International journal for numerical methods in engineering ۶۸.۱۳ (۲۰۰۶): ۱۳۵۸-۱۳۸۵.

[۱۱] Moes, N. “Crack models based on the extended finite element method” GeM Institute, UMR CNR ۶۱۸۳, Ecole Centrale de Nantes, France

[۱۲] Fleming,M. and Chus, Y. A. and Morant, B. and Belytschko, T. (۱۹۹۷) “Enriched Element-Free Galerkin Methods For Crack Tip Fields", International journal for numerical methods in engineering , vol.۴۰،۱۴۸۳-۱۵۰۴

[۱۳] Elguedj, T. and Gravouil, A. and Combescure, A. (۲۰۰۶) “Appropriate extended functions for X-FEM simulation of plastic fracture mechanics” Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. ۱۹۵ ,۵۰۱–۵۱۵

[۱۴] Alsahly, A. and Miro, S. “Short Presention in adaptive finite element mehode” , Computational Engineering Ruhr Universität Bochum

[۱۵] Khoei, A.R. and Moslemi, H. and Sharifi,M. (۲۰۱۲) “Three-dimensional cohesive fracture modeling of non planar crack growth using adaptive FE technique” International Journal of Solids and Structures ۴۹ (۲۰۱۲) ۲۳۳۴–۲۳۴۸

[۱٦] مسلمی، حمید (۱۳۸۸) " مدلسازی تغییر شکل های الاستیک و پلاستیک پدیده شکست و گسترش ترک در محیط سه بعدی با استفاده از روش اجزای محدود تطابقی" ، پایان نامه دکتری مهندسی عمران گرایش سازه ، امیر رضا، خویی (استاد راهنما) دانشکده مهندسی عمران دانشگاه صنعتی شریف

[۱۷] Babuška, I. and Rheinboldt, W.C. (۱۹۷۸) "A-posteriori error estimates for the finite element method." International Journal for Numerical Methods in Engineering ۱۲.۱۰ ۱۵۹۷-۱۶۱۵.

[۱۸] Zienkiewicz, O.C. and B. Boroomand, and J. Z. Zhu. (۱۹۹۹) "Recovery procedures in error estimation and adaptivity Part I: Adaptivity in linear problems." Computer methods in applied mechanics and engineering ۱۷۶.۱ ۱۱۱-۱۲۵.

[۱۹] L. P. Qiu and E. C. Zhu and J. W. G. van de Kuilen (۲۰۱۳) “Modeling crack propagation in wood by extended finite element method”, Wood Prod, ۷۲:۲۷۳–۲۸۳

[۲۰] Al Laham, S. and R. A. Ainsworth. (۱۹۹۸) “Stress intensity factor and limit load handbook”. Structural Integrity Branch, British Energy Generation Limited.

[۲۱] Parks, D. M. (۱۹۷۴) "A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors." International Journal of fracture ۱۰.۴, ۴۸۷-۵۰۲.

[۲۲] Rybicki, E.F, and Kanninen, M.F. (۱۹۷۷) "A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral." Engineering Fracture Mechanics ۹.۴ ,۹۳۱-۹۳۸.

[۲۳] Budiansky, B. and Rice, J. R. (۱۹۷۳) "Conservation laws and energy-release rates." Journal of applied mechanics ۴۰.۱ ۲۰۱-۲۰۳.

[۲۴] Li, F.Z. and Shih, C.F and Needleman, A. (۱۹۸۵)."A comparison of methods for calculating energy release rates." Engineering Fracture Mechanics ۲۱.۲ ۴۰۵-۴۲۱.

[۲۵] Rice, J. R. (۱۹۶۸). "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks." Journal of applied mechanics ۳۵.۲ ,۳۷۹-۳۸۶.

[۲۶] Unger, J. and Eckardt, S. and Ko¨nke, C. (۲۰۰۷) “Modelling of cohesive crack growth in concrete structures with the extended finite element method” , Elsevier,pp۴۰۸۷-۴۱۰۰

[۲۷]Yang, Z. (۲۰۰۵). “An energy-based crack growth criterion for modeling elastic-plastic ductile fracture” Hangzhou,۳۱۰۰۲۷,P.R.China

[۲۸] SIH, G. C. (۱۹۷۳). “Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems”, International Journal of Fracture, Vol. ۱۰, No. ۳

[۲۹]Chen, L. and Rabczuk, T and Bordas,S and Liu,GR (۲۰۱۲). "Extended finite element method with edge-based strain smoothing (ESm-XFEM) for linear elastic crack growth." Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering ۲۰۹,۲۵۰-۲۶۵.

[۳۰]Bordas, S and Rabczuk, T and Hung,NX and Nguyen, VP. (۲۰۱۰). "Strain smoothing in FEM and XFEM." Computers & structures ۸۸.۲۳ ,۱۴۱۹-۱۴۴۳.

[۳۱] Menk, A and Bordas,S. (۲۰۱۱). "Crack growth calculations in solder joints based on microstructural phenomena with X-FEM." Computational Materials Science ۵۰.۳ ,۱۱۴۵-۱۱۵۶.

[۳۲] Ooi, E.T. and Song.C. (۲۰۱۲)"Polygon scaled boundary finite elements for crack propagation modelling." International journal for numerical methods in engineering ۹۱.۳, ۳۱۹-۳۴۲.

واژه نامه فارسی به انگلیسی

اصلاح – h	h-refinement
اصلاح شبکه	Refine a mesh
المان غنی شده	Enriched element
ان تات اوی	Ean Tat Ooi
انتخابی	Selective
انرژی کرنش	Minimum strain energy density
اودن	Oden
بابوسکا	Babuska
برآورد خطا	Error Estimation
بلیچکو	Belytschko
پاره سازی وحدت	Partition of unity
پائولینو	Paulino
توابع غنی سازی	Enrichment functions
ثابت کولوسوو	Kolosov
جورج آنگر	Jo¨rg F. Unger
چان	Chan
حداکثر تنش کششی محیطی	Maximum circumferential tensile stress
حداکثر سرعت انرژی آزاد شده	Maximum energy release rate
حسین	M.A. Hussain
دآلبو	Dolbow
دوآرته	Duarte
رایس	Rice
روش HRR	Hutchinson–Rice–Rosengren
روش اجزای محدود	Finite Element Method
روش اجزای محدود بسط یافته	Extended finite element method
روش اجزای محدود چند ضلعی مقیاس شده	Polygon scaled boundary finite elements
روش المان مرزی	Boundary Element Method

روش انتگرال بسته ی ترک اصلاح شده	Modified crack closure integral
روش انتگرال متقابل	Interaction integral method
روش بدون شبکه	Meshless Method
روش تفاضل محدود	Finite difference method
روش گسترش ترک مجازی	Virtual crack extension method
روش همبستگی تغییر مکان‌ها	Displacment Correlation Method
روشهای پس از تحلیل	A Posteriori Error Estimation
روشهای مبتنی بر باقیمانده ها	Residual Based Methods
روشهای مبتنی بر بهبود جوابها	Recovery Based Methods
ری بیکی	Rybicki
ری هین بولت	Rheinboldt
زینکوویچ	Zienkiewicz
ژنجونگ یانگ	Zhenjun Yang
ژی	Xie
ژئو	Zhu
سیه	SIH
غنی سازی بیرونی	Extrinsic enrichment
غنی سازی ذاتی	Intrinsic enrichment
فاکتور شدت تنش	Stress intensity factor
فریس	Fries
فیلد های کمکی	Auxiliary fields
قضیه دیورژانس	Divergence theorem
کلسی	Kelsey
گینر	Giner
لول ست	Level set
لوی	Levy
لی	Li
متلب	Matlab
مدل المان ترک خورده	Discrete cracked element

Singular elements	مدل المان تکین
Smeared crack model	مدل ترک پخشی
Local and non-local models	مدل محلی و غیرمحلی
Discrete inter-element crack	مدل ناپیوستگی در المان ترک
Adapted meshes	شبکه بندی تطابقی
Optimal Mesh	شبکه بهینه
Mesh adaptation	شبکه سازگار
Melenk	ملنک
Moës	موس
Mesh generator GID	نرم افزار سازنده شبکه جی آی دی
Hrennikoff	هرینکوف
Uniform	یکنواخت

واژه نامه انگلیسی به فارسی

A Posteriori Error Estimation	روشهای پس از تحلیل
Adapted meshes	شبکه بندی تطابقی
Auxiliary fields	فیلد های کمکی
Babuska	بابوسکا
Belytschko	بلیچکو
Boundary Element Method	روش المان مرزی
Chan	چان
Discrete cracked element	مدل المان ترک خورده
Discrete inter-element crack	مدل ناپیوستگی در المان ترک
Displacment Correlation Method	روش همبستگی تغییر مکان‌ها
Divergence theorem	قضیه دیورژانس
Dolbow	دآلبو
Duarte	دوآرته
Ean Tat Ooi	ان تات اوی
Enriched element	المان غنی شده
Enrichment functions	توابع غنی سازی
Error Estimation	برآورد خطا
Extended finite element method	روش اجزای محدود بسط یافته
Extrinsic enrichment	غنی سازی بیرونی
Finite difference method	روش تفاضل محدود
Finite Element Method	روش اجزای محدود
Fries	فریس
Giner	گینر
h-refinement	اصلاح – h
Hrennikoff	هرینکوف
Hutchinson–Rice–Rosengren	روش HRR
Interaction integral method	روش انتگرال متقابل
Intrinsic enrichment	غنی سازی ذاتی

Jo¨rg F. Unger	جورج آنگر
Kelsey	کلسی
Kolosov	ثابت کولوسوو
Level set	لول ست
Levy	لوی
Li	لی
Local and non-local models	مدل محلی و غیرمحلی
M.A. Hussain	حسین
Matlab	متلب
Maximum circumferential tensile stress	حداکثر تنش کششی محیطی
Maximum energy release rate	حداکثر سرعت انرژی آزاد شده
Melenk	ملنک
Mesh adaptation	شبکه سازگار
Mesh generator GID	نرم افزار سازنده شبکه جی آی دی
Meshless Method	روش بدون شبکه
Minimum strain energy density	انرژی کرنش
Modified crack closure integral	روش انتگرال بسته ی ترک اصلاح شده
Moës	موس
Oden	اودن
Optimal Mesh	شبکه بهینه
Partition of unity	پاره سازی وحدت
Paulino	پائولینو
Polygon scaled boundary finite elements	روش اجزای محدود چند ضلعی مقیاس شده
Recovery Based Methods	روشهای مبتنی بر بهبود جوابها
Refine a mesh	اصلاح شبکه
Residual Based Methods	روشهای مبتنی بر باقیمانده ها
Rheinboldt	ری هین بولت
Rice	رایس

Rybicki	ری بیکی
Selective	انتخابی
SIH	سیه
Singular elements	مدل المان تکین
Smeared crack model	مدل ترک پخشی
Stress intensity factor	فاکتور شدت تنش
Uniform	یکنواخت
Virtual crack extension method	روش گسترش ترک مجازی
Xie	ژی
Zhenjun Yang	ژنجونگ یانگ
Zhu	ژئو
Zienkiewicz	زینکوویچ

Abstract

Numerical analysis of structural cracks due to the inherent complexity has drawn the attention of researchers in many years and various techniques have been proposed for these problems. One of these techniques is extended finite element method that the enrichment functions with a singularity functions improve the behavior of modeling near the cracks. Another technique that is adaptive finite element method, with the same classic functions, elements size is changed in a way that is adapted to the finite element grid and the crack zone model with the desired accuracy. Researchers in the study of these techniques refer to the problems and weaknesses in their specific problems In this thesis the combination of these two techniques, and cover the weaknesses of previous techniques is our purpose.

In this thesis, the aim is improving response of extended finite element method. The solution that has been considered for this improvement is using mesh refinement technique. To reach this purpose we used Matlab coding base on extended finite element method and mesh refinement. In that code we estimated errors and compare with aim error and if the error is more than aim error we need a new meshes based on new density of each node. Finally four numerical examples are given and compared to experimental data and other references.

Keywords: Extended finite element method; Crack problems; adaptive finite element method; enrichment function; remeshingIntroduction

Shahed University
Faculty of Engineering
Department of Civil Engineering

Title

Improving the extended finite element method in the crack problems via the remeshing process

By

Modabber, Kamran

Supervisor

Moslemi, Hamid, Ph.D.

A thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Civil Engineering

January 2016